



**INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES
DE MONTERREY**

Fundamentación de robótica (Gpo 101)

Práctica 1. Control dinámico de un péndulo invertido

Alumno:

Jesús Ricardo Guerrero Silvestre - A00835912

Docente:

Armando Miranda

Fecha de entrega:

26 de Febrero de 2024

Práctica 1. Péndulo invertido con ROS2

1. Análisis

Como primer paso definimos el diagrama de cuerpo libre del péndulo invertido para poder definir las fuerzas y propiedades físicas dentro del sistema en el que trabajaremos.

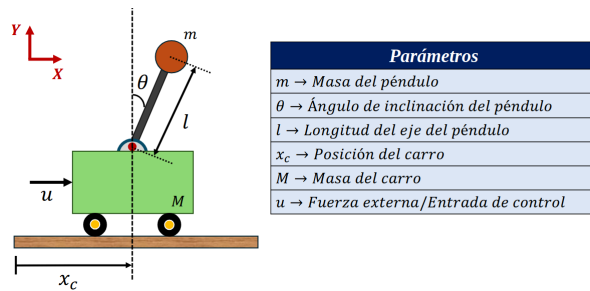


Figura 1.

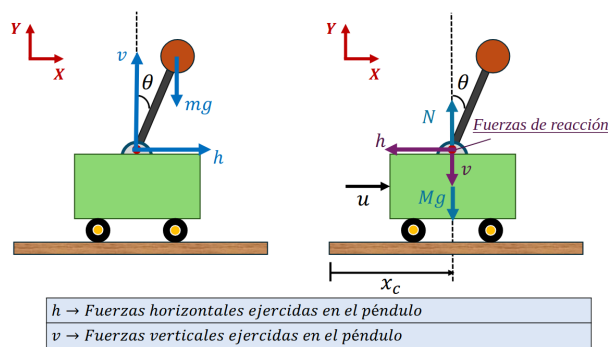


Figura 2.

En adición, planteamos las condiciones a trabajar. En este caso, el péndulo es un cuerpo rígido con su masa mayormente distribuida en uno de sus extremos.

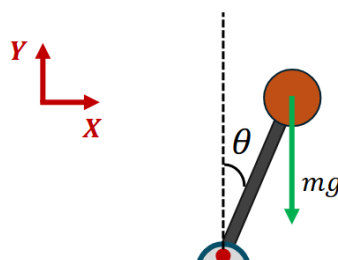
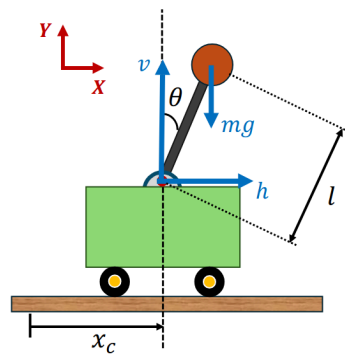


Figura 3.

La sumatorias de las fuerzas que actúan en el péndulo se plantean a continuación:



Tomando en cuenta que:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x_p = \text{Fuerzas totales en } x$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} y_p = \text{Fuerzas totales en } y$$

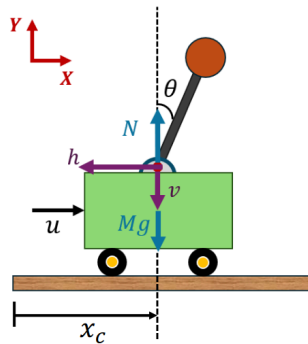
Se tiene que:

$$m \frac{d^2}{dt^2} x_p = h \quad (5)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} y_p = v - mg \quad (6)$$

Figura 4.

En el carro quedaría así:



Tomando en cuenta que:

$$M \ddot{x}_c = \text{Fuerzas totales en } x$$

$$M \ddot{y}_c = \text{Fuerzas totales en } y$$

Se tiene que:

$$M \ddot{x}_c = u - h \quad (1)$$

$$M \ddot{y}_c = N - Mg - v \quad (2)$$

0 No se va a usar en el análisis

Figura 5.

Por trigonometría se puede obtener la posición y orientación que presenta el péndulo, y sus respectivas derivadas, primera y segunda.

$$x_p = x_c + l \sin(\theta)$$

$$\dot{x}_p = \dot{x}_c + l \cos(\theta) \dot{\theta}$$

$$\ddot{x}_p = \ddot{x}_c + l \cos(\theta) \ddot{\theta} - l \sin(\theta) \dot{\theta}^2$$

$$y_p = l \cos(\theta)$$

$$\dot{y}_p = -l \sin(\theta) \dot{\theta}$$

$$\ddot{y}_p = -l \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - l \sin(\theta) \ddot{\theta}$$

Figura 6.

Una vez obtenido estas variables se pueden sustituir en la ecuaciones de la sumatoria de fuerzas en el péndulo, logrando:

$$m(\ddot{x}_c + l \cos(\theta)\ddot{\theta} - l \sin(\theta)\dot{\theta}^2) = h$$

$$m(-l \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - l \sin(\theta)\ddot{\theta}) + mg = v$$

Figura 7.

Para después ser consideradas en la ecuación de la sumatoria de fuerzas en el carro:

$$M\ddot{x}_c = u - m(\ddot{x}_c + l \cos(\theta)\ddot{\theta} - l \sin(\theta)\dot{\theta}^2)$$

$$(M + m)\ddot{x}_c + ml \cos(\theta)\ddot{\theta} - ml \sin(\theta)\dot{\theta}^2 = u$$

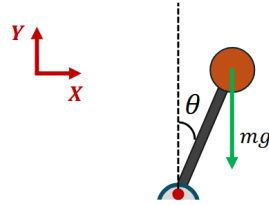
Figura 8.

Para continuar, se debe tomar en cuenta la ley de conservación del momento del péndulo:

$$I\ddot{\theta} = hl \cos(\theta) - vl \sin(\theta) \quad (16)$$

Figura 9.

Para este caso, queda que la inercia es igual a cero.



Caso 1.

$$I \approx 0$$

Figura 10.

Sustituyendo h y v en la ecuación del momento angular del péndulo y tomando en cuenta el Caso 1 de lo anterior, se tiene:

$$hl \cos(\theta) = m(\ddot{x}_c + l \cos(\theta)\ddot{\theta} - l \sin(\theta)\dot{\theta}^2)l \cos(\theta)$$

$$vl \sin(\theta) = (m(-l \cos(\theta)\dot{\theta}^2 - l \sin(\theta)\ddot{\theta}) + mg)l \sin(\theta)$$

$$0 = hl \cos(\theta) - vl \sin(\theta)$$

$$\ddot{x}_c \cos(\theta) + l\ddot{\theta} - g \sin(\theta) = 0 \quad (17)$$

Figura 11.

Las ecuaciones que describen el movimiento del péndulo invertido se logran gracias a las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{x}_c + ml \cos(\theta) \ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 &= u \\ \ddot{x}_c \cos(\theta) + l\ddot{\theta} - g \sin(\theta) &= 0\end{aligned}$$

Figura 12.

Asumiendo que la orientación del péndulo estará siempre cerca de la vertical, podemos considerar que θ es pequeño, por lo que nos simplifica ciertos cálculos:

Si $\theta \approx 0$:

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= 1 \\ \sin(\theta) &= \theta \\ \sin(\theta) \dot{\theta}^2 &= 0\end{aligned}$$

Figura 13.

Considerando estas condiciones poder simplificar las expresiones en la Figura 12:

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{x}_c + ml \cos(\theta) \ddot{\theta} - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2 &= u \\ \ddot{x}_c \cos(\theta) + l\ddot{\theta} - g \sin(\theta) &= 0\end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{x}_c + ml\ddot{\theta} &= u \quad (18) \\ \ddot{x}_c + l\ddot{\theta} &= g\theta \quad (19)\end{aligned}$$

Figura 14.

Para poder solucionar estas ecuaciones se puede hacer de forma matricial dado que al sacar los factores comunes la forma que nos queda es de tipo $Ax = b$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (M + m) & ml \\ 1 & l \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ g\theta \end{bmatrix}}_b$$

Figura 15.

Solucionando eso se puede obtener las ecuaciones de movimiento del péndulo que relaciona la posición del carro y el ángulo del péndulo.

$$\ddot{x}_c = \frac{1}{M}(u - mg\theta)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u - (m + M)g\theta}{Ml}$$

Figura 16.

2. Simulación

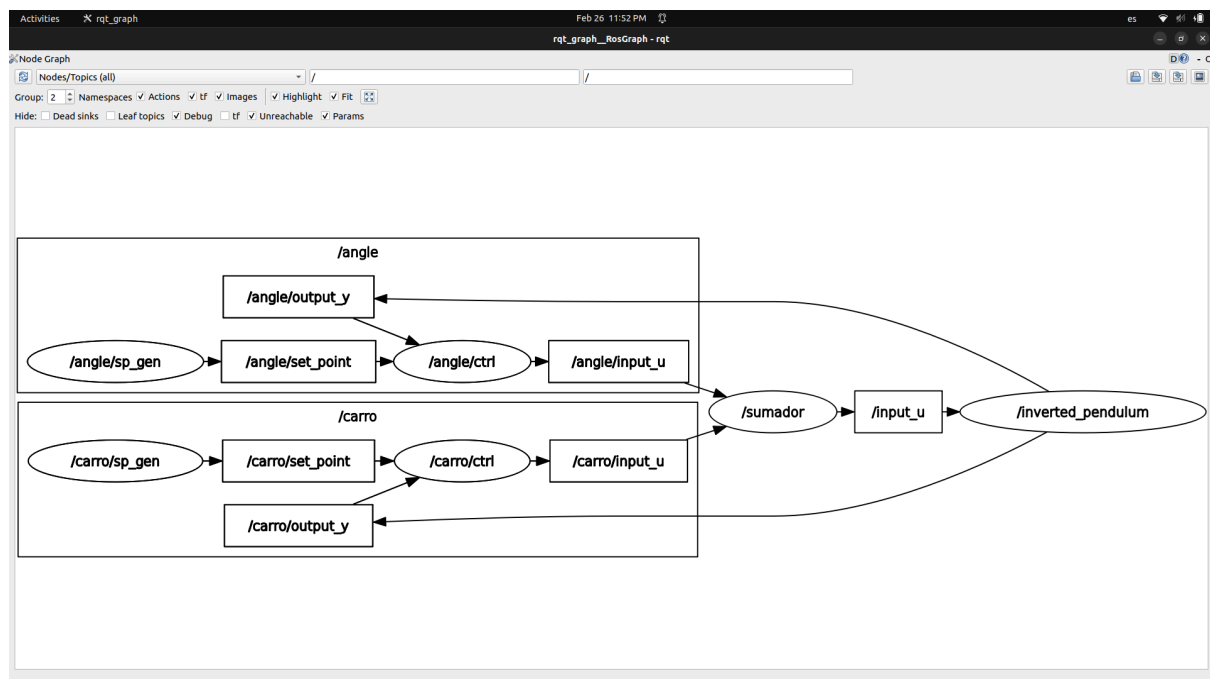
Para llevar a cabo la simulación del péndulo invertido se utilizó la herramienta de ROS2, la cual se eligió por la complejidad y por ser buena práctica a fin a la robótica.

Los códigos y archivos necesarios se encontrarán en el siguiente repositorio:

https://github.com/richy-gs/TE3001B_ws/tree/main/src/Week2/inverted_pendulum

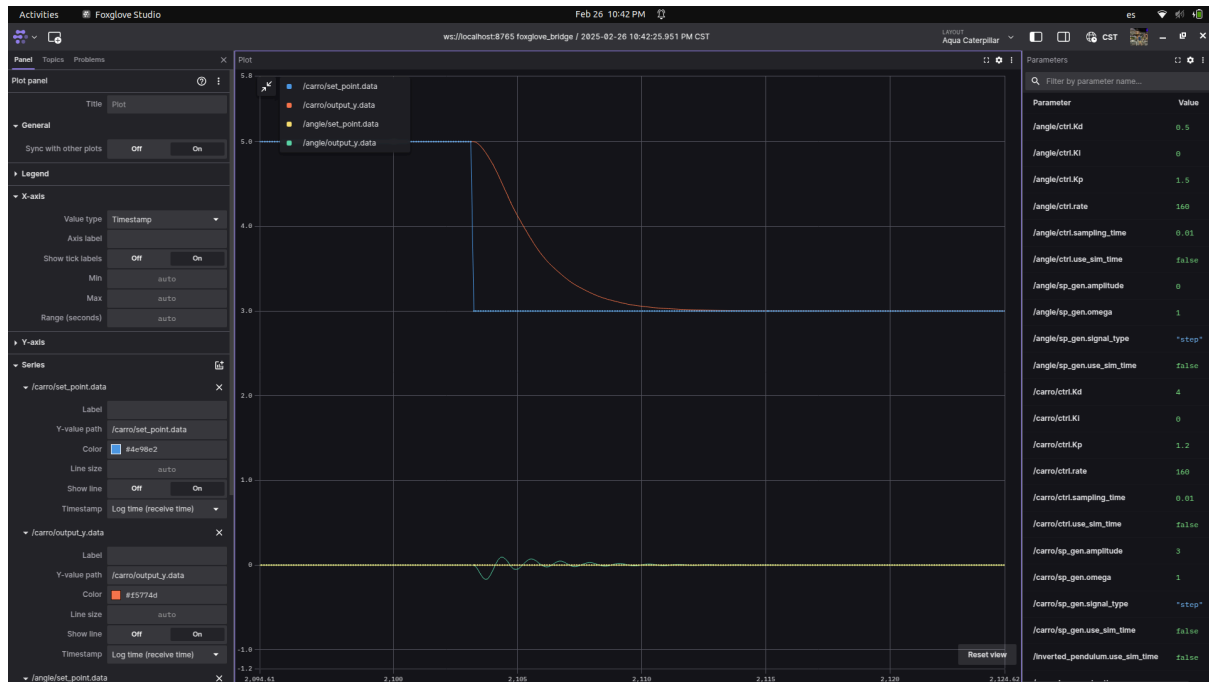
Se tomaron en consideración los puntos comentados en el documento de la práctica:

- Se determinó la señal de control u
- Se definieron las señales de error el subsistema lineal y angular
- Se diseñó un controlador PID

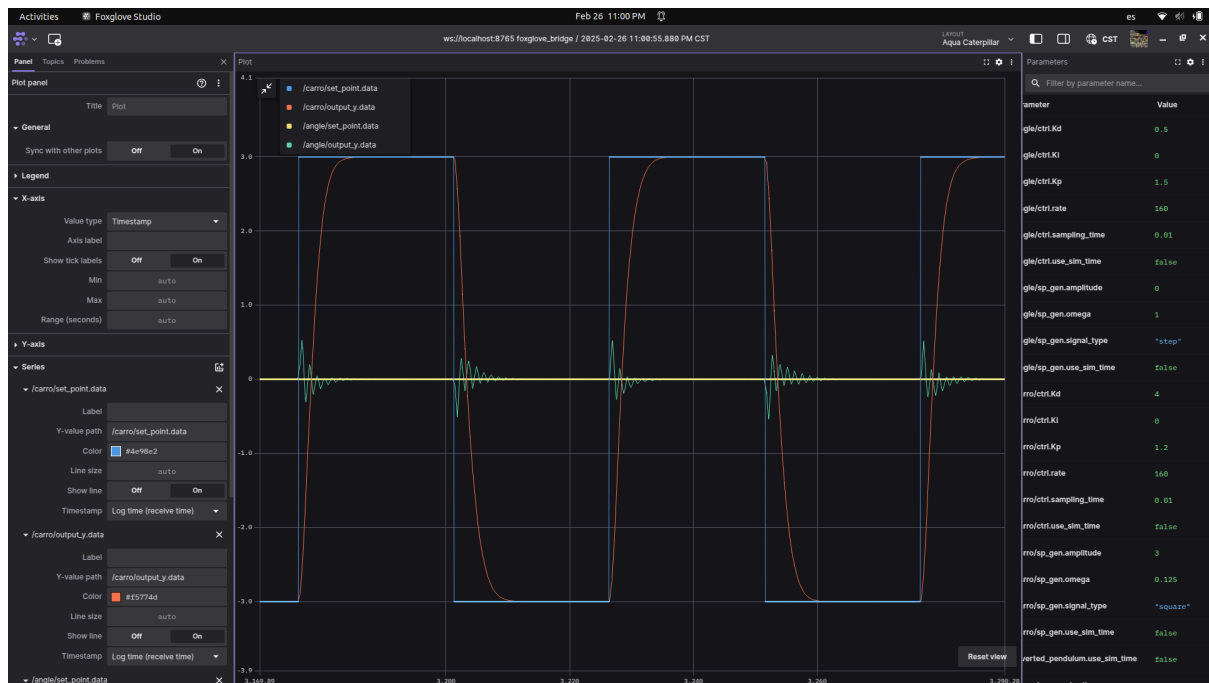


Gráfica 1. Lazo de Control en Rqt_Graph

2.1 Resultados



Caso 1. Sistema ante una entrada escalón



Caso 2. Sistema ante una entrada cuadrada

3. Reflexión

La práctica realizada sobre el control dinámico de un péndulo invertido a través de ROS2 representa una experiencia significativa en la comprensión de los sistemas de control, la modelización física y la simulación en el campo de la robótica. A través del análisis de las fuerzas que actúan sobre el péndulo y el uso de las ecuaciones de movimiento, hemos logrado una mejor comprensión de cómo los sistemas dinámicos pueden ser controlados para mantener un equilibrio, a pesar de su inherentemente inestable naturaleza.

La implementación de este sistema con ROS2 no solo nos permitió aplicar los conceptos teóricos, sino también experimentar con herramientas prácticas que nos ayudarán en futuras aplicaciones de robótica. A través de los resultados obtenidos con las entradas escalón y cuadrada, pudimos observar cómo el sistema responde y cómo la implementación de un controlador adecuado es fundamental para garantizar la estabilidad. Esta práctica resalta la importancia de los conocimientos matemáticos, las herramientas de simulación y el trabajo en equipo, preparándonos mejor para abordar desafíos más complejos en robótica y control.