2023年08月31日函数的零点与方程的根

一．函数的零点与方程根的关系（共17小题）

1．若方程 $\sqrt{3-\frac{3x^2}{4}}=x+b$ 有解，则 b 的取值范围为（　　）

A．$[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$　B．$[-2,\sqrt{7}]$　C．$[2,\sqrt{7}]$　D．$[-2,2]$

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\leqslant 0\\ \ln\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，$g(x)=f(x)-x-a$．若 $g(x)$ 有 2 个零点，则实数 a 的最小值是（　　）

A．2　B．0　C．-1　D．1

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ -x^2-x, & x\leqslant 0\end{cases}$，若直线 $y=kx$ 与 $y=f(x)$ 有三个不同的交点，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,\frac{1}{e})$　B．$(-1,\frac{2}{e})$　C．$(-1,0]\cup\{\frac{1}{e}\}$　D．$(-2,0]\cup\{\frac{2}{e}\}$

4．设函数 $f(x)=\begin{cases}x+\ln x, & x>0\\ \sin(\omega x+\frac{\pi}{4}), & -\pi\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$ 有 5 个不同的零点，则正实数 ω 的取值范围为（　　）

A．$[\frac{13}{4},\frac{17}{4})$　B．$(\frac{13}{4},\frac{17}{4})$　C．$(\frac{13}{4},\frac{17}{4}]$　D．$[\frac{13}{4},\frac{17}{4}]$

5．已知不等式 $ae^x(x+2)<x+1$ 恰有 1 个整数解，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(\frac{1}{3e},\frac{2}{e})$　B．$[\frac{1}{3e},\frac{2}{e})$　C．$(\frac{2}{3e},\frac{1}{2})$　D．$[\frac{2}{3e},\frac{1}{2})$

6．函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\leqslant 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$，则函数 $y=f(f(x))-1$ 的零点个数为（　　）

A．2　B．3　C．4　D．5

7．已知定义在 **R** 上的函数 $y=f(x)$ 对于任意的 x 都满足 $f(x+2)=f(x)$，当 $-1\leqslant x<1$ 时，$f(x)=x^3$，若函数 $g(x)=f(x)-\log_a|x|$ 至少有 6 个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,\frac{1}{5}]\cup(5,+\infty)$　B．$(0,\frac{1}{5})\cup[5,+\infty)$　C．$(\frac{1}{7},\frac{1}{5}]\cup(5,7)$　D．$(\frac{1}{7},\frac{1}{5})\cup[5,7)$

8．设函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\leqslant 4,\\ |\log_2(x-4)|, & x>4,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=t$ 有四个实根 x_1，x_2，x_3，x_4（$x_1<x_2<x_3<x_4$），则 $x_1+x_2+4x_3+\frac{1}{4}x_4$ 的最小值为（　　）

A．$\frac{45}{5}$　B．23　C．$\frac{47}{2}$　D．24

9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{|x-1|}, & x\leqslant 2\\ -x^2+6x-6, & x>2\end{cases}$，且 $g(x)=f(x)-a$，若函数 $g(x)$ 有 3 个不同的零点，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(1,2)$　B．$(1,3)$　C．$[1,2]$　D．$[1,3]$

10．已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的函数，$f(x+4)$ 为奇函数，$f(x+5)$ 为偶函数，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3$，若函数 $g(x)=f(x)-m(x-2)(m>0)$ 有 5 个不同的零点，则 m 的取值范围为（　　）

A．$(\frac{1}{9},\frac{1}{5})$　B．$(\frac{1}{8},\frac{1}{4})$　C．$(\frac{1}{7},\frac{1}{3})$　D．$(\frac{1}{6},\frac{1}{2})$

11．已知函数 $f(x)=\frac{x}{e\ln x}$，关于 x 的方程 $[f(x)]^2-2(a+1)f(x)+a^2+2a=0$ 至少有三个互不相等的实数解，则 a 的取值范围是（　　）

A．$[1,+\infty)$　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　C．$(-1,0)\cup[1,+\infty)$　D．$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ \ln(-x), & x<0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(f(x))-af(x)+1$ 恰有两个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$[0,2)\cup\{1\}$　B．$(2,+\infty)$　C．$(-1,0)$　D．$(-\infty,-1)$

13．已知 $f(x)=\begin{cases}\frac{4x}{1+x^2}, & x\geqslant 0\\ -\frac{4}{x}, & x<0\end{cases}$，若 $f(x)=t$ 有三个不同的解 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，则

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$的取值范围是（　　）

A．$(1,+\infty)$　　B．$(\frac{3}{2},+\infty)$　　C．$(2,+\infty)$　　D．$(\frac{5}{2},+\infty)$

14．已知函数$f(x)=(x+1)e^x$，若函数$F(x)=f^2(x)-mf(x)+m-1$有三个不同的零点，则实数m的取值范围为（　　）

A．$(-\frac{1}{e^2},0)$　　B．$(-\frac{1}{e^2},1)$

C．$(1-\frac{1}{e^2},1)$　　D．$(1-\frac{1}{e^2},1)\cup(1,+\infty)$

15．已知函数$f(x)=\begin{cases}|\log_2(x-3)|+1, & x>3\\ |2^x-3|, & x\leqslant 3\end{cases}$，若关于$x$的方程$m[f(x)]^2-3f(x)+4m=0$有8个不相等的实根，则实数$m$的取值范围为（　　）

A．$(\frac{9}{13},\frac{5}{4})$　　B．$(\frac{3}{5},\frac{9}{13})$　　C．$(\frac{3}{5},\frac{3}{4})$　　D．$(\frac{9}{13},\frac{3}{4})$

16．已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln x+x, & x>1\\ 2x^2-mx+\frac{m}{2}, & x\leqslant 1\end{cases}$，若$g(x)=f(x)-m$有三个零点，则实数$m$的取值范围是（　　）

A．$(1,\frac{7}{4}]$　　B．$(1,2]$　　C．$(1,\frac{4}{3}]$　　D．$[1,3]$

17．函数$f(x)=(\frac{1}{e})^{|x|}+1$，若$g(x)=2f^2(x)-(2a+3)f(x)+3a$有4个零点，则$a$的取值范围是（　　）

A．$(1,2)$　　B．$[\frac{3}{2},2)$

C．$(0,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},2)$　　D．$(1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},2)$

二．函数与方程的综合运用（共3小题）

18．已知函数$f(x)=\ln|x-1|-\ln|x+1|$，若存在两个不同的实数x_1，x_2，使$f(x_1)=f(x_2)$，则（　　）

A．$x_1x_2=-1$　　B．$x_1x_2=1$　　C．$x_1+x_2<-2$　　D．$x_1+x_2>2$

19．已知函数$f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x\leqslant 1\\ \frac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，若$0<a<b$且满足$f(a)=f(b)$，则$af(b)+bf(a)$的取值范围是（　　）

A．$(1,\frac{1}{e}+1)$　　B．$(-\infty,\frac{1}{e}+1]$　　C．$(1,\frac{1}{e}+1]$　　D．$(0,\frac{1}{e}+1)$

20．已知函数$f(x)=e^x-ax^2$的定义域为$(\frac{1}{2},2)$，且对$\forall x_1,x_2\in(\frac{1}{2},2)$，$x_1\neq x_2$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<x_1+x_2$恒成立，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．$[\frac{e^2}{4}-1,+\infty)$　　B．$[\sqrt{e}-1,+\infty)$　　C．$(-\infty,\frac{e}{2}-1]$　　D．$(-\infty,\frac{e}{2}-1)$

2023 年 08 月 31 日函数的零点与方程的根

参考答案与试题解析

一．函数的零点与方程根的关系（共 17 小题）

1．若方程 $\sqrt{3-\frac{3x^2}{4}}=x+b$ 有解，则 b 的取值范围为（　　）

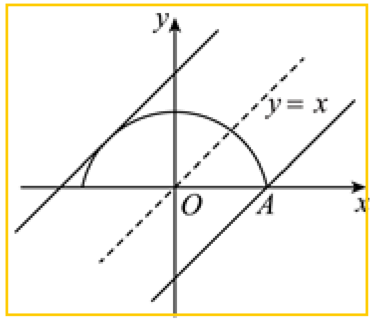
A．$[-\sqrt{7},\sqrt{7}]$　B．$[-2,\sqrt{7}]$　C．$[2,\sqrt{7}]$　D．[﹣2，2]

【解答】解：设 $y=\sqrt{3-\frac{3x^2}{4}}$，$y\geqslant0$，两边同平方得 $y^2=3-\frac{3x^2}{4}$，化简得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$（$y\geqslant0$），

则其所表示的图形为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 在 x 轴及上方部分，

则题目转化为直线 $y=x+b$ 与上述图形有交点，

设椭圆的右端点为 A，易得其坐标为（2，0），



当直线 $y=x+b$ 与半椭圆相切时，显然由图得 $b>0$，

联立 $\begin{cases}y=x+b\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，得 $7x^2+8bx+4b^2-12=0$，

则 $\Delta=(8b)^2-4\times7\times(4b^2-12)=0$，

化简得 $b^2=7$，解得 $b=\sqrt{7}$ 或 $-\sqrt{7}$（舍），

当直线 $y=x+b$ 经过点 A（2，0）时，得 $0=2+b$，解得 $b=-2$，

则 $b\in[-2,\sqrt{7}]$．

故选：B．

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\leqslant0\\ \ln\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，$g(x)=f(x)-x-a$．若 $g(x)$ 有 2 个零点，则实数 a 的最小值是（　　）

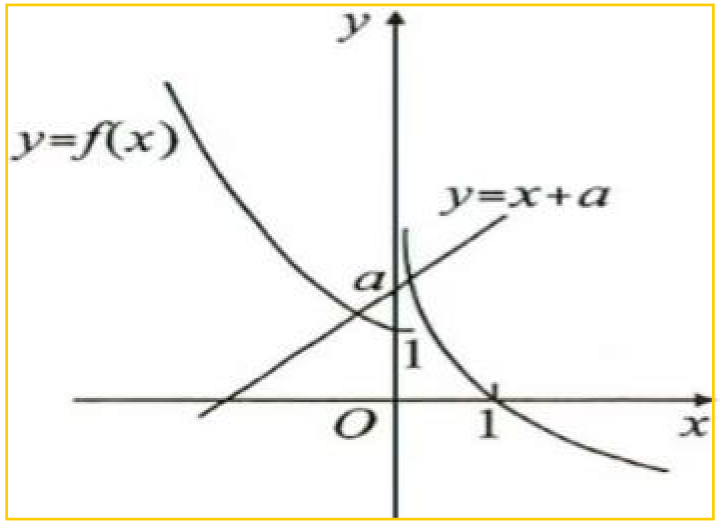
A．2　　B．0　　C．﹣1　　D．1

【解答】解：令 $g(x)=0$ 可得 $f(x)=x+a$，

当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=2^{-x}=(\frac{1}{2})^x$，

当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$ 的图象与 $y=\ln x$ 关于 x 轴对称，

所以作出函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=x+a$ 的图象如下图所示：



由上图可知，当 $a\geqslant1$ 时，函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=x+a$ 的图象有 2 个交点，

此时，函数 $y=g(x)$ 有 2 个零点，

因此，实数 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$，

即实数 a 的最小值为 1．

故选：D．

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ -x^2-x, & x\leqslant0,\end{cases}$ 若直线 $y=kx$ 与 $y=f(x)$ 有三个不同的交点，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,\frac{1}{e})$　B. $(-1,\frac{2}{e})$　C. $(-1,0]\cup\{\frac{1}{e}\}$　D. $(-2,0]\cup\{\frac{2}{e}\}$

【解答】解：设 $y=\ln x$ 与 $y=kx$ 相切于点 $(x_0,\ln x_0)$，

则 $k=y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0}{x_0}$，

解得 $x_0=e$ 此时 $k=\frac{1}{e}$

由 $\begin{cases}y=kx\\ y=-x^2-x,\ x\leqslant 0\end{cases}$，得 $x^2+(k+1)x=0$，

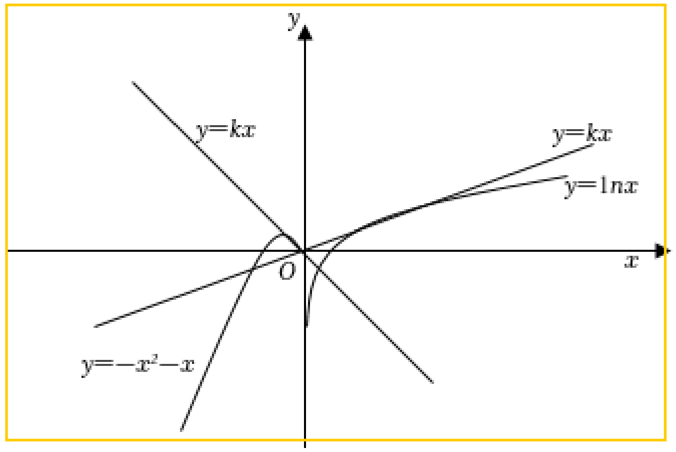
由 $\Delta=0$ 可得 $k=-1$，此时切点为（0，0），

作出函数 $y=kx$ 与 $y=f(x)$ 的图象如图，

由图象可知，当 $-1<k\leqslant 0$ 或 $k=\frac{1}{e}$ 时，

直线 $y=kx$ 与 $y=f(x)$ 有三个不同的交点，

故选：C.



4．设函数 $f(x)=\begin{cases}x+\ln x,\ x>0\\ \sin(\omega x+\frac{\pi}{4}),\ -\pi\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$ 有 5 个不同的零点，则正实数 ω 的取值范围为（　　）

A. $[\frac{13}{4},\frac{17}{4})$　B. $(\frac{13}{4},\frac{17}{4})$　C. $(\frac{13}{4},\frac{17}{4}]$　D. $[\frac{13}{4},\frac{17}{4}]$

【解答】解：由题可得，当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\ln x$，显然单调递增，且 $f(\frac{1}{10})=\frac{1}{10}-\ln 10<0$，$f(2)=2+\ln 2>0$，

所有此时 $f(x)$ 有且只有一个零点，所有当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})$ 有 4 个零点，

令 $f(x)=0$，即 $\omega x+\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{-\frac{\pi}{4}+k\pi}{\omega}$，$k\in\mathbf{Z}$，

由题可得 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 区间内的 4 个零点分别是 $k=0$，-1，-2，-3，

所以 $-\pi$ 即在 $k=-3$ 与 $k=-4$ 之间，

即 $\begin{cases}\frac{-\frac{\pi}{4}-3\pi}{\omega}\geqslant-\pi\\ \frac{-\frac{\pi}{4}-4\pi}{\omega}<-\pi\end{cases}$，解得 $\frac{13}{4}\leqslant\omega<\frac{17}{4}$

故选：A.

5．已知不等式 $ae^x(x+2)<x+1$ 恰有 1 个整数解，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(\frac{1}{3e},\frac{2}{e})$　B. $[\frac{1}{3e},\frac{2}{e})$　C. $(\frac{2}{3e},\frac{1}{2})$　D. $[\frac{2}{3e},\frac{1}{2})$

【解答】解：由不等式 $ae^x(x+2)<x+1$，可得 $a(x+2)<\frac{x+1}{e^x}$

设 $g(x)=a(x+2)$，$f(x)=\frac{x+1}{e^x}$，

则 $f'(x)=\frac{-x}{e^x}$，

当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

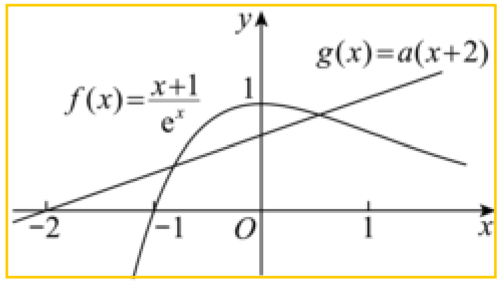
当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取极大值 1.

又 $f(-1)=0$，且 $x>0$ 时，$f(x)>0$，

直线 $g(x)=a(x+2)$ 恒过点 $(-2,0)$，

当 $a>0$ 时，作出 $g(x)=a(x+2)$ 与 $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$ 的图像如下所示，



$g(x)<f(x)$ 恰有 1 个整数解，只需要满足 $\begin{cases} f(0)>g(0) \\ f(1)\leqslant g(1) \end{cases}$，

解得 $\frac{2}{3e}\leqslant a<\frac{1}{2}$.

当 $a\leqslant 0$ 时，显然 $g(x)<f(x)$ 有无穷多个整数解，不满足条件，

所以 a 的取值范围为 $[\frac{2}{3e},\ \frac{1}{2})$.

故选：D.

6．函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\leqslant 1 \\ \ln x, & x>1 \end{cases}$，则函数 $y=f(f(x))-1$ 的零点个数为（　　）

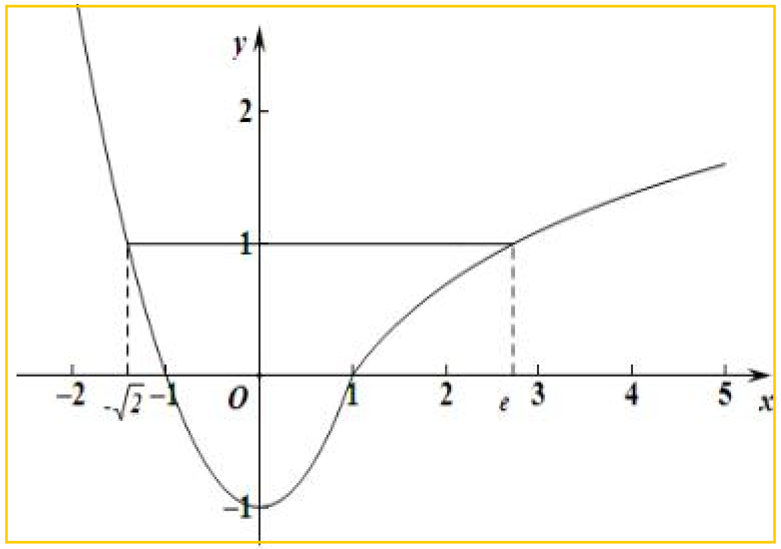
A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【解答】解：令 $t=f(x)$，则 $f(t)=1$，当 $t\leqslant 1$ 时，

由 $t^2-1=1$，可得 $t=-\sqrt{2}$ 或 $t=\sqrt{2}$（舍去）；

当 $t>1$ 时，由 $\ln t=1$ 可得 $t=e$，所以 $f(t)=1$ 的两根为 $t_1=-\sqrt{2}$，$t_2=e$，

则 $f(x)=-\sqrt{2}$ 或 $f(x)=e$．



因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上单调递减，在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)\geqslant f(0)=-1$，若 $f(x)=-\sqrt{2}$，易知方程无解，

若 $f(x)=e$，当 $x\leqslant 1$ 时，

由 $x^2-1=e$，得 $x=-\sqrt{e+1}$ 或 $x=\sqrt{e+1}$（舍去），

此时方程有唯一的解；

当 $x>1$ 时，由 $\ln x=e$，得 $x=e^e$，此时方程有唯一的解，

综上所述可知函数 $y=f(f(x))-1$ 的零点个数为 2 个．

故选：A.

7．已知定义在 **R** 上的函数 $y=f(x)$ 对于任意的 x 都满足 $f(x+2)=f(x)$，当 $-1\leqslant x<1$ 时，$f(x)=x^3$，若函数 $g(x)=f(x)-\log_a|x|$ 至少有 6 个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,\ \frac{1}{5}]\cup(5,\ +\infty)$　　B．$(0,\ \frac{1}{5})\cup[5,\ +\infty)$

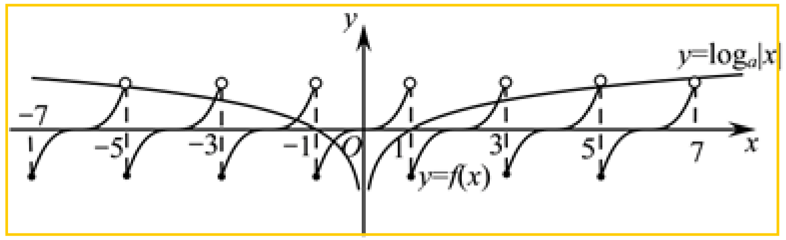
C．$(\frac{1}{7},\ \frac{1}{5})\cup(5,\ 7)$　　D．$(\frac{1}{7},\ \frac{1}{5})\cup[5,\ 7)$

【解答】解：由 $f(x+2)=f(x)$ 知 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，

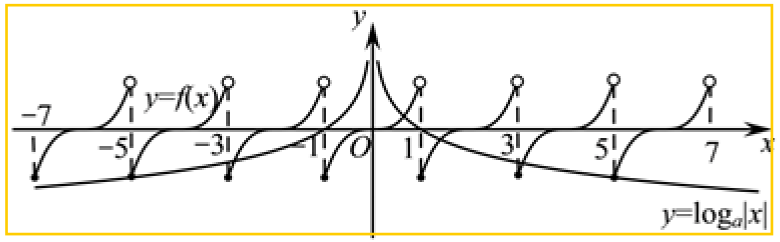
函数 $g(x)=f(x)-\log_a|x|$ 至少有 6 个零点等价于函数 $y=f(x)$ 与 $g(x)=\log_a|x|$ 的图象至少有 6 个交点，

①当 $a>1$ 时，画出函数 $y=f(x)$ 与 $g(x)=\log_a|x|$ 的图象如图所示，

根据图象可得 $g(5)=\log_a 5<1$，即 $a>5$.



②当$0<a<1$时，画出函数$y=f(x)$与$g(x)=\log_a|x|$的图象如图所示，



根据图象可得$g(-5)=\log_a 5\geq -1$，即$0<a\leq \frac{1}{5}$．

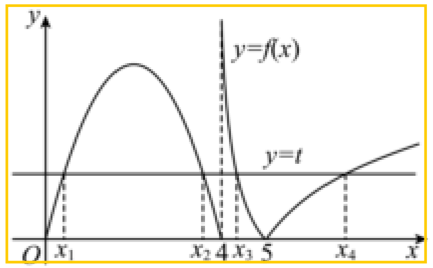
综上所述，a的取值范围是$(0,\ \frac{1}{5}]\cup(5,\ +\infty)$．

故选：A．

8．设函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\leq 4,\\ |\log_2(x-4)|, & x>4\end{cases}$，若关于$x$的方程$f(x)=t$有四个实根$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$（$x_1<x_2<x_3<x_4$），则$x_1+x_2+4x_3+\frac{1}{4}x_4$的最小值为（　　）

A．$\frac{45}{5}$　　B．23　　C．$\frac{47}{2}$　　D．24

【解答】解：作出函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\leq 4,\\ |\log_2(x-4)|, & x>4\end{cases}$的图象如图所示：



由图可知，$x_1+x_2=4$，由$|\log_2(x-4)|=f(2)=4$，可得$x=\frac{65}{16}$或$x=20$，

所以$5<x_4<20$，

又因为$\log_2(x_3-4)+\log_2(x_4-4)=0$，

所以$(x_3-4)(x_4-4)=1$，

故$x_3=\frac{1}{x_4-4}+4$，

所以

$$4x_3+\frac{1}{4}x_4=4\left(\frac{1}{x_4-4}+4\right)+\frac{1}{4}x_4=\frac{4}{x_4-4}+\frac{1}{4}(x_4-4)+17\geq 2\sqrt{\frac{1}{4}(x_4-4)\cdot\frac{4}{x_4-4}}+17=19$$

当且仅当$\frac{1}{4}(x_4-4)=\frac{4}{x_4-4}$，即$x_4=8$时取等号，

所以$x_1+x_2+4x_3+\frac{1}{4}x_4$的最小值为$4+19=23$．

故选：B．

9．已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{|x-1|}, & x\leq 2\\ -x^2+6x-6, & x>2\end{cases}$，且$g(x)=f(x)-a$，若函数$g(x)$有3个不同的零点，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．(1，2)　　B．(1，3)　　C．[1，2]　　D．[1，3]

【解答】解：函数$f(x)=\begin{cases}2^{|x-1|}, & x\leq 2\\ -x^2+6x-6, & x>2\end{cases}$，

当$x\leq 2$时，$f(x)=2^{|x-1|}$，它的图象可以看成是由$y=2^{|x|}$的图象向右平移1个单位得到的，

当$x>2$时，$f(x)=-x^2+6x-6$，它的图象是一个对称轴为$x=3$，开口向下的抛物线，

作出函数$f(x)$的图象如图所示，

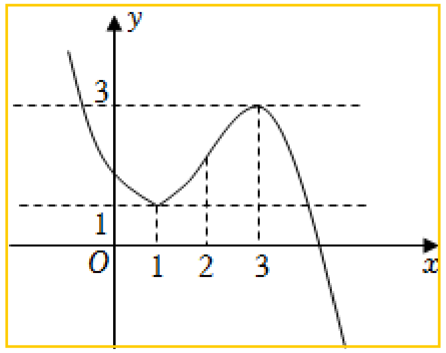
函数$g(x)=f(x)-a$有3个不同的零点，即函数$f(x)$的图象与直线$y=a$有3个不同的交点，

当$x=1$时，函数$f(x)$有极小值$f(1)=1$，

当$x=3$时，函数$f(x)$有极大值$f(3)=3$，

所以实数a的取值范围为(1，3)．

故选：B．



10．已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的函数，$f(x+4)$ 为奇函数，$f(x+5)$ 为偶函数，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3$，若函数 $g(x)=f(x)-m(x-2)(m>0)$ 有 5 个不同的零点，则 m 的取值范围为（　　）

A．$(\frac{1}{9},\ \frac{1}{5})$　　B．$(\frac{1}{8},\ \frac{1}{4})$　　C．$(\frac{1}{7},\ \frac{1}{3})$　　D．$(\frac{1}{6},\ \frac{1}{2})$

【解答】解：因为 $f(x+5)$ 为偶函数，所以曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=5$ 对称，$f(10-x)=f(x)$．

因为 $f(x+4)$ 为奇函数，所以曲线 $y=f(x)$ 关于点（4，0）对称，$f(8-x)=-f(x)$．

所以 $f(8-(x-2))=-f(x-2)=f(x)$，则 $f(x-2)=-f(x)$，

所以 $f(x-4)=f(x)$，即 $f(x+4)=f(x)$．

则 $f(x)$ 是以 4 为一个周期的周期函数，

所以曲线 $y=f(x)$ 关于点（0，0）对称（$f(x)$ 为奇函数），且关于直线 $x=1$ 对称，

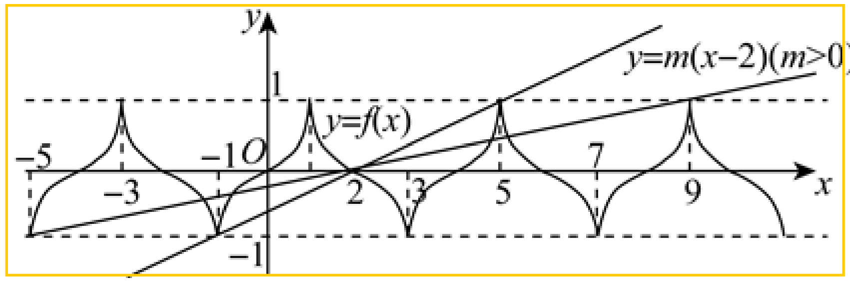
因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3$，

所以当 $-1\leqslant x<0$ 时，$f(x)=x^3$，所以当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^3$．

根据周期性可知，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=m(x-10)$ 有 5 个交点，

则曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=m(x-2)$ 有 5 个交点，根据对称性，

在同一坐标系中，作出函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=m(x-2)$，如图所示．



由图像可知，$\frac{1}{9-2}<m<\frac{1}{5-2}$，即 $\frac{1}{7}<m<\frac{1}{3}$

故选：C．

11．已知函数 $f(x)=\frac{x}{e\ln x}$，关于 x 的方程 $[f(x)]^2-2(a+1)f(x)+a^2+2a=0$ 至少有三个互不相等的实数解，则 a 的取值范围是（　　）

A．$[1,+\infty)$　　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C．$(-1,0)\cup[1,+\infty)$　　D．$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

【解答】解：已知函数 $f(x)=\frac{x}{e\ln x}$，$x>0$ 且 $x\neq 1$，

$f'(x)=\frac{1}{e}\times\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，

令 $f'(x)=0$，则 $x=e$，

当 $x\in(0,1)$ 和 $(1,e)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

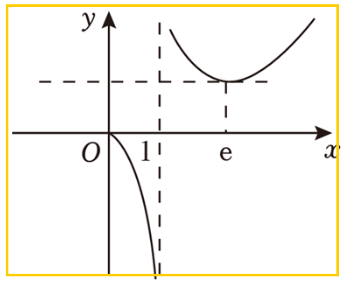
当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

$f(e)=\frac{e}{e\ln e}=1$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$，$x\in(1,e)$ 时，$f(x)\geqslant 1$，

$[f(x)]^2-2(a+1)f(x)+a^2+2a=0\Rightarrow[f(x)-a][f(x)-a-2]=0$，

$\therefore f(x)=a$ 或 $f(x)=a+2$，



要使 $[f(x)]^2-2(a+1)f(x)+a^2+2a=0$ 至少有三个互不相等的实数解，

则 $\begin{cases}a+2>1\\a>1\end{cases}$，解得 $a>1$，有 4 个根，

$\begin{cases}a+2>1\\a=1\end{cases}$，解得 $a=1$，有 3 个根，

$\begin{cases}a+2>1\\a<0\end{cases}$，解得 $-1<a<0$，有 3 个根，

综上所述，$a\in(-1,0)\cup[1,+\infty)$.

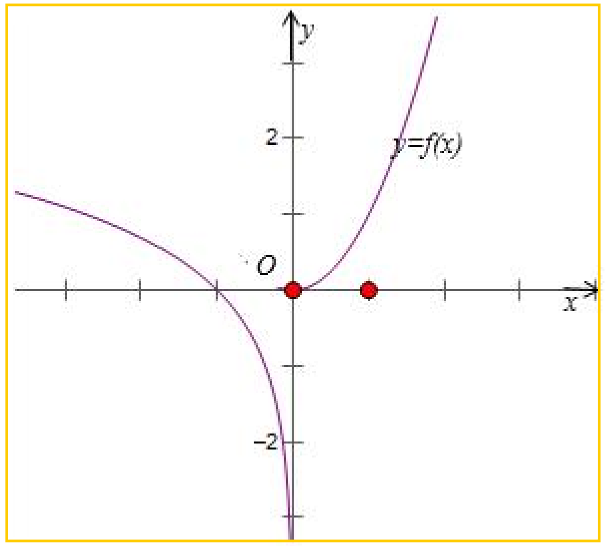
故选：C.

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0,\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(f(x))-af(x)+1$ 恰有两个零点，则 a 的取值范围是（　）

A．$[0,2)\cup\{1\}$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(-1,0)$　　D．$(-\infty,-1)$

【解答】解：作出 $f(x)$ 的图象如图所示，当 $y<0$ 时，$y=f(x)$ 有一解，

当 $y\geq 0$ 时，$y=f(x)$ 有二个解，

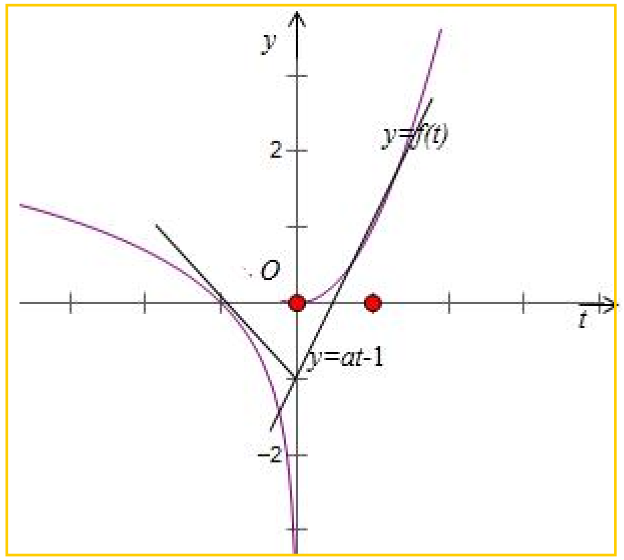


$g(x)=f(f(x))-af(x)+1$，

令 $t=f(x)$，$g(t)=f(t)-at+1$，

即 $f(t)=at-1$，

作函数 $y=f(t)$ 与 $y=at-1$，



直线 $y=at-1$ 恒过定点 $(0,-1)$，

当 $a\geq 0$ 时，直线 $f(t)=at-1$ 有一个大于等于 0，一个小于 0 的根或只有一个小于 0 的根，

由 $y=f(x)$ 可知 $g(x)=f(f(x))-af(x)+1$ 恰有三个零点或只有一个零点，不符合题意，

当 $a<0$ 时，直线 $y=at-1$ 与 $y=f(t)$ 相切时，若 $a=-1$，此时 $f(t)=at-1$ 只有一个 -1 的根，

由 $y=f(x)$ 可知 $g(x)=f(f(x))-af(x)+1$ 恰有一个零点，不符合题意，

当 $a<-1$ 时，$f(t)=at-1$ 没有根，

由 $y=f(x)$ 可知 $g(x)=f(f(x))-af(x)+1$ 没有零点，不符合题意，

当 $-1<a<0$ 时，$f(t)=at-1$ 有两个小于 0 的根，

由 $y=f(x)$ 可知 $g(x)=f(f(x))-af(x)+1$ 恰有两个零点，符合题意，

∴a 的取值范围是 $(-1,0)$.

故选：C.

13．已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{1+x^2}, & x\geq 0\\ -\dfrac{4}{x}, & x<0\end{cases}$，若 $f(x)=t$ 有三个不同的解 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，则 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$ 的取值范围是（　）

A．$(1,+\infty)$　　B．$(\dfrac{3}{2},+\infty)$　　C．$(2,+\infty)$　　D．$(\dfrac{5}{2},+\infty)$

【解答】解：当 $x<0$ 时，$f(x)=-\frac{4}{x}$在（-∞，0）上单调递增，函数 $f(x)$ 的取值集合为（0，+∞）

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\frac{4x}{1+x^2}$，$f(0)=0$，当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{4}{\frac{1}{x}+x}$，令 $y=\frac{1}{x}+x$，$x>0$，

显然函数 $y=\frac{1}{x}+x$在（0，1）上单调递减，在（1，+∞）上单调递增，

因此函数 $f(x)$ 在（0，1）上单调递增，在（1，+∞）上单调递减，$f(1)=2$，

于是当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的取值集合为[0，2]，且当 $x>1$ 时，恒有 $f(x)>0$，

由 $f(x)=t$ 有三个不同的解 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$，得 $0<t<2$，且 $-\frac{4}{x_1}=t$，x_2，x_3 是方程$\frac{4x}{1+x^2}=t$的不等实根，

由$\frac{4x}{1+x^2}=t$得：$tx^2-4x+t=0$，则有 $x_2+x_3=\frac{4}{t}$，$x_2x_3=1$，而 $-\frac{1}{x_1}=\frac{t}{4}$，

因此 $-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{1}{x_1}+\frac{x_2+x_3}{x_2x_3}=\frac{t}{4}+\frac{4}{t}=\frac{1}{4}(t+\frac{16}{t})$，由对勾函数知函数 $g(t)=\frac{1}{4}(t+\frac{16}{t})$在（0，2）上单调递减，

即有 $g(t)>g(2)=\frac{5}{2}$，所以 $-\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$的取值范围是 $(\frac{5}{2}，+\infty)$.

故选：D.

14．已知函数 $f(x)=(x+1)e^x$，若函数 $F(x)=f^2(x)-mf(x)+m-1$ 有三个不同的零点，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $(-\frac{1}{e^2}，0)$　　B. $(-\frac{1}{e^2}，1)$

C. $(1-\frac{1}{e^2}，1)$　　D. $(1-\frac{1}{e^2}，1)\cup(1，+\infty)$

【解答】解：函数 $f(x)=(x+1)e^x$ 的定义域为 **R**，求导得 $f'(x)=(x+2)e^x$，当 $x<-2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>-2$ 时，$f'(x)>0$，

因此函数 $f(x)$ 在（-∞，-2）上单调递减，在（-2，+∞）上单调递增，

$f(x)_{min}=f(-2)=-\frac{1}{e^2}$，且 $x<-1$，恒有 $f(x)<0$，

由 $F(x)=0$，得 $[f(x)-1][f(x)-m+1]=0$，即 $f(x)=1$ 或 $f(x)=m-1$，由 $f(x)=1$，得 $x=0$，

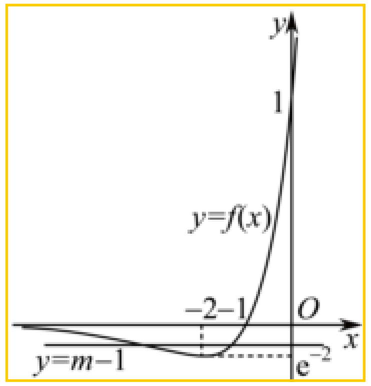
于是函数 $F(x)$ 有 3 个不同零点，当且仅当方程 $f(x)=m-1$ 有 2 个不同的解，即直线 $y=m-1$ 与 $y=f(x)$ 图象有 2 个公共点，

在同一坐标系内作出直线 $y=m-1$ 与 $y=f(x)$ 的图象，如图，

观察图象知，当 $-\frac{1}{e^2}<m-1<0$，即 $1-\frac{1}{e^2}<m<1$时，直线 $y=m-1$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 2 个公共点，

所以实数 m 的取值范围为 $(1-\frac{1}{e^2}，1)$.

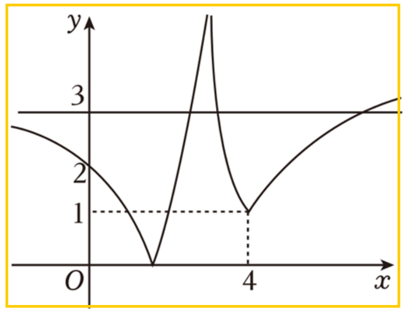
故选：C.



15．已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_2(x-3)|+1, & x>3\\ |2^x-3|, & x\leqslant 3\end{cases}$，若关于 x 的方程 $m[f(x)]^2-3f(x)+4m=0$ 有 8 个不相等的实根，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $(\frac{9}{13}，\frac{5}{4})$　　B. $(\frac{3}{5}，\frac{9}{13})$　　C. $(\frac{3}{5}，\frac{3}{4})$　　D. $(\frac{9}{13}，\frac{3}{4})$

【解答】解：根据 $f(x)=\begin{cases}|\log_2(x-3)|+1, & x>3\\ |2^x-3|, & x\leqslant 3\end{cases}$，可画出其图象为下图所示，



若关于 x 的方程 $m[f(x)]^2-3f(x)+4m=0$ 有 8 个不相等的实根，

令 $t=f(x)$，则 $mt^2-3t+4m=0$ 有两个不相等的实数根 t_1，t_2，且 $t_1\in(1,3)$，$t_2\in(1,3)$，

若 $m<0$，则 $t_1t_2=4>0$，$t_1+t_2=\frac{3}{m}<0$ 不符合，所以 $m>0$，

令 $g(t)=mt^2-3t+4m$，则需要满足 $\begin{cases}\triangle=9-16m^2>0\\ g(1)=5m-3>0\\ g(3)=13m-9>0\\ 1<\frac{3}{2m}<3\end{cases}$，解得 $\frac{9}{13}<x<\frac{3}{4}$.

故选：D.

16．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x+x, & x>1\\ 2x^2-mx+\frac{m}{2}, & x\leqslant 1\end{cases}$，若 $g(x)=f(x)-m$ 有三个零点，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$(1,\frac{7}{4}]$　　B．$(1,2]$　　C．$(1,\frac{4}{3}]$　　D．$[1,3]$

【解答】解：当 $x>1$ 时，$f(x)=\ln x+x$ 单调递增，

且 $f(x)=\ln x+x>1$，此时 $g(x)=f(x)-m$ 至多有一个零点，

若 $g(x)=f(x)-m$ 有三个零点，则 $x\leqslant 1$ 时，函数有两个零点；

当 $x>1$ 时，$f(x)=\ln x+x>1$，故 $m>1$；

当 $x\leqslant 1$ 时，要使 $g(x)=f(x)-m=2x^2-mx-\frac{m}{2}$ 有两个零点，

则 $\begin{cases}\triangle=m^2-8(-\frac{m}{2})>0\\ \frac{m}{4}<1\\ 2-m-\frac{m}{2}\geqslant 0\end{cases}$，

所以 $0<m\leqslant\frac{4}{3}$，又 $m>1$，

所以实数 m 的取值范围是 $(1,\frac{4}{3}]$.

故选：C.

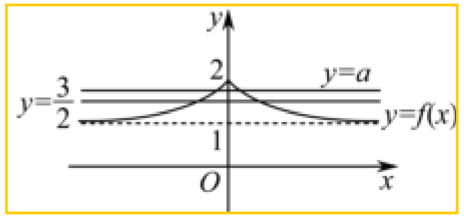
17．函数 $f(x)=(\frac{1}{e})^{|x|}+1$，若 $g(x)=2f^2(x)-(2a+3)f(x)+3a$ 有 4 个零点，则 a 的取值范围是（　）

A．$(1,2)$　　B．$[\frac{3}{2},2)$

C．$(0,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},2)$　　D．$(1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},2)$

【解答】解：由 $g(x)=2f^2(x)-(2a+3)f(x)+3a=0$，可得 $[2f(x)-3]\cdot[f(x)-a]=0$，

解得 $f(x)=\frac{3}{2}$ 或 $f(x)=a$，如下图所示：



由图可知，直线 $y=\frac{3}{2}$ 与函数 $f(x)$ 的图象有两个交点，

又因为函数 $g(x)$ 有四个零点，故直线 $y=a$ 与函数 $f(x)$ 有两个零点，且 $a\neq\frac{3}{2}$，

所以 $1<a<2$ 且 $a\neq\frac{3}{2}$.

因此，实数 a 的取值范围是 $(1,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},2)$.

故选：D.

二．函数与方程的综合运用（共3小题）

18．已知函数 $f(x)=ln|x-1|-ln|x+1|$，若存在两个不同的实数 x_1，x_2，使 $f(x_1)=f(x_2)$，则（　　）

A．$x_1x_2=-1$　　B．$x_1x_2=1$　　C．$x_1+x_2<-2$　　D．$x_1+x_2>2$

【解答】解：函数 $f(x)=ln|x-1|-ln|x+1|$，定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$，

原函数可化为 $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\ln\left|1-\frac{2}{x+1}\right|$，

又 $f(-x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=-\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=-f(x)$，函数 $f(x)=ln|x-1|-ln|x+1|$ 为奇函数．

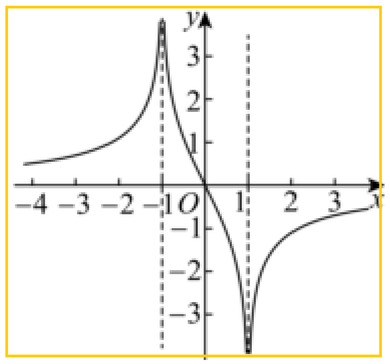
因为 $y=1-\frac{2}{x+1}$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，且 $y>1$，$y=1-\frac{2}{x+1}$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增且 $y<-1$，

所以 $y=\left|1-\frac{2}{x+1}\right|$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，且 $y>1$，$y=\left|1-\frac{2}{x+1}\right|$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减且 $y>1$，

所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，且 $f(x)>0$；

当 $x\in(-1,0)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，且 $f(x)>0$，由奇函数的图象关于原点对称，

可作函数 $f(x)$ 的图象如下：



由 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $\ln\left|\frac{x_1-1}{x_1+1}\right|=\ln\left|\frac{x_2-1}{x_2+1}\right|$，则 $\left|\frac{x_1-1}{x_1+1}\right|=\left|\frac{x_2-1}{x_2+1}\right|$，

得 $\frac{x_1-1}{x_1+1}=\frac{x_2-1}{x_2+1}$ 或 $\frac{x_1-1}{x_1+1}=-\frac{x_2-1}{x_2+1}$，化简得 $x_1=x_2$（舍去）或 $x_1x_2=1$．

故选：B．

19．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x\leqslant 1\\ \frac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，若 $0<a<b$ 且满足 $f(a)=f(b)$，则 $af(b)+bf(a)$ 的取值范围是（　　）

A．$(1,\frac{1}{e}+1)$　　B．$(-\infty,\frac{1}{e}+1]$　　C．$(1,\frac{1}{e}+1]$　　D．$(0,\frac{1}{e}+1)$

【解答】解：∵函数 $f(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x\leqslant 1\\ \frac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，

若 $0<a<b$ 且满足 $f(a)=f(b)$，

则 $-\ln a=\frac{1}{b}$ 且由 $0<-\ln a<1$ 得 $\frac{1}{e}<a<1$

又 $af(b)+bf(a)=a\cdot\frac{1}{b}+b(-\ln a)=-a\ln a+1$ $(\frac{1}{e}<a<1)$

令 $g(x)=-x\ln x+1$，$(\frac{1}{e}<x<1)$

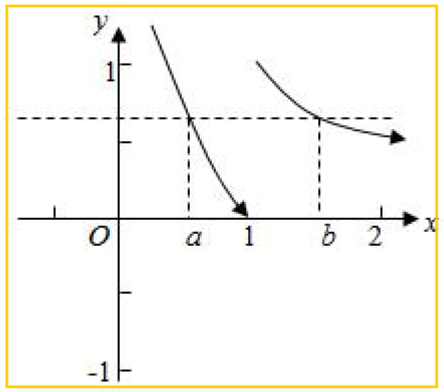
则 $g'(x)=-\ln x-1$

令 $g'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{e}$

当 $\frac{1}{e}<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，

∴$g(x)\in(1,\frac{1}{e}+1)$

故选：A．



20．已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$ 的定义域为 $(\frac{1}{2},2)$，且对 $\forall x_1,x_2\in(\frac{1}{2},2)$，$x_1\neq x_2$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<x_1+x_2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$[\frac{e^2}{4}-1,+\infty)$　B．$[\sqrt{e}-1,+\infty)$　C．$(-\infty,\frac{e}{2}-1]$　D．$(-\infty,\frac{e}{2}-1)$

【解答】解：设 $x_1>x_2$，因为 $\forall x_1,x_2\in(\frac{1}{2},2)$，$x_1\neq x_2$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<x_1+x_2$ 恒成立，

等价于 $f(x_1)-f(x_2)<x_1^2-x_2^2$，即 $f(x_1)-x_1^2<f(x_2)-x_2^2$，

令 $F(x)=f(x)-x^2=e^x-ax^2-x^2$，则 $F(x_1)<F(x_2)$，所以 $F(x)$ 在 $(\frac{1}{2},2)$ 上为减函数，

所以 $F'(x)=e^x-2(a+1)x\leqslant0$ 在 $(\frac{1}{2},2)$ 上恒成立，即 $\frac{e^x}{x}\leqslant2(a+1)$ 在 $(\frac{1}{2},2)$ 上恒成立，

令 $h(x)=\frac{e^x}{x}$，$x\in(\frac{1}{2},2)$，则 $h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}>0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(\frac{1}{2},2)$ 上单调递减，在（1，2）单调递增，

又 $h(\frac{1}{2})=2\sqrt{e}$，$h(2)=\frac{e^2}{2}$，且 $2\sqrt{e}<\frac{e^2}{2}$，

所以 $h(x)_{max}<h(2)=\frac{e^2}{2}$，

所以 $\frac{e^2}{2}\leqslant2(a+1)$，解得 $a\geqslant\frac{e^2}{4}-1$，

故选：A．