OSSERVABILITÀ e RAGGIUNGIBILITÀ

trasformazioni in forme canoniche di Kalman rispetto a

RAGGIUNGIBILITÀ

dato $\tilde{x} = Tx$ con $T = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ v_1 & \dots & v_m & v_{m+1} & \dots & v_n \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$

$v_1 \dots v_m$: basi dello spazio $im(P)$ — $v_{m+1} \dots v_n$: completamento

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} & \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

A_{11} matrice contenenti autov. spazio ragg.

A_{22} no.

$$\tilde{B} = TB = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} \end{array}$$

OSSERVABILITÀ

dato $\tilde{x} = Tx$ con $T = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ v_1 & \dots & v_m & v_{m+1} & \dots & v_n \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix}$

$v_1 \dots v_m$: basi spazio $ker(Q)$ — $v_{m+1} \dots v_n$: completamento

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} & \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\tilde{A}_{11}$: matrice degli autov. inoss.

$$C = CT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

Progetto nel dominio del tempo

per costruire un controllore si utilizza spazio di stato

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Si punta alla stabilità, per ora.
Siamo interessati a scegliere il controllore tale che gli autovalori del SdC retroazionato siano coincidenti con quelli assegnati.

2 tipologie

1) Si suppone che lo stato x sia misurabile, compiendo una retroazione di stato.
Se esiste, il controllore è istantaneo.

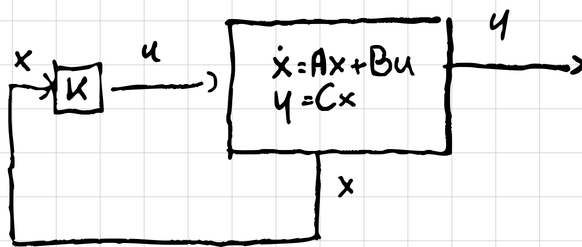
2) Se lo stato non è disponibile, si costruisce un OSSERVATORE che trova degli stati asintoticamente simili

ASSEGNAZIONE AUTOVALORI CON RETROAZIONE NELLO STATO (AA-RS)

dato un processo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

il controllore sarà del tipo



$u = Kx$

↳ matrice di GUADAGNI

il sistema ad anello chiuso sarà dunque

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A + BK)x$$

l'obbiettivo della AA-RS è trovare K tale che gli autovalori $(A+BK)$ COINCIDANO con quelli assegnati

$(A + BK)$ è la MATRICE dinamica ad anello chiuso

il problema AA-RS è risolubile SE E SOLO SE il processo è COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

[utilizzo dimostrazione su 03-05 pag 6]

come trovare K?

ipotizzando che il processo è completamente raggiungibile possiamo costruire la forma canonica

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

con $T_c = \begin{pmatrix} - & \mu & - \\ - & \mu A & - \\ & \vdots & \\ - & \mu A^{n-1} & - \end{pmatrix}$

per assegnare il polin. caratteristico si sceglie

$$p^*(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}^* \lambda^{n-1} + \dots + a_0^*$$

$u = K_c x_c$ con

$$K_c = \begin{pmatrix} a_0 - a_0^* & a_1 - a_1^* & \dots & a_{n-1} - a_{n-1}^* \end{pmatrix}$$

quindi $(A_c + B_c K_c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^* & -a_1^* & \cdots & -a_{n-1}^* \end{pmatrix}$

per passare da K_c a K, $K = K_c T_c$

quindi:

$$K = K_c T_c =$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 - a_0^* & \dots & a_{n-1} - a_{n-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \mu - \\ \vdots \\ - \mu A^{n-1} - \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \mu - \\ \\ - \mu A^{n-1} - \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0^* & \dots & a_{n-1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \mu - \\ \\ - \mu A^{n-1} - \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underbrace{\mu \left(a_0 I + \dots + a_{n-1} A^{n-1} \right)}_{\text{per Kayley-Hamilton } = -A^n} - \mu \left(a_0^* I + \dots + a_{n-1}^* A^{n-1} \right)$$

$$= -\mu \left(a_0^* I + \dots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n \right)$$

quindi

$$\boxed{K = -\mu \, p^*(A)}$$

[FORMULA di ACKERMANN]

μ = ultima riga della P^{-1} (m. rass. inversa)

$p^*(A)$ = polinomio caratt. con COEFF. assegnati e A originale

IN GENERALE, più la matrice P è prossima alla singolarità, più sarà necessario un K grande

Stabilizzazione con retroazione nello stato

Se il processo non è -completamente- raggiungibile il problema AA-RS non è risolvibile.
È possibile, forse, risolvere un problema meno stringente

La (S-RS) è risolvibile se e solo se gli autovalori non raggiungibili sono già nel semipiano sx

Verificare con

1. PBH test:

verificare che, per tutti i λ_i tale che $Re[\lambda_i] \geq 0$

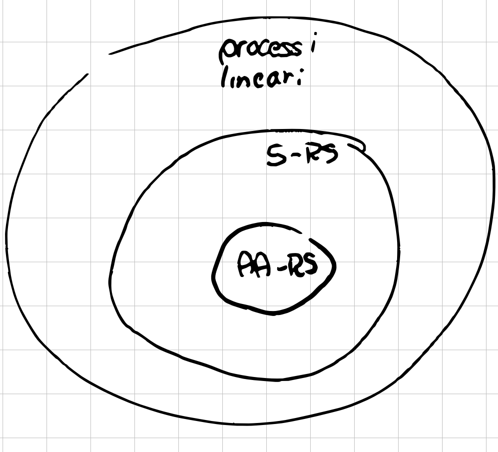
$$\text{rango}\left(A - \lambda_i I \;\vdots\; B\right) = n$$

2. Usare scomposizione di Kalman

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c:c} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \hdashline 0 & \tilde{A}_{22} \end{array}\right)$$

verificare che autov. di $\tilde{A}_{22}$ siano tutti $Re[\lambda_i] < 0$

Oss.



ASSEGNAZIONE AUTOVALORI CON RETROAZIONE ALL' USCITA (AA-RU)

Se lo stato non è misurabile è necessario costruire un oggetto che ne STIMI ASINTOTICAMENTE lo stato

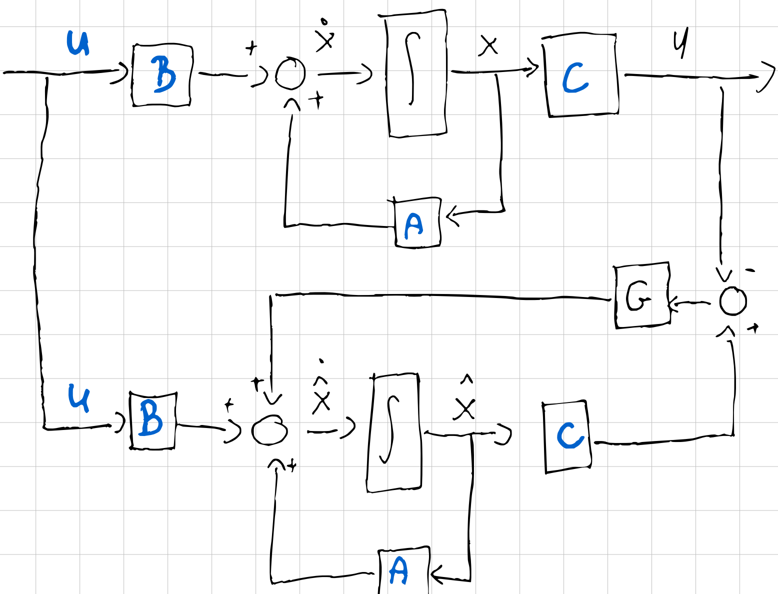
quindi costruisco OSSERVATORE

$$\dot{\hat{x}} = Ax + Bu + \underbrace{G(y - C\hat{x})}_{\text{correzione aggiuntiva con forzamento}}$$

N.B.

$$G(y - C\hat{x}) = G(Cx - C\hat{x}) = GC(x - \hat{x}) = GCe$$

errore!



controlliamo l'errore, che si ricorda deve tendere a zero per $t \to \infty$ a scapito della stabilità originale

$$e = x - \hat{x}$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - GC(x - \hat{x}) =$$

$$= Ae - GCe$$

$$= (A - GC)e$$

con $A-GC$ la matrice dinamica dell'errore.

Obbiettivo: trovare G tale che $A-GC$ stabile, quindi abbia autov. assegnati con $Re[\,] < 0$

Come fare?

E' possibile attuare piccole modificare per trovarci in problema AA-RS

$$\text{autovalori}(A - GC) = \text{autov}(A^T - C^T G^T)$$

$A^T = A'$
$C^T = B'$
$-G^T = K$

$$\to \text{autov.}(A' + B'K')$$

risolvibile s.se

$$rk(B' \,\vdots\, A'B' \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1'}B') = n$$

$$\Rightarrow rk \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

la coppia $(A\,C)$ dev'essere OSSERVABILE

Si definisce questo il problema dell' OSSERVAZIONE ALL' USCITA (O-U)

USO $K' = -\mu' p^*(A')$ [formula di Ackermann]

$\hookrightarrow p^*(A') = p^*(A^T)$

$\hookrightarrow (P')^{-1} = (Q^T)^{-1}$

$\hookrightarrow K' = -G^T \rightarrow G = -K'^T$

Se processo non completamente osservabile

Come per il problema (S-RS), se il rango$(Q) = m < n$ vuol dire che il processo non è completamente osservabile.

$\hookrightarrow$ possiamo stabilizzare gli autovalori osservabili.

Rilevazione all' Uscita (R-U)

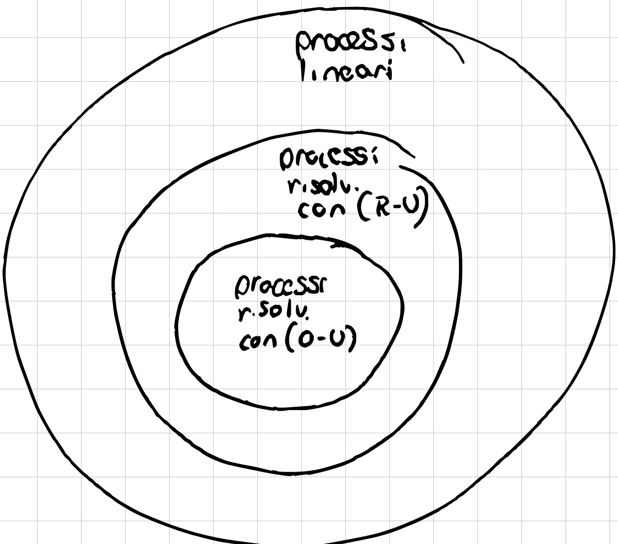
Il problema R-U è risolvibile se e solo se gli eventuali autovalori non osservabili sono già $Re[\,]<0$

[guardare dim. 04-05 pag 6]

Si può verificare la rilevabilità attraverso

1. PBH test:
   controllare che gli autovalori A con $Re[\lambda_i]>0$ abbiano
   $$\text{rango}\begin{pmatrix} A-\lambda_i I \\ C \end{pmatrix} = n$$
2. Decomposizione strutturale rispetto all' osservabilità:
   $$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$
   verificare che autov. $\tilde{A}_{22}$ siano $Re[\,]<0$

oss.



discussione simile a RS

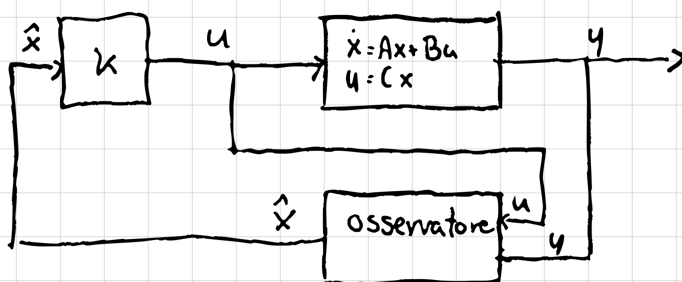
funziona?

$u = K\hat{x}$ al posto di $u = Kx$

↳ stato dell'OSSERVATORE / RILEVATORE

processo: $\dot{x} = Ax + Bu = Ax + BK\hat{x}$

osservatore: $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x}) = (A+BK)\hat{x} + G(y - C\hat{x})$



$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BK \\ CG & A+BK-GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

↳ autovalori non noti, trasformo

$X \to X' = \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$ [stessi autovalori!]

$$\dot{X}' = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A-GC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

$A-GC$ autov. noti da studio osserv.

$A+BK$ processo controllato

Principio di separazione

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + G(y - C\hat{x})$$

$$= (A + BK - CG)\hat{x} + Gy$$

[ingresso controllore
uscita processo]

$$u = K\hat{x}$$

[uscita controllore
ingresso processo]

- Se il processo è raggiungibile ed osservabile totalmente posso risolvere AA-RS con O-U

  ↳ posso assegnare autovalori a piacere (p. di separazione)

  ASSEGNAZIONE AUTOVALORI CON RETROAZIONE ALL'USCITA (AA-RU)

- Se il processo è risolvibile con S-RS e R-U posso comunque garantire che gli autovalori del SdC siano nel semipiano SX (principio di separazione)

  ↳ risolvo il problema

  STABILIZZAZIONE CON RETROAZIONE ALL'USCITA (S-RS)

$A + BK$ con Ackerman

$A - GC$ sia assegnati con Ack. modificato