SEGNALE

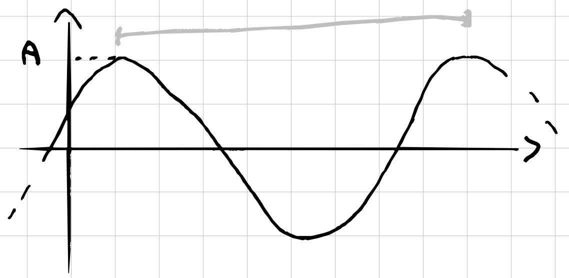
può essere espresso come funzione reale o complessa

$$z(t) = x_R(t) + j\,x_I(t)$$

alcuni esempi

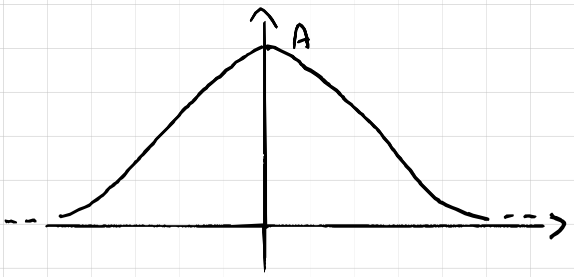
Segnale sinusoidale

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$$



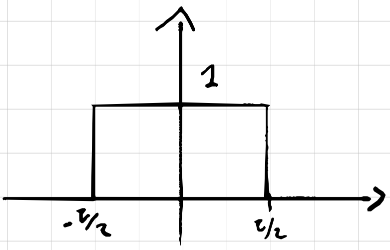
Segnale gaussiano

$$x(t) = Ae^{-\alpha t^2}$$



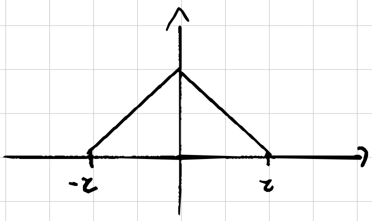
rettangolo

$$x(t) = rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } |t| < \frac{\tau}{2} \\ 1/2 & \text{if } |t| = \tau/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

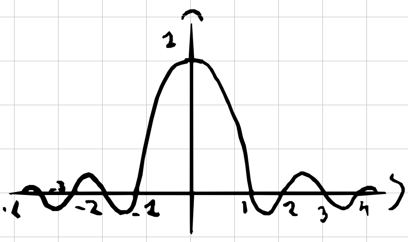


triangolo

$$x(t) = tri(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = 0 \\ -x & \text{if } t \in [0, \tau] \\ x & \text{if } t \in [-\tau, 0] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



- $x(t) = sinc(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{t}$



Operazioni di segnali

- flip $\quad z(t) = x(-t)$
- shift $\quad z(t) = x(t - \alpha)$ $\quad \alpha < 0$ anticipo, $\alpha > 0$ ritardo
- warp $\quad z(t) = x(\alpha t)$ $\quad \alpha > 1$ contrazione, $\alpha < 1$ dilatazione

VALOR MEDIO DI SEGNALE e SEQUENZA

segnale a durata finita

$$\mu_x^T = \frac{1}{T}\int_a^b x(t)\,dt$$

$$\mu_x' = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n$$

segnale a durata infinita

$$\mu_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

$$\mu_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{-N}^{N} x_n$$

ENERGIA di SEGNALE

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt \qquad \mathcal{E}_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2$$

un segnale è di energia se

$$0 < \mathcal{E}_x < \infty$$

un segnale si dice impulsivo se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt < \infty$$

POTENZA DI SEGNALE

si definisce potenza di $x(t)$

$$P_x = \lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} |x(t)|^2\,dt \geq 0$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N} |x_n|^2$$

un segnale è di potenza se

$$0 < P_x < \infty$$

segnale periodico

per calcolare la potenza di un segnale periodico lo si può vedere come

$$x(t) = x(t+nT) \Rightarrow n = 0, \pm 1, \pm 2 \Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t+nT)$$

(T = periodo)

potenza di segnale periodico (lo si calcola sul periodo principale)

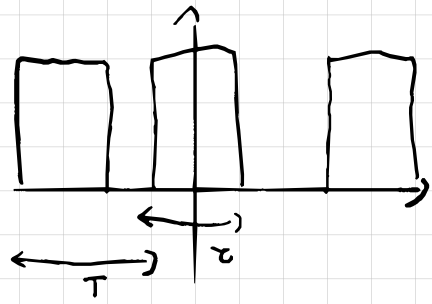
$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt$$

un segnale periodico è un segnale di potenza

SEGNALI PERIODICI

treno di "impulsi" rettangolari

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_\tau(t - nT)$$



duty cycle

$\tau/T \leq 1$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[\text{rect}_\tau(t-nT)\right]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}$$

IMPULSO MATEMATICO

segnale di durata brevissima, al limite 0, e di ampiezza infinita al limite, con integrale unitario

$$\delta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \text{rect}_{\Delta t}(t)$$

$$\delta(t) : \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

proprietà di campionamento

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$$

CONVOLUZIONE

def: $z(t) = x(t) * y(t) =$

$$= \int x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

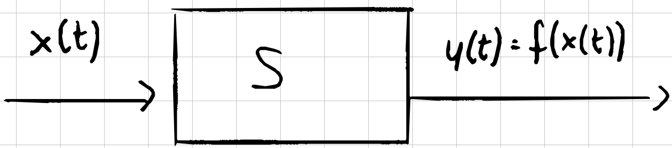
cosa succede graficamente

- graficare x e y come funzioni di τ
- ribaltare il segnale $y(\tau)$ ottenendo $y(-\tau)$
- traslare $y(-\tau)$ della quantità t lungo l'asse τ con $t>0$ $y(t-\tau)$ va traslato di t verso destra
- $\forall \tau \in (-\infty, +\infty)$ si calcola prodotto $x(\tau)y(t-\tau)$
- si integra rispetto a τ la funzione $x(\tau)y(t-\tau)$

proprietà

commutativa $\quad x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
associativa $\quad [x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$
distributiva $\quad$ ..

Attraversamento di un sistema tempo continuo da parte di un segnale analogico



un sistema S è un blocco che trasforma un segnale d'ingresso $x(t)$ in un uscita $y(t) = f(x(t))$

1) Sistema lineare

$$\begin{array}{l} x_1 \rightarrow y_1 \\ x_2 \rightarrow y_2 \end{array} \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \rightarrow \alpha y_1 + \beta x_2$$

(sovrapposizione degli effetti

2) Sistema permanente

$$x(t) \rightarrow y(t) \iff x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$$

invariante nel tempo

Un sistema lineare e permanente è FILTRO!

Sapendo la risposta impulsiva $h(t)$ del filtro possiamo

$$\delta(t) \rightarrow f(\delta(t)) = h(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) =$$

$$= \int x(\tau) h(t-\tau) \, d\tau$$

CONVOLUZIONE e CORRELAZIONE

convoluzione

$$\varphi_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = x(t) * y(t)$$

correlazione

$$R_{xy}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t+\tau)\, d\tau = x(t) \circledast y(t)$$

mentre la convoluzione lo gode, la correlazione NON gode della proprietà commutativa

$$R_{xy}(t) = R^*_{yx}(t)$$

Autocorrelazione e segnali di energia

si definisce autocorrelazione

$$R_{xx}(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

con $t=0$

$$R_{xx}(0) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \mathcal{E}_x$$

possiamo anche definire quindi l'energia incrociata come

$$\mathcal{E}_{xy} = R_{xy}(0)$$

$$\rho_{xy} = \frac{\mathcal{E}_{xy}}{\sqrt{\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y}}$$

è coefficiente di correlazione

Si può fare discorso analogo per segnali di POTENZA

$$R_{xy}(t) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} x^*(\tau) \cdot y(t+\tau)\, d\tau =$$

$$= x(t) \circledast y(t)$$

Trasformata di Fourier Continua

è definita per segnali impulsivi (di energia)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = FT\{x(t)\}$$

$x(t)$ è l'integrale di infinite componenti armoniche

Se $x(t)$ è reale, la trasformata di fourier è a simmetria Hermitiana

Se $x(t)$ è reale e pari allora la sua trasformata è reale e pari

Proprietà

- Linearità

$$FT\left(\alpha x(t) + \beta y(t)\right) = \alpha FT(x(t)) + \beta FT(x(t))$$

$$FT^{-1}\left(\alpha X(f) + \beta Y(f)\right) = \alpha FT^{-1}(X(f)) + \beta FT^{-1}(Y(f))$$

- dualità

  data una coppia Trasformata - antitrasformata è possibile individuare una seconda coppia in cui il ruolo di esse risulta scambiato.

$$x(t) \longrightarrow X(f) \iff X(t) \longrightarrow x(-f)$$

- Scalatura

  data una costante $\alpha \neq 0$, e la FT del segnale $x(t)$, allora

$$FT\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X(f/\alpha)$$

- Traslazione nel tempo o nella frequenza

  dati $x(t)$ e $X(f)$, una coppia FT e FT^{-1}, e 2 valori t_0 e f_0, è possibile scrivere

$$X(f-f_0) \longleftrightarrow x(t)e^{j2\pi f_0 t}$$

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

Trasformata di fourier con segnale periodico

dato un segnale periodico $x(t)$ con periodo T $\left(F = 1/T\right)$, indichiamo $f_n = nF$ le frequenze multiple

$$x(t) = \sum X_n e^{j2\pi f_n t}$$ SERIE DI FOURIER

$x(t)$ si può scrivere come somma pesata di infiniti contributi esponenziali alle frequenze corrispondenti alle armoniche

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j2\pi f_n t}\, dt$$

Ora calcoliamo la trasformata del segnale periodico

$$FT\{x(t)\} = FT\left\{\sum X_n e^{j2\pi f_n t}\right\}$$

$$= \sum X_n\, FT\left\{e^{j2\pi f_n t}\right\} = \sum X_n \delta(f - f_n) =$$

$$= \sum X_n \delta(f - nF) = X(f)$$

TRASFORMATA di FOURIER DI TRENO DI IMPULSI

Si considera il segnale periodico seguente

$$x(t) = \sum_k \delta(t - kT)$$

è necessario calcolare i coefficienti X_n per trasformarla in una serie di fourier

$$X_N = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \Gamma_T(t)\, e^{-j2\pi f_n t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_k \delta(t - kT)\, e^{-j2\pi f n t}\, dt \quad \Big|_{k=0} \quad \left(\text{sempre limitati a } (-T/2, T/2)\right)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, e^{-j2\pi f_n t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T} = F$$

calcolo la trasformata di fourier

$$X(f) = \sum_n F\, \delta(f - nT)$$

$$= F\, \delta(f - nF)$$

$$= F\, \Gamma_F(f)$$

$$\Gamma_T(t) \Longleftrightarrow F\, \Gamma_F(f)$$

Perche?

2 motivi:

- Ci sono operazioni che nel dominio della frequenza sono più facili (convoluzione $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f)$

proprietà di convoluzione

ES

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

convoluzione di filtro (risposta impulsiva)

$$Y(f) = X(f) H(f)$$

$\hookrightarrow$ $y(t)$ $FT^{-1}\{X(f) H(f)\}$

per filtraggio

infatti:

$$tri(t) = rect(t) * rect(t)$$

$$FT\{tri(t)\} = FT\{rect(t) * rect(t)\}$$

$$= FT\{rect(t)\} \cdot FT\{rect(t)\}$$

$$= sinc(f)^2$$

BANDA

la banda di un segnale $x(t)$ è definita come l'insieme di frequenze per cui $X(f)$ è diverso da zero.

La larghezza di banda W è la misura dalla banda

ES

$x(t) = \text{sinc}(t) \Rightarrow$ 1 Hz

$\hookrightarrow X(f) = \text{rect}(f) \rightarrow$ $W(1\ Hz)$

$x(t) = \text{sinc}^2(t) \Rightarrow X(f) = \text{tri}(f)$

$W = 2\ Hz$

$x(t) = \text{rect}(t) \Rightarrow X(f) = \text{sinc}(t)$: $W = \infty$ teoricamente

In pratica però $\text{sinc}(t)$ tende a zero per $t \to \pm\infty$

di solito si considera il lobo principale, quindi

$W = 2$

Modulatore

Un modulatore è un sistema che da in uscita il segnale in ingresso, moltiplicato per un coseno alla frequenza f_p.

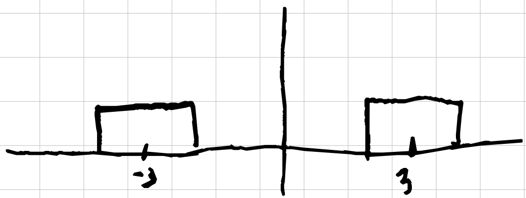
Utile per fare shift di frequenza in una più comoda, frequenza PORTANTE

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_p t) = X(f)\delta(f-f_p) + X_f\delta(f+f_p)$$

ci sta anche un demodulatore che fa il contrario

$X(f) = \text{rect}(f)$

$\hookrightarrow f_p = 3$



Demodulatore

il modulo demodulatore è fatta come

$$y(t) = x(t) \cdot 2\cos(2\pi f_p t)$$

$$z(t) = 2x(t) \cdot \cos^2(2\pi f_p(t)) =$$

$$= x(t) + 2x(t)\cos(2\pi 2 f_p t)$$

quindi la trasformata di fourier

FILTRO

filtraggio analogico

passa-basso

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$ fa passare basse frequenze!

passa-alto

$$Hf = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$ fa passare le alte frequenze

passa banda

Non ha senso parlare di $f<0$, perché è simmetrico

RISPOSTA IN FREQUENZA IN UN SISTEMA LP (filtro)

Convoluzione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) \, d\tau$$

con $h(t)$ risposta impulsiva del filtro

Prodotto

$$Y(t) = X(t) H(t)$$

$H(f)$ risposta in frequenza

Ottimo per calcolarsi risultati di sistemi lineari e permanenti

Trasformata Fourier Tempo Discreto

$$FT\{x_n\} = X(e^{i\omega}) = \sum_n x_n e^{-j\omega n} \qquad 2\pi f = \omega$$

$$FT^{-1}: x_n = \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{i\omega}) e^{i\omega} d\omega$$

↳ E'un integrale!

- La trasformata di fourier a tempo discreto è a tempo continuo!
- la trasformata di fourier di segnale discreto è periodica e di periodica in ω di periodo 2π
- x_n non è periodico!

Se x_n ha numero finito di campioni: si usa la

Trasformata Discreta di Fourier

DFT:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{n}{N} k}$$

il concetto è che la trasformata di fourier è DISCRETA!

$$DFT^{-1}: \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{+j2\pi \frac{k}{N} n}$$

matlab calcola la FFT, stessa roba ma più veloce

SPETTRO DI FUNZIONE

Lo spettro è la trasformata di un segnale, che può essere (continuo, discreto, di energia e potenza)

$$E_x(f) = FT\{R_{xx}(t)\}$$

$$E_x(e^{jw}) = FT\{R_{xx}[n]\}$$

$$P_x(f) = FT\{R_{xx}(t)\}$$

$$P_x(e^{jw}) = FT\{R_{xx}[n]\}$$

teorema di Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

CAMPIONAMENTO

Da segnale CONTINUO a segnale DISCRETO senza perdita di informazioni, così da poter passare da x_n a $x(t)$

Consideriamo $x(t)$ limitato in banda (finita) B con componente di frequenza massima f_M

il segnale viene fatto entrare in un campionatore, discretizzandolo

preso a multipli T_s (passo di campionamento)

$$T_s = 1/f_s = 1/\text{freq. campionamento}$$

il segnale poi passa in un formatore di impulsi, mettendo un impulso ad ogni segnale discreto

$$x_n \longrightarrow \boxed{\delta} \longrightarrow \tilde{x}(t)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_n x_n \, \delta(t - nT_s)$$

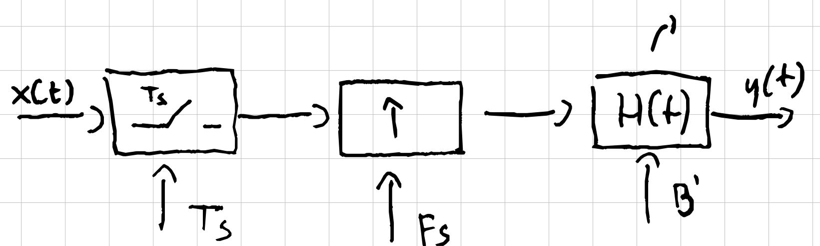
↳ Periodo di campionamento

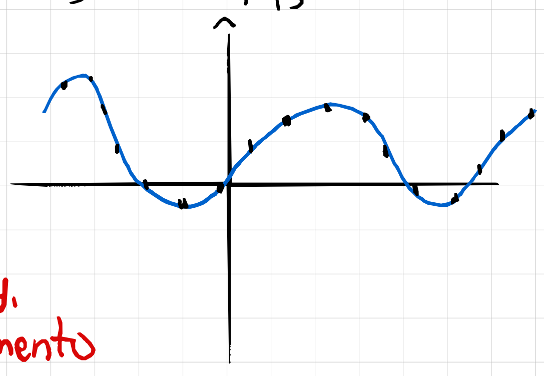
il segnale t_s viene poi filtrato con filtro passa basso con Banda B', ed esce $y(t)$

$$H(f) = \frac{1}{B'} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B'}\right)$$ deve essere $\simeq F$

secondo ciò $x(t) = y(t)$

filtro passa-basso





Teorema di campionamento

Se $x(t)$ è limitato in banda con frequenza max f_M e se la frequenza di campionamento F_s è $\leq 2f_M$ allora $y(t) = x(t)$

es

$$\tilde{x}(t) = \sum_n x_n \, \delta(t - nT_s) = \sum_n x(nT_s)\, \delta(t - nT_s) =$$

$$= \sum_n x(t)\, \delta(t - nT_s) =$$

$$= x(t) \sum_n \delta(t - nT_s)$$

$$= x(t)\, \Gamma_{T_s}(t)$$

ma la trasformata di fourier

$$\tilde{X}(f) = FT\{\tilde{x}(t)\} = FT\{x(t)\, \Gamma_{T_s}(t)\} =$$

$$FT\{x(t)\} * FT\{\Gamma_{T_s}(t)\}$$

$$X(f) * F_s \, \Gamma_{F_s}(f)$$

$$= F_s \sum_n X(f - nF_s)$$ ⟷ treno di impulsi a frequenza F_s

Se $F_s - f_m \geq f_M \rightarrow F_s \geq 2f_M = B$ allora si costruisce correttamente, altrimenti no, i segnali periodici andrebbero uno sopra l'altro

Si può a quel punto memorizzare l'uscita del campionatore per memorizzare il segnale originario

FILTRO ANTI-ALIASING

Nei sistemi reali, per evitare che le repliche non si sovrappongano, viene applicato un filtro passabasso $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right]$ che taglia la banda

Quantizzazione e Codifica

Vogliamo una funzione che assume, da valori continui, di valori discreti che può essere salvato su un database

Con il campionamento i valori delle ascisse sono già discreti.

È necessario QUANTIZZARE il segnale continuo nell'asse y, e poi CODIFICARLO in numeri binari

Nel quantizzatore si considera l'asse y, lo si definisce in un'insieme finito di intervalli M, e per ogni intervallo si salva il valor medio

Ipotizziamo che

$|x_n| < D$, si divide numero M di intervalli

$$\Delta = \frac{2D}{M}$$

l'operazione NON è INVERTIBILE, ci sarà sempre un'errore

$$e_q[n] = x[n] - x_q[n]$$

negli intervalli interni $[x_1, x_{M-2}]$ l'errore è, al più $\frac{\Delta}{2}$

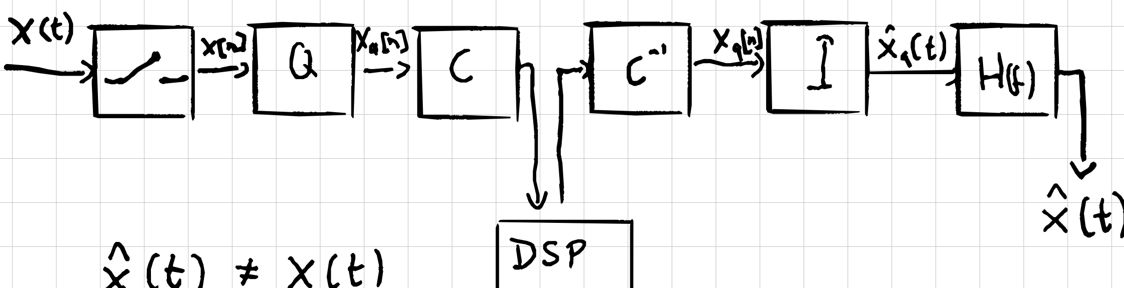
per gli altri intervalli, se il segnale NON ha dinamica finita, l'errore è chiamato DI SATURAZIONE

CODIFICA

Codificare la sequenza $X_q[n]$ richiede k bit.
dato un valore $M \in \mathbb{N}$, la quantità necessaria k di bit diventa

$$k = \lceil \log_2(M) \rceil$$

affinche M sia un numero efficente è necessario scegliere M come una potenza di 2 $[M = 2^k]$



$$\hat{x}(t) \neq x(t)$$

ma per $M \longrightarrow \infty$ $\quad \hat{x}(t) \longrightarrow x(t)$

M non potrà essere aumentato a piacere, siamo anche limitati dalla frequenza di bit che si possono inviare al secondo al processore di segnale digitale