

輔仁大學管理學院微積分主題式教材

— 導數 Derivative

一. 主題介紹

本單元之主題為導數(Derivative)，而本教材將分為五個部分，分別為書面教材、shiny 應用介面、code 程式介紹、習題應用以及實際案例，shiny 應用介面將採用微分函數以及 mosaic 套件呈現方程式的結果，習題應用則是採用講義後的習題進行程式及圖表的展現，實際案例則是將特定議題作為內容，藉由 shiny 應用介面進行呈現。

二. 導數定義

導數的意義分為一般意義及幾何意義，以下針對這兩種定義作說明：

1、一般意義：

假設有一函數 $y = f(x)$ ，且 x 以及對應之 y 皆屬於實數，而當 x 在 x_0 獲得增量 Δx ，同時相對應 y 獲得增量 Δy ，且若 Δy 與 Δx 之比在 Δx 趨近於 0 時存在，此時則稱此極限為 $y = f(x)$ 在 x_0 之導數，記為 $f'(x_0)$ ：

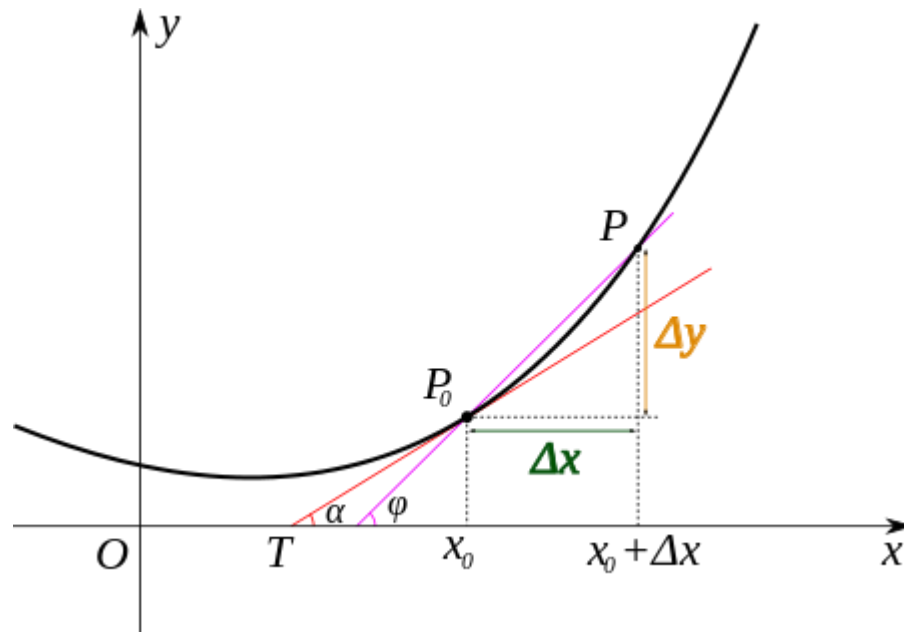
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

對於一般的函數來說也可定義為變數 x 趨近於 x_0 時， $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 的極限：

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2、幾何意義：

當函數定義域以及取值皆在實數域中，導數可表示為函數曲線上的切線斜率。
由下圖所示，設 P_0 為曲線上之一定點， P 為曲線上之一動點。當 P 沿曲線趨近於 P_0 時，且割線 PP_0 的極限位置 P_0T 存在，則稱 P_0T 為曲線在 P_0 處的切線。



若以函數 $y = f(x)$ 為例，則 PP_0 的斜率為：

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

當 P 與 P_0 幾乎重疊之時，其兩點之割線將會成為切線，即 P_0T 存在時， $\Delta x \rightarrow 0$ ， $\varphi \rightarrow \alpha$ ，則 P_0T 的斜率 $\tan \alpha$ 為：

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

由上述公式可知，導數的幾何定義公式與一般定義公式完全相同，即

$$f'(x_0) = \tan \alpha$$

因此，導數的幾何意義即曲線 $y = f(x)$ 在點 $P_0(x_0, f(x_0))$ 處切線之斜率。

三. 習題練習

1、 Crime Rates

The number of major crimes committed in the city of Bronxville from 2006 to 2013 is approximated by the function

$$N(t) = -0.1t^3 + 1.5t^2 + 100 \quad (0 \leq t \leq 7)$$

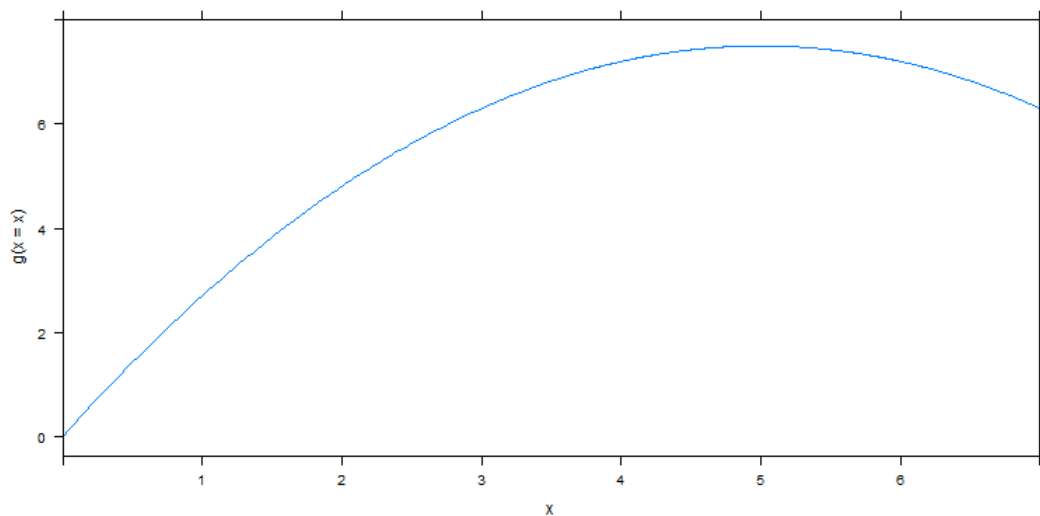
Where $N(t)$ denote the number of crimes committed in year t , with $t=0$ corresponding to the beginning of 2006. Find where the function N is increasing and where it is decreasing.

Solution The derivative N' of the function N is

$$N'(t) = -0.3t^2 + 3t = -0.3t(t - 10)$$

Since $N'(t) > 0$ for t in the interval $(0,7)$, the function N is increasing throughout that interval

$$1.5 * (2 * x) - 0.1 * (3 * x^2)$$



2、 Effect of Advertising on Sales

The total sales S (in thousands of dollars) of Arctic Air Corporation, a manufacturer of automobile air conditioners, is related to the amount of money x (in thousands of dollars) the company spends on advertising its products by the formula

$$S(x) = -0.01x^3 + 1.5x^2 + 200 \quad (0 \leq x \leq 100)$$

Find the inflection point of the function S .

Solution The first two derivatives of S are given by

$$S'(x) = -0.03x^2 + 3x$$

$$S''(x) = -0.06x + 3$$

Setting $S''(x) = 0$ gives $x = 50$. So $(50, S(50))$ is the only candidate for an inflection point of S . Moreover, since

$$S''(x) > 0 \text{ for } x < 50$$

$$S''(x) < 0 \text{ for } x > 50$$

The point $(50, 2700)$ is an inflection point of the function S . The graph of S

appears below.

$$1.5 \cdot 2 - 0.01 \cdot (3 \cdot (2 \cdot x))$$

