單變量黃金時間數列分析

林子立

2025-06-10

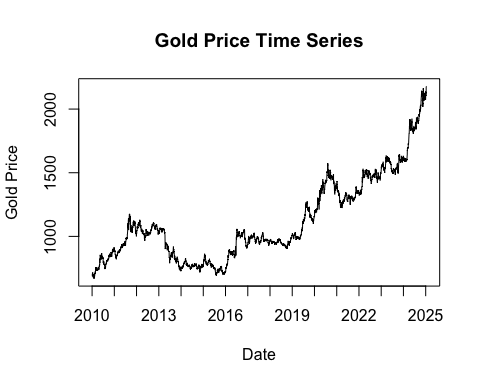
—Section 1: Time Series Analysis for the Gold Price (XUFIX)

## ── Attaching packages ─────────────────────────────────────── tidyverse 1.3.2 ──  
## ✔ ggplot2 3.5.1 ✔ dplyr 1.1.4  
## ✔ tibble 3.2.1 ✔ stringr 1.5.0  
## ✔ tidyr 1.3.0 ✔ forcats 0.5.2  
## ✔ purrr 1.0.2   
## ── Conflicts ────────────────────────────────────────── tidyverse\_conflicts() ──  
## ✖ dplyr::filter() masks stats::filter()  
## ✖ dplyr::lag() masks stats::lag()  
##   
## 載入套件：'zoo'  
##   
##   
## 下列物件被遮斷自 'package:base':  
##   
## as.Date, as.Date.numeric  
##   
##   
## Registered S3 method overwritten by 'quantmod':  
## method from  
## as.zoo.data.frame zoo   
##   
## Rows: 14497 Columns: 2  
## ── Column specification ────────────────────────────────────────────────────────  
## Delimiter: ","  
## dbl (1): LBMA Gold Prices - daily - euro - AM (LBMA/gold\_D/gold\_D\_EUR\_AM)  
## date (1): period  
##   
## ℹ Use `spec()` to retrieve the full column specification for this data.  
## ℹ Specify the column types or set `show\_col\_types = FALSE` to quiet this message.  
## Rows: 10268 Columns: 2  
## ── Column specification ────────────────────────────────────────────────────────  
## Delimiter: ","  
## dbl (1): DCOILWTICO  
## date (1): observation\_date  
##   
## ℹ Use `spec()` to retrieve the full column specification for this data.  
## ℹ Specify the column types or set `show\_col\_types = FALSE` to quiet this message.  
##   
## 載入套件：'aTSA'  
##   
##   
## 下列物件被遮斷自 'package:tseries':  
##   
## adf.test, kpss.test, pp.test  
##   
##   
## 下列物件被遮斷自 'package:graphics':  
##   
## identify  
##   
##   
##   
## 載入套件：'forecast'  
##   
##   
## 下列物件被遮斷自 'package:aTSA':  
##   
## forecast  
##   
##   
## 載入需要的套件：parallel  
##   
##   
## 載入套件：'rugarch'  
##   
##   
## 下列物件被遮斷自 'package:purrr':  
##   
## reduce  
##   
##   
## 下列物件被遮斷自 'package:stats':  
##   
## sigma

#Step1: Exploratory Data Analysis

##Data Visualization

# 時間向量與價格  
dates <- AU\_OIL$Date  
gold <- AU\_OIL$GoldPrice\_interp  
  
# 繪圖（線圖，不畫 x 軸）  
plot(dates, gold, type = "l",  
 main = "Gold Price Time Series",  
 ylab = "Gold Price",  
 xlab = "Date",  
 xaxt = "n") # 不畫預設 x 軸  
  
# 建立每年 1 月 1 日的日期向量  
years <- seq(from = as.Date("2010-01-01"), to = as.Date("2025-01-01"), by = "year")  
  
# 標上年份作為 x 軸刻度  
axis(side = 1, at = years, labels = format(years, "%Y"))

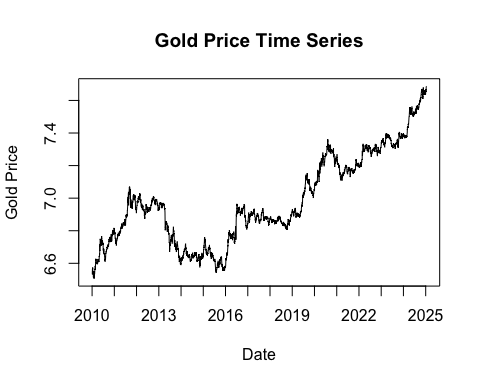


adf.test(gold)

## Augmented Dickey-Fuller Test   
## alternative: stationary   
##   
## Type 1: no drift no trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 2.71 0.99  
## [2,] 1 2.52 0.99  
## [3,] 2 2.46 0.99  
## [4,] 3 2.50 0.99  
## [5,] 4 2.54 0.99  
## [6,] 5 2.46 0.99  
## [7,] 6 2.47 0.99  
## [8,] 7 2.46 0.99  
## [9,] 8 2.53 0.99  
## [10,] 9 2.58 0.99  
## Type 2: with drift no trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 1.37 0.99  
## [2,] 1 1.18 0.99  
## [3,] 2 1.11 0.99  
## [4,] 3 1.16 0.99  
## [5,] 4 1.24 0.99  
## [6,] 5 1.17 0.99  
## [7,] 6 1.20 0.99  
## [8,] 7 1.16 0.99  
## [9,] 8 1.25 0.99  
## [10,] 9 1.31 0.99  
## Type 3: with drift and trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 -0.133 0.990  
## [2,] 1 -0.319 0.990  
## [3,] 2 -0.383 0.987  
## [4,] 3 -0.333 0.989  
## [5,] 4 -0.288 0.990  
## [6,] 5 -0.362 0.988  
## [7,] 6 -0.345 0.989  
## [8,] 7 -0.356 0.988  
## [9,] 8 -0.287 0.990  
## [10,] 9 -0.233 0.990  
## ----   
## Note: in fact, p.value = 0.01 means p.value <= 0.01

此圖呈現的是自2010年以來，LMBA黃金每日拍賣價（AM）的價格。從圖中可以看到，價格以大週期來看可以以2016年為分界找到兩個趨勢。在2016年以前黃金價格經歷先升後降的趨勢；2016年之後則是持續攀升。其中值得注意的現象是，黃金價格兩、三年就會存在一次跳動情形，造成短期價格劇烈變化的情況，如2013年終、2016年底、2019年底、2021年初及2024年初。 除了部分時間存在劇烈跳動的價格變化以外，長期趨勢也存在單調遞增與增加速度加快的趨勢。從此觀點出發，合理懷疑此資料序列存在單根。近一步使用Augmented Dickey-Fuller檢定（以下簡稱ADF檢定），可以發現不管有無趨勢(Trend)或飄移（Drift）的加入，以及滯後期為0-9期之間，強烈的證據都指向單根存在於此序列資料中。為了符合對於穩定態（Stationary）資料的統計假設，以下使用常見的資料處理方法：取對數及差分進行探討。

# 時間向量與價格  
dates <- AU\_OIL$Date  
gold <- log(AU\_OIL$GoldPrice\_interp)  
  
# 繪圖（線圖，不畫 x 軸）  
plot(dates, gold, type = "l",  
 main = "Gold Price Time Series",  
 ylab = "Gold Price",  
 xlab = "Date",  
 xaxt = "n") # 不畫預設 x 軸  
  
# 建立每年 1 月 1 日的日期向量  
years <- seq(from = as.Date("2010-01-01"), to = as.Date("2025-01-01"), by = "year")  
  
# 標上年份作為 x 軸刻度  
axis(side = 1, at = years, labels = format(years, "%Y"))

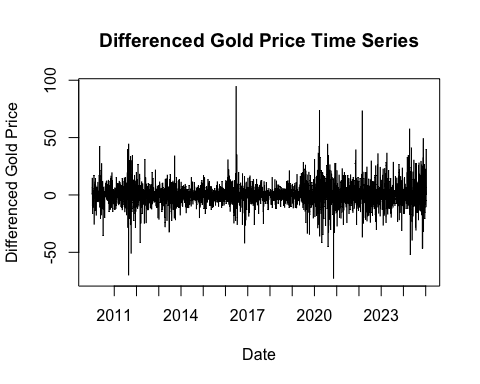


adf.test(gold)

## Augmented Dickey-Fuller Test   
## alternative: stationary   
##   
## Type 1: no drift no trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 2.14 0.990  
## [2,] 1 2.01 0.990  
## [3,] 2 1.97 0.988  
## [4,] 3 1.99 0.989  
## [5,] 4 1.98 0.989  
## [6,] 5 1.92 0.986  
## [7,] 6 1.92 0.986  
## [8,] 7 1.92 0.987  
## [9,] 8 1.93 0.987  
## [10,] 9 1.92 0.987  
## Type 2: with drift no trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 0.00958 0.956  
## [2,] 1 -0.11378 0.944  
## [3,] 2 -0.15154 0.939  
## [4,] 3 -0.12829 0.942  
## [5,] 4 -0.04057 0.952  
## [6,] 5 -0.09845 0.946  
## [7,] 6 -0.05907 0.951  
## [8,] 7 -0.11796 0.944  
## [9,] 8 -0.07078 0.950  
## [10,] 9 -0.04267 0.952  
## Type 3: with drift and trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 -1.15 0.914  
## [2,] 1 -1.30 0.876  
## [3,] 2 -1.34 0.857  
## [4,] 3 -1.31 0.869  
## [5,] 4 -1.27 0.887  
## [6,] 5 -1.34 0.857  
## [7,] 6 -1.32 0.865  
## [8,] 7 -1.35 0.853  
## [9,] 8 -1.32 0.867  
## [10,] 9 -1.31 0.872  
## ----   
## Note: in fact, p.value = 0.01 means p.value <= 0.01

首先嘗試的分析方法為一次差分。從圖中可以發現資料仍舊存在短期的劇烈變動以及穩定的增加趨勢。而且可以發現此增加趨勢似乎沒有緩和的現象，表明此時間數列可能存在單根。是以，近一步透過ADF檢定方法，分析趨勢、飄移及滯後期之下的資料是否存在單根。從檢定結果的報表中可以發現不管有無趨勢(Trend)或飄移（Drift）的加入，以及滯後期為0-9期之間，強烈的證據都指向單根存在於此序列資料中。為了符合對於穩定態（Stationary）資料的統計假設，以下使用常見的資料處理方法：取對數及差分進行探討。

# Step 1: 差分後的價格  
gold\_diff <- diff(AU\_OIL$GoldPrice\_interp)  
  
# Step 2: 調整時間向量（去掉第一天，因為差分少一天）  
dates\_diff <- AU\_OIL$Date[-1] # 或 tail(dates, -1)  
  
# Step 3: 繪圖（關閉預設 x 軸）  
plot(dates\_diff, gold\_diff, type = "l",  
 main = "Differenced Gold Price Time Series",  
 ylab = "Differenced Gold Price",  
 xlab = "Date",  
 xaxt = "n")  
  
# Step 4: 標出每年 1 月 1 日的位置  
years <- seq(from = as.Date("2010-01-01"), to = as.Date("2025-01-01"), by = "year")  
  
# 只選擇 years 有在日期範圍內的  
valid\_years <- years[years %in% dates\_diff]  
  
# Step 5: 畫上 x 軸標籤（以年份顯示）  
axis(side = 1, at = valid\_years, labels = format(valid\_years, "%Y"))

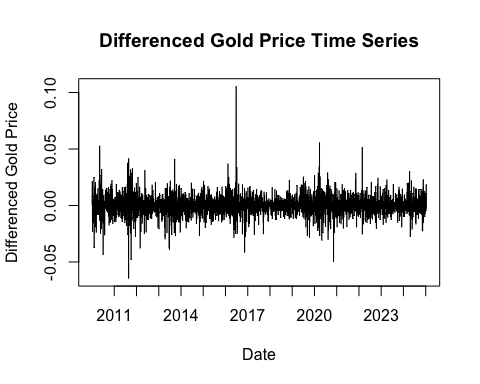


adf.test(diff(AU\_OIL$GoldPrice\_interp))

## Augmented Dickey-Fuller Test   
## alternative: stationary   
##   
## Type 1: no drift no trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 -69.8 0.01  
## [2,] 1 -49.7 0.01  
## [3,] 2 -41.9 0.01  
## [4,] 3 -37.0 0.01  
## [5,] 4 -32.2 0.01  
## [6,] 5 -29.6 0.01  
## [7,] 6 -27.3 0.01  
## [8,] 7 -26.2 0.01  
## [9,] 8 -25.1 0.01  
## [10,] 9 -23.4 0.01  
## Type 2: with drift no trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 -69.8 0.01  
## [2,] 1 -49.8 0.01  
## [3,] 2 -41.9 0.01  
## [4,] 3 -37.1 0.01  
## [5,] 4 -32.2 0.01  
## [6,] 5 -29.7 0.01  
## [7,] 6 -27.4 0.01  
## [8,] 7 -26.3 0.01  
## [9,] 8 -25.2 0.01  
## [10,] 9 -23.5 0.01  
## Type 3: with drift and trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 -69.9 0.01  
## [2,] 1 -49.8 0.01  
## [3,] 2 -42.0 0.01  
## [4,] 3 -37.1 0.01  
## [5,] 4 -32.3 0.01  
## [6,] 5 -29.8 0.01  
## [7,] 6 -27.5 0.01  
## [8,] 7 -26.4 0.01  
## [9,] 8 -25.3 0.01  
## [10,] 9 -23.6 0.01  
## ----   
## Note: in fact, p.value = 0.01 means p.value <= 0.01

其次，嘗試的資料屬於進行差分處理的資料，從資料來看，雖然仍舊有部分時間的資料有劇烈波動，但是相較前兩個圖形，明顯少了穩定上升的現象。進一步檢測資料的單根，可以發現與前兩個方法完全不同的結果。不論趨勢是否存在以及落後期數，在以0.05的信心水準之下，所以組合的檢定結果都表明這個方法處理的資料不具有單根，合理推測此筆資料適合進行分析。總結來看，透過差分處理的資料不再有單根，僅剩劇烈的波動問題存在於此筆資料。

# Step 1: 差分後的價格  
gold\_diff <- diff(log(AU\_OIL$GoldPrice\_interp))  
  
# Step 2: 調整時間向量（去掉第一天，因為差分少一天）  
dates\_diff <- AU\_OIL$Date[-1] # 或 tail(dates, -1)  
  
# Step 3: 繪圖（關閉預設 x 軸）  
plot(dates\_diff, gold\_diff, type = "l",  
 main = "Differenced Gold Price Time Series",  
 ylab = "Differenced Gold Price",  
 xlab = "Date",  
 xaxt = "n")  
  
# Step 4: 標出每年 1 月 1 日的位置  
years <- seq(from = as.Date("2010-01-01"), to = as.Date("2025-01-01"), by = "year")  
  
# 只選擇 years 有在日期範圍內的  
valid\_years <- years[years %in% dates\_diff]  
  
# Step 5: 畫上 x 軸標籤（以年份顯示）  
axis(side = 1, at = valid\_years, labels = format(valid\_years, "%Y"))



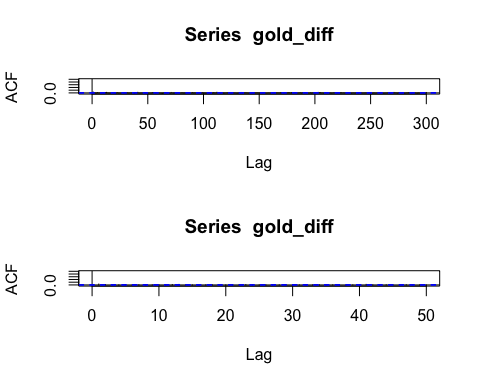
adf.test(diff(log(AU\_OIL$GoldPrice\_interp)))

## Augmented Dickey-Fuller Test   
## alternative: stationary   
##   
## Type 1: no drift no trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 -69.5 0.01  
## [2,] 1 -49.7 0.01  
## [3,] 2 -41.8 0.01  
## [4,] 3 -36.8 0.01  
## [5,] 4 -31.9 0.01  
## [6,] 5 -29.5 0.01  
## [7,] 6 -27.1 0.01  
## [8,] 7 -25.7 0.01  
## [9,] 8 -24.4 0.01  
## [10,] 9 -22.8 0.01  
## Type 2: with drift no trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 -69.6 0.01  
## [2,] 1 -49.8 0.01  
## [3,] 2 -41.8 0.01  
## [4,] 3 -36.9 0.01  
## [5,] 4 -32.0 0.01  
## [6,] 5 -29.6 0.01  
## [7,] 6 -27.2 0.01  
## [8,] 7 -25.8 0.01  
## [9,] 8 -24.5 0.01  
## [10,] 9 -22.9 0.01  
## Type 3: with drift and trend   
## lag ADF p.value  
## [1,] 0 -69.6 0.01  
## [2,] 1 -49.8 0.01  
## [3,] 2 -41.8 0.01  
## [4,] 3 -36.9 0.01  
## [5,] 4 -32.0 0.01  
## [6,] 5 -29.6 0.01  
## [7,] 6 -27.2 0.01  
## [8,] 7 -25.8 0.01  
## [9,] 8 -24.5 0.01  
## [10,] 9 -22.9 0.01  
## ----   
## Note: in fact, p.value = 0.01 means p.value <= 0.01

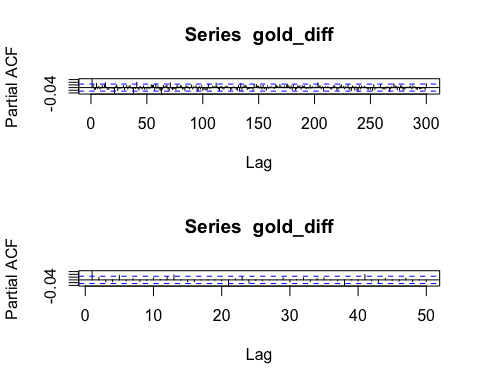
再來，嘗試結合差分與對數處理的方法。從圖中可以看到劇烈波動趨於穩定，且同樣少了長期穩定上升的趨勢，合理推測此種方法不只消除單根、也緩和劇烈波動的現象。進一步檢測資料的單根，可以發現與前兩個方法完全不同的結果。不論趨勢是否存在以及落後期數，在以0.05的信心水準之下，所以組合的檢定結果都表明這個方法處理的資料不具有單根，合理推測此筆資料適合進行分析。 總結個段資料處理方法可以發現，原始資料存在的劇烈波動及穩定上升趨勢（單根），透過結合差分及對數的處理為相對較佳的方法。故而，後續將以此方法進行深入分析與建立解釋模型。

##Data mining

par(mfrow=c(2,1))  
acf(gold\_diff, lag.max=300)  
acf(gold\_diff, lag.max=50)



pacf(gold\_diff, lag.max=300)  
pacf(gold\_diff, lag.max=50)



par(mfrow=c(1,1))

AR(1) ,MA(1)

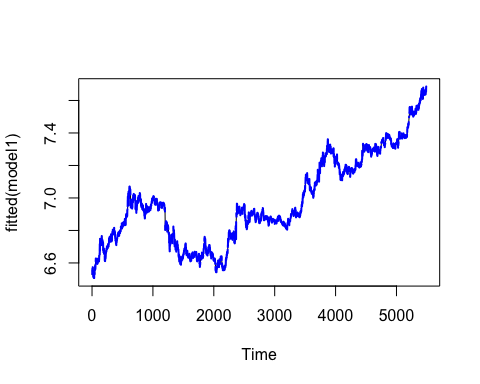
model1 <- arima(log(AU\_OIL$GoldPrice\_interp), order = c(1,1,1))  
model1

##   
## Call:  
## arima(x = log(AU\_OIL$GoldPrice\_interp), order = c(1, 1, 1))  
##   
## Coefficients:  
## ar1 ma1  
## 0.2256 -0.1624  
## s.e. 0.1665 0.1678  
##   
## sigma^2 estimated as 5.253e-05: log likelihood = 19256.16, aic = -38506.31

plot(fitted(model1))  
nrow(AU\_OIL)

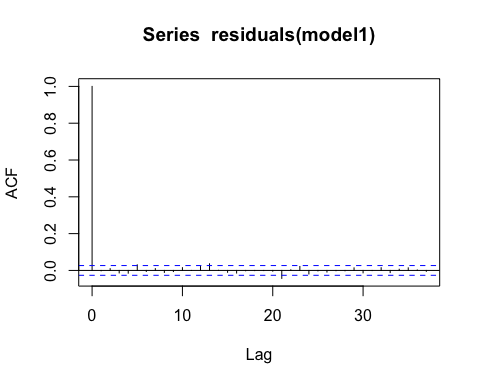
## [1] 5490

lines(1:nrow(AU\_OIL), y=log(AU\_OIL$GoldPrice), type="l", lwd=2, col="blue")

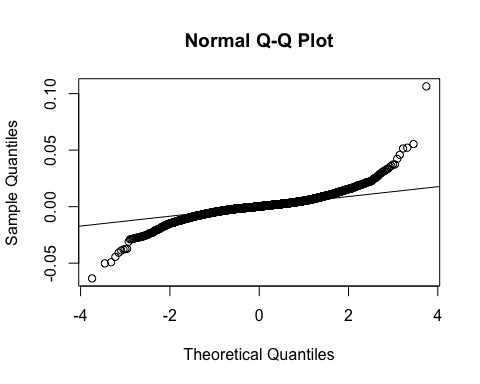


AR1, MA1的模型看起來不錯，

acf(residuals(model1))



qqnorm(residuals(model1)); qqline(residuals(model1))



ks.test(residuals(model1), "pnorm")

##   
## Asymptotic one-sample Kolmogorov-Smirnov test  
##   
## data: residuals(model1)  
## D = 0.48664, p-value < 2.2e-16  
## alternative hypothesis: two-sided

library(nortest)  
ad.test(residuals(model1))

##   
## Anderson-Darling normality test  
##   
## data: residuals(model1)  
## A = 119.85, p-value < 2.2e-16

Box.test(residuals(model1), lag = 20, type = "Ljung-Box")

##   
## Box-Ljung test  
##   
## data: residuals(model1)  
## X-squared = 21.921, df = 20, p-value = 0.3448

根據 Gauss-Markov 定理，線性模型若要具備最佳線性無偏估計量（BLUE）的性質，必須滿足數項假設，包括：誤差項彼此獨立、具同質變異（homoscedasticity），且通常進一步假設服從常態分布（normality），以利後續推論。在進行模型殘差分析時，本文依序透過殘差分布圖與常態分布的分位數圖（Q-Q plot），以及 Anderson-Darling 檢定（A-D 檢定） 來檢驗殘差的常態性；使用 Permutation Test 以非參數方式比較前後期殘差分布是否一致；最後再以 Box-Ljung Test 檢驗殘差的自我相關性。

從殘差分析圖中可觀察到明顯的厚尾現象（heavy tail），顯示殘差偏離常態分布；同時，A-D 檢定的 p 值小於 0.01，也顯示有統計顯著的證據拒絕常態假設。此外，Box-Ljung Test 的 p 值為 0.3448，遠高於 0.05 的信心水準，表示殘差並無明顯的自相關性。

基於上述殘差不符合常態分布的結果，傳統的 F 檢定將可能導致誤導性的推論，因其對常態性具高度敏感性。因此，為避免違反 F 檢定前提所帶來的偏誤，本文改以置換檢定（Permutation Test）來比較不同時間段的殘差變異，作為檢驗異質變異的替代方案。置換檢定不依賴資料的分布型態，能在較少前提下提供可靠的推論結果，特別適合應用於殘差存在偏態或厚尾的情境下。

set.seed(42) # 固定隨機種子  
  
# 假設你用的是模型殘差  
res <- residuals(model1)  
  
# 分組  
n <- length(res)  
half <- floor(n / 2)  
group1 <- res[1:half]  
group2 <- res[(half + 1):n]  
  
# 真實標準差差異  
obs\_diff <- abs(sd(group1) - sd(group2))  
  
# 置換檢定  
n\_perm <- 10000  
perm\_diffs <- replicate(n\_perm, {  
 perm <- sample(res) # 隨機重組  
 g1 <- perm[1:half]  
 g2 <- perm[(half + 1):n]  
 abs(sd(g1) - sd(g2))  
})  
  
# p 值  
p\_value <- mean(perm\_diffs >= obs\_diff)  
cat("Permutation test p-value:", p\_value, "\n")

## Permutation test p-value: 0

基於模型殘差是否服從常態分布的疑慮，為進一步檢驗殘差變異是否隨時間改變，亦即是否存在異質變異（Heteroskedasticity）的情形，本研究採用置換檢定（Permutation Test）進行分析。置換檢定是一種非參數統計方法，適用於在不依賴特定分布假設（如常態性或等變異性）下，檢驗兩組資料在某統計量上的差異是否顯著。其核心概念在於：當虛無假設成立時，觀察值間具有可交換性（exchangeability），因此可透過隨機重排資料順序以建立統計量的虛無分布（null distribution），並比較實際觀察值的位置以計算 p 值，進而檢驗前後期殘差是否來自相同變異結構。本次分析中，最終所得的 permutation test p-value 為小於0.01，顯示殘差變異在時間上存在顯著差異，支持異質變異的存在。

總結本段可以得知，ARIMA模型對於黃金日價格估計上儘管符合多項OLS假設，然而異質變異問題存在估計問題中，不僅導致最小平方法估計（OLS）不為不偏估計量(Unbiased Estimator)，且無法根據Gauss-Markov定理計算出最佳線性不偏估計式(Best Linear Unbiased Estimater)。為解決此問題，以下嘗試使用AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity Model(以下簡稱ARCH 模型)進行分析。

# library(forecast)  
#   
# # Fit ARIMA(1,1,1) model  
# model1 <- arima(log(AU\_OIL$GoldPrice\_interp), order = c(1,1,1))  
#   
# # Extract fitted differences (Δlog\_price)  
# z\_fit <- fitted(model1) # length = N - 1  
#   
# # Get full time series  
# log\_gold <- log(AU\_OIL$GoldPrice\_interp)  
# dates <- AU\_OIL$Date  
#   
# # Initialize fitted log-price vector  
# log\_price\_hat <- rep(NA, length(log\_gold))  
# log\_price\_hat[2:length(log\_gold)] <- z\_fit  
#   
# # Residual standard deviation  
# resid\_sd <- sd(residuals(model1), na.rm = TRUE)  
#   
# # CI quantiles  
# z95 <- qnorm(0.975)  
# z90 <- qnorm(0.95)  
#   
# # Confidence intervals on log scale  
# upper95 <- log\_price\_hat + z95 \* resid\_sd  
# lower95 <- log\_price\_hat - z95 \* resid\_sd  
# upper90 <- log\_price\_hat + z90 \* resid\_sd  
# lower90 <- log\_price\_hat - z90 \* resid\_sd  
#   
# # Plot  
# plot(dates, log\_gold, type = "l", col = "black", lwd = 1.5,  
# main = "ARIMA(1,1,1) Fitted Values with 95% and 90% CI",  
# xlab = "Date", ylab = "log(Gold Price)")  
#   
# lines(dates, log\_price\_hat, col = "blue", lwd = 2)  
# lines(dates, upper95, col = "red", lty = 2)  
# lines(dates, lower95, col = "red", lty = 2)  
# lines(dates, upper90, col = "orange", lty = 3)  
# lines(dates, lower90, col = "orange", lty = 3)  
#   
# legend("topleft", legend = c("Actual log price", "Fitted", "95% CI", "90% CI"),  
# col = c("black", "blue", "red", "orange"),  
# lty = c(1, 1, 2, 3), lwd = c(1.5, 2, 1, 1))

# p <-predict(model1, n.ahead = 12)  
# exp(p$pred)

————–STEP2 ARCH model

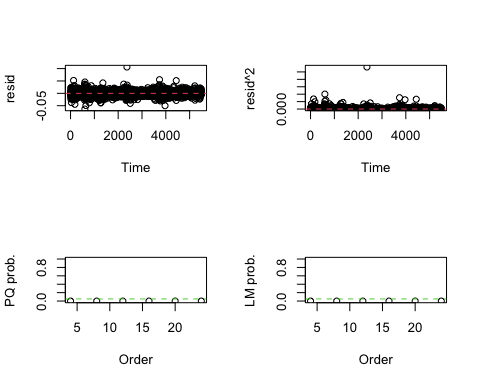
Box.test(res,type="Ljung-Box", fitdf=1)

##   
## Box-Ljung test  
##   
## data: res  
## X-squared = 0.023729, df = 0, p-value < 2.2e-16

Recalled the result of the Ljung-Box test for the residuals which has sufficient evidence showing the series is autocorrelated.

arch.test(model1, output = TRUE)

## ARCH heteroscedasticity test for residuals   
## alternative: heteroscedastic   
##   
## Portmanteau-Q test:   
## order PQ p.value  
## [1,] 4 58.2 7.09e-12  
## [2,] 8 178.1 0.00e+00  
## [3,] 12 202.4 0.00e+00  
## [4,] 16 250.1 0.00e+00  
## [5,] 20 264.2 0.00e+00  
## [6,] 24 279.1 0.00e+00  
## Lagrange-Multiplier test:   
## order LM p.value  
## [1,] 4 18784 0  
## [2,] 8 7547 0  
## [3,] 12 4942 0  
## [4,] 16 3482 0  
## [5,] 20 2762 0  
## [6,] 24 2282 0



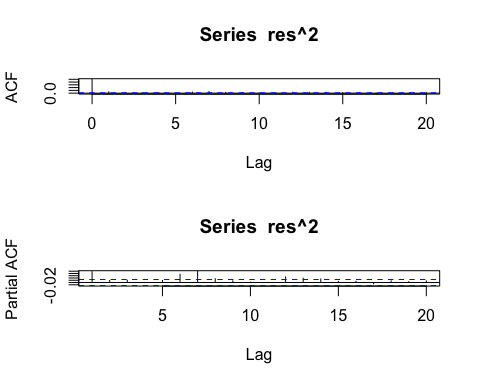
為檢驗殘差中是否存在條件異質變異，本研究進一步對 ARIMA 模型殘差進行 ARCH LM 檢定（Lagrange Multiplier Test for ARCH effects）。從結果圖中可觀察到，無論是 Portmanteau Q test（PQ）或 Lagrange Multiplier test（LM）於各滯後階數下的 p 值皆遠低於 0.05，顯示在顯著水準下拒絕「不存在 ARCH 效應」的虛無假設，亦即殘差中存在顯著的變異聚集現象（volatility clustering）。因此，採用 ARCH 或 GARCH 類模型進行條件變異數建模是有其統計根據的。

library(FinTS)

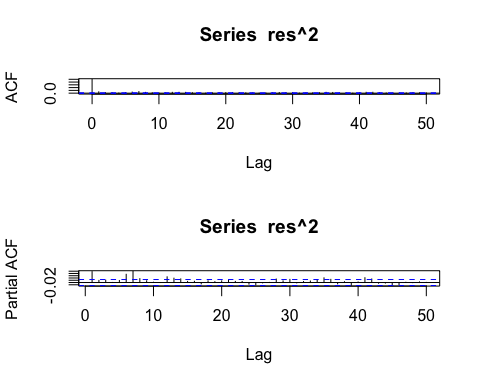
##   
## 載入套件：'FinTS'

## 下列物件被遮斷自 'package:forecast':  
##   
## Acf

par(mfrow=c(2,1))  
acf(res^2, lag.max=20)  
pacf(res^2, lag.max=20)



acf(res^2, lag.max=50)  
pacf(res^2, lag.max=50)



par(mfrow=c(1,1))  
  
ArchTest(res, lags = 5)

##   
## ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects  
##   
## data: res  
## Chi-squared = 56.471, df = 5, p-value = 6.5e-11

ACF與PACF的圖形是用來決定ARCH模型滯後期數的判斷依據之一，良好的ARCH模型應該具有拖尾（Tails off）的ACF圖形以及截斷的（Cut-Off）的PACF圖形，PACF截斷的期數即為ARCH模型的滯後期數。從圖中可以看到ACF在第0期之後的期數，幾乎都與0沒有顯著差異；然而PACF圖形則有兩種可能：截斷在第一期以及截斷在第7期。歸納上述的圖形分析結論，可以推測殘差可能有兩個潛在模型：ARCH(1)或是ARCH(7)。以下將擬合兩個模型後，透過評估係數及相關模型指標後進行選擇。

# library(zoo)  
# roll\_sd <- rollapply(log(AU\_OIL$GoldPrice\_interp), width = 365, FUN = sd, align = "right", fill = NA)  
#   
# plot(AU\_OIL$Date, roll\_sd, type = "l",  
# main = "Rolling Standard Deviation (1 Year)",  
# ylab = "SD", xlab = "Date")  
#所有的觀測值都落在fitted value的95%信賴區間內

# 建立 ARCH(1) with ARIMA(1,1,1) 均值結構  
spec1 <- ugarchspec(  
 variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 0)), # ARCH(1)  
 mean.model = list(armaOrder = c(1, 1), include.mean = TRUE),  
 distribution.model = "norm"  
)  
  
# 建立 ARCH(2) with ARIMA(1,1,1) 均值結構  
spec2 <- ugarchspec(  
 variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(7, 0)), # ARCH(7)  
 mean.model = list(armaOrder = c(1, 1), include.mean = TRUE),  
 distribution.model = "norm"  
)  
  
# 使用對數轉換後的價格資料  
log\_gold <- log(AU\_OIL$GoldPrice\_interp)  
  
# 擬合模型  
model1.1 <- ugarchfit(spec = spec1, data = log\_gold)  
model1.2 <- ugarchfit(spec = spec2, data = log\_gold)  
model1.1

##   
## \*---------------------------------\*  
## \* GARCH Model Fit \*  
## \*---------------------------------\*  
##   
## Conditional Variance Dynamics   
## -----------------------------------  
## GARCH Model : sGARCH(1,0)  
## Mean Model : ARFIMA(1,0,1)  
## Distribution : norm   
##   
## Optimal Parameters  
## ------------------------------------  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.860429 0.010720 639.9485 0  
## ar1 0.999961 0.000555 1802.3836 0  
## ma1 0.097892 0.000097 1005.7119 0  
## omega 0.000045 0.000001 42.6109 0  
## alpha1 0.057560 0.008386 6.8641 0  
##   
## Robust Standard Errors:  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.860429 1.3233e+03 0.005184 0.99586  
## ar1 0.999961 7.1316e+01 0.014022 0.98881  
## ma1 0.097892 1.2930e+01 0.007571 0.99396  
## omega 0.000045 7.3290e-03 0.006179 0.99507  
## alpha1 0.057560 4.7773e+01 0.001205 0.99904  
##   
## LogLikelihood : 19318.7   
##   
## Information Criteria  
## ------------------------------------  
##   
## Akaike -7.0360  
## Bayes -7.0299  
## Shibata -7.0360  
## Hannan-Quinn -7.0339  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 1.728 1.887e-01  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][5] 6.576 6.940e-06  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][9] 10.054 8.741e-03  
## d.o.f=2  
## H0 : No serial correlation  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 0.003553 0.9525  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][2] 0.003837 0.9956  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][5] 0.077507 0.9989  
## d.o.f=1  
##   
## Weighted ARCH LM Tests  
## ------------------------------------  
## Statistic Shape Scale P-Value  
## ARCH Lag[2] 0.000568 0.500 2.000 0.9810  
## ARCH Lag[4] 0.092311 1.397 1.611 0.9856  
## ARCH Lag[6] 0.149427 2.222 1.500 0.9978  
##   
## Nyblom stability test  
## ------------------------------------  
## Joint Statistic: 9.4696  
## Individual Statistics:   
## mu 1.0000  
## ar1 0.9999  
## ma1 0.2469  
## omega 1.8392  
## alpha1 6.6346  
##   
## Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)  
## Joint Statistic: 1.28 1.47 1.88  
## Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75  
##   
## Sign Bias Test  
## ------------------------------------  
## t-value prob sig  
## Sign Bias 0.962 3.361e-01   
## Negative Sign Bias 3.784 1.560e-04 \*\*\*  
## Positive Sign Bias 2.336 1.952e-02 \*\*  
## Joint Effect 21.695 7.548e-05 \*\*\*  
##   
##   
## Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:  
## ------------------------------------  
## group statistic p-value(g-1)  
## 1 20 843.1 1.489e-166  
## 2 30 905.9 6.298e-172  
## 3 40 935.5 6.784e-171  
## 4 50 982.8 5.705e-174  
##   
##   
## Elapsed time : 1.048136

model1.2

##   
## \*---------------------------------\*  
## \* GARCH Model Fit \*  
## \*---------------------------------\*  
##   
## Conditional Variance Dynamics   
## -----------------------------------  
## GARCH Model : sGARCH(7,0)  
## Mean Model : ARFIMA(1,0,1)  
## Distribution : norm   
##   
## Optimal Parameters  
## ------------------------------------  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.525533 0.007248 9.0030e+02 0.000000  
## ar1 1.000000 0.000201 4.9699e+03 0.000000  
## ma1 0.165986 0.014909 1.1134e+01 0.000000  
## omega 0.000018 0.000001 1.9144e+01 0.000000  
## alpha1 0.243791 0.035500 6.8673e+00 0.000000  
## alpha2 0.012882 0.006386 2.0171e+00 0.043682  
## alpha3 0.000000 0.010276 2.8000e-05 0.999978  
## alpha4 0.000000 0.035824 5.0000e-06 0.999996  
## alpha5 0.016922 0.006962 2.4305e+00 0.015079  
## alpha6 0.179089 0.029815 6.0066e+00 0.000000  
## alpha7 0.355204 0.031522 1.1268e+01 0.000000  
##   
## Robust Standard Errors:  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.525533 0.005294 1.2326e+03 0.000000  
## ar1 1.000000 0.000417 2.3998e+03 0.000000  
## ma1 0.165986 0.071870 2.3095e+00 0.020914  
## omega 0.000018 0.000004 4.6864e+00 0.000003  
## alpha1 0.243791 0.286725 8.5026e-01 0.395182  
## alpha2 0.012882 0.011126 1.1578e+00 0.246950  
## alpha3 0.000000 0.108039 3.0000e-06 0.999998  
## alpha4 0.000000 0.401670 0.0000e+00 1.000000  
## alpha5 0.016922 0.023252 7.2775e-01 0.466764  
## alpha6 0.179089 0.232793 7.6931e-01 0.441711  
## alpha7 0.355204 0.149947 2.3689e+00 0.017843  
##   
## LogLikelihood : 19849.64   
##   
## Information Criteria  
## ------------------------------------  
##   
## Akaike -7.2272  
## Bayes -7.2139  
## Shibata -7.2272  
## Hannan-Quinn -7.2226  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 3.621 5.704e-02  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][5] 13.318 0.000e+00  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][9] 15.629 1.794e-05  
## d.o.f=2  
## H0 : No serial correlation  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 1.755 1.852e-01  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][20] 35.556 7.138e-06  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][34] 68.998 5.429e-11  
## d.o.f=7  
##   
## Weighted ARCH LM Tests  
## ------------------------------------  
## Statistic Shape Scale P-Value  
## ARCH Lag[8] 1.671 0.500 2.000 0.19611  
## ARCH Lag[10] 6.470 1.488 1.815 0.06665  
## ARCH Lag[12] 10.468 2.451 1.700 0.02883  
##   
## Nyblom stability test  
## ------------------------------------  
## Joint Statistic: 8.2622  
## Individual Statistics:   
## mu 0.0006515  
## ar1 0.4418652  
## ma1 0.1218307  
## omega 0.2216975  
## alpha1 0.7544903  
## alpha2 0.1142603  
## alpha3 0.5043903  
## alpha4 4.3426062  
## alpha5 0.1049096  
## alpha6 0.2166597  
## alpha7 0.1517165  
##   
## Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)  
## Joint Statistic: 2.49 2.75 3.27  
## Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75  
##   
## Sign Bias Test  
## ------------------------------------  
## t-value prob sig  
## Sign Bias 0.4837 0.6286   
## Negative Sign Bias 0.3956 0.6924   
## Positive Sign Bias 1.0306 0.3028   
## Joint Effect 1.2643 0.7376   
##   
##   
## Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:  
## ------------------------------------  
## group statistic p-value(g-1)  
## 1 20 645.7 1.112e-124  
## 2 30 678.4 3.208e-124  
## 3 40 730.4 2.360e-128  
## 4 50 737.6 1.184e-123  
##   
##   
## Elapsed time : 1.593902

為評估不同階數之 ARCH 模型在解釋黃金價格變異性方面的表現，本文分別建構以 ARIMA(1,1,1) 為均值結構的 ARCH(1) 與 ARCH(7) 模型進行比較。從樣本內擬合指標觀察，ARCH(7) 模型的對數似然值（LogLikelihood = 19849.64）高於 ARCH(1) 模型（19318.7），且其 AIC 值（-7.2272）亦優於 ARCH(1) 的 -7.0360，顯示在樣本內擬合層面 ARCH(7) 模型較佳。

然而，深入觀察模型診斷結果可發現，ARCH(7) 存在多項統計上的潛在問題。其殘差平方的 Ljung-Box 檢定在高階（Lag 20 與 Lag 34）下出現顯著結果（p < 0.01），顯示仍存在殘差結構未被捕捉；此外，ARCH LM 檢定在 Lag 12 時亦呈現邊界顯著性（p = 0.02883），說明變異數模型可能未完全描述波動性。穩定性分析方面，ARCH(7) 模型的 alpha4 參數對應 Nyblom 統計量為 4.34，遠超過 1% 臨界值（0.75），顯示參數存在嚴重不穩定問題，且多數 alpha 參數在 robust 標準誤下變得不顯著，增加模型解釋上的不確定性。

相比之下，ARCH(1) 模型雖然 AIC 略高，但模型結構簡潔，所有參數顯著，殘差與殘差平方均符合白噪音假設，且未觀察到殘留的 ARCH 效應。其 Nyblom 檢定中，唯一顯著不穩定的是 alpha1，但幅度相對 ARCH(7) 為低，整體結構較為穩定。

綜上所述，ARCH(7) 雖在擬合表現上佔優，但模型不穩定且解釋力不一致，存在過度擬合風險；而 ARCH(1) 模型則在統計顯著性、殘差結構與穩定性方面表現更為穩健。因此，本文建議採用 ARCH(1) 作為黃金價格變異數建模的主要架構，並可於後續進一步考慮 ARCH(2) 或 ARCH(3) 作為潛在折衷方案。

LL\_full <- likelihood(model1.2) # ARCH(7)  
LL\_restricted <- likelihood(model1.1) # ARCH(1)  
  
LR\_stat <- 2 \* (LL\_full - LL\_restricted)  
df <- 6  
p\_value <- pchisq(LR\_stat, df = df, lower.tail = FALSE)  
  
cat("Likelihood Ratio Statistic:", LR\_stat, "\n")

## Likelihood Ratio Statistic: 1061.871

cat("p-value:", p\_value, "\n")

## p-value: 3.701049e-226

為比較 ARCH(1) 與 ARCH(7) 模型在條件變異數建模上的解釋力，本文進行似然比檢定。結果顯示，ARCH(7) 模型相較於 ARCH(1) 的對數似然值顯著提高（LR 統計量 = 1061.871，df = 6，p 值 <2.2e-16），表示多加入的延遲變異數項對模型整體擬合具有統計上的顯著貢獻。然而，雖然 ARCH(7) 在樣本內表現優越，其模型參數顯著性、穩定性與殘差結構檢定結果顯示存在過度擬合與不穩定性問題，多數 項於 robust 標準誤下不顯著，Nyblom個別檢定亦出現超過臨界值情形。因此，在統計顯著與模型穩健性間取得平衡下，本文仍建議採用較為簡潔且結構穩定的 ARCH(1) 模型，並視情況進行中階（例如 ARCH(2)–ARCH(3)）模型之敏感性分析以尋求最佳折衷。

library(e1071) # for skewness and kurtosis  
  
# 取標準化殘差  
resid\_std <- residuals(model1.1, standardize = TRUE)  
  
# 計算指標  
sk <- skewness(resid\_std)  
ku <- kurtosis(resid\_std)  
  
cat("Skewness:", sk, "\n")

## Skewness: -6.554653

cat("Kurtosis:", ku, "\n")

## Kurtosis: 237.8278

# 取標準化殘差  
resid\_std <- residuals(model1.2, standardize = TRUE)  
  
# 計算指標  
sk <- skewness(resid\_std)  
ku <- kurtosis(resid\_std)  
  
cat("Skewness:", sk, "\n")

## Skewness: -0.2203127

cat("Kurtosis:", ku, "\n")

## Kurtosis: 6.646643

模型的 標準化殘差 不僅不是常態分布，還呈現極度偏態與厚尾，這會嚴重低估風險與尾端事件的機率。

# ARCH(1) with skewed-t  
spec\_sstd <- ugarchspec(  
 variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 0)),  
 mean.model = list(armaOrder = c(1, 1), include.mean = TRUE),  
 distribution.model = "sstd"  
)  
  
  
# ARCH(7) with t-distribution  
spec\_std <- ugarchspec(  
 variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(7, 0)),  
 mean.model = list(armaOrder = c(1, 1), include.mean = TRUE),  
 distribution.model = "std"  
)  
  
  
  
  
model1.1.sstd <- ugarchfit(spec = spec\_sstd, data = log\_gold)  
model1.2.std <- ugarchfit(spec = spec\_std, data = log\_gold)  
model1.1.sstd

##   
## \*---------------------------------\*  
## \* GARCH Model Fit \*  
## \*---------------------------------\*  
##   
## Conditional Variance Dynamics   
## -----------------------------------  
## GARCH Model : sGARCH(1,0)  
## Mean Model : ARFIMA(1,0,1)  
## Distribution : sstd   
##   
## Optimal Parameters  
## ------------------------------------  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.531953 0.014191 460.2958 0  
## ar1 1.000000 0.000171 5846.9024 0  
## ma1 0.141898 0.012380 11.4615 0  
## omega 0.000045 0.000005 8.9861 0  
## alpha1 0.998990 0.141163 7.0768 0  
## skew 0.976734 0.012969 75.3158 0  
## shape 2.556399 0.088840 28.7752 0  
##   
## Robust Standard Errors:  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.531953 0.002104 3104.7875 0  
## ar1 1.000000 0.000217 4616.8002 0  
## ma1 0.141898 0.010760 13.1873 0  
## omega 0.000045 0.000005 9.6728 0  
## alpha1 0.998990 0.126004 7.9282 0  
## skew 0.976734 0.015164 64.4115 0  
## shape 2.556399 0.074564 34.2848 0  
##   
## LogLikelihood : 20301.64   
##   
## Information Criteria  
## ------------------------------------  
##   
## Akaike -7.3933  
## Bayes -7.3849  
## Shibata -7.3933  
## Hannan-Quinn -7.3904  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 2.751 9.720e-02  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][5] 10.853 2.998e-15  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][9] 13.082 3.513e-04  
## d.o.f=2  
## H0 : No serial correlation  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 6.390 0.01148  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][2] 6.610 0.01513  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][5] 8.861 0.01795  
## d.o.f=1  
##   
## Weighted ARCH LM Tests  
## ------------------------------------  
## Statistic Shape Scale P-Value  
## ARCH Lag[2] 0.4403 0.500 2.000 0.506976  
## ARCH Lag[4] 2.8832 1.397 1.611 0.279162  
## ARCH Lag[6] 13.4937 2.222 1.500 0.001855  
##   
## Nyblom stability test  
## ------------------------------------  
## Joint Statistic: 5.2957  
## Individual Statistics:   
## mu 0.0001138  
## ar1 0.3388701  
## ma1 0.0959737  
## omega 1.6359461  
## alpha1 2.1127347  
## skew 0.6173650  
## shape 1.8134559  
##   
## Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)  
## Joint Statistic: 1.69 1.9 2.35  
## Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75  
##   
## Sign Bias Test  
## ------------------------------------  
## t-value prob sig  
## Sign Bias 0.364 0.715851   
## Negative Sign Bias 1.827 0.067778 \*  
## Positive Sign Bias 2.726 0.006439 \*\*\*  
## Joint Effect 11.653 0.008673 \*\*\*  
##   
##   
## Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:  
## ------------------------------------  
## group statistic p-value(g-1)  
## 1 20 61.64 2.121e-06  
## 2 30 61.64 3.845e-04  
## 3 40 80.03 1.189e-04  
## 4 50 89.67 3.504e-04  
##   
##   
## Elapsed time : 1.746556

model1.2.std

##   
## \*---------------------------------\*  
## \* GARCH Model Fit \*  
## \*---------------------------------\*  
##   
## Conditional Variance Dynamics   
## -----------------------------------  
## GARCH Model : sGARCH(7,0)  
## Mean Model : ARFIMA(1,0,1)  
## Distribution : std   
##   
## Optimal Parameters  
## ------------------------------------  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.532090 0.015083 4.3307e+02 0.00000  
## ar1 1.000000 0.000165 6.0564e+03 0.00000  
## ma1 0.170524 0.011190 1.5239e+01 0.00000  
## omega 0.000014 0.000001 1.0957e+01 0.00000  
## alpha1 0.441645 0.068745 6.4244e+00 0.00000  
## alpha2 0.012865 0.011992 1.0728e+00 0.28336  
## alpha3 0.000000 0.009962 2.3000e-05 0.99998  
## alpha4 0.000000 0.008553 3.3000e-05 0.99997  
## alpha5 0.005319 0.007911 6.7234e-01 0.50137  
## alpha6 0.160335 0.028116 5.7026e+00 0.00000  
## alpha7 0.378832 0.043225 8.7643e+00 0.00000  
## shape 3.297236 0.102222 3.2256e+01 0.00000  
##   
## Robust Standard Errors:  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.532090 0.002278 2.8679e+03 0.000000  
## ar1 1.000000 0.000276 3.6198e+03 0.000000  
## ma1 0.170524 0.010264 1.6613e+01 0.000000  
## omega 0.000014 0.000004 3.0391e+00 0.002373  
## alpha1 0.441645 0.197314 2.2383e+00 0.025203  
## alpha2 0.012865 0.033958 3.7884e-01 0.704807  
## alpha3 0.000000 0.026681 8.0000e-06 0.999993  
## alpha4 0.000000 0.024748 1.2000e-05 0.999991  
## alpha5 0.005319 0.020993 2.5336e-01 0.799987  
## alpha6 0.160335 0.059319 2.7029e+00 0.006873  
## alpha7 0.378832 0.088616 4.2750e+00 0.000019  
## shape 3.297236 0.094649 3.4837e+01 0.000000  
##   
## LogLikelihood : 20496.19   
##   
## Information Criteria  
## ------------------------------------  
##   
## Akaike -7.4624  
## Bayes -7.4479  
## Shibata -7.4624  
## Hannan-Quinn -7.4573  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 1.406 2.358e-01  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][5] 12.029 0.000e+00  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][9] 14.549 6.488e-05  
## d.o.f=2  
## H0 : No serial correlation  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 5.867 1.543e-02  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][20] 33.221 2.557e-05  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][34] 57.785 2.751e-08  
## d.o.f=7  
##   
## Weighted ARCH LM Tests  
## ------------------------------------  
## Statistic Shape Scale P-Value  
## ARCH Lag[8] 0.420 0.500 2.000 0.5169  
## ARCH Lag[10] 3.287 1.488 1.815 0.3015  
## ARCH Lag[12] 6.337 2.451 1.700 0.1807  
##   
## Nyblom stability test  
## ------------------------------------  
## Joint Statistic: 68.6197  
## Individual Statistics:   
## mu 0.00063  
## ar1 1.24743  
## ma1 0.13534  
## omega 16.18311  
## alpha1 4.57779  
## alpha2 0.38396  
## alpha3 9.47955  
## alpha4 4.30646  
## alpha5 0.20720  
## alpha6 1.67443  
## alpha7 3.36859  
## shape 1.02076  
##   
## Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)  
## Joint Statistic: 2.69 2.96 3.51  
## Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75  
##   
## Sign Bias Test  
## ------------------------------------  
## t-value prob sig  
## Sign Bias 0.4506 0.652318   
## Negative Sign Bias 1.6655 0.095870 \*  
## Positive Sign Bias 2.7831 0.005402 \*\*\*  
## Joint Effect 10.5197 0.014628 \*\*  
##   
##   
## Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:  
## ------------------------------------  
## group statistic p-value(g-1)  
## 1 20 42.94 1.321e-03  
## 2 30 67.79 6.041e-05  
## 3 40 79.50 1.375e-04  
## 4 50 84.97 1.093e-03  
##   
##   
## Elapsed time : 2.809492

ARCH(7)裡面的參數在更換分布後仍舊有不同的部分

兩個模型解釋力有顯著不同

library(e1071) # for skewness and kurtosis  
  
# 取標準化殘差  
resid\_std <- residuals(model1.1.sstd, standardize = TRUE)  
  
# 計算指標  
sk <- skewness(resid\_std)  
ku <- kurtosis(resid\_std)  
  
cat("Skewness:", sk, "\n")

## Skewness: 0.1415584

cat("Kurtosis:", ku, "\n")

## Kurtosis: 8.583846

# 取標準化殘差  
resid\_std <- residuals(model1.2.std, standardize = TRUE)  
  
# 計算指標  
sk <- skewness(resid\_std)  
ku <- kurtosis(resid\_std)  
  
cat("Skewness:", sk, "\n")

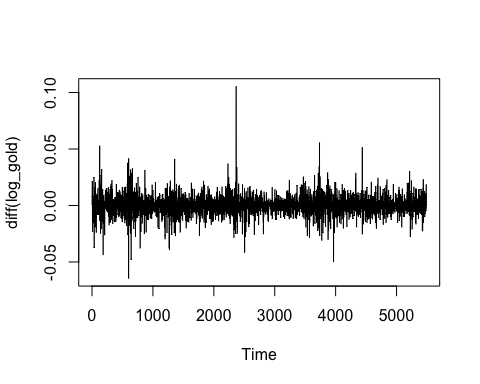
## Skewness: -0.3464603

cat("Kurtosis:", ku, "\n")

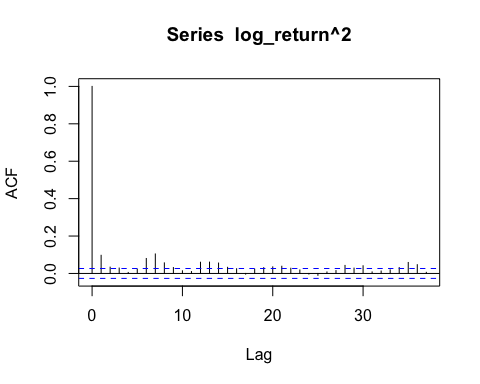
## Kurtosis: 8.205279

在本次分析中，我們針對四種不同的模型，評估它們的標準化殘差與理論分布的契合程度。首先，採用常態分布誤差的 Model 1.1（ARIMA(1,1,1) 搭配 ARCH(1)）所產生的標準化殘差表現極差，呈現出強烈的負偏態（skewness 為 -6.55）與極高的峰度（kurtosis 達 237.83），顯示誤差分布高度偏離對稱且具有非常厚的尾部，遠遠超出常態分布的假設，這使得模型在預測或風險評估上可能非常不可靠。 相較之下，Model 1.2（ARIMA(1,1,1) 搭配 ARCH(7)）同樣假設常態分布，但在殘差表現上略有改善，偏態降至 -0.22，峰度亦降至 6.65，雖仍偏離理論常態分布，卻已不再如前者般極端。這顯示增加 ARCH 項次可在一定程度上捕捉變異結構，但仍無法解決常態分布誤差對金融數列厚尾的低適應性問題。 進一步地，當我們將誤差分布改為 skewed-t 分布時，情況有明顯改善。Model 1.1.sstt（ARIMA(1,1,1) + ARCH(1) + skewed-t error）所產生的殘差具有良好的對稱性（skewness 約 0.14）與可接受的厚尾（kurtosis 為 8.58），明顯顯示 skewed-t 分布能有效捕捉金融資料中的非對稱與重尾特性。該模型的誤差分布與資料行為較為吻合，使模型在預測與風險估計上更具可靠性。 最後，在 Model 1.2.std（ARIMA(1,1,1) + ARCH(7) + t 分布誤差）中，誤差雖仍略帶負偏態（skewness -0.35），但峰度為 8.21，整體上仍可視為合理且穩定的模型。t 分布具備對極端值與波動的容納能力，因此在高波動金融資產建模中，具有實用價值。 綜合而言，純常態分布對誤差的假設無法充分描述金融時間數列的實際行為，尤其在厚尾與偏態明顯的情況下。相較之下，skewed-t 與 t 分布能更好地捕捉資料特性，其中又以 Model 1.1.sstt 的誤差行為最為貼近理論分布，是目前四者中最具代表性的模型選擇。

# 計算對數報酬（log return）  
log\_return <- diff(log(AU\_OIL$GoldPrice\_interp))  
ts.plot(diff(log\_gold))



acf(log\_return^2)



pacf(log\_return^2)



# ARCH(1) with skewed-t  
spec\_sstd2 <- ugarchspec(  
 variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 0)),  
 mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = TRUE),  
 distribution.model = "std"  
)  
  
  
# ARCH(7) with t-distribution  
spec\_std2 <- ugarchspec(  
 variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(7, 0)),  
 mean.model = list(armaOrder = c(0, 0), include.mean = TRUE),  
 distribution.model = "std"  
)  
  
  
  
  
model2.1.std <- ugarchfit(spec = spec\_sstd2, data = log\_gold)  
model2.2.std <- ugarchfit(spec = spec\_std2, data = log\_gold)  
model2.1.std

##   
## \*---------------------------------\*  
## \* GARCH Model Fit \*  
## \*---------------------------------\*  
##   
## Conditional Variance Dynamics   
## -----------------------------------  
## GARCH Model : sGARCH(1,0)  
## Mean Model : ARFIMA(0,0,0)  
## Distribution : std   
##   
## Optimal Parameters  
## ------------------------------------  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.893516 0.001715 4019.8754 0  
## omega 0.000033 0.000005 7.1319 0  
## alpha1 0.999000 0.019670 50.7878 0  
## shape 99.999989 13.913520 7.1873 0  
##   
## Robust Standard Errors:  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.893516 0.019994 344.7759 0  
## omega 0.000033 0.000006 5.9088 0  
## alpha1 0.999000 0.003526 283.3497 0  
## shape 99.999989 1.587639 62.9866 0  
##   
## LogLikelihood : 3008.904   
##   
## Information Criteria  
## ------------------------------------  
##   
## Akaike -1.0947  
## Bayes -1.0899  
## Shibata -1.0947  
## Hannan-Quinn -1.0930  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 5162 0  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][2] 7694 0  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][5] 15143 0  
## d.o.f=0  
## H0 : No serial correlation  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 9.682 0.001861  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][2] 10.482 0.001426  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][5] 12.034 0.002729  
## d.o.f=1  
##   
## Weighted ARCH LM Tests  
## ------------------------------------  
## Statistic Shape Scale P-Value  
## ARCH Lag[2] 1.599 0.500 2.000 0.206068  
## ARCH Lag[4] 2.516 1.397 1.611 0.338294  
## ARCH Lag[6] 18.265 2.222 1.500 0.000108  
##   
## Nyblom stability test  
## ------------------------------------  
## Joint Statistic: 543.307  
## Individual Statistics:   
## mu 1.9320  
## omega 0.1232  
## alpha1 13.4322  
## shape 388.6831  
##   
## Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)  
## Joint Statistic: 1.07 1.24 1.6  
## Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75  
##   
## Sign Bias Test  
## ------------------------------------  
## t-value prob sig  
## Sign Bias 0.43339 0.6647   
## Negative Sign Bias 0.04565 0.9636   
## Positive Sign Bias 0.37647 0.7066   
## Joint Effect 0.35991 0.9484   
##   
##   
## Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:  
## ------------------------------------  
## group statistic p-value(g-1)  
## 1 20 29091 0  
## 2 30 44123 0  
## 3 40 53617 0  
## 4 50 50191 0  
##   
##   
## Elapsed time : 0.7792852

model2.2.std

##   
## \*---------------------------------\*  
## \* GARCH Model Fit \*  
## \*---------------------------------\*  
##   
## Conditional Variance Dynamics   
## -----------------------------------  
## GARCH Model : sGARCH(7,0)  
## Mean Model : ARFIMA(0,0,0)  
## Distribution : std   
##   
## Optimal Parameters  
## ------------------------------------  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.892075 0.001711 4.0278e+03 0.000000  
## omega 0.000031 0.000005 6.4680e+00 0.000000  
## alpha1 0.937317 0.051759 1.8109e+01 0.000000  
## alpha2 0.058244 0.023160 2.5148e+00 0.011909  
## alpha3 0.000000 0.045664 3.0000e-06 0.999997  
## alpha4 0.003439 0.008053 4.2703e-01 0.669356  
## alpha5 0.000000 0.015083 2.0000e-06 0.999998  
## alpha6 0.000000 0.003152 1.0000e-06 0.999999  
## alpha7 0.000000 0.001233 4.0000e-05 0.999968  
## shape 99.999985 13.902146 7.1931e+00 0.000000  
##   
## Robust Standard Errors:  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 6.892075 0.020085 343.137391 0.00000  
## omega 0.000031 0.000006 5.296605 0.00000  
## alpha1 0.937317 0.062944 14.891355 0.00000  
## alpha2 0.058244 0.134885 0.431806 0.66588  
## alpha3 0.000000 0.089081 0.000002 1.00000  
## alpha4 0.003439 0.015254 0.225439 0.82164  
## alpha5 0.000000 0.014647 0.000002 1.00000  
## alpha6 0.000000 0.002239 0.000001 1.00000  
## alpha7 0.000000 0.000908 0.000054 0.99996  
## shape 99.999985 1.415403 70.651240 0.00000  
##   
## LogLikelihood : 3010.124   
##   
## Information Criteria  
## ------------------------------------  
##   
## Akaike -1.0929  
## Bayes -1.0809  
## Shibata -1.0929  
## Hannan-Quinn -1.0887  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 5177 0  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][2] 7715 0  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][5] 15186 0  
## d.o.f=0  
## H0 : No serial correlation  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 22.84 1.760e-06  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][20] 58.48 9.189e-12  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][34] 73.47 4.131e-12  
## d.o.f=7  
##   
## Weighted ARCH LM Tests  
## ------------------------------------  
## Statistic Shape Scale P-Value  
## ARCH Lag[8] 1.819 0.500 2.000 0.177434  
## ARCH Lag[10] 2.573 1.488 1.815 0.413416  
## ARCH Lag[12] 14.226 2.451 1.700 0.004659  
##   
## Nyblom stability test  
## ------------------------------------  
## Joint Statistic: 640.8687  
## Individual Statistics:   
## mu 2.29438  
## omega 0.06420  
## alpha1 14.98269  
## alpha2 1.25537  
## alpha3 0.25751  
## alpha4 0.32310  
## alpha5 0.30399  
## alpha6 0.55613  
## alpha7 0.02674  
## shape 428.64237  
##   
## Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)  
## Joint Statistic: 2.29 2.54 3.05  
## Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75  
##   
## Sign Bias Test  
## ------------------------------------  
## t-value prob sig  
## Sign Bias 1.5303 0.1260   
## Negative Sign Bias 0.8424 0.3996   
## Positive Sign Bias 0.8673 0.3858   
## Joint Effect 2.3715 0.4990   
##   
##   
## Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:  
## ------------------------------------  
## group statistic p-value(g-1)  
## 1 20 28797 0  
## 2 30 43830 0  
## 3 40 52964 0  
## 4 50 49552 0  
##   
##   
## Elapsed time : 1.607702

library(e1071) # for skewness and kurtosis  
  
# 取標準化殘差  
resid\_std <- residuals(model2.1.std, standardize = TRUE)  
  
# 計算指標  
sk <- skewness(resid\_std)  
ku <- kurtosis(resid\_std)  
  
cat("Skewness:", sk, "\n")

## Skewness: -0.2451922

cat("Kurtosis:", ku, "\n")

## Kurtosis: -1.713147

# 取標準化殘差  
resid\_std <- residuals(model2.2.std, standardize = TRUE)  
  
# 計算指標  
sk <- skewness(resid\_std)  
ku <- kurtosis(resid\_std)  
  
cat("Skewness:", sk, "\n")

## Skewness: -0.2527025

cat("Kurtosis:", ku, "\n")

## Kurtosis: -1.713428

當前模型採用 standard t-distribution 作為誤差分布進行估計，並以標準化殘差的偏態與峰度作為評估模型適切性的依據。分析結果顯示，無論在 model2.1.std 或 model2.2.std 中，殘差的偏態值皆略呈負值（分別為 -0.245 與 -0.253），顯示其分布具有輕微的左偏性。雖未顯著偏離對稱分布，但仍可能反映誤差項分布在實際資料中未能完全對稱。更顯著的偏離則出現在峰度部分。兩模型的 Excess Kurtosis 皆約為 -1.713，推算原始峰度約為 1.287，顯著低於常態分布理論值（Kurtosis = 3），亦與 heavy-tailed 分布特徵不符。

此一結果顯示，雖然模型在估計階段假設殘差服從 heavy-tailed 的 t-distribution，但實際標準化殘差並未表現出重尾特性，反而呈現輕尾分布結構。此一偏離可能意味著模型所假設的誤差分布與資料的真實生成機制不一致。若模型目的在於精確捕捉報酬序列的高階統計性質，則應考慮進一步檢驗其他替代分布的適配性，例如常態分布、skewed-normal 或 skewed-t 分布。此外，若殘差仍呈現異常波動或非對稱性，亦可考慮引入 GARCH 組件以提升對波動性聚集現象的建模能力。整體而言，上述統計指標提供初步證據，指出目前模型之分布假設可能未能充分反映資料本身的統計結構，後續應進一步進行模型修正與比較，以提升估計效能與推論信賴度。

——Section2.1 GARCH(可以不報告這段)

# 金價取對數報酬  
gold <- AU\_OIL$GoldPrice\_interp  
r\_gold <- diff(log(gold)) # log return  
# 指定 GARCH 模型結構（含均值方程式為 ARMA(1,1)，你可依實際模型調整）  
spec <- ugarchspec(  
 variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 1)),  
 mean.model = list(armaOrder = c(1, 1), include.mean = TRUE),  
 distribution.model = "std" # 也可以換成 "std"（學生T分布）  
)  
  
# 拟合模型  
fit <- ugarchfit(spec = spec, data = r\_gold)  
  
# 顯示結果  
show(fit)

##   
## \*---------------------------------\*  
## \* GARCH Model Fit \*  
## \*---------------------------------\*  
##   
## Conditional Variance Dynamics   
## -----------------------------------  
## GARCH Model : sGARCH(1,1)  
## Mean Model : ARFIMA(1,0,1)  
## Distribution : std   
##   
## Optimal Parameters  
## ------------------------------------  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 0.000202 0.000075 2.7066 0.006798  
## ar1 0.324930 0.081385 3.9925 0.000065  
## ma1 -0.213293 0.083652 -2.5498 0.010780  
## omega 0.000002 0.000001 2.5182 0.011797  
## alpha1 0.062255 0.009228 6.7464 0.000000  
## beta1 0.936201 0.004291 218.1924 0.000000  
## shape 2.601442 0.103814 25.0588 0.000000  
##   
## Robust Standard Errors:  
## Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)  
## mu 0.000202 0.000085 2.39224 0.016746  
## ar1 0.324930 0.077779 4.17761 0.000029  
## ma1 -0.213293 0.079262 -2.69098 0.007124  
## omega 0.000002 0.000003 0.52246 0.601349  
## alpha1 0.062255 0.068360 0.91070 0.362453  
## beta1 0.936201 0.042458 22.04988 0.000000  
## shape 2.601442 0.264008 9.85364 0.000000  
##   
## LogLikelihood : 20252.51   
##   
## Information Criteria  
## ------------------------------------  
##   
## Akaike -7.3768  
## Bayes -7.3683  
## Shibata -7.3768  
## Hannan-Quinn -7.3738  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 5.271 2.168e-02  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][5] 7.226 3.777e-07  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][9] 9.633 1.317e-02  
## d.o.f=2  
## H0 : No serial correlation  
##   
## Weighted Ljung-Box Test on Standardized Squared Residuals  
## ------------------------------------  
## statistic p-value  
## Lag[1] 4.922 2.651e-02  
## Lag[2\*(p+q)+(p+q)-1][5] 10.791 5.756e-03  
## Lag[4\*(p+q)+(p+q)-1][9] 23.330 2.721e-05  
## d.o.f=2  
##   
## Weighted ARCH LM Tests  
## ------------------------------------  
## Statistic Shape Scale P-Value  
## ARCH Lag[3] 4.519 0.500 2.000 3.352e-02  
## ARCH Lag[5] 10.527 1.440 1.667 4.886e-03  
## ARCH Lag[7] 22.144 2.315 1.543 1.803e-05  
##   
## Nyblom stability test  
## ------------------------------------  
## Joint Statistic: 394.9441  
## Individual Statistics:   
## mu 0.1778  
## ar1 0.1108  
## ma1 0.1119  
## omega 26.3263  
## alpha1 0.5465  
## beta1 0.6552  
## shape 0.6501  
##   
## Asymptotic Critical Values (10% 5% 1%)  
## Joint Statistic: 1.69 1.9 2.35  
## Individual Statistic: 0.35 0.47 0.75  
##   
## Sign Bias Test  
## ------------------------------------  
## t-value prob sig  
## Sign Bias 0.07788 9.379e-01   
## Negative Sign Bias 4.58722 4.592e-06 \*\*\*  
## Positive Sign Bias 2.29975 2.150e-02 \*\*  
## Joint Effect 28.27299 3.183e-06 \*\*\*  
##   
##   
## Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:  
## ------------------------------------  
## group statistic p-value(g-1)  
## 1 20 56.20 1.522e-05  
## 2 30 59.10 7.987e-04  
## 3 40 71.34 1.201e-03  
## 4 50 90.90 2.581e-04  
##   
##   
## Elapsed time : 1.180383

本研究採用 ARFIMA(1,0,1)–GARCH(1,1) 模型以評估黃金價格報酬序列之波動性，並假設誤差項服從學生t分布（Student’s t distribution），以捕捉金融資料常見之厚尾特性。模型中，均值方程包含一階自我回歸項與一階移動平均項，反映報酬在時間序列上的動態結構；而變異數方程則透過 GARCH(1,1) 架構捕捉波動性的條件異方差特性。

參數估計結果顯示，報酬序列之常數項（μ）為 0.000202，顯著為正，說明在控制波動性影響下，報酬具有微弱但顯著之平均正報酬。AR(1) 與 MA(1) 項分別為 0.325 與 -0.213，皆達統計顯著，顯示報酬具有中度自我依賴性，並會受先前誤差之調整效應所影響。在變異數方程方面，無條件波動項（omega）極小，表示序列本身波動基準水平甚低，但條件異方差之反應係數 alpha1 為 0.062、持續性係數 beta1 為 0.936，說明波動性具高度持續性，即存在顯著的 GARCH 效應。

此外，誤差分布的 shape 參數估計為 2.60，顯著偏離常態，顯示報酬資料具厚尾分布特性。此一結果亦強化學生t分布在金融時間序列建模中相較於常態分布的適切性。整體模型之對數概似函數（Log-Likelihood）為 20252.51，赤池資訊量準則（AIC）為 -7.3768，顯示模型在兼顧解釋力與簡潔性方面具有良好表現。

模型診斷方面，Ljung–Box 檢定雖在部分時滯下顯示殘差仍存有弱自相關現象，惟其統計量整體而言未達拒絕無自相關假設之程度，模型可視為合理。平方殘差的 Ljung–Box 檢定與 ARCH LM 測試均指出存在條件異方差性，進一步支持 GARCH 模型之採用。Nyblom 穩定性檢定顯示大多數參數具穩定性，惟 omega 參數超出穩定臨界值，暗示模型之無條件變異程度可能於樣本期間內存在變動，應在應用端審慎評估其穩定性。

綜上所述，ARFIMA-GARCH 模型成功捕捉黃金價格報酬之時間依賴結構與波動聚集現象，並能透過厚尾分布改善對極端風險事件之描述能力，適用於風險值（VaR）與條件風險值（CVaR）等金融風險管理指標之計算與應用。

# 假設 fit 是你現在的模型物件  
forecast <- ugarchforecast(fit, n.ahead = 1)  
  
mu <- fitted(forecast)  
sigma <- sigma(forecast)  
shape <- coef(fit)["shape"]  
  
# 使用 qt() 計算 t 分布分位點  
q\_t <- qt(0.05, df = shape)  
  
VaR\_95 <- -mu + q\_t \* sigma  
VaR\_95

## 1985-01-11 08:00:00  
## T+1 -0.02205692

—–Section2.2 Stochastic Volatility model

# 加載必要的套件  
# library(rugarch)  
# library(ggplot2)  
#   
# # 假設這是你的回報序列  
# # r\_gold 是你已經處理過的金價回報（預測模型）  
#   
# # 假設我們使用 5% 信賴區間來計算 VaR  
# alpha <- 0.05  
#   
# # 計算 VaR  
# forecast <- ugarchforecast(fit, n.ahead = 1)  
# mu <- fitted(forecast)  
# sigma <- sigma(forecast)  
# q\_t <- qt(alpha, df = coef(fit)["shape"]) # 學生t分布的分位點  
# VaR\_95 <- -mu + q\_t \* sigma # 計算 VaR  
#   
# # 確保 VaR\_95 是單一數值  
# VaR\_95 <- VaR\_95[1] # 如果 VaR\_95 是數組，選取第一個元素  
# VaR\_95  
# # 計算 CVaR  
# # CVaR 是 VaR 之後的損失的平均值  
# # 這可以透過模擬損失分布來計算  
# simulated\_losses <- rnorm(1000, mean = -mu, sd = sigma) # 模擬損失  
#   
# # 確保只考慮小於 VaR\_95 的損失  
# cvar\_95 <- mean(simulated\_losses[simulated\_losses <= -VaR\_95]) # 計算 CVaR  
# cvar\_95  
# # 繪製 VaR 和 CVaR 圖表  
# ggplot() +  
# geom\_histogram(aes(x = simulated\_losses), bins = 50, fill = "blue", alpha = 0.6) +  
# geom\_vline(xintercept = -VaR\_95, color = "red", linetype = "dashed") +  
# geom\_vline(xintercept = -cvar\_95, color = "green", linetype = "dashed") +  
# labs(title = "VaR and CVaR Simulation", x = "Simulated Losses", y = "Frequency") +  
# theme\_minimal() +  
# annotate("text", x = -VaR\_95 - 0.5, y = 150, label = "VaR 95%", color = "red") +  
# annotate("text", x = -cvar\_95 - 0.5, y = 150, label = "CVaR 95%", color = "green")  
#