SISTEMI NON LINEARI

dato un sistema non lineare della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Vi è la possibilità di STUDIARE i Punti di equilibrio, che sono quei valori di stato per cui:

$$f(x_e) = 0 = \dot{x}$$

OSS

Nei sistemi lineari sono i punti per cui $Ax_e = 0$, che possono essere.

- 1 solo (l'origine)
- infiniti, lungo un piano/spazio...

es. pendolo di lunghezza l e massa m, con attrito viscoso d

$$ml^2\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \qquad (x_1, x_2) = (\theta, \dot{\theta}) : \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\tfrac{g}{l}\sin x_1 - \tfrac{d}{ml^2}x_2 \end{aligned}$$

i punti di equilibrio, limitandoci tra $[0, 2\pi]$ sono

$$x_1 = (0,0) \qquad\qquad x_2 = (0,\pi)$$

Sappiamo per esperienza come i presenza di piccoli scostamenti, ess. si comportano DIFFERENTEMENTE

STABILITÀ dei PdE

Un PdE può essere:
- STABILE SEMPLICEMENTE
- STABILE ASINTOTICAMENTE
- INSTABILE

Un PdE si dice **STABILE** se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{t.c.} \ |x_0 - x_e| < \delta \ \& \ |x(t) - x_e| < \varepsilon$$

Un PdE si dice **ASINTOTICAMENTE STABILE** se

- È stabile (NON OVVIA, vedi slide
- $|x(t) - x_e| \to 0$ per $t \to \infty$

Infine, PdE è **INSTABILE** se non è stabile.

Le proprietà di stabilità asintotica ed esponenziale, che sono locali (si ricorda che si deve scegliere intorno) possono anche essere globali (GAS) se è A.S. per QUALSIASI STATO iniziale

Criterio Diretto di Lyapunov

L'idea di base del criterio consiste nel fatto che, dato un sistema, se esiste una funzione di tipo ENERGIA per cui vi è una dissipazione, allora il sistema è ASINTOTICAMENTE STABILE, o stabile.

theorem

Un PdE x_e di un sistema $\dot{x} = f(x)$ è STABILE (ASINTOTICAMENTE) se esiste una funzione $V \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DEFINITA POSITIVA (DP) in un intorno $S(x_e, r)$
2. $V(x)$ sia SDN (DN) nello stesso intorno

(3.) $V(x)$ sia RADIALMENTE ILLIMITATA, cioè che $\lim_{|x-x_e| \to \infty} (V(x)) = 0$

(dimostrazione si basa sulle necessità della chiusura delle cdL)

	$x_e \in S$	$x_e \in AS$	$x_e \in GAS$	$x_e \in I$
$V(x)$	DP in $S(x_e, r)$	DP in $S(x_e, r)$	DP $\forall S(x_e, r)$ e radial. illim.	x_e pda in $P_0 \{x : V(x) > 0\}$
$\dot{V}(x)$	SDN in $S(x_e, r)$	DN in $S(x_e, r)$	DN $\forall S(x_e, r)$	DP in $P \cap S(x_e, r)$

N.B. per derivare $V(x)$ si può usare il fatto che è una funzione composta $V(x(t))$ =>

$$\dot{V}(t) = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x(t))$$

[f_i è la i-esima componente della funzione $f(x)$]

Come scegliere la funzione di Lyapunov?

In generale è una buona scelta partire da una FUNZIONE QUADRATICA

$$V(x) = \frac{1}{2}(x - x_e)^T Q (x - x_e)$$

$$\dot{V}(x) = (x - x_e)^T Q \dot{x}$$

prendendo in considerazione Q prima come $I_{n \times n}$, per poi adattarla secondo i casi necessari.

NDR. le funzioni quadratiche, con Q a componenti costanti, sono funzioni radialmente illimitate, se DP.

Metodo di KRAZOVSKY

Assumendo che l'origine sia PdE per $\dot{x} = f(x)$, provare come candidata di Lyapunov $V(x) = f^T(x) f(x)$, sicuram. D.P. in un intorno x_e

TEOREMA dell' INSIEME INVARIANTE

Passare da SDN a DN è molto complicato, ma può aiutare a dimostrare la stabilità ASINTOTICA.
C'è la possibilità di usare delle fdLyapunov con derivate NOTE SDN e dimostrare la stabilità asintotica.

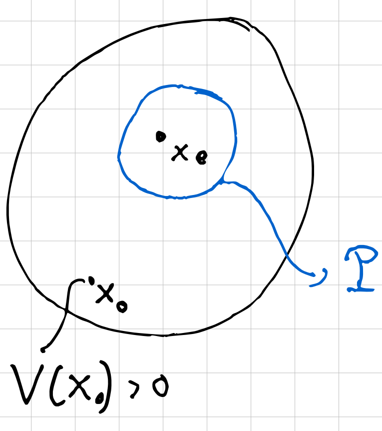
Un sottoinsieme $G \subset \mathbb{R}^n$ di uno spazio di stato si dice INSIEME INVARIANTE per un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ se qualsiasi traiettoria $x(t)$ partente da $x_0 \in G$ rimane in G

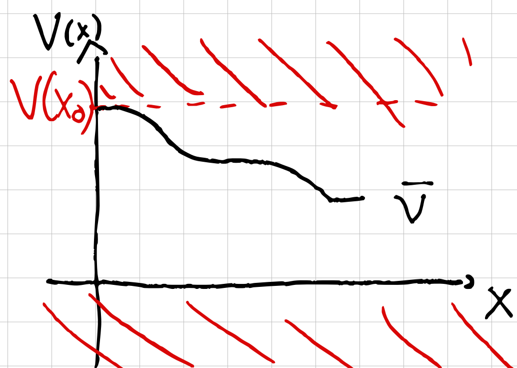
è generalizzazione del concetto del PdE. Esempi sono:

- dominio di attrazione di PdE AS.
- qualsiasi traiettoria del sistema
- $\mathbb{R}^n$ stesso

V DP: $V(x_e) = 0$
$V(x) > 0 \quad \forall x \in S(x_e, r)$

$\dot{V}$ SDN: $\dot{V}(x_e) = 0$
$\dot{V}(x) \leq 0 \quad x = x_e$





$V(x) \rightarrow \bar{V}$

$\dot{V}(x) \rightarrow 0$

sfrutto il fatto che, asintoticamente $\dot{V}$ tende a 0

x converge all' insieme in cui $\dot{V}$ è NULLA, insieme ?
in particolare, si finisce nel più grande insieme invariante possibile contenuto in P

Teorema

per un sistema $\dot{x} = f(x)$, si assuma che esista una funzione $V \in C^1$ tale che

1. La regione $\Omega_\alpha = \{x : V(x) \leq \alpha\}$ sia limitata, per $\alpha > 0$
2. $\dot{V}(x) \leq 0 \quad x \in \Omega_\alpha$

allora, ogni traiettoria del sistema che parte da Ω_α tende asintoticamente all' insieme M, il MASSIMO INSIEME INVARIANTE contenuto in P, l'insieme dei punti di Ω_α t.c. $\dot{V}(x) = 0$

COROLLARIO

un pde x_e è ASINTOTICAMENTE STABILE se $\exists\, V \in C^1$ tale che

1. $V(x)$ sia DP in un insieme D, in cui $x_e \in D$
2. $\dot{V}(x)$ sia SDN nello stesso insieme
3. il massimo insieme invariante M contenuto in P contiene solo x_e

C'è rilassamento di condizioni rispetto al criterio diretto!
Inoltre, detta Ω_a una regione limitata definita dalla $V(x) \leq \alpha \quad \alpha > 0$ e contenuta in D, si ha che
Ω_a costituisce una stima per difetto del DOMINIO DI ATTRAZIONE per x_e

CRITERIO INDIRETTO DI LYAPUNOV

analizzare la stabilità dell' APPROSSIMAZIONE LINEARE del sistema intorno al PdE x_e: in alcune condizioni è possibile trarne da ciò conclusioni sulla stabilità o meno di x_e per il sistema originario

Si considera il sistema generico

$$\dot{x} = f(x) \qquad \text{con } x_e \text{ pde.}$$

Se $f(x) \in C^\infty$ si può approssimare con serie di Taylor

$$f(x) = f(x_e) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_e} (x - x_e) + h(x - x_e) =$$

$$0 + J(x_e)(x - x_e) + h(x - x_e)$$

con $J(x_e)$ la Giacobiana con $x = x_e$. la giacobiana è una MATRICE di COSTANTI

Trasformiamo le coordinate

$$\xi = x - x_e \quad \rightarrow \quad \dot{\xi} = \dot{x} = f(x) = J(x_e)\xi + h(\xi)$$

$\Downarrow$ NUOVO STATO LINEARE (appr.)

$$\boxed{\dot{\xi} = J(x_e)\xi}$$

minore è la distanza dello stato da x_e, maggiore è l'accuratezza

Se la matrice $J(x_e)$ è non singolare, x_e è un pde isolato (NON esistono altri pde in qualche intorno)

es.

$$\dot{x}_1 = x_1^2 \qquad \dot{x}_2 = x_2$$

unico pde è l'origine

$$J(x_e) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{x_e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J(x_e)$ è singolare

CRITERIO INDIRETTO DI LYAPUNOV

Si consideri l'approssimazione lineare $\dot{\xi} = J(x_e)\xi$ di un sistema lineare $\dot{x} = f(x)$ intorno ad un suo pde x_e

1. Se tutti gli autov. di $J(x_e)$ hanno $Re[\,] < 0$, allora x_e è pde ASINTOTICAMENTE STABILE
2. Se almeno uno degli autovalori di $J(x_e)$ ha $Re[\,] > 0$, allora x_e è pde INSTABILE

Il teorema NON è valido se $\exists$ autovalore con $Re[\,] = 0$, si è nel CASO CRITICO.
Si può sempre usare il criterio diretto :3

studio la parte della SdN per studiare.
Th. di LaSalle

1. $\dot{V}$ dP $\forall$ ins
2. V SDP $\forall$ ins.

Calcolo $P = \{x : \dot{V}(x) = 0\} =$

$$\rightarrow P = \{x_1 = 0 \ , \ x_2 = k\pi\}$$

dinamica "residua"

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2k\pi \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

se $k = 0$ (origine) INV.
se $k \neq 0$ c'è invarianza?
si

$\hookrightarrow (0,0)$ unico insieme invariante!

Insieme globalmente asintoticamente stabile?

STABILIZZAZIONE SISTEMI NON LINEARI

dato un sistema dinamico NON LINEARE

$$\dot{x} = f(x,u)$$

$$y = g(x)$$

Progettare un sistema a legge di controllo $u = K(x)$
tale che il sistema ad anello chiuso

$$x = f(x, K(x))$$

Abbia uno stato assegnato X_d come PdE Asintoticam. stabile.

N.B.

X_d non è necessariamente un pde, di per sé,
in tal caso serve u_{ff} - dopo.

Si assegnerà X_d sempre nell'origine. E' sempre possibile infatti
una trasformazione di COORDINATE $z = X - X_d$

Si costruiranno retroazioni del tipo STATICO, o ISTANTANEO
$u = K(x)$ in quanto privo di memoria.

IDEA Stabilizzazione mediante APPROSSIMAZIONE

Calcolare l'approssimazione lineare del sistema attorno all'origine, x_d, reso pde, e STABILIZZARLA attraverso un CONTROLLORE LINEARE ISTANTANEO

↳ Per criterio Indiretto di Lyapunov esso è localmente AS

Applichiamo l'approccio su un S.N.L

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad x_d = (x=0, u=0)$$

l'approssimazione lineare attorno a (0,0) è

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} (x-0) + \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} (u-0)$$

Se la coppia (A, B) è almeno parzialmente raggiungibile, quindi stabilizzabile, si può applicare $u = Kx$ tale che

$$Re\left[\text{autov}(A+BK)\right] < 0$$

Attenzione: Se la coppia non è stabilizzante NON è detto che non si possa stabilizzare

es

$$\dot{x} = u^3 \qquad \rightarrow (lin) \qquad \dot{x} = 0$$

stabilizzabile con $u = -x$

Teorema

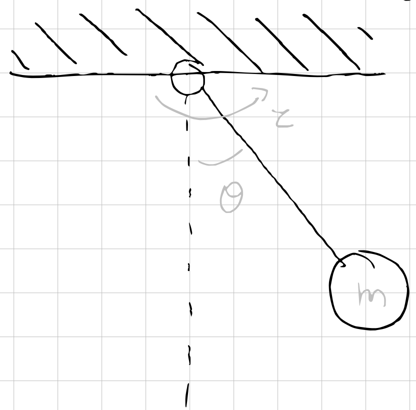
Un sistema lineare $\dot{x} = Ax$ è AS se e solo se, fissata comunque una matrice Q simmetrica e DP la seguente equazione di Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q$$

Ammette una SOLA soluzione SIMMETRICA e DP.

La P può essere usata per calcolare il DOMINIO DI ATTRAZIONE attraverso $V(x) = \frac{1}{2} x^T P x$

ES. Pendolo collegato a giunto attuatore



$$ml^2\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + mgl\sin\theta = \tau$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a\sin x_1 - b x_2 + cu$$

$(u = \tau)$

Si supponga di voler stabilizzare il pendolo in una posizione arbitraria θ_d, quindi $x = (\theta_d, 0)$

↳ effettuiamo la trasformazione di coordinate $z = (x_1 - \theta, x_2)$

l'origine non è un PdE, per renderlo tale suddivido

$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = -a\sin(z_1 + \theta_d) - bz_2 + cu$$

$$u = u_{fb} + u_{ff}$$

u_{fb} : componente di feedback
u_{ff} : componente di feedforward

per fare in modo che $z_d = (0,0)$ sia un pde è necessario usare u_{ff} per fare in modo che $f(z_d, u_{ff}) = 0$

$$u_{ff} = \frac{a}{c}\sin\theta_d = mgl\sin\theta_d$$

che ha come pde z_d

applico approssimazione lineare attorno a $z=0$, $u_{fb}=0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a\cos\theta_d & -b \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$

la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & -bc \end{pmatrix}$ è completamente raggiungibile!

è possibile quindi trovare u_{fb} come Kx tale che

$$(A+BK) < 0 \qquad \left(k_1 < \frac{a}{c},\ k_2 < \frac{b}{c}\right)$$

quindi

$$u = u_{fb} + u_{ff} = k_1 z_1 + k_2 z_2 + mgl\sin\theta_d$$

$$\tau = \underbrace{k_1(\theta-\theta_d)}_{\text{"molla" che riporta a } \theta_d} + \underbrace{k_2\dot{\theta}}_{\text{"attrito" viscoso}} + \underbrace{mgl\sin\theta_d}_{\text{quello che va contro la gravità}}$$

il dominio di attrazione dipenderà DALL'ASSEGNAZIONE di k_1 e k_2, possibile stimare l'estensione attraverso funzione di Lyapunov come candidata

Stabilizzazione mediante linearizzazione ESATTA

riprendendo l'esempio iniziale

$$\dot{x} = ax^2 + u$$

è possibile prendere u come un CONTROLLO NON LINEARE

$$u = -ax^2 - kx$$

che cancella il termine non lineare ax^2 e conduce il sistema ad anello chiuso

$$\dot{x} = -kx$$

che, essendo lineare, ha punto di equilibrio all'origine ed è GAS

Si può applicare lo stesso ragionamento anche nel caso del pendolo, scegliendo $u = \frac{a}{c} \sin(z_1 + \theta_d) + \frac{v}{c}$ tale che la dinamica è

$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = -b z_2 + v$$

che è ESATTAMENTE LINEARE, stabilizzo quindi con

$$v = k_1 z_1 + k_2 z_2$$

$$\rightarrow \quad u = \frac{a}{c} \sin\theta + \frac{1}{c}\left(k_1(\theta - \theta_d) + k_2 \dot{\theta}\right)$$ che è SIMILE a quella dall'approssimazione lineare.

La linearizzazione esatta è possibile solo se

$$\dot{x} = f(x,u) = Ax + B\beta(x)(u - \alpha(x))$$

con $\beta(x)$ matrice NON singolare

infatti, basta porre con

$$u = \alpha(x) + \beta^{-1}(x) v$$

e si ottiene

$$\dot{x} = Ax + Bv$$

è possibile che si possa arrivare ad una forma simile per una TRASFORMAZIONE di COORDINATE

Theorem

Un sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x,u)$$

si dice LINEARIZZABILE INGRESSO-STATO se esiste un diffeomorfismo $z = T(x)$, definito su un dominio D_x che contiene l'origine, che mette il sistema nella forma

$$\dot{z} = Az + B\beta(x)(u - \alpha(x))$$

Uno svantaggio dell'approccio è che è NECESSARIA la conoscenza esatta dei parametri. Se c'è variazione non vi è cancellazione esatta.

↳ POCA ROBUSTEZZA alle variazioni