

$$\begin{cases} \overset{\circ}{X}(t) = A X(t) + B u(t) \\ Y(t) = C X(t) + D u(t) \end{cases}$$

MODO
IMPPLICITO

↓ risolvo eq. diff.
con problemi di Cauchy

$$x(t_0) = x_0 \quad (b_0 = 0 \text{ per comodità})$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

MODO
ESPlicito

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t (C e^{A(t-\tau)} B + D S(\tau)) u(\tau) d\tau$$

sostituisco $x(t)$ ad $y(t)$

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t (C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t))$$

utilizzo teorema dell'impulso, che dice

$$\int_a^b f(t) \delta(t-T) dt, \text{ con } T \in [a,b] = f(T)$$

$$\Rightarrow D u(t) = \int_{t_0}^b D u(\tau) \delta(t) dt$$

$\Phi(t) = \text{risposta libera nello stato} = e^{At}$

$H(t) = \text{risposta forzata nello stato} = \Phi(t)B$

• se $u(t)$ è detta risposta impulsiva

↓

$X(t) = \text{stato del sistema}$

$$= \Phi(t) X_0 + \int_0^t H(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

$\Psi(t) = \text{risposta libera in uscita} = C \Phi(t)$

$W(t) = \text{risposta forzata in uscita} = C \Phi(t) B + D(t)$

• se $u(t)$ è detta risposta impulsiva

$y(t) = \text{uscita del sistema}$

$$= \Psi(t) X_0 + \int_0^t W(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

$$C = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} u_i v_i^T +$$

$$+ \sum_{j=1}^s e^{\alpha_j t} \left[\cos(\omega_j t) (u_a v_a^T + u_b v_b^T) - \sin(\omega_j t) (u_a v_b^T - u_b v_a^T) \right]$$

dove $r + 2s = n$

poiché costruiso matrice \tilde{A} diagonale (2 blocchi)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \alpha & \omega \\ & & -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

trovo autovettori destro e sinistro t.c.

$$\tilde{A} = T A T^{-1} \quad \text{con} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ u_1 & \dots & u_r & | \\ | & | & | & | \\ u_a & u_b & \dots \end{pmatrix}$$

$$e^{t\tilde{A}} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1^T & - & & \\ \vdots & & & \\ v_a^T & - & & \\ -v_b^T & - & & \end{pmatrix}$$

$$A(u_a u_b) = (u_a u_b) \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}$$

per trovare 2 autovettori u_a e u_b

Creatore autovettori; quando $m_g < m_a$

cs

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda = -1 \quad m_a = 3 \quad \Downarrow \quad m_g = 1$$

autovettori non tutti indipendenti. Catene di AUTOVETTORI attraverso forme a BLOCCHI DI JORDAN

n Blocchi; d_i matrici ognuna di dimensione $m_i =$

- n CATENE di autovettori, ognuno di lunghezza m_i :

dall'esempio (2 catene di autovettori, 1 di lunghezza 2, l'altr. 1)

$U_{1,2}$ indipendenti:

$$(A - \lambda I)U_3 = U_2 \quad \text{per costruirsi catena!}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|c} 3 \times 3 & & & \\ \hline & 2 \times 2 & & \\ & & 1 \times 1 & \end{array} \right)$$

3 Catene

- 1 catena di lunghezza 3
- 1 catena di lunghezza 2
- 1 catena di lunghezza 1

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} e^{-t} & te^{-t} & t^2 e^{-t} & e^{-t} & \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} & e^{-t} & \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & \\ \hline & & & e^{-t} & te^{-t} \\ & & & 0 & e^{-t} \\ & & & & e^{-t} \end{array} \right)$$

$$X_t = e^{\lambda t} X_0 =$$

$$= (u_a \ u_b) \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \cos \omega t \\ -e^{\lambda t} \sin \omega t \\ e^{\lambda t} \sin \omega t \\ e^{\lambda t} \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_a^\top \\ U_b^\top \end{pmatrix} (X_A \ X_B)$$

$$= (u_a \ u_b) \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \cos \omega t \\ -e^{\lambda t} \sin \omega t \\ e^{\lambda t} \sin \omega t \\ e^{\lambda t} \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_a \\ C_b \end{pmatrix}$$

$$X_t = (C_a e^{\lambda t} \cos \omega t + C_b e^{\lambda t} \sin \omega t) u_a + (C_a e^{\lambda t} \cos \omega t - C_b e^{\lambda t} \sin \omega t) u_b$$

$\sin \varphi$
 $\cos \varphi$

per ritornare a forme di prostasferes;

$$C_a^2 + C_b^2 = m^2$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{C_a}{C_b} \right)$$

Si moltiplica e divide per m , per poter "standardizzare".
 $C_a \approx C_b$ tale che

$$\sqrt{\frac{C_a^2}{m^2} + \frac{C_b^2}{m^2}} = 1$$

$$\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t =$$

$$= \sin(\omega t + \varphi)$$

Si fa stessa cosa per la tangente

$$\sin \varphi \cos \omega t - \cos \varphi \sin \omega t = \cos(\omega t + \varphi)$$

$$X_t :$$

$$= m e^{\lambda t} \left[(\sin(\omega t + \varphi)) u_a + (\cos(\omega t + \varphi)) u_b \right]$$

abbiamo lessi per entrambi gli autovalori

Modo naturale pseudo-periodico

$$[\text{convergente con } \alpha < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) < 1]$$

SISTEMI DINAMICI A TEMPO DISCRETO

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

MODELLO
IMPLICITO
(caratterizzato da)
RICORSIONE

$$x(k) = A^k x_0 + A^{k-1} B u(0) + \dots + B u(k-1)$$

↓

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} A^{k-1-\tau} B u(\tau)$$

EVOL. LIBERA
EVOL. FORZATA

$$\phi(k) = A^k$$

$$H(k) = \phi(k-1) B$$

$$\Psi(k) = C \phi(k)$$

$$w(k) = \begin{cases} C \phi(k-1) B & k > 0 \\ D & k = 0 \end{cases}$$

$$\Phi(k) = A^k$$

$$A = T^{-1} \tilde{A} T \Rightarrow A^k = T^{-1} \tilde{A} T \cancel{T^{-1}} \tilde{A} T \cancel{T^{-1}} A T$$

$$A^k: T^{-1} \tilde{A} T$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \omega \\ -\omega & \end{pmatrix}$$

λ_i AUTORES
SMOL TOX

Sfrutto le proprietà dell'autovettore complesso di essere scritto in coord polari:

$$\lambda = \alpha + j\omega = \sigma \cos \theta + j \sigma \sin \theta$$

$$\Rightarrow \tilde{A}^k = \sigma^k \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^k = \sigma^k \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$$

=>

$$\Phi(k) = A^k =$$

$$= \sum_{i=1}^r \lambda_i^k u_i v_i^T + \sum_{j=1}^c \sigma^k \left[\cos(k\theta) (u_j v_j^T + u_{j+} v_{j+}^T) + \sin(k\theta) (u_{j+} v_j^T - u_j v_{j+}^T) \right]$$

MODO

APERIODICO

MODO CON
PSEUDOPERIODICO

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\theta = \arctg \left(\frac{\alpha}{\omega} \right)$$

TRAIETTORIE

$|\lambda_i| < 1$ convergente

[modulo convergente]

$|\lambda_i| > 1$ divergente

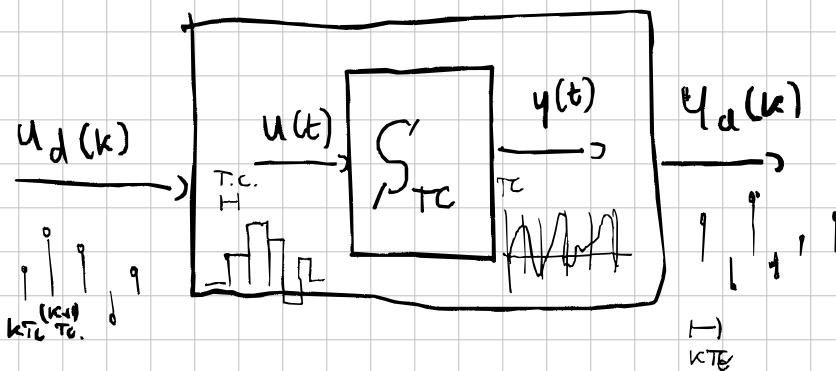
$|\lambda_i| = 1$ circolare

alcune osservazioni

con $\lambda < 0$ il modo è ALTERNANTE,
in quanto con k pari $\lambda^k > 0$, con k
doppio invece λ^k CAMBIA SEGNO

N.B. $\sigma > 0$ sempre, in quanto norma di 2 numeri

SISTEMI A TEMPO CONTINUO CON SEGNALI DISCRETI



- T_c : Tempo di campionamento (ogni quanto immetto dati / leggo stato uscita)

per trasformare u_d a u si usano i DISPOSITIVI DI TENUTA, che trasformano segnali discreti in funzioni continue costanti a salto (di ordine 0) ZOH (zero order holder)

COME RAPPRESENTARLO? si parte da Sistema Tempo Continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x(t) = e^{At}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

$$t_0 \rightarrow k T_c$$

$$t \rightarrow (k+1) T_c \rightarrow \begin{matrix} \text{momento dopo il} \\ \text{primo t_0} \end{matrix}$$

Si sostituisce

$$\begin{aligned} X((k+1)T_c) &= e^{AT_c} X(kT_c) + \int_{kT_c}^{(k+1)T_c} e^{A(k+1)T_c - t} B u(\tau) d\tau \\ &= A_d X(kT_c) + \underbrace{\int_0^{T_c} e^{A\theta} d\theta B u(kT_c)}_{B_d} \end{aligned}$$

• Integrandi di kT_c a $(k+1)T_c$ è costante, quindi $u(\tau)$ è costante e vale $u(kT_c)$ → portato fuori.

• chiamiamo $((k+1)T_c - \tau) = \theta$, allora

$$\begin{aligned} \tau &= (k+1)T_c \Rightarrow \int_0^{T_c} \\ C &= kT_c \Rightarrow \int_0^{T_c} \\ B u(\tau) &= \text{COSTANTE} \quad (\text{L.H.O}) \\ B u(kT_c) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_d &= e^{AT_c} \\ B_d &= \int_0^{T_c} e^{A\theta} d\theta B \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$x((k+1)T_c) = A_d x(t) + B_d u(t)$$

$$\begin{aligned} C_D &= C \\ D_D &= D \end{aligned}$$

$$\Downarrow \quad A^{-1}(e^{AT} - I)B$$

\Updownarrow
forma discreta, impulso

DINAMICA

d. SISTEMA CAMPIONARIO

la matrice dinamica $A_d = e^{AT_c}$

con A diagonalizzabile (forma spettrale)

$$A_d = T e^{\lambda_r T_c} T^{-1}$$

$$= T e^{T_c} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\begin{matrix} \cos(\omega T_c) & \sin(\omega T_c) \\ -\sin(\omega T_c) & \cos(\omega T_c) \end{matrix}$

$$= T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 T_c} & & \\ & e^{\lambda_2 T_c} & \\ & & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

$\begin{matrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{matrix}$

l'autovettore λ , quando campionato, produce un
autovettore $e^{\lambda T_c} = \lambda_d$

$$\lambda_d = e^{\lambda T_c}$$

$$\lambda_d = e^{\alpha T_c} (\cos(\omega T_c) + i \sin(\omega T_c))$$

quindi: MODI NATURALI SONO

$$c_i \lambda_d: u_i$$

$$\rightarrow c_i (e^{\lambda_d T_c})^b u_i$$

\hookrightarrow NON PUÒ ESSERE ALTERNANTE

$$\lambda_d > 0$$

COSA CAMBIA ECCITABILITÀ e OSSERVABILITÀ

T.C. eccitabile \leftrightarrow T.d. eccitabile

T.C. osservabile \longleftrightarrow T.d. osservabile

E' possibile approssimare valore B_d attraverso sviluppo in serie d. Taylor con approssimazione a 1° ordine in potenza

$$B_d = \int_0^{T_c} e^{A\theta} d\theta B \quad \text{coh } e^{A\theta} = I\theta + \frac{A\theta^2}{2}$$

$$\text{allora, se } e^{A\theta} \text{ invertibile} = B_d^{-1} = A^{-1} (e^{AT} - I) B$$

Sistemi campionari sono sempre non alternativi, infatti

$$\lambda_d^k = e^{\lambda_i T_c k} > 0, \quad c$$

$$e^{\alpha k} > 0 \quad \forall \alpha, \text{ quindi:}$$

NON esiste alternanza.

Per autovalori complessi coniugati si può procedere in maniera simile

$$\lambda_d^k = \lambda: \alpha + j\omega \Rightarrow e^{\alpha t} (\cos \omega t \pm \sin \omega t)$$

$e^{\alpha t}$ sempre > 0 , tranne per $\alpha = 0$

$$\cos \omega t = -1 \quad \sin \omega t = 0$$

$$\Rightarrow \omega T_c = -\pi$$

$$A_d = e^{x^T} u, v, \tau + e^{\alpha t} (\cos \omega t (u_a v_a^\top + u_b v_b^\top) + \sin \omega t (u_a v_b^\top - u_b v_a^\top))$$

STABILITÀ

• STABILITÀ INTERNA

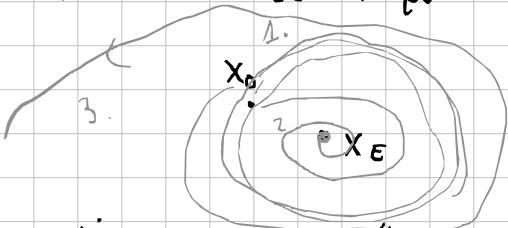
partendo da un punto nell'intorno del punto d'equilibrio cosa succede al modo del sistema?

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

le condizioni per cui, dato un punto x_0 , non c'è
mobilità, è che non ci sia variazione

$$f(x_E, u_E) = 0 \quad (u_E \text{ per semplicità} = 0)$$

Si studiano però le condizioni all'intorno di esso,
verificando se il punto rimane nelle vicinanze



possono accadere 3 case

1. si mantiene "nelle vicinanze"
2. converge al punto d'equilibrio
3. diverge

1. Esso è STABILE SEMPLICEMENTE, se

$$\|x_0 - x_E\| < \delta \rightarrow \|x(t) - x_E\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

2. Esso è STABILE ASINTOTICAMENTE, se
sono vere le condizioni di stabilità semplice
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_E\| = 0$

3. Esso è instabile se
il sistema diverge significativamente dal punto
di equilibrio

I punti di equilibrio possono essere 1 o infiniti:
si fa lo studio, quindi:

$$\dot{x} = Ax + Bu = 0 \quad (\text{con } u=0) \quad \text{s.s.e}$$

$$Ax_E = 0$$

Studio del $\ker(A)$

$$\text{ma } x(t) = \phi(t)x_0 \Rightarrow \|\phi(t)x_0 - x_E\| \leq \epsilon$$

suppongo che $\|x_0 - x_E\| \leq \delta$ e
 $\phi(t)x_E = x_E$

$$\|\phi(t)(x_0 - x_E)\| \leq \|\phi(t)\| \underbrace{\|x_0 - x_E\|}_{\leq \delta} \leq \frac{\epsilon}{\|x_0 - x_E\|}$$

vero se $\|\phi(t)\| < \delta$ limitata

Studio di $\phi(t)$:

- Limitata se modi naturali sono limitati

T.C. $e^{\lambda t}, e^{\alpha t} \longrightarrow \operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$

$\rightarrow \lambda^t \longrightarrow |\lambda| \leq 1$

condizioni di stabilità asintotica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_E\| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)(x_0 - x_E)\| = 0$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| \|x_0 - x_E\| = 0$$

↳ q.tà costante e
L'INITATA

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(t)\| = 0$$

T.C

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

T.D

$$|\lambda| < 1$$

GLOBALMENTE, se $\dim(\text{Ker}(A)) > 0$, ci sono INFINTI punti di equilibrio.

Non è quindi facile dire il punto di STABILITÀ ASINTOTICA.

Nei sistemi LINEARI la stabilità asintotica è possibile solo PER L'ORIGINIE nel caso in cui sia l'UNICO PUNTO di equilibrio.

Se si ha, nel caso a tempo continuo, un autovalore λ parte reale = 0, ci sono 2 casi possibili:

- $m_a = m_g \Rightarrow e^{\lambda t}$ stabile per $\text{Re}(\lambda) = 0$
- $m_a > m_g \Rightarrow$ ci sono, oltre all'esponenziale termini:
$$\frac{t^i}{i!} e^{\lambda t} \quad i = 1, \dots, m_a - m_g$$

è instabile!

STABILITÀ ESTERNA

Nel caso in cui si abbia la possibilità di fare con una cosiddetta "scatola nera", in cui non sappiamo come funziona un sistema, NON CI È POSSIBILE a priori studiare il sistema con $u(t) = 0$,

Guardiamo quindi il comportamento all'uscita, in corrispondenza d. ingresso LIMITATO

$$y(t) = \psi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Esistono 2 CASI DI STUDIO

1) Nello stato ZERO, quindi si studia solo l'evol FORZATA

2) In ogni stato

CONDIZIONI NECESSARIE

$$1) \|\psi(t)\| < K \quad \forall t$$

$$2) \int_0^t \|w(\tau)\|d\tau < K \quad \forall t$$

La seconda è la sola condizione necessaria e sufficiente per la stabilità nello stato 0

dimostrazione

$$y(t) = \Psi(t)x_0 + \int_0^t \Psi(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

- Uso teorema dei valori assoluti:

- $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$
- $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$

$$\|y(t)\| \leq \|\Psi(t)\| \|x_0\| + \int_0^t \|\Psi(t-\tau)\| \|u(\tau)\| d\tau$$

$$u(\tau) < M \quad (\text{è ingresso limitato})$$

$$\|y(t)\| \leq \|\Psi(t)\| \|x_0\| + \int_0^t \|\Psi(\tau)\| d\tau - M$$

Sistema è stabile esternamente?

STABILE ESTERNAMENTE
IN OGNI STATO

STABILE ESTERNAMENTE
NELLO STATO 0

$$\bullet \operatorname{Re}(\lambda_{\text{o}}) < 0 \quad m_g = m_a$$

$$\operatorname{Re}(\lambda_{\text{o}, \text{ecc}}) < 0$$

$$\bullet \operatorname{Re}(\lambda_{\text{o}}) < 0 \quad m_g < m_a$$

$$\bullet \operatorname{Re}(\lambda_{\text{goc}}) < 0$$

CRITERIO DI ROUTH

Estensione di criterio valido per $\dim(\lambda) = 3$,
quindi dato $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

per studiare il segno della parte reale degli autovalori:
si usa il CRITERIO di ROUTH

CONDIZIONE NECESSARIA e' che $a_i : i=0..n-1$ abbiano
LO STESSO SEGNO, STRETTAMENTE,
DI a_n

1) CREAZIONE di TABELLA

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots	$b_{n-2} = \frac{ a_n \ a_{n-2} }{ a_{n-1} \ b_{n-2} }$
$n-1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots	$-a_{n-1}$
$n-2$	b_{n-2}	b_{n-3}			$b_{n-3} = \frac{ a_n \ a_{n-4} }{ a_{n-1} \ a_{n-5} }$
.					$-a_{n-1}$
i	h_i	h_{i-1}			
j	f_j	f_{j-1}			
k	g_k	g_{k-1}			
l					
1					
0					

$$g_{k-l} = -\frac{1}{f_i} \det \begin{pmatrix} h_i & h_{i-l+1} \\ f_j & f_{j-l+1} \end{pmatrix}$$

$\left[\begin{array}{l} \text{Se riga sottostante manca di un} \\ \text{termine nel calcolo si mette} \\ \text{uno } 0 \end{array} \right]$

quando si arriva al termine 0, la tabella è completa e si passa allo studio del segno effettivo, andando a guardare le VARIAZIONI DI SEGNO della 1° COLONNA

n	a_n
$n-1$	a_{n-1}
$n-2$	a_{n-2}
.	
i	
j	
1	x
0	y_0

Se tutti i termini hanno lo stesso segno, allora tutte le radici hanno $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$

PER OGNI VARIAZIONE di segno ci sarà un corrispondente autovalore $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$

ES: + + + - - + -

2 permanenze

1 variazione

2 permanenze

2 variazioni

CONDIZIONI IN CUI
È NECESSARIA MODIFICA

① Se una determinata riga inizia con UNO O PIÙ ZERI, ma non completamente nulla, è impossibile andare avanti, poiché ci sarebbero divisioni per zero, si applica una TRASLAZIONE

$$i \mid 0 \ 0 \ (\ast) \ * \Rightarrow i \mid (\ast) \ * \dots * \ 0 \ 0$$

In riga, poi va PRENOLTIPLICATA per $(-1)^k$, dove k è il NUMERO DI ZERI INIZIALE, quindi:
il NUMERO DI SPOSTAMENTI

② Se UNA INTERA RIGA è a termini nulli, si può sfruttare il fatto che $p(\lambda)$ è scomponibile

$$p(\lambda) = p_1(\lambda) p_2(\lambda)$$

dove:

$p_1(\lambda)$ ha le radici dello stesso

segno rispetto a ciò che si è trovato
nelle prime $n-q$ colonne

[data $n-q-1$ | a]
r, su vuota

$p_2(\lambda)$ è un polinomio d. grado

pari, con coefficienti quelli
della riga prima

È possibile DERIVARE, e mettere i coefficienti al posto dei
ZERI

ES $p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 2$

$$\begin{array}{c|ccc} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 0 \end{array}$$

$p_1(\lambda)$ ha grado 1

$p_2(\lambda)$ ha grado pari (λ)

$$p_2(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 + 2$$

Si può studiare le
radici, ma è lunga. Si può quindi DERIVARE

$$\frac{d}{d\lambda} p_2(\lambda) = 4\lambda^3 + 2\lambda \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 2 \end{array}$$

Nel caso dello studio,
ma per il modulo c'è
possibile avere

$$\lambda = \frac{1+s}{1-s}$$

LINEARIZZAZIONE di SISTEMA DINAMICO NON LINEARE

dato un sistema generico NON LINEARE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

è possibile applicare uno studio della STABILITÀ del sistema attraverso un'approssimazione all'intorno di un generico PUNTO x_E , infatti per Taylor

$$f(x(t), u(t)) = f\left(\underbrace{x_E}_{x}, \underbrace{u_E}_{(x_E, u_E)}\right) + \frac{df}{dx}\Big|_{(x_E, u_E)}(x - x_E) + \frac{df}{du}\Big|_{(x_E, u_E)}(u - u_E)$$

questo con $\|x - x_E\| \leq \varepsilon$ piccole! ACCETTABILE al 1° ordine

• cambio variabile

$$(x - x_E) = z \Rightarrow \text{Jacobiano Trasform} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad | x = x_E$$

↓

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)$$

LINEARIZZATA

TRASFORMATE DI LAPLACE

$$f(t) \rightarrow F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\mathcal{L}(\phi(t)) = (SI - A)^{-1}$$

$$\mathcal{L} \left(\int_0^t H(t-\tau) u(\tau) d\tau \right) = (SI - A)^{-1} B u(s)$$

$$\mathcal{L}(\psi(t)) = C (sI - A)^{-1}$$

$$\mathcal{L} \left(\int_0^t w(t-\tau) u(\tau) d\tau \right) = (C(SI - A)^{-1} B + D) u(s)$$

• TRASFORMATE ELEMENTARI

$$e^{\lambda t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-\lambda} \quad * \text{ traslazione}$$

$$e^{\alpha t} \sin \omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$e^{xt} \cos wt \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + w^2}$$

TRASFORMATE di LAPLACE

Studio da regime TEMPO a REGIME COMPLESSO

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\begin{cases} X(s) = \Phi(s)X_0 + H(s)U(s) \\ Y(s) = \Psi(s)X_0 + W(s)U(s) \end{cases}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} [sI - A]$$

possibile SCOMPONERE

$$F(s) = \frac{[]}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2) \dots (s-\lambda_n)} = \frac{R_1}{(s-\lambda_1)} + \frac{R_2}{s-\lambda_2} + \dots + \frac{R_n}{(s-\lambda_n)}$$

$$\text{dove } R_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) F(s)$$

TRASFORMATE ELEMENTARI

$f(t)$	$F(s)$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{t^k}{k!}$	$\frac{1}{s^{k+1}}$

è possibile trattare trasformate (e viceversa) come COMPOSTE!

es

- $e^{\alpha t} \cos \omega t = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$
- $t^3 e^{\alpha t} = \frac{1}{(s-\alpha)^4}$
- $\frac{e^{\alpha s}}{s^3} = \frac{(t-\alpha)^2}{2!}$

$$\delta_{-1}(t-\alpha) = \frac{e^{\alpha s}}{s}$$

PROPRIETÀ

- Integrale d. convoluzione è pari a PRODOTTO d. TRASFORMATI

$$\int f(t-\tau) g(\tau) d\tau = F(s) G(s)$$

- Funzione con multiplicità un esponentiale ha la possibilità di TRASLARE la trasformata

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t)) = F(s-\alpha)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-\alpha s} F(s)) = f(t-\alpha) \delta_{-1}(t-\alpha)$$

- Funzione con termine polinomiale multiplica per il "corretto t^n ", utile per i RESTI

$$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{F(s)^n}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{F(s)^{n-i+1}}\right) = \sum_{i=1}^n R_i \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} f(t)$$

per antitrasformare

$$F(s) = \frac{as+b}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} = \frac{as - a\alpha + a\alpha + b}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} = \\ a \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega^2} + \frac{a\alpha + b}{\omega} \frac{\omega}{(s-\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{\alpha t} \left(a \cos \omega t + \frac{a\alpha + b}{\omega} \sin \omega t \right)$$

forma $e^{\alpha t} \left(M(\omega) \sin(\omega t + \varphi) \right)$

$$M(\omega) = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\alpha + b}{\omega} \right)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{a\alpha + b}{a\omega} \right)$$

per poli con molteplicità > 0 si utilizza Regola di resto: differente

$$y(s) \frac{F(s)}{G(s)^n} = \sum_{i=1}^n R_i \frac{1}{G(s)^{n-i+1}}$$

dove $R_i = \frac{1}{(i-1)!} \left[\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} \left| (G(s))^n \cdot y(s) \right. \right]_{G(s)=0}$

FORMA DI BODE

(rappresentazione mediante poli e zeri)

$$\omega(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)^{v_i}}{\prod_{j=1}^m (s - p_j)^{u_j}}$$

\bar{K} = rapporto tra coeff max di $d(s)$ e $n(s)$
[guardando]

z_i è lo zero di molteplicità v_i

p_j è il polo di $w(s)$ di molt. M_j

Si possono distinguere poli e zeri tra reali e coniugati complessi attraverso

K = numero

s = monomio

$(1 + z_s)$ - binomio

$1 + 2 \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ trinomio

τ costante di tempo

ζ smortamento

ω_n pulsazione naturale

$$w(s) = K \cdot \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{h_1} (1 + \tau_i s)^{v_i}}{\prod_{j=1}^{h_2} \left[1 + 2 \zeta_j \frac{s}{\omega_{nj}} + \frac{s^2}{\omega_{nj}^2} \right]}}_{s^{M_0 - M_0} \prod_{i=1}^{k_1} (1 + \tau_i s) \cdot \prod_{j=1}^{k_2} \left[1 + 2 \zeta_j \frac{s}{\omega_{nj}} + \frac{s^2}{\omega_{nj}^2} \right]}$$

è chiamata FORMA d. BODE

$$\tau_i' = -\frac{1}{z_i} \quad \omega_{n,i} = \sqrt{\rho_j^2 + Y_j^2} \quad f = -\frac{\omega_i}{Y_n}$$

MODULO

FASE

$$\tau_i = -\frac{1}{p_i} \quad \omega_{n,j} = \sqrt{\alpha^2 + \omega_j^2} \quad \varphi_j = -\frac{\alpha_j}{\omega_j}$$

K = guadagno

ω_n pulsazione (in tempo complesso quando $a=0$)

ξ Smorzamento (fattore ξ , smorzamento della pulsazione)

utilizzo per forma di Bode

Studio dello smorzamento

$\xi = \pm 1 \Rightarrow$ modo non trimonio

$\xi = 0 \Rightarrow$ modo oscillatorio puro

RISPOSTA a REGIME PERMANENTE

$$y(t) \quad t \rightarrow \infty = y_r(t)$$

La risposta a regime permanente **NON dipende** da un dato **stato iniziale x_0** , ma solo dalla risposta forzata!

per fare ciò però $y_f \rightarrow 0$, quindi: il sistema dev'essere asintoticamente **STABILE**, a $(0,0)$, con $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$

$$y_h(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^t u(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

per fissati ingressi (polinomiali e periodici): regime permanente **ESISTE** e ha stessa forma f. ingresso

$$\forall \varepsilon \exists T_a > 0 \quad \text{t.c. } \|y(t) - y_r(t)\| < \varepsilon \quad \forall t > T_a$$

T_a = tempo di assestamento

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$u(t) = \sin \omega t \quad \text{allora} \quad y_r(t) = M(\omega) \sin (\omega t + \varphi(\omega))$$

dove

$$M(\omega) = |W(j\omega)| \quad \text{modulo e fase di,}$$

$$\varphi(\omega) = \angle W(j\omega) \Rightarrow W(s) \Big|_{s=j\omega} = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

es

$$W(s) = \frac{4}{s+3} \quad \text{con } u(t) = \sin 3t$$

$$y_r = M(\omega) \sin (\omega t + \varphi(\omega))$$

$$W(j\omega) = \frac{4}{3+j\omega} = \frac{4}{\sqrt{9+\omega^2}} e^{-j\omega/3}$$

$$|W(j\omega)| = \frac{4}{\omega=3} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \quad \angle W(j\omega) = \arctg \left(\frac{3}{3} \right) - 1 \Rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$y_r = \frac{4}{3\sqrt{2}} \cdot \sin \left(3t \pm \frac{\pi}{4} \right)$$

Risposta a regime:

- Ingresso SINUSOIDALE dato $w(s)$ $(u(t) = \sin(\omega t))$

$$y_R(s) = M(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

dove

- $M(\omega)$ = fattore di amplificazione =

$$= |w(s)| \Big|_{s=j\omega}$$

- $\varphi(\omega)$ = sfasamento =

$$= \angle w(s) \Big|_{s=j\omega}$$

- STESSO SEGNALE
- DIVERSA AMPIEZZA
- SFASATURA d. ψ

DIAGRAMMI DI BODE

Derivano dalla possibilità di tracciare le funzioni di modulo ed, fase in una scala semi-logaritmica
 Il diagramma di Bode è la rappresentazione grafica delle **RISPOSTA ARMONICA** $W(j\omega)$

$$M_{dB} = 20 \log_{10} |M|$$

giustificazione si trova come

$$W(s) = W_1(s) W_2(s) = M_1 e^{j\varphi_1} + M_2 e^{j\varphi_2} = (M_1 + M_2) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$M_{TOT} = M_1 + M_2 \quad \varphi_{TOT} = \varphi_1 + \varphi_2$$

diagrammi ASINTOTICI

termine	modulo	fase
K	$20 \log_{10} K $	$0 \text{ per } K > 0$ $-\pi \text{ per } K < 0$
$s (j\omega)$	$20 \log_{10} \omega$	$\pi/2$
$\frac{1}{s} = \frac{1}{j\omega}$	$-20 \log_{10} \omega$	$-\pi/2$
$\frac{1}{1 + j\omega}$	$w = 1/\tau = 20 \log_{10} \sqrt{2} = +3 \text{ dB}$ $w \ll 1/\tau \quad 20 \log_{10} 1 = 0$ $w \gg 1/\tau \quad 20 \log_{10} \omega \tau $	$0 \text{ per } w \ll 1/\tau$ $\pi/2 \text{ per } w \gg 1/\tau$ $\pi/4 \text{ per } w = 1/\tau$
$\frac{1}{1 + j\omega}$	MODULO INVERTITO rispetto ad ascisse	MODULO INVERTITO rispetto ad ascisse

termine

$$1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_N} + \frac{\omega^2}{\omega_N^2}$$

$$1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_N} - \frac{\omega^2}{\omega_N^2}$$

modulo

$$|\xi| < 1$$

$$\omega = \omega_N \cdot$$

$$\xi = 0 \quad 20 \log_{10}(0) = -\infty$$

$$\xi = 1/2 \quad 20 \log_{10}(1) = 0$$

$$\xi = 1 \quad 20 \log_{10}(2) = 6 \text{ dB}$$

$$\omega \ll \omega_N \quad 20 \log_{10}(1) = 0$$

$$\begin{aligned} \omega > \omega_N \quad & 20 \log_{10}(\omega) - \\ & 20 \log_{10}(\omega_N) \\ & \approx 20 \log_{10}(\omega) \\ & 20 \text{ dB/sec} \end{aligned}$$

fase

$$\xi > 0$$

$$\omega \ll \omega_N \Rightarrow \angle = 0$$

$$\omega > \omega_N \rightarrow \angle = \pi$$

$$\omega = \omega_N \angle = \pi/2$$

$$\xi < 0$$

$$\omega \ll \omega_N \angle = 0$$

$$\omega > \omega_N \rightarrow -\pi/2$$

$$\omega = \omega_N \angle = \pi/2$$

scostamento indice

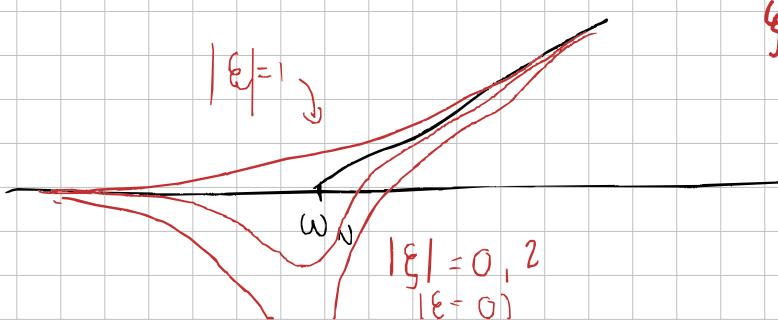
"RITARDO", più alto con $\xi \rightarrow 0$

Modulo è FUNZIONE PARI
(per τ , $\xi < 0$ è uguale per τ , $\xi < 0$)

Fase è FUNZIONE DISPARI

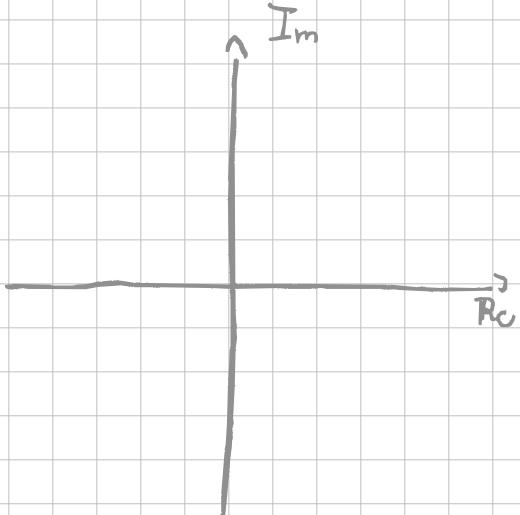
(Fase con $\tau \xi < 0$ è INVERSA a fase con τ , $\xi > 0$)

N.B per binomio: LO SCOSTAMENTO è RILEVANTE, quando $\xi \rightarrow 0$, per ξ più vicino a 0



ξ indica quindi il discostamento

DIAGRAMMI POLARI (o Nyquist)



costruibile attraverso diagrammi di Bode, tracciando il punto $w=0$ con relativa fase iniziale $(0, \pi/2, \pi)$

[fattorizzazione] e VALUTARE gli ZERI (punti in cui $Im=0$) anche attraverso CALCOLI $\frac{X(S)}{Z(S+jw)}$

Quando $\Psi_f(Im) = 0$ quanto vale $\Psi_f(Re)$? calcolo

Tracciare poi grafico da - ∞ a 0, speculare RISPETTO a Re. grafico dovrebbe chindarsi. Nel caso in cui non lo faccia si usi regole "

per termini monomio maggiore si fanno TANTI " giri QUANTO è il grado di ESSE

es. $3S$ allora 3 mezz' giri

Utile il calcolo dei giri attorno ad un punto sull'asse di Real. tracciare Riso verso l'alto e contare (passando sul verso) i giri.

N

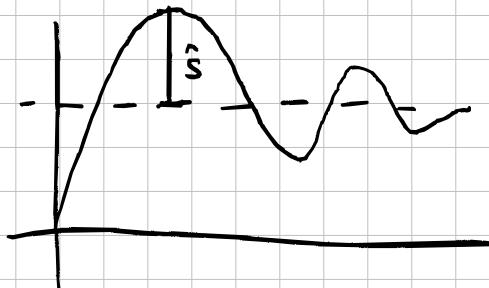
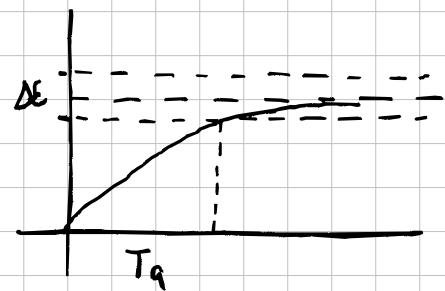
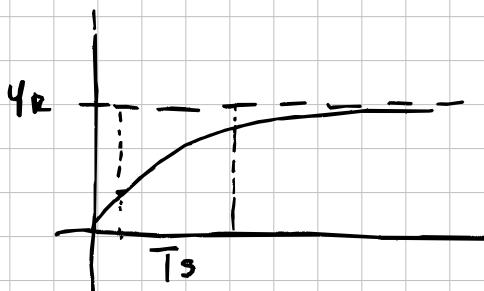
Tempo d. Salita
Tempo di Assettamento
Sovraelongazione

Analisi qualitativa del grafici d; risposta a REGIME PERMANENTE

T_s = tempo d. salita = tempo necessario per arrivare dal 10% al 90% del valore a regime

T_a = tempo d. assettamento > tempo necessario per arrivare al valore a regime entro un errore d. ERRORE

\hat{s} = sovraelongazione = distanza da valore a regime e picco massimo



calcolo preciso solitamente non necessario, si applica una STIMA

ES.

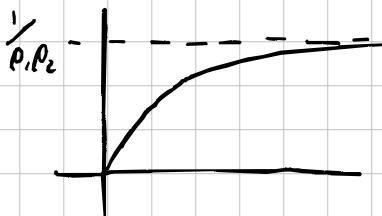
$$F(s) = \frac{1}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y_f(s) = \frac{1}{p_1 p_2 s} - \frac{1}{p_2(p_2-p_1)}(s+p_1) + \frac{1}{p_1(p_2-p_1)}(s+p_2)$$

$$Y_f(t) = \frac{1}{p_1 p_2} - \frac{1}{p_1(p_2-p_1)} e^{-p_1 t} + \frac{1}{p_2(p_2-p_1)} e^{-p_2 t}$$

con $p_2 > p_1$



p_1 porta a regime molto più velocemente d. p_2

$$Y_f(t_1) = \frac{1}{10 p_1 p_2} \approx \frac{1}{p_1 p_2} - \frac{1}{p_1(p_2-p_1)} e^{-p_1 t_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p_1(p_2-p_1)} e^{-p_1 t_1} \approx 9/10 \frac{1}{p_1 p_2}$$

$$Y_f(t_2) \approx \frac{1}{p_1 p_2} - \frac{1}{p_1(p_2-p_1)} e^{-p_1 t_2} = \frac{1}{10 p_1 p_2}$$

$$T_s = (t_2 - t_1) \approx \frac{\ln(9)}{p_1}$$

$$T_a : |Y_R - Y_f(t_a)| = \frac{m}{100} Y_R \approx \text{approssima tangente a } e^{-p_1 t} \text{ (polo regressivo)} \\ \approx T_a \approx - \frac{\ln \left(\frac{m(p_2-p_1)}{100 p_2} \right)}{p_1}$$

SISTEMI A TEMPO DISCRETO

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(k) = \sum_{\tau=0}^{k-1} H(k-\tau) u(\tau) \\ y(k) = \psi(k)x_0 + \sum_{\tau=0}^{k-1} w(k-\tau) u(\tau) \end{cases}$$

TRASFORMATA Z

dato $f(k)$

$$Z(f(k)) = \tilde{F}(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots + \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

supponendo di sapere

$$Z(u(k)) \quad \text{e} \quad Z(x(k)) \quad \text{Ti amo}$$

quanto vale $x(k+1)$?

$$Z(x(k+1)) = f(1) + \frac{f(2)}{z} + \frac{f(3)}{z^2} + \dots + \frac{f(k)}{z^{(k-1)}}$$

- aggiungo e rimuovo $f(0)$
- moltiplico e divido per z

$$\begin{aligned} Z(x(k+1)) &= f(0) - f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(k)}{z^k} = \\ &= z \left(\frac{f(0)}{z} + \frac{f(1)}{z} + \dots \right) - zf_0 = \\ &= Zf(z) - zf(0) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Z X(z) \cdot Z X_0 = A x(z) + B u(z) \\ Y(z) = C x(z) + D u(z) \end{cases}$$

MODELLO
IMPULSO

$$(ZI - A)x(z) = Z X_0 + B u(z)$$

$$\Rightarrow x(z) = (ZI - A)^{-1} Z X_0 + (ZI - A)^{-1} B u(z)$$

$$y(z) = C (ZI - A)^{-1} Z X_0 + [C (ZI - A)^{-1} B + D] u(z)$$

SIMILE A TRASF d. LAPLACE, ma differente per termini Z accanto ad X_0

$$X(k) = \phi(z) X_0 \rightarrow x(z) = (ZI - A)^{-1} Z X_0$$

$$Z(\phi(k)) = (ZI - A)^{-1} Z$$

Rispetto alla Laplaciana di $\phi(t)$, in cui la frazione ha al denominatore un grado STRETTAMENTE più ALTO del NUMERATORE

Nella trasf Z INVECE ha stesso grado \rightarrow problema nello sviluppo dei residui nelle frazioni per part.

per la costruzione di $y_f(z)$ per part. si usa

$\frac{y_f(z)}{z}$, poi la si rimoltiplica indietro e si fa

ANTITRASFORMATA, semplifica calcolo del RESTO

TRASFORMATE ELEMENTARI

<u>$f(k)$</u>	<u>$F(z)$</u>
IMPULSO $\delta(k)$	1
GRADINO $\delta_-(k)$	$\frac{z}{z-1}$
ESPOENZ λ^k	$\frac{z}{z-\lambda}$
RAMPA k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
SENO $\sin \omega k$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
COSENO $\cos \omega k$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$
POLINOMIO FATTORI ALG	
$\frac{k^{(h)}}{h!}$	$\frac{z}{(z-1)^{h+1}}$

da $w(s)$ a $w(z)$

(con Tempoz di campionamento T)

$$W(z) = \frac{z-1}{z} \left(z \left(L^{-1} \left(\frac{w(s)}{s} \right) \Big|_{t=kT} \right) \right)$$

- ricordando che

$$\sum_{i=0}^{\infty} a x^i = \frac{a}{1-x} \quad |x| < 1$$

- definito polinomio fattoriale

$$k^{(h)} = k(k-1)(k-2)\dots(k-h+1)$$

- funzione con esponenziale

TRASLA TRASFORMATA, e
v. c'èversa

$$L \left(\frac{k^{(h)}}{h!} \lambda^{k+h} \right) = \frac{z}{(z-\lambda)^{h+1}}$$

GRADINO TRASLATO

$$\delta_-(t-T) = \frac{1}{z^T} \frac{z}{z-1}$$

RISPOSTA a REGIME PERMANENTE

- Modi CONVERGENTI

$$y(k) = \underbrace{\Psi(k - k_0)}_{\text{Modi osservabili}} x_0 + \sum_{\tau=k_0}^n w(t-\tau) u(\tau)$$

$$u_R(k) = \lim_{k_0 \rightarrow \infty} \sum_{\tau=-k_0}^k w(k-\tau) u(\tau)$$

$$= \sum_{\tau=-\infty}^n w(k-\tau) u(\tau)$$

$$\text{Se } u(k) = \xi \sin \omega k = \frac{e^{j\omega k} - e^{-j\omega k}}{2j} = 2 \text{ impressi}$$

$$u_r = e^{j\omega k}$$

$$u_R = \sum_{k=-\infty}^k w(k-\tau) e^{j\omega \tau}$$

$$k-\tau = \xi$$

$$\tau = k - \xi$$

$$= \sum_{\xi=+\infty}^0 w(\xi) e^{j\omega k} e^{-j\omega \xi}$$

$$\xi = -\infty \quad \xi \rightarrow +\infty$$

$$\tau \rightarrow k \quad \xi \Rightarrow 0$$

$$= e^{j\omega k} \sum_{\xi=0}^{\infty} w(\xi) e^{-j\omega \xi}$$

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w(k) z^{-k}$$

$$z = e^{j\omega}$$

$$Y_R = e^{j\omega k} W(z) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$Y_R =$$

$$Y_R(k) = \frac{1}{2j} \left(e^{j\omega k} W(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} - e^{-j\omega k} W(z) \Big|_{z=e^{-j\omega}} \right)$$

APPLICO in termini d. modulo e FASSE

$$W(e^{j\omega}) = M e^{j\varphi}$$

$$W(e^{-j\omega}) = M e^{-j\varphi}$$

SOSTITUISCO

$$Y_R = \frac{1}{2j} \left(e^{j\omega k} M e^{j\varphi} - e^{-j\omega k} M e^{-j\varphi} \right)$$

$$= \frac{M}{2j} \left(e^{j(\omega k + \varphi)} - e^{-j(\omega k + \varphi)} \right)$$

FUNZIONE SINUSOIDALE

- Sfasata d. termine φ

- Ampiezza differente

$$Y_R = M \sin(\omega k + \varphi)$$

VERO PER SISTEMI

• TEMPO CONTINUO ($s=j\omega$)

• TEMPO DISCRETO ($z=e^{j\omega k}$)

OSSERVABILITÀ

Un sistema si dice inosservabile se, dato x_{0A}, x_{0B} , diversi, e un ingresso u , vale

$$y(x_{0A}, u) = y(x_{0B}, u)$$

Sottraendo l'una dall'altra si trova che

$$Ce^{At}(x_{0A} - x_{0B}) = 0$$

quindi se x_{0A} è indistinguibile da x_{0B} si ha che allo stato x_i l'usita è identicamente nulla.
 X; è quindi INOSSERVABILE,



vero perché, se per definizione

$$Ce^{At}x_I = 0 \quad \forall t, \text{ allora}$$

è vero che

$$\left(\frac{d^k Ce^{At}x}{dt^k} \right) = 0 \quad \forall k \geq 0$$

$$(CA^k e^{At})x \underset{t=0}{=} CA^k x_0$$

quindi il sistema è completamente osservabile quando la matrice di osservabilità

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

C si forma a
CAⁿ⁻¹ poiché, per
Cayley-Hamilton si ha
che è

$$A^n = a_n A^{n-1} + \dots + a_1 A + O_0$$

ha rango PIENO.

$$\dim(O) = \dim(\ker(I))$$

gl' stat: Inosservabili solo un SOTTOSPAZIO delle
SPAZIO d. STATO, quindi se

$$p = \dim \quad p(O) = m < n \Rightarrow p(\ker(O)) = n - m > 0$$

esiste quindi un sottospazio d. STATI INOSSERVABILI.

\exists quindi $T_{n \times n}$ tale che, facendo un cambio d. coordinate
 $Z = TX$ tale che

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \hat{B} = TB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{C} = CT^{-1} = \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_I = \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Im}(h(O))$$

con $A_{22} \in m \times n$, $\hat{B}_2 \in m \times p$, $C_2 \in q \times n$.

A_{22}, C_2 è osservabile

A_{11} è relativi modi non osservabili

$$\text{Con } Z_I = \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$CZ_I = 0 \Rightarrow (C_1, C_2) \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$AZ_I = Z_I \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{21}Z_1 = 0 \Rightarrow A_{21} = 0$$

o anche

$$CAZ_I = 0 \Rightarrow (0 \ C_2) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad A_{21} = 0$$

è possibile fare cambio d. coordinate tale che dato il sottospazio di stati inosservabili: si può trovare un "rappresentante" d. stati inosservabili

Ogni vettore d. base aggiunto caratterizza selezione d. stati indistinguibili. Si hanno:

- Sottospazio d. stati inosservabili;
- oppic d. stati indistinguibili;

Stato nella nuova base $Z = TX$ ($X = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix}$)
nella nuova base si avrà $Z = \begin{pmatrix} \bar{Z}_1 \\ \bar{Z}_2 \end{pmatrix}$

Se il punto X fosse stato preso su uno spazio inosservabile, la sua trasformazione in Z sarebbe

$$\bar{Z}_i = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{i_1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{I stato inosservabile} \\ \text{I oss (o poche) su vettore d. base} \end{array}$$

T si sceglie mettendo da una parte gli autovectori U relativi ad $\ker(0)$, gli altri autovectori "J", completamente saranno indipendenti, poiché

$$g = \text{gen}\{(u_1, u_2, \dots, u_s)\}$$

\rightarrow auto da ker:
d. spazio osservabile

$$\Rightarrow T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} U & J \\ \hline u_1 & u_2 \dots u_s & | & \text{complemento} \\ \hline 1 & 1 & | & \text{INDIPENDENTI} \\ \hline & & | & \text{da gen}(g) \end{array} \right)$$

sottospazi inoss.

nella base Z , le prime s componenti sono del sottospazio dello stato inosservabile, le altre non.
se nello Z ha 0 nelle $n-s$ componenti allora è INOSSERVABILE

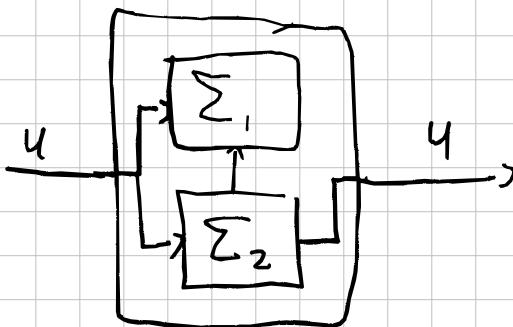
$$\tilde{z}(k+1) = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \tilde{z}(k) + \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (0 \ C_2) \tilde{z}(k) + \tilde{D} u(k)$$

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 &= \bar{A}_{11} z_1 + \bar{A}_{12} z_2 + \bar{B}_1 u \\ \tilde{z}_2 &= A_{22} z_2 + \bar{B}_2 u \\ y &= C_2 z_2 + D u \end{aligned}$$

Σ_1 = stati inosservabili

Σ_2 = stati non osservabili



A_{22} relativa a modi osservabili

A_{11} relativa a modi non osservabili

dipende solo da z_2 , z_1 non è osservabile perché non influenza sull'uscita

CARATTERIZZAZIONE INGRESSO - STATO

[RAGGIUNGIBILITÀ]

dato ingresso $u(t)$ qualsiasi, a che sottospazio appartiene x

$$x(t) = \phi(t)x_0 + \sum_{\tau=0}^t u(t-\tau)u(\tau)$$

tutti gli stati possibili raggiunti sono detti RAGGIUNGIBILI
si inizia col tempo zero perché più semplice

$$t_0 = 0 \quad x_0 = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \text{se stato è raggiungibile da } x_0 = 0 \\ \text{allora lo è da ogni stato} \end{array} \right]$$

$$x(1) = Ax_0 + Bu(0) = Bu(0) \quad x_n \in \text{Im}(B)$$

Sono raggiungibili tutti gli stati di immagine $B!$ $\text{Im}(B)$

$$x(2) = ABu(0) + Bu(1) \quad x_2 \in \text{Im}([B \ AB])$$

$$x(3) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \quad x_3 \in \text{Im}([B \ AB \ A^2B])$$

è possibile continuare all'infinito, ma

$$(x(n)) \Rightarrow x_n \in \text{Im}([B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B \ A^nB])$$

$\dim B \leq n$, non ha senso A^nB , che non aggiunge nulla all'immagine

[kayley-hamilton] $\rightarrow p(\lambda) = p(A)$

$$R = ([B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]) \quad R \in \mathbb{R}^{n \times pn}$$

è matrice di raggiungibilità

$\text{Im}(R)$ contiene tutti gli stati raggiungibili;

E' possibile studiare l'immagine di R per vedere gli stati raggiungibili.

E' possibile, nel caso discreto, anche vedere il numero minimo di passi necessario ad esempio guardando se stato $x \in \text{Im}([B A^k])$ ma $x \in \text{Im}(B A B A^2 B)$

$$X_R \in \text{Im}(R) = Q : \text{gen}\{(\)..(\)\}$$

e' possibile quindi, come nel caso degli stati inaccessibili, effettuare un cambio di coordinate

$$\begin{aligned} Z &= T X \\ \Rightarrow T^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} \text{Im}(R) & | \\ \hline & \text{compl} \end{array} \right) \quad X_R - Z_R = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ componenti d. base de } R \end{aligned}$$

$$\text{tale che } T^{-1} Z_R = X_R$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{A} &= T A T^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \tilde{B} = T B = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \tilde{C} &= C T^{-1} = (\tilde{C}_1 \tilde{C}_2) \quad \tilde{D} = D \end{aligned}$$

completamente spiegati alla pagina successiva

Studio delle nuove metrici

$$x_R \in \text{Im}(R) \Rightarrow x_R \in \mathbb{Q}$$

\tilde{x}_R ha stesso spazio $\in \mathbb{Q}$

$$\left[\begin{array}{l} R = T^{-1} \tilde{R} \\ \text{come } x_R = T^{-1} \tilde{x}_R \end{array} \right]$$

quindi $\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \dots \end{pmatrix}$ che fissando la base
tale che $\tilde{x}_R = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$

R ha tutti i vettori $\neq 0_n$, ma scomponendo viene che

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 & \dots \end{pmatrix} \text{ ha come immagine } \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi \tilde{B}_2 è per forza = 0

Per quanto riguarda A si fa discorso simile ad inosservabili.

Se x è raggiungibile, allora lo è anche Ax

$x_R \Rightarrow Ax_R$ è raggiungibile, perché spazio invariabile

quindi:

$$Az_R = z'_R \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} A_{11}z_1 = z'_1 \\ A_{21}z_1 = 0 \end{array}$$

$$z'_1 \neq 0 \Rightarrow A_{21} = 0$$

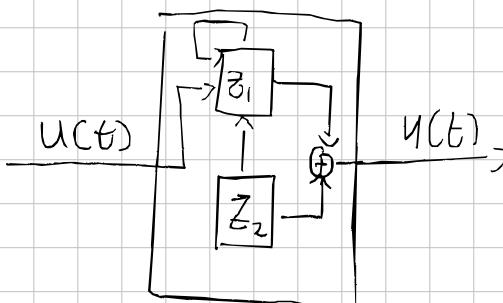
Sì guarda strutturalmente, separando le componenti

$$\dot{\tilde{Z}}_1 \text{ (parte raggiungibile)} = \tilde{A}_{11} \tilde{Z}_1 + \tilde{A}_{12} \tilde{Z}_2 + \tilde{B}_1 u$$

$$\dot{\tilde{Z}}_2 \text{ (parte non)} = \tilde{A}_{22} \tilde{Z}_2$$

$$y = \tilde{C}_1 \tilde{Z}_1 + \tilde{C}_2 \tilde{Z}_2$$

\tilde{A}_{11} = contiene modi eccitabili
 \sim
 \tilde{A}_{22} = contiene modi non eccitabili



In uscita non ci sono differenze.

\tilde{Z}_2 influenza lo stato \tilde{Z}_1 , ma non è influenzabile, infatti l'ingresso modifica solo \tilde{Z}_1 .

Nell'ingresso-stato \tilde{Z}_2 non viene toccato.

Quindi: se andiamo a studiare la matrice ingresso-stato \tilde{H}

$$\tilde{H} = e^{\tilde{A}t} \tilde{B} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{A}_{11}t} & * \\ 0 & e^{\tilde{A}_{22}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\tilde{A}_{11}t} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

solo ciò che dipende da \tilde{A}_{11} , quindi sono solo le leggi temporali, quindi solo modi naturali: EICITABILI

CRITERIO DI HANTUS

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ \dots \\ C \end{bmatrix}$$

Se la matrice ha rango pieno \Rightarrow
 $P\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}\right) = n$

Allora il sistema è osservabile per il modo relativo all'autorale λ .

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & ; & B \end{bmatrix}$$

Se la matrice ha rango pieno
 $P\left(\begin{bmatrix} A - \lambda I & ; & B \end{bmatrix}\right) = N$

Allora il sistema è eccitabile per il modo relativo all'autorale λ .

Ottimo strumento per quando, uniti 2 sistemi differenti con polo in comune, è necessario studiare la "caduta d. osservabilità / raggiungibilità" che sarà sicuramente

DI GIABERNARDINO

Arendo adesso uno spazio di stati in \mathbb{R}^n si è potuto vedere che

- \exists sotto spazio di stati, raggiungibili:
 - \exists sotto spazio di stati inaccessibili (indipendenti)

è possibile chiedersi quindi quando valgono contemporaneamente le proprietà per specifici stati

$$\begin{array}{ll} \mathcal{J} = \text{gen} \left\{ (v_1) \dots (v_r) \right\} & \mathcal{Q} = \text{gen} \left\{ (w_1) \dots (w_s) \right\} \\ \text{con } p(\Theta) = r & \text{con } p(\mathcal{R}) = s \end{array}$$

- o/ DUE SOTTOSPAZI SONO INDEPENDENTI, infatti uno studia all'uscita (β) e uno all'ingresso (α)

Si ritiene nel contesto degl' spazi lincari

$X \in \mathfrak{I} \cap \mathcal{Q}$ [stahr Inass, e reggimy, 611:]

chiamò quindi:

$$x_1 = \text{Q1} \cap \text{S}$$

$$\chi_2: \chi_2 \oplus \chi_1 = \mathbb{Q}$$

$$\chi_3: \chi_3 \oplus \chi_1 = 5$$

$$\chi_4: \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_4 = \mathbb{R}^n$$

sottospazio di stati raggiungibili
 somma diretta del sottospazio intersezione
 tale che $X_2 \oplus X_1 = Q$ (intorno Q)

somme dirette su α , per
completamento per 3

tutto il sottosquadro stato che è non ha mai o mai rado

Ogn' uno sottospazio X_i , $i = 1 \dots k$ è descritto da un set di vettori di base, con relative dimensioni

ESSA è la scomposizione di KALMAN

Proviamo quindi a fare la stessa cosa che si è fatta con le singole proprietà:

CAMBIO DI BASE

$$z = \overline{T}x$$

$$x = T^{-1}z$$

11

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \text{base} & | & \text{base} & | & \text{base} & | & \text{base} \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 \\ & | & & | & & | & | \\ & & & & & & \text{compl} \end{pmatrix}$$

per esempio

$$2 \left(\begin{array}{c} * \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

7 è elemento
raggiungibile
e inassorbibile.

$$Z = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z è stato raggiungibile e non inaccessibile completamente

che forme assumono $\tilde{A} \tilde{B} \tilde{C}$?

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \tilde{A}_{14} \\ 0, \tilde{A}_{22} & 0 \quad \tilde{A}_{24} \\ \cdots & \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} \tilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 \quad \tilde{A}_{44} \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con aggiornamenti
spiegati poi

$$\tilde{C} = (0 \tilde{C}_2 0 \tilde{C}_4)$$

Si fanno le stesse operazioni, studiando ragionabilità ed osservabilità con le loro combinazioni

$$Z_R = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\tilde{B}_R deve stare sempre nell'immagine di Z_R quindi:

$$\tilde{B}_R = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A}_R \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -A_1 & - \\ -A_2 & - \\ A_3 Z_1 + A_{32} Z_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{31}, A_{32} = 0 \\ A_{11}, A_{12} = 0$$

$$Z_1 \neq Z_2 \quad \text{X} \\ \Rightarrow A_{31} \text{ e } A_{32}$$

infatti ho le stesse forme a blocchi dei ragionabili

In conclusione \tilde{A} è di nuovo matrice a BLOCCHI

$$\ddot{z}_1 = \tilde{A}_{11} z_1 + \tilde{A}_{12} z_2 + \tilde{A}_{13} z_3 + \tilde{A}_{14} z_4 + \tilde{B}_1 u : \Sigma_1$$

$$\ddot{z}_2 = \tilde{A}_{22} z_2 + \tilde{A}_{24} z_4 + \tilde{B}_2 u : \Sigma_2$$

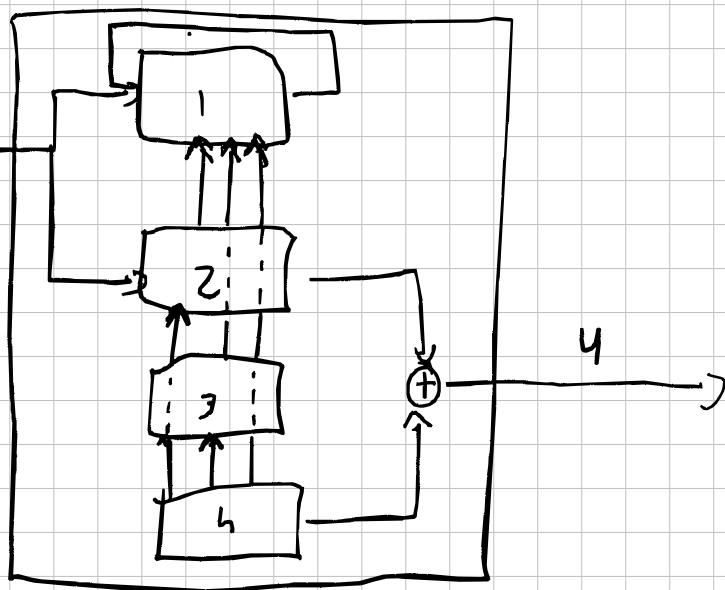
$$\ddot{z}_3 = \tilde{A}_{33} z_3 + \tilde{A}_{34} z_4 : \Sigma_3 \quad \Sigma_1 = R e \Im$$

$$\ddot{z}_4 = \tilde{A}_{44} z_4 : \Sigma_4 \quad \Sigma_2 = R e \Im$$

$$\dot{y} = \tilde{C}_2 z_2 + \tilde{C}_4 z_4 + \tilde{D} u \quad \Sigma_3 = R e \Im$$

$$\Sigma_4 = R e \Im$$

abbiamo quindi 4 stati!



$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau$$

↑ nudo

$$U(s) = h(s) U(s)$$

↳ Nudo

Non de' lo
stato, solo l'ingresso
e l'uscita

E' possibile trovare una rappresentazione nello spazio di stato
che si comporti allo stesso modo?

Sì, se $h(t) = w(t)$
e $h(s) = w(s)$

$h(s)$ può rappresentare una funzione di trasferimento se
nella forma $\frac{N(s)}{D(s)}$ propria, o strettamente

questo perché

$\overbrace{C(sI - A)^{-1} + D}$ Funzione propria

↳ funz. strett.
propria

Δ è verificata allora bisogna trovare
 $(n A, B, C, D)$ tale che

$$k(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$A_{n \times n}$

$B_{n \times p}$

$C_{q \times n}$

$D_{q \times p}$

c'è noto tutto tranne
n!

PROBLEMA DELLA REALIZZAZIONE

Sì, ricorda che effettuando un cambio d. base tale che

$$\tilde{z} = Tx \quad \text{la } \tilde{w}(t) \text{ non cambia}$$

Attraverso Kalman sappiamo che l'unico che entra nell'ingresso ed esce c'è il sistema relativo allo spazio X_2

Quando si realizza è possibile poter dire solo della parte raggiungibile e osservabile

Quindi, con Kalman

$$w(t) = C_2 e^{A_2 t} B_2 + D_2 s(t)$$

Esistono infinite realizzazioni, infatti $w(t)$ ha tutte le informazioni: SOLO su X_2

Per trarre D è possibile trasformare $W(t)$ in una funzione STRETTAMENTE PROPRIA, e la DIFFERENZA è proprio D

Sì procede quind'attraverso algoritmi di realizzazione

$$W(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

è strettamente propria, con 1 ingresso e 1 uscita

una realizzazione, allora, è

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$C_R = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{pmatrix} \quad D = D$$

essa è la realizzazione CANONICA,
e nel caso $p=q=1$ è anche MINIMA

Se si calcola la matrice di raggiungibilità
si conosce la struttura J. B

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ \vdots & \vdots & 0 & * & * \\ \vdots & 0 & 1 & * & \vdots \\ 0 & 1 & * & \vdots & \vdots \\ 1 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

è una MATRICE TRAORDINARE, il cui determinante è $(-1)^n \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 1 & -0 \\ \vdots & & \vdots & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La rappresentazione è raggiungibile completamente

(forma canonica raggiungibile)

OSS: Se nel denominatore appare a_n allora il teorema non è applicabile. Si divide tutto per a_n , sopra e sotto

le forme CANONICHE possono essere applicabili anche quando b: non sono scalari, ma vettori è necessario modificare leggermente le matrici del sist

Un'altra realizzazione possibile per lo stesso input, (STRUTTURA A Trasposta)

$$A_{\oplus} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B_{\oplus} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C_{\oplus} = (0 \quad \cdots \quad 0 \mid 1)$$

E' la REALIZZAZIONE CANONICA osservabile, poiche'

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & * \\ \vdots & & \vdots & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

esso ha
range PIENO =>
tutta osservabile

$$\text{Se } w(s) = \frac{B_{n-1}s^{n-1} + \dots + B_1 s + B_0}{s^n + A_{n-1}s^{n-1} + \dots + A_1 s + A_0}$$

$$B_i = q \times p$$

$$\text{allora } A_{N \times N} \quad B_{N \times p} \quad C_{q \times N}$$

Si dovranno modificare le matrici tali che gli scalari diventeranno, moltiplicandoli per matrici identità $q \times q$ in caso di C e $p \times p$ in B

$$\text{ES } q=2$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & \dots & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & \dots & | & 0 & 1 \end{pmatrix}_{q \times nq}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & : & G & -a_0 I \\ I & 0 & : & & -a_1 I \\ G & I & : & 0 & ; \\ 0 & G & : & I & -a_{n-1} I \end{pmatrix}_{nq \times nq} \quad N = nq$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{n-1} \end{pmatrix}_{nq \times p}$$

Nella forma raggiungibile si fa lo stesso procedimento solo che per $N = np$

Sì, usa quindi la forma raggiungibile ad osservabile
qui così: $p \neq 1$ o $q \neq 1$, rispettivamente.

Esempio:

$$K(S) = \frac{\begin{pmatrix} S & 0 & 1 \\ 1 & S+1 & 0 \end{pmatrix}_{PS}}{S^2 + 1} \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} S}{S^2 + 1} \xrightarrow{q \times p}$$

\Rightarrow USA forma canonica TAGGIO UNIFORME $p = 3$

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

= USA forma canonica OSS $q = 2 \rightarrow hq \times p$

$$A_B = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -a_0 \\ \hline 1 & -a_1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota che la forma OSS è più piccola della forma raggiungibile

$$A_R = 6 \times 6$$

$$B_R = 4 \times 4$$

REALIZZAZIONE MINIMA

La W(S), per com'è costruita, ha come poli gli autovalori, quindi il grado massimo del denominatore coincide DIRETTAMENTE con la realizzazione minima possibile, quella in cui tutti gli autovalori hanno modi relativi osservabili ed eccitabili.

Nell'esempio precedente il grado massimo del denominatore era 2, quindi una realizzazione che ha come A_{2x2} sarebbe minima.

Faccendo però le realizzazioni eccitabili ed osservabili ci si accorge che A_1 ha dimensioni diverse

$$A_1 \ 4 \times 4$$

$$A_R \ 6 \times 6$$

A_1 è migliore rispetto ad A_R , ma non per questo è minima. N(S) qui infatti aveva $q=2$, $p=3$ $q < p$ quindi facendo la realizzazione OSSERVABILE si ha una migliore realizzazione con $q=p=1$ è possibile costruire una realizzazione minima.

Esiste un algoritmo di REALIZZAZIONE che, date delle condizioni stringenti, costruirà UNA MINIMA

Se si è fatta la realizzazione in forma raggiungibile è possibile studiare la struttura, SPECIFICATAMENTE quella osservabile (visto che per costruzione la raggiungibilità è piena).

Se si fa il cambio di BASE si ha

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix} \quad \tilde{C} = (0 \ C_2)$$

di cui, si ricorda, che

\tilde{A}_{11} ha al suo interno gli autovalori relativi ai modi INOSSERVABILI, non utili per la costruzione di $u(t)$

\tilde{A}_{22} , e \tilde{C}_2 sono quindi le matrici che contengono i modi OSSERVABILI.

$u(t) = \tilde{C}_2 e^{\tilde{A}_{22}t} \tilde{B}_2$, infatti anche $\tilde{A}_{22}, \tilde{B}_2, \tilde{C}_2$ sono realizzazioni MINIMI!

Stessa cosa è possibile per la realizzazione in forma OSSERVABILE, utilizzando lo studio delle raggiungibilità

ES.

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{2}{s} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} s+1 & 2(s+1) \\ 0 & s \end{pmatrix}}{s(s+1)} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}s + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{s^2+s}$$

$$A_R \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

=
S. osservi il sistema

Sì può scomporre sistema! per righe, separandoli:

$$y_1(s) = \left(\frac{1}{s} \quad \frac{2}{s} \right) \begin{bmatrix} u(s) \end{bmatrix}$$
$$y_2(s) = \left(0 \quad \frac{1}{s+1} \right) \begin{bmatrix} u(s) \end{bmatrix}$$

Sì può realizzare separatamente K_1 e K_2 , avendo
realizzazione: minime studiando per realizz. ad esempio
1 uscita 2 ingressi: \Rightarrow OSS

$$\frac{(1 \ 2)}{s} \xrightarrow{q \times p=2} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

ha una realizzazione che ha $n=1$

Stessa cosa lo si fa per k_2 , trovando sempre una realizzazione che ha cono dimensione $A=1$,

l'unione dei sistemi porta ad un altro sistema k , con $\dim(A_k) = 2$, quindi minimo.

N.B., è possibile fare lo stesso per studio in colonne, studiando l'assorbitività

posso poi unire secondo

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ x_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y_1 = C_1 x_1 \\ y_2 = C_2 x_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Io studio è cercare di MINIMIZZARE il numero di righe, (y_1, y_2) o per colonne (u_1, u_2)
per colonne con M : le colonne

$$Y(s) = M_1(s) U_1 + M_2(s) U_2$$

$$Y_1(s) : M_1(s) U_1(s) \quad \Rightarrow \quad A_{TOT} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$$Y_2(s) : M_2(s) U_2(s)$$

$$C_{TOT} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Questo è il METODO di GILBERT

data $\chi(s)$ con POLI SEMPLICI e $N(s) = q \times p$
e $D(s) = (s-s_1)(s-s_2) \dots (s-s_n)$

- 1) Scomporre con RESIDUI
- 2) Calcolare il rango dei residui; quella è la moltiplicità geometrica dell'autovettore
- 3) dato ciò che s_i è detto $R_i = C_i B_i$ ove
 $C_i = (q \times \text{rg}(R_i))$ e $B_i = (\text{rg}(R_i) \times p)$

$$A_G = \left(\begin{array}{c|ccc} s_1 & & & \\ \hline s_2 & & & \\ s_3 & & & \\ \vdots & & & \\ s_n & & & \end{array} \right)$$

con s_i : che appare il numero i volte dalla moltiplicità geometrica

$$B_G = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \quad C_G = (C_1, \dots, C_n)$$

Se ho tutti poli semplici

$$k(s) \frac{N_K(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)}$$

allora sappiamo
che la matrice
è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix}$$

Se $m_g \geq 1$ possiamo trovare

$$\dots + \lambda_1 U_1 V_1^T + \lambda_2 U_2 V_2^T + \dots = \\ = \dots + \lambda_i ((U_1 U_2 U_3) \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \\ \vdots \\ V_i^T \end{pmatrix})$$

Quindi, abbiamo tanti vettori quanto c'è la
moltiplicità, e il rango del prodotto di vettori
è tanto quanto la molteplicità algebrica

La matrice A ha quindi grado $n \times n$

Nella funz. d, trasf $w(t) = e^{\lambda i} (C U_i V_i^T B) + \dots$

è possibile trovare il rango d. $CU_i U_i^T B$, passando per lo spazio di Laplace

$$W(S) = \sum_{i=1}^n \frac{CU_i U_i^T B}{S - S_i}$$

S. studia quindi il rango d. $CU_i U_i^T B$, che corrisponde AL RESTO R_i relativo all'autorale S_i .

il rango d. R_i corrisponde quindi alla molteplicità algebrica di S_i , che ripetiamo quel numero di volte nella A diagonale

per COSTRUIRE C, e B allora si pensa

$$R_i = CU_i U_i^T B$$

$$\text{Se l'autorale ha } Mg = 1 \quad U_i = 1 \times n \quad U_i^T = n \times 1$$

S. può considerare $U_i = \theta_i$ $i = 1 \dots n_{\text{fa}}$ in cui si trova l'autor. S_i

Con $Mg > 1 \quad j = 1 \dots n_{\text{fa}}$

allora U_{i1}, U_{im} saranno $U_{ij} = \theta_{ij}$

$j = r_{jfa}$ in cui si trova l'autor. i nella j esima volta

Visto che $T^{-1} = I_{n \times n}$, quindi anche T

$$\text{al resto } R_i = (C_1 \dots C_i \dots C_n) e_i \cdot e_i^T \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} \\ = C_i B_i$$

ad esempio, se ad R_2 è associato un autovalore con $m_g = 2$, che si trova rispettivamente nella SECONDA e TERZA RIGA esse avrà autovettori destri del tipo

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \Gamma_2^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\Rightarrow R_2: (C_1 C_2 C_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$= (C_1 C_2 C_3) \xrightarrow{\sim} I \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=}$$

$$= C_2 B_2 \quad || \text{ la matrice a range 2}$$

CRITERIO DI MASON

Dato un sistema di diversi cicli connessi tra di loro è possibile calcolare la funzione di trasferimento finale.

- Un percorso è successione di rami e nodi adiacenti senza anelli: cui ogni elemento viene attraversato una sola volta. Il COEFFICIENTE P del percorso è il prodotto dei guadagni dei rami che lo compongono.
- UN ANELLO è un percorso chiuso
- Due percorsi non si toccano se non hanno NESSUN NODO in comune.
- IL DETERMINANTE Δ viene calcolato attraverso somma di sommatorie del tipo

$$1 - \sum_{i=1}^r A_i + \sum A_i A_j A_k - \sum A_i A_j A_k + \dots + (-1)^n \sum A$$

anelli che
non si
toccano

A DUE a
DUE

anelli che
non si toccano

A 3 a 3.

- Il determinante Δ_i associato ad un percorso P_i : si calcola allo stesso modo di Δ , ma ELIMINANDO il percorso

n = numero di percorsi

$$W(s) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i \Delta_i}{\Delta}$$

$$F(s) = \frac{s-10}{(s+2)(s+1)(s^2+1)}$$

$$\delta_{-1}(t-2) = e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$$

r.r.p non esiste (s^2+1) ho $y=0 \Rightarrow X=0$
stabile semplicemente

$$\tilde{y}_f = \frac{(s-10)}{s(s+2)(s+1)(s^2+1)} = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+2} + \frac{R_3}{s+1} + \frac{R_4 s + R_5}{s^2+1}$$

$$R_1 = \frac{-10}{2} = -5$$

$$R_2 = (s+2) \tilde{y}_f \Big|_{s=-2} = \frac{-12}{-2 \cdot -1 \cdot 5} = -\frac{6}{5}$$

$$R_3 = (s+1) \tilde{y}_f \Big|_{s=-1} = \frac{-11}{-1 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{11}{2}$$

$$y_f(t) = \left(-5 - \frac{6}{5} e^{-2(t-2)} + \frac{11}{2} e^{-(t-2)} + R_4 \sin(t-2) + R_5 \cos(t-2) \right) \delta_{-1}(t-2)$$

$$1516 + 15 \cdot \frac{16}{90} + 150 = 255$$

$$e^{\lambda_i t} \left(u_i v_i^\top + t u_i v_i^\top + u_i v_i^\top \right)$$

CRITERIO di Routh è applicabile con una traslazione

Se fare lo studio d. $p(\lambda)$ trova se ci sono, e quante, le radici a parte reale < 0 , fare un traslazione per $p(\lambda - \alpha)$ che troverà per parte reale $< \alpha$.

Considerando che, nel caso discrete, sarà necessario analizzare se il modulo dell'autovettore è minore di 1, è necessaria una traslazione della forma

$$Z = \left(\frac{1+s}{1-s} \right)$$

per verificare, si pone dapprima $Z = e^{j\theta}$, che ha modulo 1 e fase θ , ottenendo

$$S = \frac{e^{j\theta} - 1}{e^{j\theta} + 1} = \frac{e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2}}{e^{j\theta/2} + e^{-j\theta/2}} = j \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

esso diventa l'asse immaginario in j

$$\Rightarrow S = \frac{\alpha + j\omega - 1}{\alpha + j\omega + 1} = \frac{\alpha^2 + \omega^2 - 1}{(\alpha + j)^2 + \omega^2} + j \frac{2\omega}{(\alpha + j)^2 + \omega^2}$$

quindi, se $S = 1$, allora $\alpha^2 + \omega^2 = 1$

$$S \Big|_{\alpha^2 + \omega^2 = 1} = j \frac{\omega}{\alpha + 1} \rightarrow \operatorname{Re}(S) = \frac{\alpha^2 + \omega^2 - 1}{(\alpha + 1)^2 + \omega^2} < 1$$

S.S.E $\alpha^2 + \omega^2 < 1$

