# GLI INSIEMI

Un' insieme deve avere definiti ELEMENTI AL SUO INTERNO

$A = \{1,2,5\}$ dato per TABULAZIONE

$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ primo}\}$ dato per PROPRIETÀ

OSS. Gli oggetti all'interno dell'insieme possono anch'essi essere INSIEMI

ES $A = \{\{1\},\{3\}\{7\}\} \Rightarrow 1 \notin A \wedge \{1\} \in A$

→ 1 non è elemento di A, ma lo è l'insieme dell'elemento caratterizzato da 1

- SOTTOINSIEME

$B \subset A$ = B è sottoinsieme di A se tutti gli elementi di B sono anche elementi di A

ES $A = \{1,2,5\} \wedge B = \{1\}$

$B \subset A$

- INSIEME VUOTO $\phi$

è insieme senza oggetti, è sottoinsieme di ogni INSIEME

$\phi \subset A$

- CARDINALITÀ

DEF: Sia A un insieme finito di elementi si definisce CARDINALITÀ il numero di elementi al suo interno

$|A| = 3 \qquad |A| \in \mathbb{N}_0$

- INSIEME DELLE PARTI DI

DEF. Sia A un insieme, si definisce $\wp(A)$ l'insieme in cui tutti gli elementi sono sottoinsiemi di A

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{1,2,5\}\}$$

Riprendendo la cardinalità si nota che

$|A| = 3 \quad , \quad |\wp(A)| = 8 = 2^3$

## · L'INSIEME DEI NUMERI

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri NATURALI $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri INTERI RELATIVI $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$

$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri ~~RELATIVI~~ RAZIONALI $\left\{\frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri REALI $\{x, a_1 a_2 a_3 a_n : a_n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{C}$ = insieme dei numeri COMPLESSI

<u>OSS</u>: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

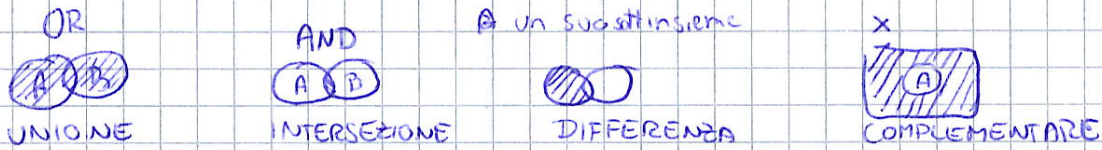
- I numeri IRRAZIONALI, ovvero non riducibili ad una frazione e di lunghezza decimale indefinita sono

  - ALGEBRICHE $\sqrt{2}$, rappresentabile da una eq. $x^2 - 2 = 0$
  - $\pi$

## ∘ RELAZIONI TRA INSIEMI

- UNIONE = $A \cup B$ $\{x : x \in A \vee x \in B\}$
- INTERSEZIONE = $A \cap B$ $\{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- DIFFERENZA = $A / B$ $\{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- COMPLEMENTARE = $A \subseteq X$ $C_X(A)$ $\{x : x \in X \wedge x \notin A\} = A^c$

  (con $X$ insieme di tutti gli elementi e $A$ un suo sottinsieme)




## ∘ PRODOTTO CARTESIANO

$A \times B$ $\{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$ prodotto CARTESIANO, o diretto, di $A$ e $B$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ si forma un piano

insieme di insiemi di coppie nel quale il primo elemento $x \in A$, e il secondo $y \in B$

$$\{1, 2, 5\} \times \{1, 3\} = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (5,1), (5,3)\}$$

PROPRIETÀ

- COMMUTATIVA

  $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- DISTRIBUTIVA

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

# IPOTESI, ENUNCIATO, TEOREMA

considerando la seguente affermazione:

"Il numero NATURALE n è dispari"

n rappresenta una variabile
e il PREDICATO è la frase per il quale si giudica la veridicità di essa. IN QUESTO caso la sua veridicità dipende dalle variabile
considerando invece

"per ogni numero naturale n si può dire che se n è dispari allora $n^2$ sarà dispari"

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (n \text{ dispari} \Rightarrow n^2 \text{ dispari})$$

la frase quindi è un ENUNCIATO, o proposizione. Se dimostrabile diventa un teorema.

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (p(n) \Rightarrow q(n) \quad \text{MA ANCHE}$$

$$!q(n) \Rightarrow !p(n) \quad \text{legge contro inversa}$$

Applicazione pratica

TEOREMA DI EUCLIDE

$$\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2 \quad \text{i.e.} \quad \sqrt{2} \text{ è irrazionale}$$

dimostrazione PER ASSURDO (negando la tesi), sia $x \in \mathbb{Q}$ indichiamo $x = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0$.
W.L.O.G. (Without loss of generality) consideriamo $\frac{p}{q}$ già ridotti ai loro minimi termini e che $x > 0$. Perché ciò abbia senso p e q devono avere lo stesso segno, e quindi siano positivi.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

se p è pari segue che anche q sia pari, essendo moltiplicati per un numero pari. quindi possiamo riscrivere come

$$p = 2k$$

$$(2k)^2 = 2q^2$$

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \quad \text{anche } q \text{ è pari} \ \lightning$$

essendo entrambi pari non sono stati ridotti ai minimi termini, quindi si nega la tesi enunciato per assurdo, confermandola.

# PRINCIPIO DI INDUZIONE

Metodo di risoluzione di problemi di n risultati in un modo solo.
Si vuole quindi verificare una proprietà $P(n)$

Se la si vuole dimostrare per qualsiasi $n$ si può verificarla con $n+1$

$$\underset{\text{VERA}}{P(n)} \longrightarrow \underset{\text{VERA}}{P(n+1)}$$

Una volta che si è verificato $P(n+1)$ si può dire di aver verificato qualsiasi numero, perchè si può mettere come ipotesi $P(n+1)$ e come tesi $P(n+2)$ e così via.

Vi sono 2 PASSAGGI:

1. BASE: Si verifica la proprietà $P(n)$ con il valore più piccolo $n_0 : n_0 \in \mathbb{N}$

IPOTESI INDUTTIVA =
2. Si assuma a questo punto che l'ipotesi $P(n)$ sia vera, quindi si dimostra che sarà vera anche per $n+1$

ES 1 disuguaglianza di Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall x \in (-1,+\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$$

BASE $n_0 = 1$

$$(1+x)^1 \geq 1+1x \quad = \text{vera}$$

INDUZIONE
ipotizzando che sia vera, dimostrare la tesi
$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

tesi:
$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x =$$

$$= (1+x)^n (1+x) \geq \left[(nx+1)\cdot(1+x)\right] =$$

essendo $1+x^n$ verificata, allora vorrà dire che per $x>-1$, quindi $(1+x)>0$ moltiplicato a sx e dx della disuguaglianza originale $[(1+x)^n \geq 1+nx]$ sarà la stessa cosa.

$$= nx + nx^2 + x + 1 = (n+1)x + 1 + nx^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+(n+1)x+nx^2 \geq (n+1)x + 1$$

poichè $nx^2$ è SICURAMENTE POSITIVO

ES 2

$$|P(A)| \geq |A| \Rightarrow 2^n \geq n$$

BASE $n=1$

$2^1 \geq 1$

IPOTESI INDUTTIVA

IPOTESI DA PRENDERE PER VERA:

$$2^n \geq n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

TESI $\underline{2^{n+1}} \geq n+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n \cdot 2 \geq 2n$

presa dalla tesi
come vera, si moltiplica
per 2 a dx e sx

$= 2n \geq \underline{n+1}$ per ogni naturale.

verificata!

$2^{n+1} \geq n+1$

ES 3

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

BASE $n=1$

$k=1 \Rightarrow 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ✓

IPOTESI

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

TESI

$$\underline{\sum_{k=1}^{n+1} k} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\text{ipotesi}} + \sum_{k=n+1}^{n+1} k =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$$

$$= \underline{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} \quad \checkmark \text{ verificata}$$

# SOMMATORIA e COEFFICIENTE BINOMIALE

**DEF**: Siano $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ con $n$ numeri reali: la loro somma essa può essere indicata più BREVEMENTE con la SOMMATORIA

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$i$ = indice di sommatoria che va da 1 ad $n$

## PROPRIETÀ FORMALI

- Prodotto per una costante

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 = c(a_1 + a_2 + a_3)$$

- Sommatoria con termine costante

$$\sum_{i=1}^{n} c = c \cdot n$$

- Somma di sommatorie

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

- Traslazione di indici

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m} \Rightarrow k = i + m \Rightarrow i = k - m \Rightarrow \sum_{i=1+m}^{n+m} a_{i-m}$$

- Scomposizione

$$\sum_{k=1}^{n+m} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i$$

$$x + y \qquad x \quad + \quad y$$

- Riflessione [sommatoria dal più grande al più piccolo]

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1} = \sum_{i=1-1}^{n-1} a_{n-i}$$

ESERCIZIO

dimostrazione che $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ con $q \neq 1$

$$(1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}$$

↳ prodotto per costante $1 \sum_{k=0}^{n} q^k - q \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} =$

= traslazione di indici $\sum_{k=0}^{(0+n)} q^k - \sum_{k=(0+1)}^{n+1} q^k =$ scomposizione/traslazione $\ldots \left(1 + \cancel{\sum_{k=(0+1)}^{n} q^k}\right) - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} q^k} + \ldots\right)$

$$+ \sum_{k=1}^{n+1} q^k \quad q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$$

## FATTORIALE DI $n$

DEF: il fattoriale è il prodotto dei primi $n$ interi, e si indica con $n!$, per definizione $0! = 1$

PROPRIETÀ

$$n! = n \cdot (n-1)!$$ $n$ per il fattoriale del numero precedente

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n!$ | 1 | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 |

## COEFFICIENTE BINOMIALE

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\, a^k b^{n-k}$$

$C_{n,k}$ sono i cosiddetti coefficienti binomiali e sono indicati con simbolo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

la legge di newton per calcolare ogni potenza n-esima si può quindi scrivere come

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA è il risultato dei valori dei coefficienti binomiali per una potenza n esima

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1$$

ottimo per trovare i coeff delle varie moltiplicazioni $a^k b^{n-k}$

$$\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

PROPRIETÀ

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$ speculativa. (vale sia da un verso che dall'altro, lo si nota dalla speculazione del TRIANGOLO stesso)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

# I CAMPI $k$ $(k, +, \cdot)$

∘ Esiste un operazione "+" di addizione o somma con seguenti PROPRIETA' (R1)

- $\forall a, b \in k = a+b = b+a$ COMMUTATIVA
- $\forall a, b, c \in k : (a+b)+c = a+(b+c)$ ASSOCIATIVA
- $\exists 0 \in k : \forall a \in k \quad a+0 = a = 0+a$ ELEMENTO NEUTRO ZERO
- $\forall a \in k \ \exists (-a) \in k : a + (-a) = 0$ OPPOSTO

**OSS:** $0$ e $-a$ sono UNIVOCAMENTE DETERMINATI, i.e. sono dati da un solo VALORE e UNA SOLA PROPRIETA'

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo

$$\exists 0' \in k : a+0' = a \quad \forall a \in k$$

quindi:

$0+0' = 0'$ per proprietà dello zero primo

$0'+0 = 0$ per proprietà dello zero

$$0' = 0 \ ↯$$

∘ Esiste un operazione "·" di moltiplicazione o prodotto con seg. PROPRIETA' (R2)

- $\forall a, b \in k, \ a \cdot b = b \cdot a$ COMMUTATIVA
- $\forall a, b, c \in k, \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ASSOCIATIVA
- $\exists 1 \in k : a \cdot 1 = a$ ELEMENTO NEUTRO 1
- $\forall a \in k \wedge a \neq 0 \ \exists (a^{-1}) \in k : a \cdot (a^{-1}) = 1$ OPPOSTO
- $\forall a, b, c \in k, \ (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ DISTRIBUTIVA (regola rapport. con ADDIZIONE)

**DEF:** Un insieme $k$ dotato di operazioni $+$ e $\cdot$ soddisfacenti le proprietà R1 e R2 e' UN CAMPO

OSS: Gli elementi 0 e 1 ~~non~~ necessariamente sono ~~quei~~ simboli, che nel caso della retta reale assumono valori numerici

ES. in un campo con solo 0 e 1 (il minimo perché un campo sia definibile come tale)

$0+0 = 0$ elemento neutro

$0 \cdot 1 = 0$ elem. neutro

$1+1$ ⟨ $0$ / $1$ non può essere perché l'elemento

OSS = $\mathbb{N}$ non è un campo in quanto non possiede la proprietà dell'opposto, non avendo numeri negativi

$\mathbb{Z}$ non è un campo in quanto fallirebbe per proprietà dell'opposto moltiplicativo.

$$2 \cdot 2^{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^{-1} = 1/2 \text{ (non esistente in } \mathbb{Z})$$

INSIEMI ORDINATI con CORRELAZIONE DI ORDINE $\leq$ $(X, \leq)$
deve avere proprietà

- $\forall a \in X \quad a \leq a$ RIFLESSIVA
- $\forall a, b \in X \quad a \leq b,\ b \leq a$ ~~ANTIRIFE~~ ANTISIMMETRICA
- $\forall a, b, c \in X \quad a \leq b \leq c = a \leq c$ TRANSITIVA

# CAMPI ORDINATI

**DEF**: Un campo ORDINATO possiede la proprietà dei

- CAMPI (R1, R2)
- INSIEMI ORDINATI

$(k, +, \cdot, \leq)$

- (R3) è COMPATIBILE CON REL. DI CAMPO
  $\forall a, b, c \in k,\ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
  $\forall a, b, c \in k,\ c > 0 \quad a \leq b \Rightarrow ca \leq cb$

**OSS**: seppur sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{R}$ siano entrambi campi ordinati $\mathbb{R}$ risulta superiore e più corretto come ambiente di studio a causa degli irrazionali, che NON FANNO PARTE del campo $\mathbb{Q}$ (es $\sqrt{2}$ già dimostrato irr.)

# ESTREMO SUPERIORE, INFERIORE

**DEF** Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato qualsiasi e $E \subset X$ si dice che è un insieme

- LIMITATO SUPERIORMENTE se esiste un $M$ tale che $x \leq M$ per $x \in E$
- LIMITATO INFERIORMENTE se esiste un $m$. $x \geq m$ per $x \in M$
  (non il numero)
  che è st de maxen

DEF: si introducono 2 elementi di massimo e minimo di un'insieme

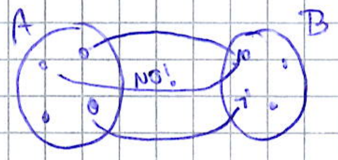
- $\overline{X}$ MASSIMO se
  - $\overline{x} \in E$
  - $x \leq \overline{x} \quad \forall x \in E$
- $\underline{X}$ MINIMO se
  - $\underline{x} \in E$
  - $x \geq \underline{x} \quad \forall x \in E$

ES

| | $\overline{X}$ | $\underline{X}$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | non esiste | 0 |
| $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ | 1 | non esiste |

# CARDINALITÀ DI INSIEMI INFINITI

**DEF.** Siano 2 insiemi A e B, essi si dicono di UGUALE CARDINALITÀ (idea intuitiva di numerosità) se possono essere messi in corrispondenza biunivoca tra di loro, CIOÈ se esiste una legge che mette a confronto associando ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B




**DEF.** Un insieme A è numerabile se ha stessa cardinalità di $\mathbb{N}$, ergo che ogni oggetto di A è indicizzabile con un numero naturale

propos: $\mathbb{Z} > \mathbb{N}$ è numerabile, e ha stessa cardinalità

ES

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... n |
| $\mathbb{Z}$ | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | ... |

propos. $\mathbb{Q} > \mathbb{N}$ è numerabile

$\mathbb{Q}_+$ (in quanto se un intervallo è indicizzabile anche il suo completo lo è) $= \{q \mid q \in \mathbb{Q}_+\}$

$q = \frac{n}{m}$ => si crea una tabella con $n+m$, ove $m \neq 0$ e $n, m \geq 1$

n+m — n/m possibili:

2: 1/1
3: 1/2 2/1
4: 1/3 2/2 3/1
5: 1/4 2/3 3/2 4/1
6: 1/5 2/4 3/3 4/2 5/1
... ....

tutti i numeri razionali positivi compaiono almeno una volta, con alcune ripetizioni (es 1/1, 2/2). Numerando le unicità si mettono in corrispondenza biunivoca $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{N}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| $\mathbb{Q}$ | 1/1 | 1/2 | 2/1 | 1/3 | 3/1 | 1/4 | ... |

prop: $\mathbb{R} > \mathbb{N}$ non è numerabile

Si vuole dimostrare per assurdo che $[0,1] \cdot \{0, r_1, r_2 r_3 r_4 .. \mid con\ r_n \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 9\}$

scriviamo ogni $r_n$ in forma decimale

$r_1 = 0, a_1 a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} ...$
$r_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} ...$
$r_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35}$
...

$r \neq r_1$ la prima cifra di r è diversa dalla prima cifra di $r_1$

CI SARÀ SEMPRE UNA CIFRA DI DIFFERENZA

Si definisce

$r = 0, b_1 b_2 b_3$ ove $b_n = 5$ se $a_{ii} \in \{0,1,2,3,4\}$
$b_n = 4$ se $a_{ii} \in \{5,6,7,8,9\}$

si definisce che $b_i \neq a_{ii}$ seguendo un ordine diagonale.

ESSO SARÀ SEMPRE DIVERSO da $r_{n}$, => $\neq r$ in quanto le sue cifre (4 e 5) sono diverse propos. Sia $A$ un insieme allora $card(\mathcal{P}(A)) \geq card(A)$, già visto nel senso finito poiché $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

dimostrazione per assurdo → sia una funzione $f$ tale che $A$ abbia una corrispondenza biunivoca in $\mathcal{P}(A)$.

$$\exists f: A \to \mathcal{P}(A$$

$$X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A)$$

$x \in A$

i.e. $a \in A$

$f(a) \in \mathcal{P}a$

$f(a) \subset A$

se $f$ suriettiva $\exists\, x \in A: f(x) \Rightarrow X$

$X$

sottoinsieme di tutti gli elementi che non fanno parte dell'applicazione in $f(a)$, ovvero delle immagini in a

$X$ è anch'esso un sotto insieme di $\mathcal{P}(A) \Rightarrow \subset A$

$$x \in X \Leftrightarrow x \in f(x) \Leftrightarrow x \notin f(x)$$

se deve appartenere a $X$ allora appartiene anche a $f(x)$. ma se appartiene

contraddizione! errore

$x$ non appartiene alla funzione di se stessa $= X$

Ossi:

$$(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

siano $a = 1 = b \Rightarrow \quad 2^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$n$ sottoinsiemi di $k$ elementi distinti

# ESTREMO SUPERIORE ed INFERIORE

nonostante ad esempio $\mathbb{N}$ sia limitato non sempre ha già massimi o minimi quindi si introducono 2 concetti:

**DEF**: sia $E \subseteq X$. Un numero $k \in X$ (ma non necessariamente $k \in E$) si dice MAGGIORANTE (MINORANTE) di $E$ se

- $k \geq x \quad \forall x \in E$
(-) $k \leq x \quad \forall x \in E$

da notare come in un insieme superiormente limitato esistono molteplici maggioranti, e viceversa, perciò

**DEF**: si introducono 2 concetti:

- il minimo valore dei maggioranti di E verrà chiamato ESTREMO SUPERIORE di E, $\sup(E)$
- il massimo valore dei ~~maggio~~ minoranti di E verrà chiamato ESTREMO INFERIORE di E, $\inf(E)$

ES. 1

$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}\right\} \subset \{\mathbb{R}, \leq\}$

tutti gli elementi ~~maggiori~~ minori di 0 sono MINORANTI

non esiste il MINIMO perché 0 non è dell'insieme

tutti gli elementi maggiori 1 sono maggioranti.
sup(

ESISTE IL MASSIMO perché 1 è parte dell'insieme

ES 2

$\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 < 2\} \subset \{X, \leq\}$

possiede estremo inferiore, 0

NON POSSIEDE MINIMO (perché 0 non fa parte dell'insieme)

non possiede estremo superiore perché $\sqrt{2}$ non è RAZIONALE quindi al di fuori del campo $\mathbb{Q}$

Non possiede massimo

R4 Ogni insieme $E \subset X$ non vuoto e limitato superiormente ha estremo superiore in X

nel caso $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0, x^2 < 2\}$ il massimo non esiste, perché sarebbe $\sqrt{2}$ quindi irrazionale. $\mathbb{Q}$ non ha proprietà dell'estremo superiore (ergo non sempre ha un sottoinsieme in $\mathbb{Q}$ con

## INTERVALLI DI $\mathbb{R}$:

- essi sono famiglie di sottoinsiemi:

### INTERVALLI LIMITATI

INTERVALLO CHIUSO di estremi a e b

$[a,b]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

INTERVALLO APERTO

$(a,b)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

INTERVALLI SEMICHIUSI E SEMIAPERTI

$[a,b)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a,b]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

### INTERVALLI ILLIMITATI

$$\left.\begin{array}{ll} (-\infty, b] & \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\ (-\infty, b) & \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \end{array}\right\} \sup(I) = b$$

$$\left.\begin{array}{ll} [a, +\infty) & \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \\ (a, +\infty) & \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \end{array}\right\} \inf(I) = a$$

# VALORE ASSOLUTO

**DEF**: il valore assoluto di un elemento $a$ è

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

HA PROPRIETÀ

1)
- $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $|a| = |-a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $\pm a \leq |a|$

2) Sia $\forall a \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, tale che $|x| \leq a$ segue che

$$-a \leq x \leq a \qquad \text{se} \quad a = |x| \text{ allora}$$

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

3) Si fa lo stesso procedimento con un elemento $y$ si trova

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

SOMMANDO $x$ CON $y$ SI TROVA

$$\underbrace{-(|x| + |y|)}_{-a} \leq x + y \leq \underbrace{|x| + |y|}_{a}$$

$x + y$ si trova tra valori compresi tra $-a$ e $a$, dunque si può usare la proprietà 2, con $|x+y| \leq a$, dunque
come $|x| \leq a$

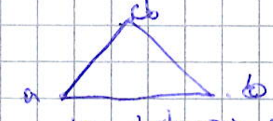
$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \text{(DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE)}$$

se $x+y \geq 0 \Rightarrow |x+y| = x+y$
se $x+y \leq 0 \Rightarrow |x+y| = -x-y =$

$$-1 \cdot \; -|x|-|y| \leq x+y \;\; \cdot(-1) \Rightarrow \; |x| + |y| \geq -x-y$$

OSS. se ad $x = a-c$ e $y = c-b$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$|a-b| \leq |a-c| + |b-c| \quad \text{, ergo}$$




la distanza tra $a$ e $b$ è sempre minore o uguale alla distanza $(a \text{ e } c)$ e $(c \text{ e } b)$

$$|\overset{A}{x+2}| \le |\overset{B}{2x-3}| + 1$$

Sia $A \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$x+2 \leq |2x-3|+1$

Sia $B \geq 0 \Rightarrow x \geq 3/2$

$D_1 = x+2 \leq 2x-2 \Rightarrow x \geq 4$

Sia $B < 0 \Rightarrow x < 3/2$

$x+2 \leq 3-2x+1 \Rightarrow x \leq 2/3$

$T_1 = S_1 \cap \{A \geq 0, B \geq 0\} =$

$= x \geq 4 \cap \{x \geq -2, x \geq 3/2\} =$

$= x \geq 4$

$T_2: -2 \leq x \leq 2/3$

Sia $A < 0 = x < -2$

$-x-2 \leq |2x-3|+1$

Sia $B \geq 0 \Rightarrow x \geq 3/2$

$-x-2 \leq 2x-2 \Rightarrow x \geq 0$

non esiste

$x < -2 \ \cancel{\wedge}\ x \geq 3/2$

Sia $B < 0 \Rightarrow x < 3/2$

$-x-2 \leq 3-2x+1 \Rightarrow x \leq 6$

$T_4 = x < -2$

$\cup$

$(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$

$1 < ||x|-1| < 2$

# I NUMERI COMPLESSI

$x^2+1=0$:

$\Rightarrow x^2=-1$ ↯ $x \in \mathbb{R}$ non c'è nessun numero reale che soddisfi questa proprietà

Necessariamente serve UN CAMPO

{Insieme, somma, prodotto}

Prendiamo insieme $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$

SOMMA

$(a,b)+(c,d)$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ =

$=(a+c, b+d)$

commutativa

$(c,d)+(a,b) = (c+a, b+d)$

EL NEUTRO

$(0,0)$

$(a,b)+(0,0)=(a,b)$

INVERSO DELLA SOMMA

$(a,b)$

PRODOTTO

$(a,b)\cdot(c,d) = (ac, bd)$ NON VA BENE infatti

$(a,b)\cdot(1,0)$
$(c,d)\cdot(0,1)$ $= (0,0)$

QUINDI

$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

EL. NEUTRO

$(1,0)$

COMMUTATIVA

$(c,d)\cdot(a,b) = (ca-db, cb+da)$

INVERSO del prodotto

$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \Rightarrow$ estende il campo dei complessi?

$C_0 = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ $(a,0) \to a$

VERIFICA SOMMA

$(a,0)+(c,0) = (a+c,0) = a+c$

PRODOTTO

$(a,0)\cdot(c,0) = (ac,0) = ac$

Estendono i NUMERI REALI

Proprietà $(0,1)$

$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) \Rightarrow -1 \in \mathbb{R}$

$(0,1)^2 = (-1,0)$

$(0,1)$ = unità immaginaria $i$

El. al quadrato dà un numero REALE NEGATIVO

MOLTIPLICANDO un numero REALE per $i$ lo TRASLIAMO

$$(a,0)\cdot(0,1) \qquad (0,a)$$

Può essere indicato in altri modi

$$(a,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + ib \qquad \text{FORMA ALGEBRICA}$$

i numeri reali non interagiscono con quelli immaginari

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+(b+d)i$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac)+(a\cdot id)+(ib\cdot c)+\underset{\substack{\Downarrow \\ (-bd)}}{(ib\cdot id)}$$

QUINDI

$\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

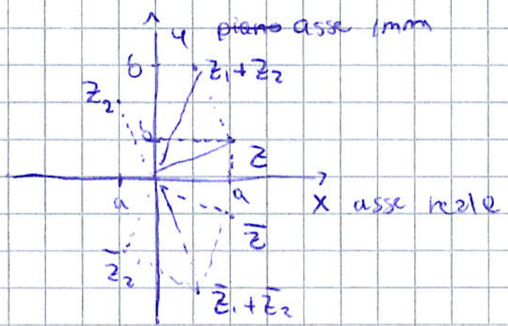
$\mathbb{C}_0 = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\} \equiv \mathbb{R}$

$i = (0,1)$ : unità immaginaria

$z = (a,b) = a+ib$ FORMA ALGEBRICA

$a$ = parte reale = $Re(z)$
$b$ = parte immaginaria = $Im(z)$
($b$, seppur della parte immaginaria, $\in \mathbb{R}$!)

$\mathbb{R}^2$ è un piano $\Rightarrow (a,b)$ rappresentabile
(Piano di Gauss)




DEF: essendo rappresentabile si può RIFLETTERE sull'asse x il punto z. Esso sarà il suo CONIUGATO

$$\bar z = (a,-b) = (a-ib)$$

Si possono sommare graficamente 2 punti con regola del parallelogramma

$$(a+b)+(c,d) = (a+c)+(b+d)i$$

PROPRIETÀ

$$\overline{z_1}+\overline{z_2} = \overline{z_1+z_2}$$

$$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = z_1\cdot z_2$$

$$\frac{1}{\overline{z_1}} = \overline{\frac{1}{z_1}}$$

GIUSTIFICAZIONE dell' inverso

$$d(0,P)^2 = a^2+b^2$$

Se si considera $z$ come vettore si può vedere che si può calcolare la distanza tra il CENTRO e il punto P con il teorema di PITAGORA:

$$d(0,z) = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$$

infatti
$|a| = \sqrt{a^2}$ => SEMPRE POSITIVO

$$z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2+b^2 = |z|^2 =$$

↳ $i^2 = -1$

PROPRIETÀ DEL MODULO IN $\mathbb{Z}$

a) $|z| \geq 0$

b) $|z| = |\overline{z}|$

c) $|Re(z)| \leq |z|$
$|Im(z)| \leq |z|$

d) $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

e) $|z_1+z_2| \geq \left||z_1|+|z_2|\right|$

$\mathbb{C}$ non è un campo ORDINATO, non c'è modo di ordinare una coppia di numeri.

Nei campi ordinati, tra l'altro, i quadrati sono sempre positivi

$\mathbb{C}_0$ è ordinato se $(a,0)<(b,0)$

$w \in \mathbb{C} \quad w \neq 0$

$z^n = w$ con $w$ noto $= a$

$z^n + a = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ $\qquad\qquad$ $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$

in questo caso $x$ è variabile REALE $\qquad$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

$$z = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

$\sqrt[2]{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ = può essere anche negativo nel campo complesso

il $\pm$ è arbitrario, poiché per $k=1$ il coseno e il seno sono invertiti con $\frac{\theta}{2} + \pi$

$\sqrt{w}$ : se $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \sqrt{\rho} \qquad \theta_k = \frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2} \qquad k = 0, 1$

per $k=0$ allora $\theta_0 = \frac{\theta}{2}$

" $k=1$ allora $\theta_1 = \frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{2} = \frac{\theta}{2} + \pi$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL' ALGEBRA

$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \qquad a_n \neq 0$

$a_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ha precisamente $n$ radici nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, ognuna contata con la propria molteplicità.

Molteplicità di una radice

$P_n(z)$ - polinomio di grado $n$, $z_0$ una radice di $P(n)$, cioè $P_n(z_0) = 0$.

$z_0$ è di molteplicità $m \geq 1$, $m$ intero se $P_n(z) = (z - z_0)^m \cdot Q(z)$, dove $Q(z)$ è un polinomio tale che $Q(z_0) \neq 0$

Per esempio

$x^2 = 0$ ha molteplicità 2 con 2 soluzioni

$z^2 + 2iz - \sqrt{3}i = 0$

$-i \pm \sqrt{-1 + \sqrt{3}i}$

$z_{1,2}$ ci dice che ha 2 radici.

$-1 + \sqrt{3}i$

per calcolare =

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2 \\ \cos\theta = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} = \theta = \frac{2}{3}\pi$$

$z = \cancel{\rho}\, 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

per calcolare la radice

$$2^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)\right) =$$

$k=0,1$

le radici saranno

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \ldots + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$-i+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)$$

$$-i+-\frac{\sqrt{2}}{2}+-i\frac{\sqrt{6}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+1\right)$$

ES

$$z^2 + i\,\mathrm{Im}(z) + 2\bar{z} = 0$$

$$z = x+iy \Rightarrow (x+iy)^2 + iy + 2(x-iy) = x^2-y^2+2ixy+iy+2x-2iy = 0$$

$$(x^2-y^2+2x)+i(2xy-y)=0$$

$$\alpha \qquad + i\beta = 0$$

$\alpha + i\beta = 0$ se $\alpha=\beta=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2x=0 \\ 2xy-y=0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{y=2xy} \quad (2x-1)y=0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2+2x=0 : (0,0),\ (-2,0) \\ x=1/2 \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

con $x$ e $y$ variabili REALI

ES

$z^3 = |z|$ trovare tutti i complessi in cui $z^3$ uguale al suo modulo

$z^3 = \rho(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow z^3\ \rho^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$ formula di De Moivre

$$z = \rho^3(\cos(3\theta)+(i\sin(3\theta))) = \rho\cdot 1 = \rho(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^3=\rho \\ 3\theta = 2k\pi \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \rho(\rho^2-1)=0 \\ \theta = \frac{2}{3}k\pi \end{matrix} \quad \begin{matrix} \rho = 0,1 \quad >0 \\ k=0,1,2 \quad \theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, 2\pi \end{matrix}$$

per tutto il giro!

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \to e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$ $x$ variabile, $a_n$ e' coeff reale! MA

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \qquad \alpha_n \in \mathbb{C}$$

$\beta_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ la successione $\beta_n$ converge ad un numero $\beta \in \mathbb{C}$ se $|\beta_n - \beta| \to 0$

con principio complesso

$\sum \alpha_n z^n$ $\quad \alpha_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ riprendendo l'esempio $e^x$

$\beta_n \left| \sum_{k=0}^{m} \frac{z^n}{n!} \right|$ converge? $\leq \sum_{n=0}^{m} \frac{|z|^n}{n!}$ → converge assolutamente, QUINDI $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge

so quindi $e^z = \sum \frac{z^n}{n!}$

teorema

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

Es

$z_1 = x \qquad z_2 = iy$

$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$

$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$ ~~$n=0$ 1 $n_1 = iy$ $n_2$~~ $1 + yi - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!}$

i termini pari non hanno $i$
i termini dispari le hanno

$e^{iy} = \cos y + i \sin y \Rightarrow z = \rho e^{i\theta}$ Forma esponenziale

Forme di De Moivre

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2} \end{aligned} \right\} \text{FORMULE DI EULERO}$$

# LOGARITMI DEI NUMERI COMPLESSI

$w = \log z$ solo se $e^w = z$

$w = x + iy$
$z = \rho e^{i\theta}$ $\Rightarrow e^w = e^x \cdot e^{iy} = \rho e^{i\theta} =$

$\Rightarrow$ se $e^x = \rho$ e $e^{iy} = e^{i\theta}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \log \rho \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}$ più logaritmi!

$$w = \log \rho + i(\theta + 2k\pi) \qquad k \in \mathbb{R}$$

$\boxed{k = 0}$ valore principale

POTENZE AD ESP COMPLESSO

$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ $\qquad \alpha, z \in \mathbb{C}$

valore principale di $z^\alpha$ quello che si ottiene per il valore principale per il logaritmo

Es

$\log(1+i)$ $\Rightarrow \rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad \cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\log\left(\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$

$\log(i)$

$\log(i^i)$

$\mathbb{C}$ $\mathbb{R}^2$ $\{(a,b) \quad a,b \in \mathbb{R}\}$

DIVISIONI $\frac{z_1}{z_2}$

$(a,b) = \quad z = a+ib \quad$ dove $\quad i^2 = -1 \quad i = (0,1)$

$$z_2 \neq 0$$

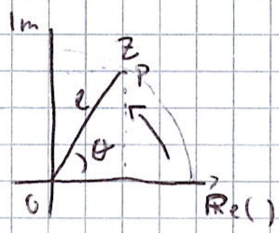
$$\frac{z_1}{z_2} = ? \qquad \frac{z_1 = a+ib}{z_2 = c+id \neq 0} \qquad (c,d \neq 0)$$

$$\frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{\underset{\Downarrow}{c^2+d^2}} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{i(bc - ad)}{c^2+d^2}$$

$\mathbb{R}$ $\quad Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \quad Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

## FORMA TRIGONOMETRICA

$z = a+ib$




Un'ulteriore modo di rappresentare il punto $z$ su un piano, oltre per le coordinate è

Piano di Gauss.

Indicare la distanza dall'origine di $z$ e l'angolo, con $z \neq 0$

Si indica con $\rho$ il RAGGIO "Rho"
e $\theta$ l'ANGOLO (a meno di $2\pi$) "Theta"

L'angolo intercede con l'asse positivo reale e la retta individuata dal punto e dall'origine IN SENSO ANTIORARIO

$$\rho > 0 \quad \rho = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$$
$$\theta = \arg(z)$$

## DA FORMA ALGEBRICA A TRIGONOMETRICA

$z = a+ib \qquad$ Se $\rho = 1$ abbiamo la circ unitaria
$z = \cos\theta + \sin\theta$

$$z = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta =$$
$$= \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

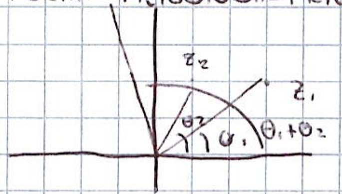
$$a+ib = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{ib}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta + i\sin\theta =$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ES $z = 1+i$

$$a = b = 1 \qquad \rho = \sqrt{2} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

PROD e DIVIS DI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA




$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$

$$\rho_1\rho_2 \left(\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2} + i\underbrace{(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)}\right)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 = 1} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\underbrace{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2} + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$$

$z_1 = 1$ allora $= 1\cos 0 + i\sin 0$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{\rho_2}\left(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)\right) = \frac{1}{\rho_2}\left(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2\right) = \frac{1}{z}$$

con $\rho_2 = 1$

$$(\cos\theta_1 - i\sin\theta_2) = \bar{z}$$

FORMULA DI DE MOIVRE

$$z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

POTENZE

ES $(1+i)^7 = z^7$ trasformo in trigonometrica $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$$(1+i)^7 = (\sqrt{2})^7\left(\cos\left(\tfrac{7}{4}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{7}{4}\pi\right)\right) = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8(1-i)$$

$$w = z^n$$

Teorema: $w \in \mathbb{C}$, $w \neq \emptyset$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$

Allora esistono precisamente $n$ radici complesse $n$-esime di $w$, $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$

Se $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ allora

$z_n = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ con $\rho_k = r^{1/n}$

$\theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

DIMOSTRAZIONI

1. $z^k$ è radice $n$-esima di $w$ se $z_k^n = w$ per $k = 0, 1, n-1$

$$z_n^k = \rho_k^n(\cos(n\theta_k) + i\sin(n\theta_k))$$

$$n\theta_k = n \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) = \varphi + 2k\pi \Rightarrow$$

$$r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = w \quad \text{verificato}$$

$R(\cos\psi + i\sin\psi)$

$R^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) = w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$R^n = r$ $\quad n\psi = \varphi + 2s\pi \quad s \in \mathbb{Z}$

$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2s\pi}{n}$ dimostrato

$s = q \cdot n + k \quad k \{[0, n-1]\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2q\cancel{n}\pi}{\cancel{n}} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2q\pi \quad q \in \mathbb{Z}$

$= \theta_k + 2q\pi$ $\quad \sqrt[n]{z}$ uguale a radice aritmetica di numeri reali

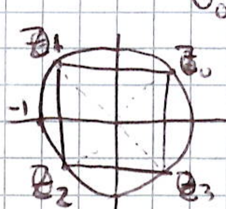
$$\theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n} = \underbrace{\boxed{\frac{\varphi}{n} = \frac{2k-1}{n}}}_{\theta_{k-1}} + \frac{2\pi}{n}$$

es $\sqrt[4]{-1}$

$\rho = 1$

$\arg(-1) = \pi \quad ; \quad z_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right) \ (k = 0, 1, 2, 3)$

$\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ $\quad \theta_1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ $\quad \cancel{\theta_2 = \dots \frac{5}{4} + \frac{\pi}{4}}$ $\quad \theta_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{4}\pi$ $\quad \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$




quadrato inscritto nella circonferenza di raggio 1 (poligono regolare di $n$-lati)

# LOGARITMI

$\log_a b = x \div a^x = b$ $\quad a > 0 \ne 1$

$b > 1$

il logaritmo in base a di b è quel numero che è messo ad esponente di a portano a b

Proprietà

- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ $\quad a, b > 0$, $a \ne 1$
- $\log_a(b^c) = c \log_a b$
- $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ $\quad$ con $a, b, c > 0$
- $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$

- $n = \log_a(a^n)$
- $n = a^{\log_a(n)}$ $\quad a^x \quad x = \log_a(n) \div n = a$

# POTENZE

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- ${a^n}^m = a^{n \cdot m}$ $\quad$ N.B. $a^{x^2} \ne a^{2x}$ perché x è una variabile
- 
- prodotto

# RADICALI

$m \in \mathbb{N}$ $\quad \sqrt{a} = a^{1/n}$

$n$ dispari $\Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$n$ pari $\Rightarrow \sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$ $\quad a, b \in \mathbb{R} : \{ a, b > 0$

PROPRIETÀ

- $\sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n}$
- $\sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\sqrt[n \cdot s]{a^{m \cdot s}} = \sqrt[n]{a^m}$

# SUCCESSIONI NUMERICHE (in campo $\mathbb{R}$) $(a_n)$, $\{a_n\}$, $a_n$

DEF: Una successione è una sequenza infinita $(a_n)$

Per esempio $a_1, a_2, a_3, a_n$ $\forall a_n \in \mathbb{R}$ ($n$ è posizione della successione numerica)

$1, 2, 3, 5, 7, 11$ successione dei numeri primi

$a_n = n^2 + 1$ successione espressa in una regola

$F_0 = 0$ $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ; $n \geq 2$ $0, 1, 0+1 = 1, 2, 3$

DEF: la successione $a_n$ è limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R} : a \leq M \; \forall n$

$(a_n)$ $\{a_n \mid n \in \mathbb{R}\}$ questo è un sottoinsieme non ordinato e limitato

i.e. $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \{\mathbb{R}, \leq\}$

può essere limitata inferiormente se $\exists m \leq a_n \; \forall n$
o entrambi.

## LIMITI

DEF: La successione $(a_n)$ è convergente se $\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$ (se $a_n$ si trova tra $l + \varepsilon$ e $l - \varepsilon$) $\mathbb{N}$

se $n \geq$ $|a_n - l| < \varepsilon$ "definitivamente"

la proprietà $P(n)$ vale definitivamente se $\exists N : P(n)$ vale $\forall n \geq N$

OSS: Se $\{a_n\}$ è convergente $l$ è univocamente determinato. Dimostriamolo

Suppone $l'$ e $l$ soddisfano entrambi $(P(n))$ Allora

$$|l - l'| \underset{\forall n}{=} |l - a_n + a_n - l'| \quad \text{si usa ipotesi}$$

$$\leq |l - a_n| + |a_n - l'| \quad \text{per eq triangolare}$$

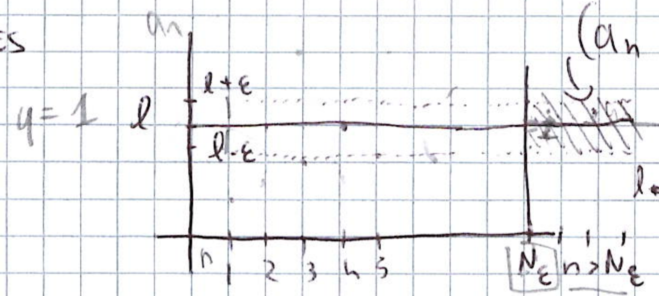
$n \geq \max\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ per ipotesi $\Rightarrow$ $\underbrace{|a_n - l|}_{\varepsilon} + \underbrace{|a_n - l|}_{\varepsilon} \leq 2\varepsilon$ $= 2\varepsilon$

quindi $l = l'$

quindi si scrive $l = \lim_{n \to +\infty} a_n$ o $a_n \to l$ per $n \to +\infty$

OSS: Ogni successione convergente è limitata (il viceversa è falso), si può spiegare graficamente

ES



($a_n$ si trova entro $l - \varepsilon$ e $l+\varepsilon$, dopo $N_\varepsilon$)

è convergente e tende a $l$

$l-\varepsilon < a_n = l+\varepsilon$ è $|a_n - l| < \varepsilon$

- Agli altri termini finiti
- più il campo $l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$ si restringe più $N_\varepsilon$ è maggiore

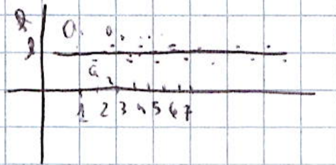
$|a_n - l| \le \varepsilon \Rightarrow a_n \in [l, l+\varepsilon]$

DEF: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l^+$ se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ e $a_n \geq l \ \forall n$, $a_n \in [l-\varepsilon, l]$ (Limitato dall'alto, se $a_n$ tende ad $l$, ma $l$ è maggiore di $a_n$)

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l^-$ se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ e $a_n \leq l \ \forall n$ Limite dal BASSO

OSS Se $a_n \to l$ ; $a_n \to l$, $n \to +\infty$ : $|a_n| \to |l|$

ES



$a_n$ converge a $l$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1 \quad \text{per } n > 2$$

(ma tanto si parla di valori grandi $n = N$)

Sia $\varepsilon > 0$ $\quad 1-\varepsilon \overset{?}{<} \dfrac{n+1}{n-1} \overset{?}{<} 1-\varepsilon$

$n+1 \leq (n-1)(1+\varepsilon)$ :

$1-\varepsilon > 1 \Rightarrow 1$ numer denom.

$n$ molto grande, quindi positivo

$1-\varepsilon < \dfrac{n+1}{n-1}$ verificata

$n+1 < n - 1 + n\varepsilon - \varepsilon$

$N_\varepsilon$ un numero intero maggiore di $1 + 2/\varepsilon$

$\dfrac{2+\varepsilon}{\varepsilon} < n$ verificato

più piccolo è $\varepsilon$ più grande sarà $N_\varepsilon$

$n > 1 + \dfrac{2}{\varepsilon}$

$x \in \mathbb{R}$ $[x]$ il più grande intero $\leq x$ (parte intera)

$$N_\varepsilon = \left[1 + \frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$$

$\boxed{\text{ES} \ \lim\limits_{n\to+\infty} 2^{1/n} = 1}$ trovare $N_\varepsilon$ tale che $l-\varepsilon \leq a_n \leq l+\varepsilon$

SUCCESSIONI DIVERGENTI $\in \mathbb{N}$

DEF $\{a_n\}$ diverge a $+\infty$ se $\forall k > 0 \ \exists : N = N_k : n \geq N \Rightarrow a_n > k$

$a_n > k$ definitivamente

analogamente

$\{a_n\}$ diverge a $-\infty$ se $\forall k > 0 \ \exists N = N_k - n \geq N \Rightarrow a_n < k$

diremo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

$\mathbb{R}^k = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ (retta reale

SUCCESSIONI IRREGOLARI o indeterminate

tutte le successioni né convergenti né divergenti, ess.

es. $a_n = (-1)^n$ irregolare, ma limitata)

- Il fatto che sia limitata indica che non è divergente
- Non è convergente, poiché non ci saranno $|l - a_n| < 2$, anzi continueranno ad aumentare

~~l'intervallo~~

Se $E \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ $\sup(E) = +\infty$ se E illimitato superiormente
$\inf(E) = -\infty$ se E illimitato inferiormente

DEF la successione $\{a_n\}$ è MONOTONA CRESCENTE se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$
" " $\{a_n\}$ " MONOTONA DECRESCENTE se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$

le successioni sono STRETTAMENTE MONOTONE se valgono i segni di uguaglianza stretta (i.e. $<$, $>$)

OSS Una successione monotona crescente è INFERIORMENTE LIMITATA, poiché $(a_1 < a_n)$

# TEOREMA DI MONOTONIA

Sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente e superiormente limitata

TESI $a_n$ è convergente e $\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

(da ricordare che ogni insieme che ammette sup è superiormente limitato)

**DIMOSTRAZIONE**

per ipotesi $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ limitato, quindi ammette $\sup(E) = \Lambda \in \mathbb{R}$
si vuole dimostrare che

$\lim_{n \to \infty} a_n = \Lambda$, i.e. $\forall \varepsilon > 0$ si ha che ~~an~~ $\Lambda - \varepsilon < a_n < \Lambda + \varepsilon$ : $|a_n - \Lambda| > \varepsilon$

$\Lambda + \varepsilon > a_n$ perchè $\underbrace{\Lambda \text{ è estremo superiore}}_{\Lambda \geq a_n \ \forall a_n : n \in \mathbb{N}}$, ~~quin~~ per def.

$\Lambda$ per definizione è il più piccolo dei maggioranti, e $\Lambda - \varepsilon < \Lambda$ quindi
$\Lambda - \varepsilon$ non può essere MAGGIORANTE.
$\Lambda$ poichè è più piccolo del più piccolo dei maggioranti.
quindi ci sta $n_0$ che è più piccolo di $\Lambda - \varepsilon$

i.e. $\exists n_0 : a_{n_0} > \Lambda - \varepsilon$. Allora per ogni $n \geq n_0$ $a_n > \Lambda - \varepsilon$
(essendo monotona crescente per tesi)

è valido il contrario, io monotona decrescente e inferiormente limitato

II) SECONDO CASO

$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ illimitato, quindi $= +\infty$
bisogna dimostrare che $a_n$ è divergente a $+\infty$.

dato $K > 0$ $\exists n_0 : K$ ~~<~~ $a_{n_0} > K$

(per monotonia $a_n \geq a_{n_0} > K \quad \forall n \geq n_0$)

$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$a_n \nearrow l$ (an converge a $l$ dal basso) se $a_n$ monotona crescente e $a_n$ converge a $l$
($a_n \uparrow l$)

$a_n \uparrow l \Rightarrow a_n \to l^-$ (non è vero necessariamente il contrario)

es $\begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{se è pari} \\ 1 & \text{se è dispari} \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 + 1/2 \\ a_3 = 1 \\ a_4 = 1 + 1/4 \end{cases}$ ha come limite 1 dall'alto, ma non è monotona

la ~~the~~ monotonia nei razionali non
vale nei ~~ra~~

SUCCESSIONE GEOMETRICA sia $q \in \mathbb{R}$, $a_n = q^n$ $n \geq 1$

se $q > 1$ : divergente a $+\infty$ - strettamente crescente
$q = 1$ : costante
$0 < q < 1$ : convergente decrescente e limitato
$q = 0$ costante
$-1 < q < 0$ : succ limitata (non monotona perché segno è + e -)
$q = -1$ : irregolare limitata
$q < -1$ : irregolare illimitata

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ \text{non esiste} & q < 1 \end{cases}$$

NON HA SENSO

$\lim_{n \to 0} a_n^n$ oppure $\lim_{n \to -\infty} a_n$ (si parla di successioni quindi non ha senso parlare di una tendenza al primo elemento di succession)

$a_n, b_n$ tale che $a_n = b_n \ \forall n \in \mathbb{N} / F$ $F \subset \mathbb{N}$

$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$

LIMITI VS ESPRESSIONI ALGEBRICHE

$\{a_n\}, \{b_n\}$ successioni, $\lim_{n \to \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ allora

1: $\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

2: $\lim_{n \to +\infty} (a_n b_n) = ab$

3: $\lim_{n \to +\infty} (a_n / b_n) = a/b$ $b, b_n \neq 0 \ \forall n$

4: $a_n > 0, a > 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} (a_n^{b_n}) = a^b$

Dim

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon^a : n \geq N_\varepsilon^a \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon^b : n > N_\varepsilon^b \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon$ dati

sia $\varepsilon > 0$ $|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| =$

segue che $n \geq \max\{N_\varepsilon^a, N_\varepsilon^b\}$ $\Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| \leq 2\varepsilon$ verificata

2) $N$ sia $\varepsilon > 0$ $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| |a_n - a|$

$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \Rightarrow$

$$\leq (\underbrace{|a_n - a|}_{< \varepsilon} + |a|) \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{< \varepsilon} + |b| \underbrace{|a_n - a|}_{< \varepsilon}$$

$$\leq (|a| + \varepsilon + b) \varepsilon$$

# TEOREMI DI PERMANENZA DEL SEGNO I

1 $a_n \to a$ $\quad a > 0$ (<) $\quad$ allora $a_n > 0$ (<) definitivamente

~~$a_n \to a$, $b_n \to b$ $a_n >$~~

0

DIM

con $a > 0$ $\quad$ e $(a - \varepsilon) > 0$

# TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO II

1) se $a_n \to a$ $\quad a_n \geq 0$ $\quad$ allora $a \geq 0$ $\qquad -(\varepsilon + l)\ a_n - l < \varepsilon + l$

2) se $a_n \to a$, e $b_n \to b$ $\quad a_n \geq b_n$ $\quad$ allora $a \geq b$

$a_n - b_n \to a - b$

# IL TEOREMA DEL CONFRONTO

$\{a_n\}\ \{b_n\}\ \{c_n\}$

$$\left.\begin{array}{ll} a_n \leq b_n \leq c_n & \text{definitivamente} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = l = \lim_{n\to\infty} c_n & \end{array}\right\} \lim_{n\to\infty} b_n = l$$

dim: $\varepsilon > 0$

$l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ $\quad$ definitiv.

$l - \varepsilon \leq c_n \leq l + \varepsilon$ $\quad$ definitiv.

$l - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$ $\quad$ definitivamente

Corollario:

(I) $|b_n| \leq c_n$ definitiv, $c_n \to 0$, $n \to \infty$

allora $b_n \to 0$, $n \to \infty$

(II) $c_n \to 0$, $n \to \infty$, $b_n$ limitata, allora $b_n c_n \to 0$

limitato per infinitesimo = infinitesimo

DIM: (I) $-c_n \leq b_n \leq c_n$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \Downarrow & & \downarrow \\ 0 & \leq & 0 & \leq & 0 \end{array}$$

$b_n$ è contenuto tra 0 e 0, quindi 0

(II) $|b_n| \leq M$, $\forall n$ $\quad$ allora $|b_n c_n| \leq M\, |c_n|$

$$0 \leq b_n c_n \leq 0 \qquad \underset{\Downarrow}{M} \cdot \underset{\Downarrow}{|c_n|} \to 0 \cdot 0 \quad \text{infinitesimo}$$

$\Downarrow$

0

ES

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{(n)} = \{\sin(n)\} \cdot \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

lim. infinitesimo = 0

$$\begin{array}{cc} \Downarrow & \Downarrow \\ |a_n| \leq 1 & b_n \to 0 \end{array}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

# ARITMETIZZAZIONE DELL' INFINITO

Dati $\{a_n\}, \{b_n\}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

$$\lim (a_n + b_n) = \infty$$

$$a + \infty = \infty \qquad a \cdot \infty = \infty$$
$$a - \infty = -\infty \qquad a/0 = \infty$$
$$\infty + \infty = \infty \qquad a/\infty = 0$$
$$-\infty - \infty = -\infty$$

Ci sono expr ambigue

$$\infty - \infty \quad , \quad 0 \cdot \infty \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad 0^0 \quad , \quad 1^\infty \quad , \quad \infty^0$$

ES

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \infty - \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim = \frac{\sqrt{n+1}^2 - n - 1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

ES DIMOSTRAZIONE "e"

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad n \geq 1 \qquad [1^\infty]$$

Si dimostra che $a_n$ e' monotona crescente per

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{e lim in} \quad 2 \leq a_n < 4$$

(fin. dimostrativi)

Si studia per $n \geq 2$ la funzione

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1 + 1/n)^n}{(1 + 1/_{n-1})^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}}$$

$$\frac{(n+1)(n-1)}{n \cdot n} \cdot \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{1}{\frac{n-1}{n}} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}_{\text{bernulli}: \ x = -\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{\frac{n-1}{n}}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} \geq \frac{1 - n\frac{1}{n^2}}{1 - 1/n} = 1 \qquad \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq a_{n-1}$$

$n \geq 2$

quindi $a_{n-1} \leq a_n$

→ continua pg

Si prende $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{a_n} \left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow b_n = a_n \cdot \left(1+ {}^{1}/_{n}\right)$

Essendo $1+\frac{1}{n}$ sicuramente $>0$ perché si è specificato $n \geq 2$ si può dire $a_n < b_n$
$a_1 = 2$ (primo termine

$b_n \leq b_{n-1}$

• $b_1 = 4$ = primo termine

$2 \leq b_{n-1} < a_n < b_n < b_{n+1} \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow 2 \leq a_n < 4$
LIMITATA

il limite per la successione $a_{n \to \infty} = e$ poiché $a_n < e < b_n$
$a_n \sim b_n$

<u>OSS</u> qual'è il limite di $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \quad n \geq 1, \ n \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \left(\frac{n+(-1+1)}{n-1}\right)^{n} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}}_{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

faccio in modo di avere una forma $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ poiché so che il suo limite è $e$

QUINDI

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = e$$

ES

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3+n}\right)^{5n} = \left(\frac{n \cdot {}^{1}/_{n}}{(3+n)\,{}^{1}/_{n}}\right)^{5n} = \left[\left(\frac{1}{1+\frac{3}{n}}\right)^{\frac{5n}{\frac{n}{3}}}\right]^{n/3} =$$

↳ moltiplico ${}^{1}/_{n}$ / ${}^{1}/_{n}$ ↳ moltiplico la potenza $\cdot \frac{n/3}{n/3}$

$$= \left[\left(\frac{1}{1+\frac{3}{n}}\right)^{n/3}\right]^{15} \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{1+\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\right]^{x} = \frac{1}{e^{15}} = \lim_{n\to\infty}$$

$\frac{3}{n} = \frac{1}{\frac{n}{3}}$

<u>DEF</u>: $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono asintotiche se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad (a_n \sim b_n, \ n \to \infty)$

la relazione di asintotico soddisfa 3 proprietà:

$b_n \sim a_n \to a_n \sim b_n$

$a_n \sim b_n, \ b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$

# FORMA DI STIRLING

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

# GERARCHIA DI INFINITI

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, con $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni divergenti =

= $0$ se $b_n$ ha gerarchia di infinito maggiore di $a_n$
$\pm\infty$ se $a_n$ ha grado di infinito maggiore di $b_n$
$l$ se $a_n$ e $b_n$ hanno stesso grado
$\nexists$ se non sono confrontabili

ES di non confrontabili

$a_n = \begin{cases} n & \text{per } n \text{ pari} \\ n^2 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$ DIVERGENTE $\qquad b_n = \begin{cases} n^2 & \text{per } n \text{ pari} \\ n^2 & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$ DIVERGENTE

$\frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 1/n & \text{per } n \text{ pari} \\ n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$ NON CONFRONTABILI INDEFINITO

Stessa cosa vale per i gradi infinitesimi, ma al contrario

GERARCHIA [pg 105]

1 $\quad \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \quad \forall a>1, \alpha>0$ — il logaritmo $n$ in base $a$ ha GRADO DI INFINITÀ MINORE di ogni potenza $n$ alla $\alpha$

2 $\quad \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \forall a>1, \alpha>0$ — la potenza $n$ alla $\alpha$ ha GRADO DI INFINITÀ MINORE DI un esponenziale $a$ alla $n$

($n$ è la serie, $\alpha$ è una variabile costante)

DIM 1 $\quad x \in \mathbb{R}, x>0 \quad$ sia $k = [x]$

$k \le x < k+1$ quindi $2^x \geq 2^k = \underbrace{(1+1)^k}_{} \geq 1+k > x$ Già detto nella tesi

$x < 2^x$ moltiplico log

$\log_a x < x \log_a 2 \qquad x = n^{\alpha/2}$ Si applica Bernulli

$\frac{\alpha}{2} \log n < n^{\alpha/2} \log_a 2 \qquad \frac{\log_a n}{n^{\alpha/2}} < \frac{2}{\alpha} \log_a 2$ moltiplico per $\frac{1}{n^{\alpha/2}}$ =

$= \frac{\log_a n}{n^\alpha} < \frac{2}{\alpha} \log_a 2 \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ sapendo che $\frac{\log_a n}{n^\alpha} > 0$ e $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2}{\alpha}\log_a 2}_{\text{numero}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha/n}}}_{\frac{1}{\infty}=0}$

$= 0$ allora per teorema del confronto $0 < \underbrace{\frac{\log_a n}{n^\alpha}}_{\Downarrow\ 0} < 0$

limite confermato

DIM 2

Seguendo la dim 1, sostituisce $n$ con $2^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = \frac{n \log_a 2}{2^{n\alpha}} \Rightarrow$$

con $a>1$ si fissa un caso specifico $\alpha$ : $2^\alpha = a$

si trova $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} \to 0$

questo è verificato con $\alpha$ vincolato $=1$ e $a>1$

il caso generale

$$\frac{n^{\alpha \cdot 1/\alpha}}{a^{n \cdot 1/\alpha}} = \left(\frac{n}{a^{n/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\frac{n}{(a^{1/\alpha})^n}\right)^\alpha \qquad \text{Essendo } a^{1/\alpha} > 1$$

$\frac{n}{(a^{1/\alpha})^n} \to 0$ per caso specifico

allora $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(a^{1/\alpha})^n}\right)^\alpha \to 0$

LIMITI NEI COMPLESSI

$\{z_n\}$ somma $z_n = x_n + i y_n$

DEF: $\{z_n\}$ è convergente se $\exists \lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon : n \geq N_\varepsilon : |n_a - \lambda| < \varepsilon$

Dim per induzione

$$n! \geq 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$0! = 1$

$(n+1)! = n!(n+1)$

Base induttiva

- $n=0 \to 1 \geq \frac{1}{2}$ ✓

$n! \geq 2^{n-1} \xrightarrow{\text{implica}} (n+1)! \geq 2^{n-1+1}$ (DA DIMOSTRARE)

Dimostrare $n! \geq \underline{\underline{2^{n-1}}} = (n+1)! \geq 2^n$

- BISOGNA AVER CHIARO COSA SI VUOLE DIMOSTRARE

  → e bisogna dimostrare la tesi attraverso l'ipotesi

$$(n+1)! = n!(n+1) \geq 2^n \iff \frac{n!(n+1)}{2} \geq 2^n \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{2^{n-1}}}$$

VALE L'IMPLICAZIONE se e solo se $n \geq 1$

$$\frac{n!(n+1)}{2} \geq n! \Rightarrow \frac{n+1}{2} \geq 1$$

↳ $n!$ sarà maggiore di $n!$ solo se moltiplicato per un valore maggiore (o uguale) o uguale ad 1

valida per $n=0$ e $n \geq 1$, è stata verificata che se vale per $n=1$, varrà uguale $n=2$, MA solo per $n \geq 1$

quindi manca il passaggio dove si verifica che sia uguale per $n=1$

ABBIAMO SOLO DIMOSTRATO CHE SE $n=1$, allora è vero che sarà $n+1$.

essendo l'implicazione valida per $n \geq 1$, se si inizia da $n=0$ l'implicazione non vale

ES

$z = 2-4i$

$\omega = 3+3i$

$z+\omega = 5-i$

$z\omega = (6+12) + (6-12) = 18-6i$

$$\frac{z}{\omega} = \frac{z}{\omega}\cdot\frac{|\omega|}{|\omega|} = \frac{(2-4i)(3-3i)}{(3+3i)(3-3i)} = \frac{6-12-12i-6i}{9\cdot 9}$$

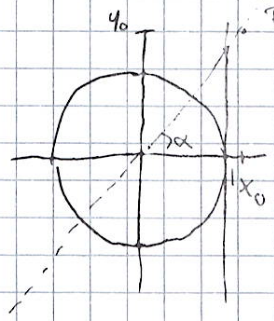
$$= \frac{1}{18}(-6-18i) = -\frac{1}{3} - i$$

- $|\omega| = \sqrt{Re(\omega)^2 + Im(\omega)^2} = \sqrt{9-9i^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

- $\arg(\omega)$ = consiste nell'angolo tra la retta dei reali e quella passante per il centro e per il punto del piano di Gauss ($\omega$)

$= arctg\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

la tangente è l'incrocio una retta parallela all'asse delle immaginaria e una altra retta di coeff angolare.




Ammesso che conosca $x_0$ e $y_0$ per calcolare la pendenza si trova cercando il rapporto $\frac{x_0}{y_0}$

$$\begin{cases} y = ax = \frac{y_0}{x_0}\cdot x \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = arctg\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

# CRITERIO DEL RAPPORTO [106]

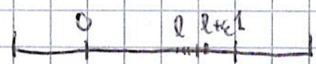
Sia $\{a_n\}$ successione, $a_n > 0 \ \forall n$

Si abbia che $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}$, allora ci sono 3 possibilità

- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, $l < 1$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ $l > 1$

nel caso $l = 1$ il teorema NON è contemplabile/applicabile

DIM: Supponiamo sia $l < 1$




$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to l \quad n \to +\infty$

i.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$, $n \geq \varepsilon \Rightarrow \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$

Si sceglie $\varepsilon$ : $l + \varepsilon < 1$

la disuguaglianza vale per $n \geq n_\varepsilon$, e ci dice che per ogni n ~~$a_{n+1} < l+\varepsilon$~~

$a_{n_\varepsilon+1} < (l+\varepsilon)(a_{n_\varepsilon})$ allora

$a_{n_\varepsilon+2} < (l+\varepsilon)(a_{n_\varepsilon+1}) < (l+\varepsilon)^2(a_{n_\varepsilon})$ stanno contando tutti gli n dopo $n_\varepsilon$

$a_{n_\varepsilon+3} < (l+\varepsilon)(a_{n_\varepsilon+2}) < (l+\varepsilon)^3(a_{n_\varepsilon})$

$\vdots$

Sarà vero che per ogni k $0 < a_{n_k} < (l+\varepsilon)^k a_{n_\varepsilon}$ $\forall k \geq 1$

$\hookrightarrow$ Non dipende da k

$\hookrightarrow$ Successione geometrica con $q = (l+\varepsilon) < 1$

La successione q tende a zero, quindi si deduce che

$\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_\varepsilon + k} = 0$ poiché $\lim\limits_{k \to \infty} (l+\varepsilon)^k a_{n_\varepsilon} = 0$ e quindi per teorema del carabiniere

$$0 < 0 < 0$$

DIM Supponiamo sia $l > 1$, quindi

$|l - \varepsilon| > 1$ quindi $a_{n_\varepsilon} > l$

$a_{n_{\varepsilon+1}} > (l+\varepsilon)(a_{n_\varepsilon})$

$a_{n_\varepsilon+2} > (l+\varepsilon)^2 a_{n_\varepsilon}$ $\Rightarrow$ $a_{n_{\varepsilon+k}} > (l+\varepsilon)^k a_{n_k}$

$\hookrightarrow$ Successione di ragione $q > 1 \Rightarrow$ diverge a $+\infty$

$a_n \to \infty < a_{n_\varepsilon+k} < (l+\varepsilon)^k a_{n_\varepsilon}$

$\hookrightarrow \infty \qquad \hookrightarrow \infty$

Sia $b>0$, consideriamo $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$

DIM: $\lim_{n\to\infty} \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{b^n}$ : Si usa la dimostrazione prima con $a_{n+1} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$ e $a_n = \frac{b^n}{n!}$

$= \frac{b^{n+1}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{b^n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n+1} = 0$ quindi $<1$ giustificato in modo rigoroso in quanto $n!$ è infinito maggiore di $b^n$

Metodo non funziona

Sia $a_n = \log n/n$ allora $\cancel{\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} \cdot \frac{n}{n+1} \geq 1}$ per teorema di permanenza

$a_n = \frac{\log n}{n}$ allora $a_n \to 0, n\to\infty$ per gerarchia di infiniti

$$\lim \frac{\log(n+1)}{\log(n)} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} \geq 1 \Rightarrow$$

$$\lim \frac{\log(n+1)}{\log(n)} = 1$$

$n < n+1 < 2n$

$\log(n) < \log(n+1) < \log(2) + \log(n)$

dividiamo per $\log(n)$

$$1 < \underbrace{\frac{\log(n+1)}{\log(n)}}_{\to 1} < 1 + \frac{\log(2)}{\log(n)} \to \text{tende a } 0$$

per teorema dei carabinieri

ES

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+4n+1}{5(n+1)^3} = \frac{2}{5}$$ poiché prendendo la potenza più grande viene $\frac{2n^3}{5n^3}$

$$\lim \frac{2^n+n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = n^{1/n} = 1 \quad [\infty^0] \Rightarrow \text{identità}$$

($1/n \to 0$, $n \to \infty$)

Se si hanno 2 numeri positivi $x, y \Rightarrow x^y = e^{y \log x}$ $\quad x = e^{\log x}$

applicato a $\sqrt[n]{n} \Rightarrow e^{\frac{1}{n}\log n} = e^0 = 1$ ($\frac{1}{n}\log n \to 0$)

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = [\infty/\infty]$ criterio del rapporto $\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} =$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \quad \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$ allora, essendo $<1$ per teorema del rapporto $a_n \to 0$ $\Rightarrow \frac{n!}{n^n} = 0$

STIRLING

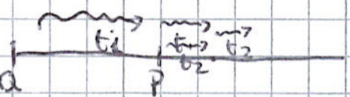
## SERIE: sono sommatorie infinite

$a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ [k indicizzato da naturali]
vogliamo dare un senso all'espressione

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

ad esempio
$\pi = 3{,}14 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 + 0{,}1 + 0{,}04 \dots$

Altro paradosso è quello di Achille e della tartaruga



P = posizione tartaruga
Q = posizione Achille.

Achille raggiunge la posizione all'istante iniziale della tartaruga, che però nel frattempo si è mossa di "metà" il percorso fatto nel tempo di achille

$$t < \sum_n t_n$$

Per esempio

$a_k = 1, \forall k$ $= 1 + 1 + 1 + \dots + 1$ = achille non raggiunge mai la tartaruga $\to \infty$

Sia $\{S_n\}$ la successione delle somme PARZIALI, i.e. $S_1 = 1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

È parziale poiché è la somma FINITA di successione

DEF: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente (risp. divergente o irregolare) se la ~~successione~~ somma delle successioni parziale è convergente (risp. divergente, irregolare)

Nel caso convergente porremo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} S_n \to \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Se la successione parziale sommatoria converge allora anche la serie lo è

ES

$a_k = 1, \forall k$ allora $S_n = n \to \lim_{n \to \infty} S_n = +\infty$

in questo caso la sommatoria in k di $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$

Ci sono 2 problemi distinti.

1. Convergenza
2. Calcolare il valore della somma

$= S_N$ + Resto N esimo

Oss: Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergente, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$, ergo anche la somma della serie finita sarà anche convergente, ma anche la singola sommatoria in indice N

Il RESTO N+1 esimo diventa più piccolo all'ingrandire dell'indice N, in quanto il suo limite tende ad un numero $\ell$

Si fa un esempio.

Esempio: (Serie geometrica): $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \text{ convergente} = \quad = \begin{cases} n+1 & q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q\neq 1 \end{cases}$$

(il cambio da 1 a 0 non cambia)

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} +\infty & q=1 \\ \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^{n+1} \end{cases}$$ una successione geometrica

esiste tra $-1<q<1$, quindi $q^{n+1} \to 0$ $\quad |q|<1$

= Converge se e solo se $|q|<1$ e in questo caso la somma della serie è uguale $\frac{1}{1-q}$. Inoltre la serie è divergente per $q\geq 1$ e irregolare in altri casi

$$q = \tfrac{1}{2} \quad 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \dots = 2$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} q^k = 2$$

ES (Serie armonica):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \dots + \tfrac{1}{n} + \dots = \text{divergente}$$

Considerato $S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}$ =

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$= S_{2n} - S_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termini}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} S_n$$

Se esistesse lim allora $S_n$ dovrebbe arrivare vicino al limite, ma quindi $n\to\infty$ anche per $S_{2n}$, ma si può vedere che non potrà mai essere maggiore di 1/2.

Se esistesse $\lim = S$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : n \geq n_\varepsilon$

$|S_n - S| < \varepsilon$, ma se $\lim_n S_{2n} = S$ allora

$|S_{2n} - S_n| < \varepsilon$, ma abbiamo visto che è maggiore DI 1/2

OSS: $S_n \sim \log n$, $n\to\infty$

$S_n - \log n \to \gamma \overset{?}{\in} \mathbb{Q}$

costante di Eulero-Mascheroni

$$\sum_{p=\text{primi}} \frac{1}{p} \to \infty, \text{ ma } \sum_{p=\text{primi gemelli}} \frac{1}{p} \text{ convergente}$$

ALTRO ES. (Serie di Mengoli)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$ spezzarla vorrebbe dire di fare serie divergenti.

$S_1 = 1 - 1/2 = 1/2$ $\quad S_2 = 1 - \cancel{1/2} + \cancel{1/2} - 1/3$ $\quad S_3 = 1 - \cancel{1/2} + \cancel{1/2} - \cancel{1/3} + \cancel{1/3} - 1/4$

$$S_n = 1 - 1/n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=2}^{n+1} b_{k} = b_1 - b_{n+1}$$

DEF = Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è "telescopica" se i termini $a_k$ sono scrivibili in $b_k - b_{k+1}$

in questo caso $\exists \lim \to l$ è convergente se $\exists \lim_{n\to\infty} b_n \to l \in \mathbb{R}$

$b_k = 1/k$ $\quad \lim_{k\to\infty} 1/k = 0$ quindi convergente, e la somma $\frac{1}{k(k+1)} = 1$

ES (serie armonica)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = +\infty \quad \left(\text{divergente nonostante } \lim_{k\to\infty} 1/k = 0\right)$$

Sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergente, allora $\lim_{k=\infty} a_k = 0$

infatti $a_k = S_k - S_{k-1}$ $\quad$ se $\lim_{k\to\infty} S_k = S$
↳ se $S_k$ converge allora anche $S_{k-1}$ converge allo stesso limite

allora $\lim_{k=+\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0$

Condizion necessaria affinché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge è che $a_n \to 0$, non è vero il contrario come nel caso della serie armonica.

<u>OSS</u>: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergente, $R_N = \sum_{N+1}^{\infty} a_k$ (resto), se $\sum a_k$ convergente allora anche $R_N$ è convergente. (Resto N esimo)

$$S_m \text{, sia } m > N \;\; S_m = \sum_{k=1}^{m} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} a_k}_{S_N} + \sum_{k=N+1}^{m} a_k \quad \text{si fa limite}$$

Quando $m \to +\infty$, allora $S_m \to S$ $\quad \Rightarrow S = S_N + \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k = S_N + R_N$

quando $n \to +\infty$ $\quad S_N \to S$, quindi $R_N \to 0$ poiché $R_N = S - S_N \to 0,\ N \to \infty$

DOMANDE:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(1/k) = ?$$

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI: $a_k \geq 0 \ \forall k$

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = a_{n+1} + S_n \text{, ie. } S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$$

questo dice che la successione $S_n$ è monotona crescente.
Per monotonia, ci sono solo 2 casi:

1 $\{S_n\}$ limitata e quindi convergente

2 $\{S_n\}$ divergente a $+\infty$

Criterio 1 (confronto): avendo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = 0 \leq a_k \leq b_k \ \forall k$

per confronto, se $\sum a_k \to \infty$, allora $\sum b_k \to \infty$ e
equivalentemente se $\sum a_k \to l$ allora $\sum b_k \to l'$

ES $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\forall \alpha$ compresa $0 < \alpha < 1$ (Serie armonica generalizzata di espon $\alpha$)

$k^\alpha < k \quad \forall k$, quindi $\frac{1}{k^\alpha} > \frac{1}{k} \ \forall k$.

essendo $\sum \frac{1}{k}$ ~~divergente, all~~ divergente $\underbrace{\frac{1}{k^\alpha}}_{b_k} > \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k}$, allora $1/k^\alpha$ ~~allora~~ $\to \infty$

C1' (confronto asintotico)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \{a_k\} \sim \{b_k\}, \ k \to \infty$$

allora $\sum a_k$ si comporta come $\sum b_k$, quindi o sono entrambe convergenti (che però non convergono necessariamente allo stesso numero), ergo le somme delle serie possono essere differenti), oppure entrambe divergenti.

ES

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ convergente, poiché $\frac{1}{k^2} \overset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k(k+1)}$, e la serie di Mengoli $\to 0$ è convergente

Segue che sono convergenti tutte le serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 2$, per criterio del confronto. Se

$1/k^\alpha$, $\alpha = 2$ converge allora anche $1/k^\alpha$, $\alpha > 2$

SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} \text{div se } \alpha \leq 1 \\ \text{conv se } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

Si dimostrerà che per $\alpha > 1$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}-1}{k} \qquad \frac{e^{1/k}-1}{k} \sim \frac{1}{k^2} \quad k \to +\infty$$

Sapendo che $1/k^2$ converge, allora converge anche $\frac{e^{1/k}-1}{k}$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k+1+1}{k+2}\right)$$

attraverso limite notevole

infinitesimo

$$1+\frac{1}{k} \sim 1/k \Rightarrow 1+a_k \sim a_k, \; a_k \; 1/\infty$$

$$\sum \log\left(\frac{k+1+1-1}{k+2}\right) = \sum \log\left(1-\frac{1}{k+2}\right) \sim \sum \log -\frac{1}{k+2} \sim \sum \log\left(1/k\right)$$

divergente perché $1/k \to \infty$

C2 (radice): Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

allora $\sum_{k=1}^{\infty} a_k =$ convergente se $l<1$; divergente se $l>1$; non utilizzabile $l=1$

ESEMPIO

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^k}{k^k}, \quad a \geq 0$$

$$\sqrt[k]{\frac{a^k}{k^k}} = \frac{a}{k} \to 0, \; k \to \infty \qquad 0<1, \text{ quindi } \frac{a^k}{k^k} \text{ converse}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^\alpha a^k \qquad a \geq 0, \; \alpha \in \mathbb{R}$$

per quali parametri $\alpha$ e $a$ è convergente

$$\sqrt[k]{k^\alpha a^k} = a \cdot k^{\alpha/k} \text{ - si usa } e^{\alpha/k \log k},$$

Per gerarchia di infiniti $\frac{\log k}{k} \to 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$, quindi

$$a e^{\alpha/k} \to a, \; k \to \infty$$

$a<1$ convergente $\forall\alpha$

$a>1$ divergente $\forall\alpha$

$a=1$ allora $a^k \to 1$ $\quad \sum \frac{1}{k^{-\alpha}}$, converge se $-\alpha>1$ (SERIE armonica)

quindi la serie converge se $a<1$ $\forall\alpha$ e $\alpha<-1$ per $a=1$

C3 (Rapporto): Se $\exists \lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$ allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k =$ conv se $l<1$; div se $l>1$

es $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ : $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{k+1} = 0<1$

$$\sum \frac{a^k}{k!}, \; a>0$$

# DIMOSTRAZIONI C1, C1', C2, C3

**C1** (confronto) $\{a_k < b_k, \ \forall k$, sia $S_n \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_n \sum_{k=1}^{n} b_k$

e $a_k \le b_k \ \forall k \Rightarrow S_n \le \sigma_n$. Se $\sigma_n \to l$ allora anche $S_n \to$ limitata convergente

**C1'** confronto asintotico

$\frac{a_n}{b_n} \sim 1$, $n \to \infty$, Fissato $\varepsilon > 0$ si ha definitivamente $1-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1+\varepsilon$

per semplicità $\varepsilon = 1/2 \Rightarrow 1/2 \le \frac{a_n}{b_n} \le 3/2$

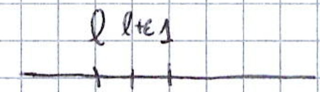
i.e. $\frac{b_n}{2} \le a_n \le \frac{3}{2} b_n$ definitivamente

se $b_n$ converge, converge $a_n$, quindi convergono anche $\sum b_n$ e $\sum a_n$, e sapendo che $b_n$ e $a_n$ sono legati da $\frac{a_n}{b_n} \sim 1$

$\sum 1/2 \, a_k$ converge si solo se $\sum a_k$ = convergente

**C2** $l < 1$

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$



sia $\varepsilon$ : $l + \varepsilon < 1$

allora $l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon < 1$ definitivamente, ma $\varepsilon > 0$ allora $\varepsilon/2 > 0$,

quindi $l - \frac{\varepsilon}{2} < \sqrt[n]{a_n} < l + \frac{\varepsilon}{2} < 1 = a_n \le (l + \varepsilon/2)^n \le (l+\varepsilon)^n$

$\sum_{n \ge n_\varepsilon}^{N} a_n \le \sum_{n \ge n_\varepsilon}^{N} (l+\varepsilon)^n$ $\quad (l+\varepsilon)^n$ è una serie geometrica $l + \varepsilon < 1$, quindi è FINITA,

per confronto anche la serie $a_n$ è convergente

per $l > 1$ idea simile. ma al contrario per $(l-\varepsilon)^n > 1 \Rightarrow (l-\varepsilon)^n \to \infty$

**C3** ~~confronto~~ RAPPORTO

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim l$ $\quad$ caso $l < 1$ $\quad \varepsilon > 0$ t.c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon/2 < 1$

$a_{n+1} < (l + \varepsilon/2) < a_n \quad \forall n \ge n_\varepsilon$

$a_{n+1} < (l + \frac{\varepsilon}{2}) a_n$

$a_{n_\varepsilon + 1} < (l + \varepsilon/2) a_{n_\varepsilon}$

$a_{n_\varepsilon + 2} < (l + \varepsilon/2) a_{n_\varepsilon + 1} < l + (\varepsilon/2)^2 a_{n_\varepsilon}$

$a_{n_\varepsilon + k} < (l + \varepsilon/2)^k a_{n_\varepsilon}$

Condensazione (Cauchy) : $a_{k+1} \le a_k$ $k \in \mathbb{N}$, con $a_0 \geq 0$

allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ hanno lo stesso comportamento

DIM sia $\{S_n\}$ successione delle prime somme parziali $S_n \overset{def}{=} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$\sigma_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}$

$$S_{2^n} = a_0 + a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \underbrace{a_9 + \dots}_{8a^{16}} + \underbrace{(a_{1+2^{n-1}} + \dots + a_{2^n})}_{2^{n-1} a_{2^n}}$$

$a_0 \geq 0$ $\quad a_1 \geq \frac{1}{2} a_1$ $\quad a_2 \geq a_2$ $\quad \geq 2a_4$ $\quad \geq 4a_8$

$$S_{2^n} \geq \sum_{k=0}^{n} 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} \sigma_n$$

$$S_{2^{n}-1} \leq a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} = a_0 + \sigma_{n-1}$$

ES 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$ convergente se $\alpha > 1$ $\left(a_k = \frac{1}{k^\alpha}\right)$, se $\alpha \leq 0$ non si ha convergenza

Sia $\alpha > 0$, possiamo applicare la condensazione, si ha convergenza se e solo se converge $\to \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2/2^\alpha)^k =$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k$$ = serie geometrica : converge se $2^{1-\alpha} < 1$, quindi $1 - \alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1$

ES 2

$\sum \frac{1}{n}$ diverge $\qquad \sum \frac{1}{n^{(1+\varepsilon)}}$ $\forall \varepsilon > 0$ converge

allora $\sum \frac{1}{n \log n}$ converge?

ES sia $a, b > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a (\log n)^b}$$ convergente se e solo se $$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^a (n \log 2)^b}$$ converge

$\underbrace{n^b (\log 2)^b}$ termine moltiplicativo di fattori INDIPENDENTE da $n$, può essere cancellato

$= \sum_{k=1}^{+\infty} c\, a_k$ converge se $\sum a_k$

$$= \frac{2^n}{2^{na}} = \sum \frac{(2^n)^{1-a}}{n^b}$$

per verificare che converge si usa il rapporto

$$\frac{(2^{n+1})^{1-a}}{(n+1)^b} \cdot \frac{n^b}{(2^n)^{1-a}} = \frac{2^{1-a}}{(1+1/n)^b} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2^{1-a}$$

$2^{1-a} < 1 = 1 - a < 0 = a > 1 \Rightarrow$ serie convergente

$> 1$ $\qquad a < 1$

$a = 1$ . $\sum \frac{1}{n (\log n)^b}$ per condensazione $\to$

$\sum \frac{1}{n(\log n)^b}$ per condensazione $\sum 2^n \frac{1}{\cancel{2^n}(2\log n)^b} = \sum \frac{1}{2(\log n)^b}$ $b>1$

si ha convergenza se ~~$(2\log n)$~~ $b>1$

QUINDI la serie $\sum \frac{1}{n^a (\log n)^b}$ converge se

$a>1 \quad \forall b>0$
$a=1 \quad \forall b>1$

Serie di MABEL

$$\sum \binom{n}{4} 3^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} 3^{-n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{n}\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}(n+1)\, 3^{-(n+1)}}{\cancel{n}\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}(n-3)\, 3^{-n}} = \frac{(n+1)\, 3^{-(n+1)}}{(n-3)\, 3^{-n}} = \frac{1}{3}\, \frac{n+1}{n-3} = \frac{1}{3} < 1$$

$\Rightarrow \sum$ Convergente

$$\sum \frac{n^n}{n!(e+1)^n} \cdot n = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)^{n+1} \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}n!\,(e+1)^{n+1}} \cdot \frac{\cancel{n!}\,\cancel{(e+1)^n}}{n^n\, n} =$$

$$= \frac{1}{(e+1)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} = \left(1+\frac{n}{n}\right)^{n+1} = \Big[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{e}\Big]^{\frac{n+1}{n} \to 1} = \frac{e}{e+1} < 1$$

$\Rightarrow \sum$ converge

$$\sum \frac{1}{n!}\binom{n+1}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cancel{n!}} \frac{(n+1)!}{(n-1)!\,2} = \frac{n+1}{(n-1)!\,2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n!\,2} \frac{2\,(n-1)!}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} < 1$$

convergente

$\sum |\log(1+\alpha)|^n \qquad \alpha > -1$ è una serie geometrica con $q = |\log(1+\alpha)|$
essendo una serie geometrica si ha convergenza quando $|q|<1 \Rightarrow q$ essendo modulo

$||\log(1+\alpha)| < 1 \Rightarrow -1 < \log(1+\alpha) < 1 \Rightarrow (1+\alpha) > 1/e \Rightarrow \frac{1}{e} - 1 < \alpha < e-1$

$(1+\alpha) < e$

$\Downarrow$

si ha convergenza per questi valori

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e^{\alpha^2-3}\right)^n}{\log(1+n)} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\alpha^2-3}\right)^{n+1}}{\log(2+n)} \cdot \frac{\log(1+n)}{\cancel{\left(e^{\alpha^2-3}\right)^n}} = \cancel{\log}\, e^{\alpha^2-3} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\log(1+n)}{\log(2+n)}}_{\to 1} = e^{\alpha^2-3} < 1$$

$$\begin{cases} <1 & \text{se } \alpha^2-3<0 \\ >1 & \text{se } \alpha^2-3>0 \\ =1 & \text{se } \alpha^2=3 \end{cases}$$

$= \alpha^2 < \sqrt{3} \Rightarrow \alpha < \pm\sqrt{3}$

$\alpha^2 > \sqrt{3}$

convergenza

div. $-\sqrt{3}$ $\quad 0 \quad$ $\sqrt{3}$ div.

$\alpha \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ convergente

ES

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^a \log(\log n))^b}$$

per quali valori $a$ e $b$ la serie converge ?

# SERIE DI NUMERI COMPLESSI

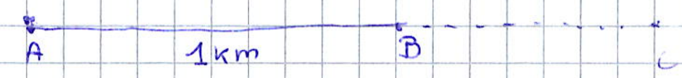
$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

$z_n = x_n + i y_n \in \mathbb{C}$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, $\forall n$

Una serie di numero complesso è convergente quando sia la parte reale sia la parte immaginaria sono convergenti

# SERIE GENERALI (DI SEGNO VARIABILE)

DEF: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a_n \in \mathbb{R}$ è detta <u>ASSOLUTAMENTE</u> CONVERGENTE se la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ è convergente




all'istante 0 si muove con $V_0 = 1$ cm/s

dopo un secondo la corda elastica AB si muove di un km
La formica viene trascinata.

Al secondo 2 si allunga a 3 km trascinando la formichina

LA FORMICA RAGGIUNGERÀ IL PUNTO B?

Prop: convergenza assoluta implica convergenza

<u>DIM</u>:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{se } a_n \geq 0 \\ a_n & \text{se } a_n < 0 \end{cases}$$

$$S_n^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ \geq 0 \qquad S_n^- = -\sum_{k=1}^{n} a_k^- \geq 0$$

$$S_n \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n^+ - S_n^-$$

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}$$

$$S_3^+ = 1 + \tfrac{1}{3} \qquad S_3^- = \tfrac{1}{2} \qquad = \qquad S_3 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}$$

$S_n^+ + S_n^- =$ n-ima somma parziale della serie $\sum |a_n|$

$$S^{\pm}$$

$$S_n^{\pm} \leq S_n^+ + S_n^-$$

$S_n^{\pm}$ sono limitate da $S_n^+$ e $S_n^-$

$\Downarrow$

Sapendo che questi convergono per definizione

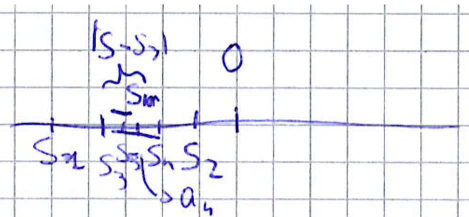
SERIE A SEGNI ALTERNI $\sum_{n=0}^{n} (-1)^n a_n$ $\quad a_n > 0$ ~~Serie di~~

Leibniz: Si supponga che 1) $a_n$ sia monotona decrescente $a_n \geq a_{n+1}$
2) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

allora la serie è convergente
La somma della serie è $> 0$ se il primo termine è $> 0$
La successione $S_{2n}$ è monotona decrescente
" $S_{2n+1}$ è crescente

Se $S = S_n + R_n = \sum^{n} (-1)^k a_k + \sum_{n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$ allora $|S - S_n| \leq a_{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (a_n)$$




$S_1 = -a_1 < 0$

$S_2 = -a_1 + a_2 > S_1$ e $a_1 > a_2 \Rightarrow < 0$

$S_3 = -a_1 + a_2 - a_3 = \quad S_3 < S_2$

$S_n = \quad " + a_n$

Se si parte da 0 la
successione sarà convergente
ad un S positivo

ES SERIE ARMONICHE GENERALIZZATE A SEGNI ALTERNI 248

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$$

se $n^\alpha > 0$ $a_n$ soddisfa i criteri di Leibniz.

$\alpha > 0$ ~~soddisf~~ sono convergenti

Saranno assolutamente convergenti quando

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}\right| = \sum \frac{1}{n^\alpha}$$ convergente se $\alpha > 1$

ES

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$$ è convergente $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} <$

ES

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{n-1}{n^2+n}}_{\sim \frac{1}{n}}$$ per gerarchia di infiniti

$$\frac{n}{(n+1)^2 + n+1} < \frac{n-1}{n^2+n} =$$

$$= (n^2+n) n < (n-1)\left[(n+1)^2 + n+1\right]$$

ES

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \underbrace{\left[\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}\right]}_{> 0}$$ ~~converge~~ $\Leftrightarrow$ segni alterni

OSS: $\sum a_k$, $\sum b_k$ convergenti allora $\sum a_k \pm b_k$ è convergente

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right] =$$ Leibniz $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergente?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$ è sicuramente divergente

ES

$$\sum \frac{n+1 + (-1)^n n^2}{n^3}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k = \begin{cases} a_k = \dfrac{2}{k+2} & k \text{ pari} \\ a_k = \left(\dfrac{2}{k+1}\right)^2 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}$$

Leibniz?

Sia per $a_k$ pari che per $a_k$ dispari $\to 0$

è monotona decrescente? No, poiché la successione passa da valori positivi a negativi

LEIBNIZ non è applicabile.

La convergenza equivale all'esistenza di $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$

$S_{2n} = \underline{1} - 1 + \underline{1/2} - 1/4 + \underline{1/3} - 1/9 + \ldots + \underline{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n^2}$ $\to$ non converge

dovesse essere vero che $S_n$ converge allora anche $S_{2n}$ converge

$$S_n = \underbrace{\left(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n\right)}_{\text{Serie armonica generalizzata ad esponente } 1} - \underbrace{\left(1 + 1/4 + 1/9 + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)}_{\text{Serie armonica generalizzata ad esponente } 2} \Rightarrow \text{non converge} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ DIVERGE

diverge $\leftarrow$ Serie armonica generalizzata ad esponente 1

Serie armonica generalizzata ad esponente 2 $\to$ converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k-4}{k^2+1} = -4 + \frac{3}{2}, -\frac{2}{5}, +\frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{26} + \ldots$$

$\hookrightarrow$ lo zero non contribuisce alla sommatoria

Leibniz:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ✓

$$\frac{k-4}{k^2+1} > \frac{k+1-4}{(k+1)^2+1} = \frac{k-3}{(k+1)^2+1}$$

k sufficientemente grande, quindi $\gg 1$ $\Rightarrow$

$$(k^2+1)(-3+k) < (k-4)\left((k+1)^2+1\right)$$

$$\cancel{k^3} - 3k^2 + k - 3 < \cancel{k^3} - 2k^2 - 6k - 8$$

$$7k + 5 < k^2$$

per $k$ grande allora $k^2$ definitivamente $> 7k+5$

DIMOSTRATO DECRESCENTE

⇓

converge

$$\sum_{K=0}^{+\infty} (2^x - 3)^K \sin\left(\frac{K^2}{K^3+3}\right)$$

per quali valori di $x$ vi è convergenza ASSOLUTA e per quali c'è convergenza? $x \in \mathbb{R}$

condizione necessaria è che $\lim_{K\to\infty} a_K = 0$

$$\lim_{K\to 0} \underbrace{(2^x - 3)^K}_{\substack{\text{cresce} \\ \text{esponenziale}}} \; \underbrace{\frac{K^2}{K^3+3}}_{\substack{\text{cresce in} \\ \text{potenza}}} = 0$$

cresce esponenziale $\Downarrow$ successione geometrica.

cresce in potenza $\to 0$

Essendo l'esponenziale più "infinitamente grande" della potenza serve che l'esp tenda a zero

$$|2^x - 3| \leq 1 \quad \Rightarrow 2^1 \leq 2^x \leq 2^2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$x = [1, 2]$$

$\Downarrow$

$x$ deve essere compreso tra 1 e 2 per avere la condizione necessaria -ma non sufficiente-

$$\sum_{K=0}^{+\infty} |2^x - 3|^K \frac{K^2}{K^3+3}$$

$\downarrow$

vogliamo provare a maggiorarlo $\Rightarrow$ quel termine è $\leq 1$

$\to$ se $|2^x - 3| < 1$ è convergente,

La serie è MAGGIORATA termine a termine di

$$\sum |2^x - 3|^K \frac{K^2}{K^3+3} \leq \sum |2^x - 3|^K$$

$\to$ Si ha convergenza assoluta per $|2^x - 3| < 1$. quindi

$$1 < x < 2$$

$x = 1 \quad \sum (-1)^K \frac{K^2}{K^3+3}$ Leibniz $\lim = 0$

con $x = 2 \quad \sum \cancel{1}^K \frac{1}{K} \to$ diverge

$$\begin{cases} x = 2 & \text{diverge} \\ x = 1 & \text{converge} \\ 1 < x < 2 & \text{converge assolutamente} \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

DEF $\sum b_k$ è <u>riordinamento</u> della serie $\sum a_k$ se $\exists\, j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biunivoca tale che $b_k = a_{j(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Teorema: Si suppone che la serie $\sum a_k$ sia assolutamente convergente, allora ogni riordinamento è assolutamente convergente e la somma della serie di partenza $\sum a_k$ corrisponde con la somma della serie

Teorema $\sum a_k$ ~~no~~ conv, ma non assolutamente allora
(i) $\exists$ riordinamento $\sum b_k$ ~~tale che~~ con somma $S$ $\forall S \in \mathbb{R}$
(ii) $\exists$ riordinamenti divergenti a $\pm\infty$

ES

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = S < \frac{5}{6} \quad S = \underbrace{1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}}_{5/6} \underbrace{- \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}}_{<0} \underbrace{- \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}}_{<0} \dots$$

Si riordina questa serie

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{6} + \dots$$

$\Downarrow$
NON CONVERGE a $S$

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{2k}$$ = Successione delle somme parziali 3-enesimo

P.es
$S_3 = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} =$
$S_6 = 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4}$

$$S_{3n} \sum \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{5}{6} + \sum \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}$$

la successione $S_{3n}$ è monotona crescente, quindi dovesse mai esistere la serie convergerebbe ad un limite MAGGIORE di $5/6$

---

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergenti una delle due assolutamente

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = (a_0 + \dots + a_n)(b_0 + \dots + b_n)$$

PRODOTTO DI CAUCHY $= c_k = \sum_{j=0} a_j b_{k-j}$

$$= \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j = \dots$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

OSS

Dati $a_1, \dots, a_n$ si può considerare la moltiplicazione di tutti i termini.

SI USA LA PRODUTTORIA

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \qquad e^{\sum_{k=1}^{\infty} a_k} \text{ è prodotto infinito di } e^{a_k}$$

# FUNZIONI

Siano $A, B$ insiemi

$f: A \to B$ "funzione" — corrispondenza biunivoca tra elementi di $A, B$, che associa un elemento di $A$ UN SOLO elemento di $B$

$A$ "dominio" di $f$ ($f$ ha senso $\forall a$)

$B$ "codominio" di $f$ (è l'ambiente che raccoglie tramite $f$ elementi di $A$)

$f(A)$ = insieme di tutti gli elementi $\{f(a) \mid a \in A\}$ = "Immagine" = $Im(f)$

Se $f(A) = B$ si dice che $f$ è suriettiva. immagine corrisponde a codominio

$f$ è iniettiva se $f(a) \neq f(a')$, $\forall a, a' \in A$, $a \neq a'$

$f$ è biunivoca se è contemporaneamente INIETTIVA e SURIETTIVA

ES Successione $\{a_n, n \geq 1\}$ reale

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\qquad a_n = f(n)$

$D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad n, m \in \mathbb{N}$

Se $n = 1 = m$ abbiamo funzioni di variabile reale a valori reali

$\mathbb{R}^n$ per definizione è $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1 \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots n\}$

$f: D \to \mathbb{R} \qquad D \subset \mathbb{R}$

$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in D, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$

FUNZIONI LIMITATE $(\mathbb{R}, \leq)$

Def: $f: D \to \mathbb{R}$ limitata superiormente se l'immagine è limitata, $\exists M \in \mathbb{R}: f(x) \leq M$, (inferiormente) se ($\exists m \in \mathbb{R}: f(x) \geq m \quad \forall x \in D$)

$f$ limitata se limitata inferiormente e superiormente

SIMMETRIE

Def: $f: D \to \mathbb{R}$ $D \subset \mathbb{R}$ sempre se non specificato altrimenti

è detta ~~pari~~ se $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in D$ lo stesso sottoinsieme

D deve essere simmetrico all'origine

es $f(x) = x^2$ $G(f)$ è simmetrico rispetto all'asse y

Def. $f\ D \to \mathbb{R}$ è DISPARI se $f(x) = -f(-x)$

e $f(-x) = -f(x)$

$G(f)$ è simmetrico rispetto all'origine

es $G(\sin x)$ è simmetrico rispetto all'origine.

nota con una funz dispari $f(0) = -f(0)$. La funzione dispari passa per 0

Prodotto ("puntuale"): $f, g: D \to \mathbb{R}$

$(f \cdot g) \underset{\text{per def.}}{=} f(x) \cdot g(x)$ (si può fare con somme, diff e quoz)

OSS. $f \cdot g = g \cdot f$. con f pari e g dispari $= f \cdot g$ dispari.

" e g pari $= f \cdot g$ pari

f dispari e g dispari $= f \cdot g$ pari

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora

$f = f_p + f_d$, con $f_p\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari

$f_d\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dispari

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))}_{\text{pari}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))}_{\text{dispari}}$$

FUNZIONI MONOTONE

Def $f: D \to \mathbb{R}$ monotona crescente se $f(x) \leq f(y)$, $\forall x, y \in D$ $x < y$

" decrescente se $f(x) \geq f(y)$, $\forall x, y \in D$, $x < y$

strettamente crescente $f(x) < f(y)$

" decrescente $f(x) > f(y)$

FUNZIONI PERIODICHE $f\ D \to \mathbb{R}$ $D = \mathbb{R}$

$f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T > 0$ se $f(x) = f(x+T)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ irrazionale} \end{cases}$ (ogni $\{q \in \mathbb{Q}_+ \mid x > 0\}$ è un periodo)

se $f, g$ hanno stesso periodo T, allora tutte le operazioni algebriche hanno ~~prodotto~~ periodo T

$\sin x$ (periodo $2\pi$) $+ \sin(\pi x)$ (periodo 2) = non periodico

POTENZE $f(x) = x^{\alpha}$

Polinomi $f(x) = a_0 x + \ldots + a_n x^n$ $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0 \ldots n$ $(n \in \mathbb{N})$

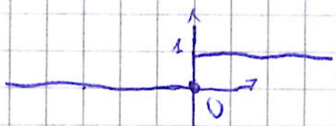
Se $a_n \neq 0$, il polinomio è di grado $n$

Razionali: quozienti di polinomi.

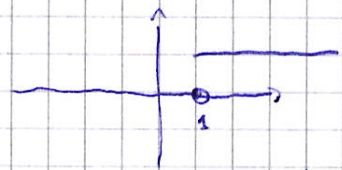
Es $\dfrac{x^3 - 3}{x^2 + 1}$ è definita su tutti i reali.

Funzioni a ~~scala~~ GRADINO

es $H_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

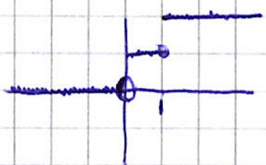


$H_1(X) \begin{cases} 0 & X < 1 \\ 1 & X \geq 1 \end{cases}$



$H_0 + H_1 =$

$\hookrightarrow \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x \geq 1 \end{cases}$



Funzioni esponenziali

$f = e^x$

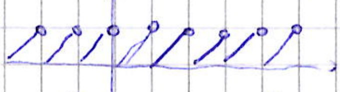
Funzioni logaritmiche

$f(x) = \log x$

Funzioni trigonometriche e inverse

Funzione parte intera $[x] = n$ tale che $n \in \mathbb{Z}$ $n \leq x$, $n+1 > x$ $\Rightarrow n \leq x < n+1$

Funzione $x - [x]$ parte frazionaria o "mantissa" $\{x\} = x - [x]$



periodica di periodo 1

FUNZIONI Definite "a Tratti":

ES: $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < -10 \\ \log x & -10 \leq x < 9 \\ x^2 & 9 \leq x \leq 0 \\ \{x\} & x > 0 \end{cases}$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$\cosh(x) \overset{def}{=} \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) = Ch\,x$ pari

coseno iperbolico è chiamato anche catenaria

cresce più velocemente di $x^{n}$

$\sinh(x) \overset{def}{=} \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}) = Sh\,x$ dispari

$\tanh(x) \overset{def}{=} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = th\,x$ dispari

$\coth(x) = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} = Cth$ dispari

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad (\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad (\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

Operazioni su grafici: $y = f(x) \rightsquigarrow G(f)$

(0) $f(x)+a$ : traslato su asse $y$ ($a>0$ ~~destra~~ alto)

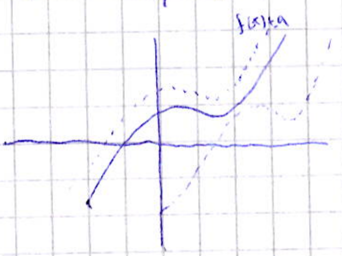
(1) $f(x-a)$ : traslato su asse $x$ ($a>0$ destra)

(2) $k f(x)$ : dilatazione su asse $y$

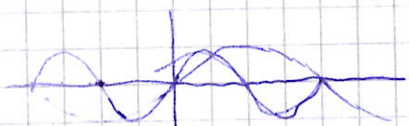
(3) $f(kx)$ : dilatazione su asse $x$

(4) $|f(x)|$ : ribaltamento su asse $x$ di $f(x)<0$

(5) $f(|x|)$ : ribaltamento su asse $y$, cancellazione $x<0$



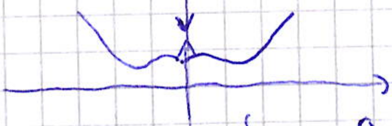

(3) $\sin(x)$



$\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(4) $|\sin(x)|$

(5) : $f(|x|)$



FUNZIONE composta :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \qquad a,\ f(a),\ g(f(a))$$

$$g \circ f : A \to C \implies (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$f : D_f \to \mathbb{R} \quad , \quad g : D_g \to \mathbb{R}$$

$x \in D_f$ $\quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$ se $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$

FUNZIONE INVERSA

$A \xrightarrow{f} B$ $\quad a,\ f(a)$

sia $E \subset B$ Def $f^{-1}(E) = \{a \in A \mid f(a) \in E\}$

IMMAGINE INVERSA

$D_f \cap f^{-1}(D_g)$

$$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f,\ f(x) \in D_g\} = D_f \cap f^{-1}(D_g)$$

(In generale $f\circ g$ e $g \circ f$ non sono ~~le~~ stesse. L'ordine è importante)

es

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = \sin(x)$ $\quad$ dominio su tutta retta reale

$(g\circ f)(x) = \sin(x^2)$

$(f \circ g)(x) = (\sin x)^2$

pari o pari = pari
pari o dispari = pari
dispari o pari = ~~disp~~ pari
dispari o dispari = dispari

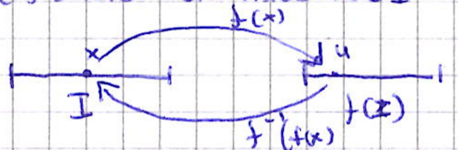
$$(f\circ g)(-x) = f(g(-x)) \overset{g \text{ dispari}}{=} f(-g(x)) \overset{f \text{ dispari}}{=} -f(g(x)) = \text{dispari}$$

$I$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $x \in I$, $y = f(x)$

$A \xrightarrow{f} B$ $\qquad$ $f$ <u>iniettiva</u>

$f$ determina una corrispondenza biunivoca tra $A$ e $f(A)$

Supponiamo $f$ iniettiva, vi sarà una corrispondenza biunivoca tra $I$ e $f(I)$
dato $y = f(x)$ esiste un unico $x \in I$ associabile a $y$




Esiste una funzione univocamente $f^{-1}$ da $f(I)$ a $I$ tale che $f^{-1}(f(x)) = x$
e $f f^{-1} y = y$ $\qquad f^{-1}\circ f = id_I$, $f \circ f^{-1} = id_{(f(I))}$

OSS

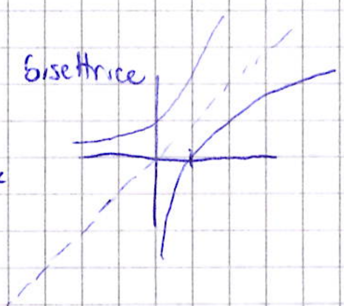
1) Una funzione strettamente monotona è ~~convert~~ invertibile sulla sua IMMAGINE, infatti una funzione strettamente monotona è INIETTIVA

2) $(x_0, y_0) \in G(f)$ con $f$ invertibile, allora $(y_0, x_0) \in G(f^{-1})$

$x_0 \in D_f$, $y_0 = f(x)$

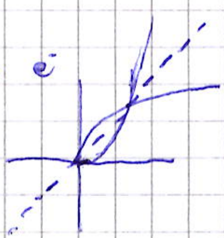
$y_0 \in D_{f^{-1}}$, e $f^{-1}(y_0) = x_0$

I grafici delle funzioni inverse sono "ribaltati" dalla bisettrice



es $\log x$, $e^x$ sono inverse $\qquad e^{\log x} = x$
$\qquad \log e^x = x$

es $x^2$ e $\sqrt{x}$, con $x^2 > 0$ è INVERTIBILE

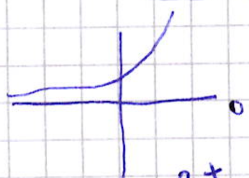


$1^\circ$ caso lim finito all'infinito $= (\ell \in \mathbb{R},\ c \in \{\pm\infty\})$

ES
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

<u>DEF</u>: $f$ ha un <u>asintoto ORIZZONTALE</u> di eq $y = \ell \in \mathbb{R}$ se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$

es $e^x$



DEF $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell^+$ se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ e $f(x) \geq \ell$ dall'alto

$(\ell^-)$ $\qquad (f(x) \leq \ell)$ (dal basso)

$2^\circ$ caso lim infinito all'infinito $(\ell = \pm\infty,\ c = \pm\infty)$

ES
$$\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$$

<u>DEF</u>: $f$ ha asintoto OBLIQUO di eq. $y = mx + q$ $(m \neq 0,\ q \in \mathbb{R})$ per $x \to +\infty (o -\infty)$
se $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx - q] = 0$ $\left(\lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx - q] = 0\right)$

Es. $f(x) = 2x + 1 + e^x$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)$ = ha asintoto obliquo $y = 2x+1$ $x \to -\infty$

<u>OSS</u>: $f$ ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se e solo se
(i) deve esistere $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ $\qquad m \in \mathbb{R},\ m \neq 0$
(ii) $\exists \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = q$ $\qquad q \in \mathbb{R}$

3 caso lim infinito al finito $(\ell \in \{\pm\infty\}\ c \in \mathbb{R})$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

DEF: $\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$ $\left(\lim x \to c^-\right)$ (si si avvicina a c da dx) se (analogam da sx)
(i) $\exists \lim_{n\to\infty} (f(x_n)) = \ell$ $\quad \forall x_n\ x_n \neq c,\ x_n \to c\ n \to \infty,\ x_n > c$ $(x_n < c)$

es
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$\left(\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\right)$ perche ci sono 2 LIMITI DISTINTI

Teorema: per $c \in \mathbb{R}$ $\exists \lim_{x\to c} f(x) = \ell$ se e solo se $\exists \lim_{x\to c^{+(-)}} f(x) = \ell$

DEF: $f(x)$ ha asintoto VERTICALE in $x = c$ se $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$

4 lim finito al finito ($l \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$)

Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

In particolare $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

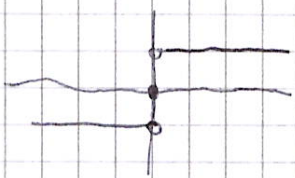
DEF: si dice $f$ continua in $x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, con $x_0 \in \mathrm{Im} f$

$f$ continua in $E \subset \mathrm{Dom} f$ se continua in $x_0 \ \forall x_0 \in E$.

Se $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c) \Rightarrow f$ è continua da destra in $c$

$\exists \lim_{x \to c^+} f(x) \to l_1$ $\qquad \lim_{x \to c^-} f(x) \to l_2$ $\qquad l_1 \neq l_2$ fn discontinuità "a salto" ($l_1 - l_2$ è "salto")

Es $\mathrm{sign}(x) \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to 0^+} = 1$

$\lim_{x \to 0^-} = -1$

$\Rightarrow$ salto $= 2$

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $\qquad$ NON è continua in nessun punto

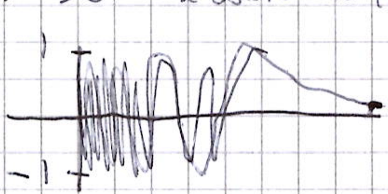
non ci si può avvicinare a nessun numero. Lim non esiste in nessun punto di $\mathbb{R}$

$f(x) = [x]$ $\qquad$ la funzione è continua da destra.

$f(x) = x - [x] = \{x\}$ $\qquad$ stesse proprietà di $[x]$ continua da dx

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad$ 0 n.d $\qquad$ $f(x)$ limitata tra $-1$ e $1$ $\qquad \lim_{x \to \infty} f(x) \Rightarrow 0$

per $x \to 0$ $\quad x$ oscilla sempre più velocemente




$\frac{x}{|x|}$ $\qquad$ dominio $x \neq 0$ (non definita nell'origine)

$e^{-1/x^2}$ $\qquad \lim_{x \to 0} f(x) = e^{-\infty} = 0$

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

estensione per continuità di $f$

prolungabile attraverso limiti in modo che $\exists f(x) : x \to 0$

**Def**: Un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ è un intervallo aperto contenente $x_0$. Gli intorni simmetrici sono della forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$

Un intorno di $+\infty$ è un intervallo del tipo $(a, +\infty)$ $a \in \mathbb{R}$
Un intorno di $-\infty$ è un intervallo della forma $(-\infty, a)$ $a \in \mathbb{R}$

(?) $f$ ha definitivamente la proprietà "p" per $x \to x_0$ se $\exists$ un intorno di $x_0$ tale che $f$ soddisfa "p" in tutti i punti dell'intorno.

$c \in \mathbb{R}^*$ $\quad f$ definita definitivamente per $x \to c$

$\lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$ se comunque si scelga un intorno $U_l$ di $l$

$\exists$ un intorno $V_c$ di $c$ tale che $f(V_c - c) \subset U_l$

cioè $(\forall x \in V_c \ x \neq c \quad f(x) \in U_l)$

$c \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ limite finito al finito

comunque si sceglie un intorno $l$, $\forall \varepsilon \ \exists \delta \ \underbrace{0 < |x - c| < \delta}_{V_c(\delta)/\{c\}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}_{U_l(\varepsilon)}$

$c \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$

intorno di $+\infty$ è $(h, +\infty)$ $\quad \forall H > 0 \ \exists \delta_H : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) > H$

$c = +\infty$, $l \in \mathbb{R}$ $\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0 : x > K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$c = +\infty$, $l = +\infty$ $\ \forall H > 0 \ \exists K > 0 : x > K \Rightarrow f(x) > H$

Teorema (confronto) se $\lim_{x \to c} f(x) = l = \lim_{x \to c} g(x)$,
e $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ definitivamente $x \to c$
allora $\lim_{x \to c} h(x) = l$

Conseguenze (I) se $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ e $|h(x)| \leq g(x)$ definitivamente per $x \to c$

allora $\lim_{x \to c} h(x) = 0$

(II) se $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ e $h$ definitivamente limitata $x \to c$

allora $\lim_{x \to c} f(x) h(x) = 0$

Teorema (permanenza): se $\lim_{x \to c} f(x) = l > 0$ allora $f(x)$ è definitivamente $> 0$ per $x \to c$

(II) se $\lim f(x) = l$, $f(x) \geq 0$ definitivamente $x \to c$ allora $l \geq 0$

Teorema (permanenza, $f$ continua in $c$) $\lim_{x \to c}$ $f$ continua in $c$, $f(c) > 0$

allora $f$ definit. $> 0$ $x \to c$

ALGEBRA DEI LIMITI: se $\lim_{x \to c} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to c} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

(I) = $\lim_{x \to c} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2$

(II) $\lim_{x \to c} f(x) g(x) = l_1 l_2$

(III) $\lim_{x \to c} f(x)/g(x) = l_1/l_2$ se $l_2 \neq 0$ e $g(x)$ def. $\neq 0$ $x \to c$

$+\infty + \infty = +\infty$ $\qquad \infty - \infty$ indet

$\infty \cdot \infty = \infty$ $\qquad \infty \cdot 0 =$ indet

Teor (algebra delle funzioni continue) $f, g$ definite in un intorno di $x_0$ e continue

(1) $f \pm g$
(2) $f \cdot g$
(3) $f/g$ $\Big\}$ continue in $x_0$ continuano ad essere continue.

$\hookrightarrow g \neq 0$ $\quad l_g \neq 0$

Teorema: Potenze, logaritmi, esponenziali, iperboliche, trigonometriche

SONO TUTTE FUNZIONI CONTINUE sul dominio naturale

Teor (cambiamento di variabili nel limite)

$f, g$ tale $f \circ g$ definita definitivam per $x \to x_0$

Suppone inoltre (i) $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = t_0$ $= (g(x_0)$ se $g$ continua in $x_0)$

(ii) $\exists \lim_{t \to t_0} f(t) = l$

(iii) $g(x) \neq t_0$ definit. per $x \to x_0$ (superflua se $f$ cont $t_0$)

Allore $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = l = f(t_0)$

Dim Sia $\{x_n\}$ successione convergente a $x_0$, $n \to +\infty$ $x_n \neq x_0$ definit $x \to$

allora $g(x_n) \to t_0$, $n \to \infty$ (i)

inolte $g(x_n) \neq t_0$ definitivamente (iii)

Quindi (ii) $\underbrace{f(g(x_n))}_{(f \circ g)(x_n)} \to l$ $n \to \infty$

ES $f(x) \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = 0$ $\forall x \in$

Teorema di continuità delle funzioni composte

$g$ definita in un'intorno di $x_0$, continua in $x_0$

$f$ " " " " $g(x_0)$ continua in $g(x_0)$
$\phantom{f} \qquad\qquad\qquad\quad \overset{\shortparallel}{t_0}$

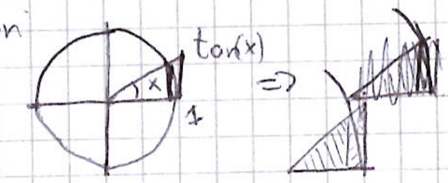
$f \circ g$ definito in un intorno $x_0$ e continua in $x_0$

Dim $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = t_0$

$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = l = \lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0) = f(g(x_0))$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (sufficiente mostrare che $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$)

$\hookrightarrow$ pon




Area triangolo inscritto $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x$

$<$

Area settore circolare $\frac{1}{2} x$

$<$

$\tan(x)/2$

$\sin x < x < \tan x$

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ $\to [-1, 1]$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x-s}1-\cos x}{x^2} = 1/2$$

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\cancel{\sin^2} x^2(1+\cos x)} \quad \underbrace{\frac{\sin^2 x^2}{x^2}}_{\nearrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\nearrow 1/2}$$

TOPOLOGIA

$X_0 \in \mathbb{R}$ definizione di un punto!

Intorno sferico di $X_0$


r raggio

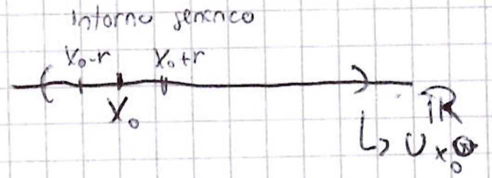
$$I_r(X_0) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r \}$$

↳ Intorno sferico del punto $X_0 \in \mathbb{R}$ di raggio $r > 0$ è dato da $I_r(X_0)$

$X_0 = 0$ $r = 3$ $I_3(0) = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3 \}$

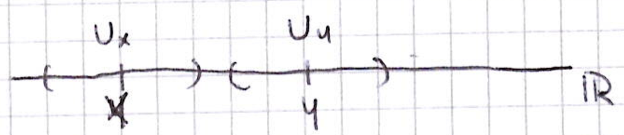
Intorno generico di $X_0$ $(U_{x_0})$

è tale se contiene un' intorno sferico di $X_0$




$\{ x \in \mathbb{R} : -5 < x < 4 \}$ è un insieme generico, contiene strettamente $(I_3(0))$

- $X_0 \in U_{x_0}$ $U_{x_0}$ intorno di $X_0$
- $x \neq y$ $x, y \in \mathbb{R}$ $\exists\, U_x, U_y$ (intorni di x e y) t.c. $U_x \cap U_y = \emptyset$




$|x-y|$ è distanza $> 0$ STRETTAMENTE

per trovare intorni $U_x \cap U_x \neq \emptyset$ prendo la distanza, divido per 2 e creo l'intorno con raggio minore di essa.

$I_{<|x-y|}(x)$ $I_{<|x-y|}(y)$

$\delta = \frac{1}{2}|x-y| > 0$, $0 < r < \delta$ si possono considerare intorni

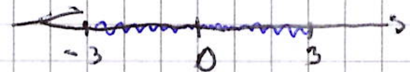
$U_x = I_r(x)$ $U_y = I_r(y)$

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

- $x_0$ è interno ad $A$ se $\exists\, U_{x_0}$ t.c. $U_{x_0} \subseteq A$
- $x_0$ è esterno ad $A$, se $\exists\, U_{x_0}$ t.c. $U_{x_0} \subseteq A^c$
- $x_0$ è di frontiera per $A$, se ogni intorno di $x_0$ contiene sia punti di $A$ che punti di $A^c$

DEF: I punti interni di $A$ denotati con $A^\circ$, i punti di frontiera con $\partial A$

$$I_3(0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\} \text{ oppure } \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\} = A$$



$(-3,3) = A^\circ \subset A$

$\partial A$ 3, -3 punti di frontiera

$$A^\circ = I_3(0) = I_3(0)^\circ$$

$$\partial A = \{-3, 3\} = \partial I_3(0)$$

I punti esterni sono dati: $]-\infty, 3[\ \cup\ ]3 + \infty[$

DEF: $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme $A$ si dice APERTO se ogni punto di $A$ è interno

es $I_3(0)$, $(a,b)$

(1) $(0,1) \cup (2,3)$ NON è intervallo, ma è un unione di intervalli. (non è intervallo perché da 0 a 3 ci sono buchi). un insieme aperto

Dimostrazione: trovare ~~almeno~~ intorno dentro a e b

$\delta_1\ x_0 - a$
$\delta_2\ b - x_0$ $\rightsquigarrow$ minimo $\{\delta_1 \delta_2\}$

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$0 < r < \delta \quad \Rightarrow \quad I_r(x_0) \subset (a,b) \Rightarrow \{a < x_0 < b \;\; |x - x_0| < \delta\}$$

è aperto se e solo se $A = A^\circ$

Proposizione: la famiglia $A$ degli aperti di $\mathbb{R}$ $\left((-\infty; a), (a, +\infty) \text{ sono aperti}\right)$ è tale che

- $\emptyset$, $\mathbb{R}$ sono insiemi aperti
- L'unione degli aperti è un insieme aperto
- L'intersezione finita di aperti è un insieme aperto

- NON è vero che in generale l'intersezione qualsiasi di aperti è un insieme aperto!

es
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) = \{0\}$$

# INSIEMI CHIUSI

$C \subseteq \mathbb{R}$: $C$ è un insieme CHIUSO se il suo complementare è un aperto

ESEMPI = $[a, b]$ intervalli chiusi $\Rightarrow A^c = (-\infty, a)\ (b, \infty)$
$(-\infty, a]\ [b, +\infty)$ chiusi $\Rightarrow A^c\ (a, b)$

Proposizione
- L'unione di insiemi chiusi in $\mathbb{R}$ (finiti) è un insieme chiuso
- $\emptyset$, $\mathbb{R}$ sono chiusi
- L'intersezione qualsiasi di chiusi è un insieme chiuso

non è vero che l'unione di chiusi infiniti ~~chiusi~~ deve essere chiuso
es
$$(-\infty, 1/n] \cup [-1/n, +\infty) = (-\infty, 0)\ (0, +\infty)$$
aperto!

Teorema: $C$ è chiuso se e solo se vale:

se si prende $\{x_n\}$ successione $\forall x_n \in C$ convergente a $x \in \mathbb{R}$, allora $x \in C$

$A \subseteq \mathbb{R}$ è di aderenza per $A$ se ogni intorno $U_{x_0}$ contiene punti di $A$
$\bar{A}$ è l'insieme dei punti di aderenza di $\bar{A}$, $\bar{A}$ è detta chiusura di $A$

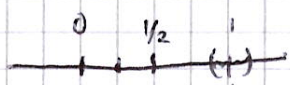
$A \subseteq \mathbb{R}$ insieme $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per $A$ se ogni intorno $U_{x_0}$ nel punto $x_0$ contiene punti di $A$ distinti da $x_0$


$[-3, 3]$ in un intorno $I(-3)$ ci sono infiniti punti appartenenti ad $A$ e diversi da $-3$

Un punto $x_0$ è di accumulazione per $A \subseteq \mathbb{R}$ se e solo se ogni intorno $U_{x_0}$ contiene infiniti punti di $A$

$A \subseteq \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice isolato se $\exists\, U_{x_0}$ t.c. $U_{x_0} \cap A = \{x_0\}$

$$A = \left\{ \tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$




↳ con $\varepsilon = 1/2$ non c'è $x_0$ che si trovano nell intorno.

- 0 è accumulazione per $A$

$(-\varepsilon, \varepsilon)$ , $\varepsilon > 0$

- 0 è estremo inferiore dell'insieme, quindi fissato $\varepsilon$ piccolo, $\exists\, \bar{n} : 1/\bar{n} < \varepsilon$

$$\bar{A} = A^0 \cup (\mathcal{J}A)$$

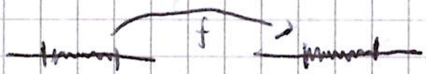
$[-3, 3]$ punti interni tra $-3$ e tre sono di accumulazione

# LIMITI e FUNZIONI CONTINUE

$f: D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in D(f)$

$x_0$ di accumulazione o isolato per $D(f)$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$




$f: D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in D(f)$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che $x \in D(f)$ $|x - x_0| < \delta$

allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

es

$f(x) = ax + b \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |ax + b - ax_0 - b| = |a||x - x_0| < \varepsilon$

$$|a|\delta < \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$$

$x \in \mathbb{R}$ $\{f(x) \neq 0\}$ $\{f(x) > 0\}$ $\{f(x) < 0\}$ aperti

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

$x \in \mathbb{R}$ $\{f(x) = 0\}$ $\{f(x) \leq 0\}$ $\{f(x) \geq 0\}$ chiusi

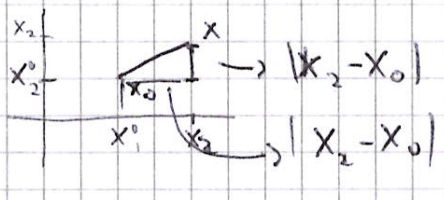
$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\}$

$|x - x_0| < r$

$\mathbb{R}^n: |x - x_0| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots (x_n - x_n^0)^2}$

$x = (x_1 \dots x_n)$ $\quad x_0 = (x_{0_1} \dots x_{0_n})$

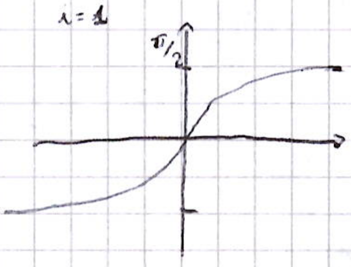
$\Rightarrow$ con $n = 2$ si ha pitagora



es

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{arctg}\left(\frac{1}{k}\right)$$

funzione trigonometrica



limiti notevoli da sfruttare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arctg}(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\text{arctg}(1/k)}{1/k} = 1 \Rightarrow$$ stesso limite notevole perché $1/k \to 0$ $k\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{\alpha} ~~\text{diverge}~~ \begin{cases} \text{per } \alpha \leq 1 & \text{diverge} \\ \alpha > 1 & \text{converge} \end{cases}$$

$$\sum f(g(x))$$

dato che $\sum 1/k \Rightarrow g(x)$ diverge
applicando il confronto asintotico
la serie diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(e^{1/k}-1\right)$$

limiti notevoli!

$\cancel{e^{1/k}-1 \sim 1/k}$

$$\frac{e^x-1}{x} \to 1 \quad x\to 0$$

essendo $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ compreso tra 0 e 1

$\sin 1/k^{1/2} \sim 0$

$a_n$ può essere maggiorato da $e^{1/k}-1$

$0 \leq 1/\sqrt{k} \leq \pi/2 \Rightarrow 2/\pi \leq \sqrt{k} \Rightarrow$

quindi

$(2/\pi)^2 < k$

$\Downarrow$

$0 < (2/\pi)^2 < 1 \Rightarrow$

$$\sum a_n < \sum e^{1/k}-1 < \infty$$

CONSIDERAZIONI

- $\sqrt{k}\sin 1/\sqrt{k} \to 1 \quad k\to\infty$ $\quad x\to 0 \ \frac{\sin x}{x}$
- $k\left(e^{1/k}-1\right) \to 1$

$$\lim_{k\to\infty} a_n \cdot k^{3/2} = 1$$

$$a_n \sim \frac{1}{k^{3/2}} \to \text{converge}$$

conclusioni
dato che $\sum 1/k^{3/2} \to$ converge allora $\sum a_n$ converge

$$\lim \underbrace{k^{1/2}\cdot(\sin(1/\sqrt{k}))}_{1}\underbrace{k(e^{1/k}-1)}_{1} \Rightarrow 1$$

$$\sum_k \frac{k!\sqrt{k+2}}{3^k k^k} \Rightarrow \overset{+}{\text{RAPPORTO}} \quad \frac{(k+1)\cancel{k!}\sqrt{k+3}}{\cancel{3^k}\cdot 3\cdot(k+1)^k(k+1)} \cdot \frac{\cancel{3^k}\,k^k}{\cancel{k!}\sqrt{k+2}} =$$

$$= \frac{\cancel{k+1}\,\sqrt{k+3}}{(k+1)^k\, 3\, \cancel{(k+1)}} \cdot \frac{k^k}{\sqrt{k+2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot \sqrt{\frac{k+3}{k+2}}$$

$$\sqrt{\frac{k+3}{k+2}} \to \sqrt{1} \to 1$$

$\Rightarrow$ considerazione

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^k \Rightarrow \left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k}\right)^{-1} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k\;-1} \to e^{-1} \Rightarrow$$

$$\sim \frac{1}{3e} < 1 \Rightarrow$$ convergente per ~~serie armonica~~ rapporto minore di 1

Studiare $x \in \mathbb{R}$

$$\sum \frac{x^k}{k} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Studiare comportamento della serie al variare di $x$

$1°$ convergenza assoluta, ~~quindi~~

$$\sum \left| \frac{x^k}{k} \right| \qquad k > 0 \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \sum \frac{|x|^k}{k}$$ serie a termini positivi

si usa il criterio della radice sulla serie di moduli

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\frac{|x|^k}{k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{|x|}{\underbrace{k^{1/k}}_{\to 1}} = |x|$$ converge per $\lim < 1 \Rightarrow$

$$|x| < 1 \to -1 < x < 1$$

~~Si limita il risultato per $x > 0$~~

CONVERGE LA SERIE ASSOLUTAMENTE quindi è implicata la convergenza semplice per $|x| < 1$

$$\sum \frac{|x|^k}{k} \xRightarrow[\text{implica}]{} \sum \frac{x^k}{k} < \infty$$ per $-1 < x < 1$ converge assolutamente, quindi semplicemente

- per $x \geq 1$, per $x < -1$, $x = 1$, $x = -1$

- con $x > 1$ serie DIVERGE

$$\sum \frac{x^k}{k}$$ d'altra parte non è verificata la condizione necessaria per $\lim_{k \to \infty} \frac{x^k}{k} \neq 0$, diverge

- con $x < -1$ NON ESISTE, irregolare

è serie a segni alterni

$x < -1$ : $-x > x$

$$\sum x^k \frac{1}{k}$$ condizione necessaria? $$\lim_{k \to +\infty} [(-1)(-x)]^k \frac{1}{k} = \lim \frac{(-1)^k (-x)^k}{k} = \nexists$$

$\infty$

continua ad andare tra $-\infty$ e $+\infty$

- con $x = 1$ diverge

$$\sum \frac{1^k}{k}$$ diverge per armonica

$x = -1$ CONVERGE

$$\sum \frac{(-1)^k}{k} \Rightarrow (-1)^k \left\{ \frac{1}{k} \right\}$$

$$\sum \frac{x^k}{k} \begin{cases} \text{converge} & -1 < x < 1 \\ \text{diverge} & x > 1 \\ \text{irresolare} & x < 1 \\ \text{diverge} & x = 1 \\ \text{converge} & x = -1 \end{cases}$$

ES $\sum_{k} \frac{1}{k^2 \log(k)} = \sum a_k$ $\qquad a_k \; \frac{1}{k^2}$ confronto asintotico unilaterale

NOTO

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k^2 \log k}}{1/k^2} = \lim \frac{1}{k^2 \log k} k^2 = 0$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$$ quindi $b_k > a_k$ definitivamente

$\lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = 0 \Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } a_k \text{ diverge} \Rightarrow b_k \text{ diverge} \\ \text{se } b_k \text{ converge} \Rightarrow a_k \text{ converge} \end{array} \right.$

$\sum b_k = \sum \frac{1}{\log x}$ converge

① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(\sin(1/3k))}{k+2}$ $\sim$ $\sum_{k=2} \frac{1}{[\log(\log(k))]^3}$

② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k+2}}{k!}$ $\qquad \sum_{k=2} \frac{1}{k \log(k)^k}$

$\frac{1}{3k} \sin(1/3k) = \frac{1}{3k} \Rightarrow$

$$\sim \sum \frac{2k}{k+2} \cdot \frac{1}{3k} = \sum \quad \text{di} \quad \frac{2k \cdot 1}{(k+2)3k} = \sum \frac{2}{(k+2)3} \rightarrow \text{diverge}$$

② $\frac{(k+1)^{k+3}}{(k+1)k!} \cdot \frac{k!}{k^{k+2}} = \left(\frac{(k+1)}{k}\right)^k \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot \frac{k+1}{k+1}$ DIVERGE

$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \to e$ $\qquad \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \to 1^2$ $\qquad \to 1$ $\qquad \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

③ $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(\log(k)))^3}$ condensazione

$$2^k \cdot \frac{1}{\log(\log(2^k))^3} \Rightarrow \sum 2^k \frac{1}{(\log(k\,\log(2)))^3}$$

è un numero, non ci dice nulla sul carattere

$$\sum 2^k \left(\frac{1}{\log^3 k}\right) \Rightarrow \sum 2^k \frac{1}{(k(\log^3 2))^3} =$$

numero

$$\sum \frac{4^k}{k^3} \Rightarrow \frac{4}{(k+1)^3} \cdot \frac{k^3}{1} = 4 \cdot 1 > 1 \Rightarrow \text{diverge}$$

④ $\displaystyle\sum \frac{1}{k \log^\alpha(k)} \overset{\text{condensazione}}{=} \sum 2^k \frac{1}{\cancel{2^k} \cdot k^\alpha} = \sum \frac{1}{k^\alpha}$ $\alpha > 1$ converge

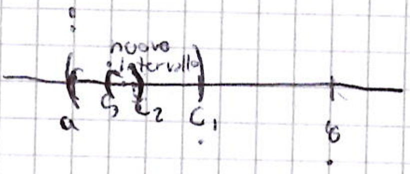
$\sim$

$$\cancel{2^k} \frac{1}{\cancel{2^k}(\log 2^k)^\alpha} = \sum \frac{1}{k^\alpha \cancel{\log^\alpha 2}}$$

# Teorema - Esistenza degli zeri

Sia $f$ continua $\quad f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e che $f(a) \cdot f(b) < 0$

allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.ch. $f(c) = 0$




DIMOSTRAZIONE:

Sia $c_1 = \dfrac{a+b}{2}$ se $f(c_1) = 0$ allora è dimostrata.

Se $f(c_1) \neq 0$ allora:

① $f(a) \cdot f(c_1) < 0$

② $f(c_1) \cdot f(b) < 0$

Nel 1° caso si considera il nuovo intervallo $[a_1, b_1]$, ove $a_1 = a$, $b_1 = c_1$

2° caso ove $a_1 = c_1$, $b_1 = b$

per costruzione $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0 \quad a_1 \geq a,\ b_1 \leq b$ inoltre $b_1 - a_1 = \dfrac{b-a}{2}$

Sia $c_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, se $f(c_2) = 0$ allora è dimostrato e si finisce

altrimenti:

① $f(a_1) \cdot f(c_2) < 0$

② $f(c_2) \cdot f(b_1) < 0$

Si considera nuovo intervallo $[a_2\, b_2]$ dove 1°: $a_2 = a_1$, $b_2 = c_2$; 2°: $b_2 = c_2$, $a_2 = b_1$

allora $f(a_2) \cdot f(b_2) \quad a_2 \geq a_1,\ b_2 \leq b_1$

$$\frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{4}$$

Si costruiscono successione $\{a_n\}\{b_n\}$

$\{a_n\}$ crescente $\quad \{b_n\}$ decrescente, tali che $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

per costruzione $a_n$ è limitata, sempre maggiorati in $b$ dall'alto; $b_n$ è limitata, sempre minorati da $a$ dal basso

Per teorema di monotonia convergono, $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$

$l_2 - l_1 = \lim(b_n - a_n)$, ma $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{2} = 0 \Rightarrow$

$l_2 = l_1$

$$a_n \nearrow l \swarrow b_n \quad n \to +\infty$$

ma $\forall n \quad f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0 \Rightarrow f(l)^2 \geq 0$

$\Rightarrow f(l) = 0$ quindi $l = 0$

Trovato lo zero della funzione.

Teoreme - WEIERSTRASS

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora $f$ ha massimo e minimo ASSOLUTO, cioè esistono almeno 2 punti $x_{max}, x_{min} \in [a,b] : f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$

($x_{MIN}$ e $x_{max}$ sono rispettivamente dei punti di minimo e massimo assoluti)

↳ Ce ne possono essere più di uno

$f(x_{MIN})$ e $f(x_{max})$ sono il MINIMO e MASSIMO ASSOLUTO di $f$)

↳ Solo UN VALORE $f(x)_{min}$

~~OSS~~: Sia $f:I \to \mathbb{R}$, $I = I_1 \cup I_2$

Sia $E_i = \{f(x) \mid x \in I_i\}$ $i=1,2 \Rightarrow \sup(E_i) = \sup(E_1 \cup E_2) =$

$= \max\{\sup\{f(x) \mid x \in I_1\}, \sup\{f(x) \mid x \in I_2\}\}$

Sia $\Lambda = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}^* \cup \{+\infty\}$. Dividiamo $[a,b]$ in 2 intervalli $[a,c_1] \cup [c_1,b]$

$\sup \Lambda = \max\{\sup[a,c_1], \sup[c_1,b]\}$

Si costruisce una successione di intervalli $\{a_n\}\{b_n\}$ tali che: $a_n$ monotone limitata, $b_n$ = " decrescente limitata

$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, $\Lambda = \sup\{f(x) \mid x \in [a_n, b_n]\}$

$a_n$ e $b_n$ sono convergenti per monotonia $\to x_0 \in [a,b]$ $n \to \infty$

2 CASI

1 $\Lambda \in \mathbb{R}$

2 $\Lambda = +\infty$

Si esamina il primo caso $\Lambda \in \mathbb{R}$

$\forall n \; \exists t_n \in [a_n, b_n] : \Lambda - 1/n < f(t_n) < \Lambda$ $f(t_n) < \Lambda$ per costruzione

$\Lambda - 1/n$ ~~non~~ è più piccolo del più piccolo dei maggioranti (i.e. dell'estremo s

$a_n, b_n \to x_0$

$a_n < t_n < b_n \Rightarrow t_n \to x_0$ ~~$f(x_0) - 1/m$~~

essendo $f(x)$ continua $\Lambda = \lim_{n\to\infty} f(t_n)$ -

L'estremo superiore è un punto di massimo ASSOLUTO

Caso 2 $\Lambda = \to +\infty$ (non possibile

$\forall n \; \exists t_n \in [a_n, b_n] : f(t_n) > n$ MA $t_n$ converge a $x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(x_0)$

$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \infty$ ↯ MA $f(x_0) \in \mathbb{R}$

CONTROESEMPI:

i: $f(x) = x$ su $(0,1)$ non ammette massimo o minimo ASSOLUTO

su $[0,1)$ non ammette massimo, ma MINIMO

su $(0,1]$ " " minimo, " MASSIMO

ii: $f(x) = x$, su $\mathbb{R}$ non ammette MASSIMI o MINIMI ASSOLUTI perché non limitati

iii: $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ \frac{1}{2}, & x \in \{0,1\} \end{cases}$ NON CONTINUA

TEOREMA - VALORI INTERMEDI: Sia $f$ continua $[a,b]$ $m, M$

comunque si scelga $\{\exists \lambda : m \leq \lambda \leq M \ \exists x_\lambda \in [a,b] : f(x_\lambda) = \lambda\}$ $m$ min assoluto $f$, $M$ max assoluto $f$

funzione $f$ è suriettiva e ricopre tutto l'intervallo $m, M$

DIM basta considerare il caso $m < \lambda < M$ (in particolare $f$ non costante)

si considera $g(x) = f(x) - \lambda \in [x_{min}, x_{max}]$

$g(x)$ continua $\subset [a,b]$

$g(x_{min}) = f(x_{min}) - \lambda \Rightarrow f(x_{min}) = m \Rightarrow m - \lambda < 0$

$g(x_{max}) = f(x_{max}) - \lambda \Rightarrow f(x_{max}) = M \Rightarrow M - \lambda > 0$

per esistenza degli zeri $\exists x_\lambda \in (x_{min}, x_{max}) : f(x_\lambda) = \lambda$

$E \subset \mathbb{R}$ si definisce $C(E) (= C^0(E)) = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua su } E\}$

Teorema di Monotonia: $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ si suppone sia monotona
Allora:

(I) $\forall c \in (a,b)$, $\exists \lim_{c^\pm} f(x) \in \mathbb{R}$

(II) $\exists$ limiti $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to a^-} f(x)$, possibilmente infiniti

DIM: Sia $f$ crescente, sia $\Lambda = \sup\{f(x) \mid x \in (a,c)\}$, e $c \in (a,b)$

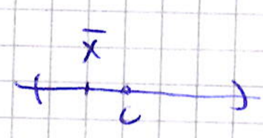
$f(c)$ è maggiorante, quindi $\Lambda \leq f(c)$ (quindi $\Lambda \in \mathbb{R}$)

Si mostra che $\lim_{x \to c^-} f(x) = \Lambda$: $(x_n) \subset (a,b)$ $x_n \to c$, $n \to +\infty$, allora $f(x_n) \to \Lambda$

Vedere $\forall \varepsilon$, $\Lambda - \varepsilon < f(x_n) < \Lambda + \varepsilon$ definitivamente, $\varepsilon > 0 \Rightarrow \Lambda - \varepsilon < \Lambda$,
$\Lambda - \varepsilon$ non è MAGGIORANTE ($\Lambda$ ~~maggiorante~~ sup per definizione)

QUINDI $\exists \bar{x} \in (a,c) : f(\bar{x}) > \Lambda - \varepsilon$

$x_n \in (\bar{x}, c)$ $f(x_n) \geq f(\bar{x}) > \Lambda - \varepsilon$ definitivamente

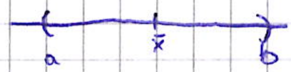


$\tilde{\Lambda} = \sup \{ f(x) \mid x \in (a,b) \} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\lim_{x \to b^-} f(x) = \tilde{\Lambda}$ (2 casi)

① $\tilde{\Lambda} \in \mathbb{R}$

② $\tilde{\Lambda} = +\infty$.



* Sia ha che $x_n \in (\bar{x}, b)$ DEFINITIVAMENTE

② $\forall k > 0, \exists \bar{x}_k : f(\bar{x}) > k$

$\forall x \in (\bar{x}, b), x > \bar{x} \quad f(\bar{x}) \leq f(x)$

$(x_n) \subset (a,b) \quad x_n \to b \quad n \to +\infty$

* quindi $f(x_n) > k$ definitivamente

quindi $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$

oss Una funzione MONOTONA di intervallo $(a,b)$ al suo interno ha solo DISCONTINUITÀ A SALTO

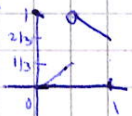
ESERCIZIO (* costruire): Dimostrare l'esistenza di $f(0,1) \to \mathbb{R}$ monotona discontinua su tutti i razionali $\mathbb{Q} \cap (0,1)$

Teorema $I$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$. ~~se stre~~

Se $f$ monotona STRETTAMENTE è invertibile, perchè $x_{n+1} \overset{(<)}{>} x_{(n)}$ iniettiva.

tuttavia, non tutte le funzioni invertibili sono strettamente monotone.

ES



è INIETTIVA MA NON MONOTONA

Teorema: $I$ intervallo, $f\, I \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f$ invertibile se e solo se è STRETTAMENTE MONOTONA. in tal caso $f^{-1}$ è strettamente monotona e CONTINUA

DIM "$\Leftarrow$" noto (anche per $f$ non continua)

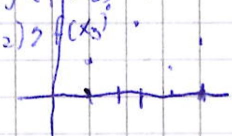
"$\Rightarrow$": $f$ continua ~~se~~ è strettamente monotona e invertibile

per assurdo. Sia $f$ non strettamente monotona.

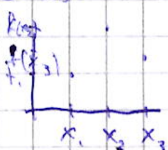
$\exists\, x_1 < x_2 < x_3$ t.c. $\begin{cases} f(x_1) < f(x_2),\ f(x_2) > f(x_3) \\ f(x_1) > f(x_2),\ f(x_2) < f(x_3) \end{cases}$

$f(x_1) < f(x_3)$

$f(x_2) > f(x_3)$



$x_1 < x_2 < x_3$ e $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$



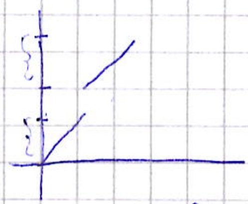
Si USA IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI allora $\exists\, \bar{x} \in (x_1, x_2) : f(\bar{x}) = f(x_3)$ ↯

QUINDI impossibile, è certamente monotona

DIM sia $f$ continua, strettamente monotona e quindi invertibile

Sia $g = f^{-1}$ strettamente monotona.

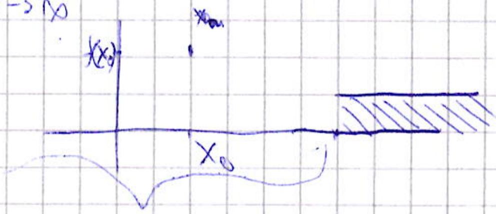
Vedere $g$ continua. PER Assurdo $g$ non continua, $g$ ha almeno 1 discontinuità A SALTO



L'immagine $g$ non è un intervallo, CONTRADDIZIONE perché l'immagine di $g$ è il DOMINIO

OSS: Teorema: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, si $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, e $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Allora $f$ ha un massimo assoluto





Si prende $\varepsilon < 0$ $f(x_0) > \varepsilon > 0$

Si considera l'intervallo chiuso e limitato

# DERIVAZIONE

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ , $x_0 \in (a,b)$

Def: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ se $\exists \in \mathbb{R}$ DERIVATA DI $f(x_0)$

Una funzione per essere derivata in un punto dev'essere in un intorno

TERMINI $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ , $D_{x_0} f$

allora l'equazione della retta tangente al grafico di $f$ per $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

non sempre la derivata esiste, infatti,

$f(x) = |x|$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{h \to 0^+} \frac{h-0}{h} = 1 \\ \lim_{h \to 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1 \end{array}\right\} \to \text{Non esiste } \lim_{h \to 0}$$

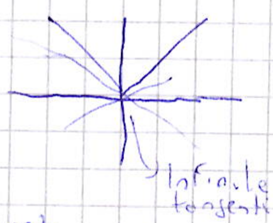
quindi non sono derivabili

OSS si suppone $f$ derivabile in tutti i punti di intervallo $(a,b)$, si può costruire una FUNZIONE DERIVATA $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$

possiamo allora definire $f''(x_0) = (f')'(x_0)$

$$C^1((a,b)) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} \text{ derivabile in } (a,b),\ f' \in C([a,b]) \}$$

in caso $f(x) = |x|$




$f$ continua in $x_0$

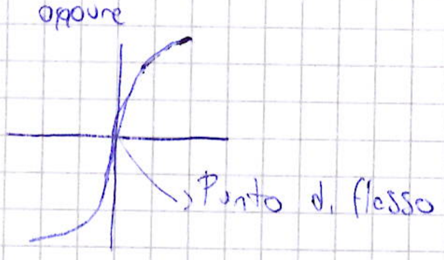
$\exists \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l_1 \in \mathbb{R}$ $\quad f'_+(x_0)$

$l_1 \neq l_2$

$\exists \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l_2 \in \mathbb{R}$ $\quad f'_-(x_0)$

in questa situazione si parla di PUNTO ANGOLOSO

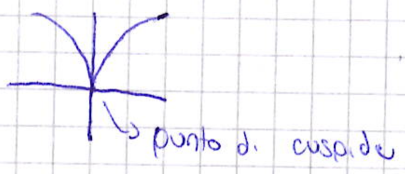
oppure




$f(x) = \sqrt[3]{x}$

dispari

$f'_+(x_0) = +\infty = f'_-(x_0)$




$f(x) = \sqrt[3]{|x|}$

$f'_+(x_0) = +\infty = -f'_-(x_0)$

OSS: Se una funzione è derivabile in un punto, allora è necessariamente continua nel punto $x_0$. VICEVERSA è falso (es $|x|$)

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right) h$$

$$\downarrow f'(x_0) \qquad \downarrow 0 = \text{converge a } 0 \text{. continua.}$$

tabella:

| $f$ | $f'$ | $f$ | $f'$ |
|---|---|---|---|
| $c$ | $0$ | $\log x$ | $1/x$ |
| $x$ | $1$ | $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ |
| $x^2$ | $2x$ | $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $(x\neq 0)$ $1/x$ | $-1/x^2$ | $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(x>0)$ $\sqrt{x}$ | $1/2\sqrt{x}$ | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $(x>0)$ $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | | |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | | |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2(x)}$ | | |
| $\cot x$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | | |
| $e^x$ | $e^x$ | | |

$$\lim \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \qquad \frac{\cancel{x_0^2} + 2hx_0 + h^2 - \cancel{x_0^2}}{}$$

$h$ ↳ infinitesimo

$$\alpha x \;\; (1+x)^\alpha - 1$$

$$\to \lim \frac{(x_0+h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} = \frac{x_0^\alpha\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^\alpha - 1\right]}{h} = \frac{x_0^\alpha \cdot \alpha \frac{h}{x_0}}{\cancel{h}} = x^{\alpha-1}$$

regole di DERIVAZIONE: ① operazioni algebriche, ② composta e ③ inversa.

① $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili allora

$(i)$ $(f\pm g)' = f' \pm g'$ $\quad$ $(ii)$ $(f\cdot g)' = f\cdot g' + f'g$ (regola di Leibniz),

$(iii)$ $(f/g)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ $\quad$ (caso particolare $f=1$ $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$) $(iii)$

Segue da $(ii)$ $(k\cdot f)' = kf'$

DIMOSTRAZIONE

ii
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x) + f(x_0+h)g(x) - \ldots}{h}$$

converge $f(x)$

$$\frac{f(x_0+h)[g(x+h) - g(x)]}{h} + \frac{[f(x+h) - f(x_0)]g(x)}{h}$$

$$f(x)g'(x) + f'(x)\,g(x)$$

$$\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right)\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h}\,\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)} = \frac{1}{g(x+h)\,g(x)}\,\underbrace{\frac{g(x)-g(x+h)}{h}}_{\substack{\text{rapporto incrementale}\\ \text{cambiato di segno}\\ -g'}}$$

$$\longrightarrow \frac{-g'(x)}{g^2(x_0)} \quad h \to 0$$

# Funzioni composte

teorema (regola della catena): $f, g$ definite in intorno di $x_0$
se $g$ derivabile in $x_0$ e $f$ derivabile in $g(x_0)$. Allora $(f\circ g)(x_0)$ derivabile e'

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

es

$$(f\circ g\circ h)'(x_0) = f'(g(h(x_0)))\cdot g'(h(x_0))\cdot h'(x_0)$$

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

si calcola il rapporto INCREMENTALE e si limita in $h \to 0$

$$\frac{f(g(x)+g(x+h)-g(x)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x)+g(x+h)-g(x))\,(g(x+h)-g(x))}{h\,(g(x+h)-g(x))} \cdot$$

$$\frac{f(g(x))\,(g(x+h)-g(x))}{h\,(g(x+h)-g(x))} =$$

$$= \frac{f(g(x)+(g(x+h)-g(x))) - f(g(x))}{(g(x+h)-g(x))} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

infinitesimo

$$\downarrow \quad g'(x) \quad h \to 0$$

$$f'g(x)\cdot g'(x)$$

es

$g(x) = \sin x$
$f(y) = y^3$

$$(f\circ g)'(x) = (\sin x)^3 \Rightarrow \frac{d f(g)}{d g} \quad (f\circ g)'(x) = f'g(x)\cdot g'(x)$$

$$= 3(\sin x)^2 \cdot \cos x$$

$(g\circ f)'$ $\sin(x^3)$ => derivata $\cos x^3 \cdot 3x^2$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)\,e^{f(x)}$$

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\log(f(x))}\right)' = \left(g(x)\log(f(x))\right)'\cdot f(x)^{g(x)} =$$

$$\left(g'(x)\log(f(x)) + \frac{f'(x)}{f(x)}\right) f(x)^{g(x)}$$

ES $(x^x)' = (\log x + 1)\, x^x$ per $x>0$

$|f(x)|$ problema con i moduli per $f(x)=0$

es $f(x) = |x|^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $\alpha$: $f \in C^1(\mathbb{R})$
2) $\alpha$: $f$ ha una cuspide
3) $\alpha$: $f$: $C^1(\text{dom } f)$

DERIVATA DI FUNZIONE INVERSA

Teorema $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e invertibile $g = f^{-1}$ (definita su immagine di $f$)
$f$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$, e $f'(x_0) \neq 0$

Allora $g$ è derivabile nel punto $f(x_0)$ e vale in $y_0 = f(x_0)$

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$(g \circ f)(x) = x$$

$$\underbrace{g'(f(x))}\cdot f'(x) = 1 \quad , \text{ quindi } \quad g'(f(x)) = 1/f'(x)$$

dimostrare derivabilità di $g$ nel punto $f(x_0)$

DIMOSTRAZ: Sia $f(x_0) = y_0$

$$f(x_0+h) = y_0 + k \quad (k \text{ dipende da } h) \quad (f \text{ iniettiva e invertibile})$$

$$g(f(x_0+h)) = g(y_0+k) = x_0+h \quad \text{per } h \to 0 \quad k(h) \to 0$$

rapporto incrementale di $g$ in $y_0$

$$\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k} = \frac{h}{k} = \frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \longrightarrow \lim_{\substack{k\to 0 \\ \Updownarrow \\ h \to 0}}$$

$$\xrightarrow[k \to 0]{} \frac{1}{f'(x_0)}$$

ES $f(x) = e^x + x$ iniettiva, strettamente crescente, INVERTIBILE

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = {+\infty \atop -\infty}$ INVERSA con $g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Problema: calcolare $g'(1)$: $1$ è $f(0)$

$$g'(f(0)) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^x+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = g'(1)$$

D

$\{a_n\}, \{b_n\}$ tale che $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ ma $e^{a_n} \not\sim e^{b_n}$ $\Big\}$ $n \to \infty$

$a_n = (n+1)$ $\quad b_n = n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq \lim \frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} \Rightarrow e^{a_n - b_n} = e$

SOTTOSUCCESSIONI (cenni)

$\{2, 7, -5, 10, -3, 21, 15, 4 \dots\}$ immaginiamo una successione

$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5 \; a_6 \; a_7 \; a_8$

le ~~success~~ sottosuccessioni cercano di costruire nuove successioni eliminando elementi della successione originale

ES $\{2, 7, 10, 15\}$

$b_1 = a_1, \; b_2 = a_2, \; b_3 = a_4, \; b_4 = a_7$

Altro esempio

$\{1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1 \dots\}$ successione

$-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1$ cancellati termini dispari

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$ cancellati termini pari

$1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1$ -1 e 1 a caso

$\Big\}$ SOTTOSUCCESSIONE

REGOLA GENERALE

$a_n$ successione

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$

$b_k = a_{n_k} \geq 1$

TEOREMA: con $\{a_n\}$ successione, $l \in \mathbb{R}^*$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n \to l$

se e solo se qualsiasi sottosuccessione $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \to l$

Se due sottosuccessioni ammettono 2 numeri distinti allora è irresolare

ES $(-1)^n$ $\quad$ $n$ pari $\to 1$, $n$ dispari $\to 1$ $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^n \to \nexists$

TEOREMA 2 (Bolzano-Weierstrass)

Se $\{a_n\}$ limitata allora essa ammette sottosuccessioni convergenti

ES $(-1)^n$ ha 2 sottosuccessioni convergenti (n pari, n dispari)

Altri esempi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n^2}+n^5}{\underbrace{n^n}_{\to n^n}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$n^5 \to$ potenze

non si può usare la gerarchie degli infiniti perché seppur $e^n$ è minore di $n^n$, non sappiamo per $e^{n^2}$

$n^5$ è trascurabile, quindi

$$\frac{e^{n^2}}{n^n} = \left(\underbrace{\frac{e^n}{n}}_{\to\infty}\right)^{n\to\infty} = \infty^{\infty} = \infty$$

ES

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\to 0}{n^{-6/7}} - \overset{\to 0}{e^{-n}} + \overset{\to 0}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}{\underbrace{\left(\frac{n}{3}\right)^{-2n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\to 0}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

ES DA FARE

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{6/7} - \frac{1}{e^n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{n}\right)^{2n} + \frac{1}{n^4}} =$$

quello rilevante è quello che tende a 0 più lentamente

$\left(\frac{1}{n}\right)^{6/7}$ è potenza, quindi minore di esponenziale

$\frac{1}{n^4}$ è potenza " " "

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{6/7}}\cdot n^4$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sin(n)-e^n}{\cos^2(n)+n^n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$n^n$ è tendente all'infinito più velocemente $\Rightarrow \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} = \frac{1-\cos(n)}{n^2} = \frac{\text{limitato}}{\text{infinito}} = 0$$

$l\cdot\frac{1}{\infty}$ ~~per~~ 0

$$\lim\left(1+\frac{1}{n^7}\right)^{n^9} \to \infty$$

perché $\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^7}\right)^{n^7}}_{\to e}\right]\cdot \underbrace{n^2}_{\to\infty} = e\cdot\infty = \infty$

MASSIMI E MINIMI LOCALI

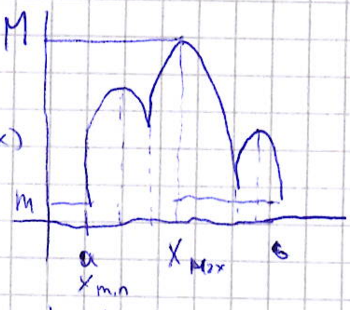
Def: Sia data una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$M$ è un MASSIMO LOCALE di $f$

$x_0$ un punto di massimo locale

se $\exists\, \delta>0$ : $f(x_0)$, $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta) \geq f(x)$
$$\underset{M}{\shortparallel}$$

(analogamente si definiscono minimi locali)




ci sono dei massimi LOCALMENTE STABILI

OSS: Massimo e minimo assoluto sono anche locali, ma NON VICEVERSA

Enunciato (Teorema di Fermat): $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile in $x_0\in(a,b)$

se $x_0$ è un punto di estremo locale, allora $f'(x_0)=0$

Dim: Sia $x_M$ punto di massimo locale

Per $z$ "vicino a $x$" si ha $f(z)\leq f(x)$. cioè

$z<x$ allora $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}\geq 0 \Rightarrow f'_-(x)\geq 0$

$$\shortparallel \qquad \Rightarrow f'(x)=0$$

$z>x$ allora $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq 0 \Rightarrow f'_+(x)\leq 0$

$f$ derivabile ad $x$

Tutti i punti di estremo locale sono zeri di $f'$

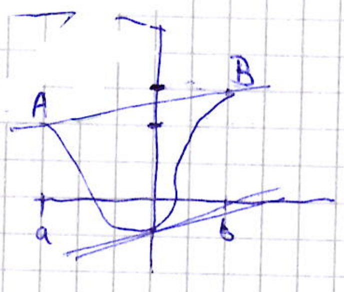
DEF: $x_0$ punto critico per $f$ se $f'(x_0)=0$, Fermat si può rienunciare

i punti di estremo locale sono punti critici. VICEVERSA è falso

Es $f(x)=x^3$ su $(-1,1)$ strettamente monotona, $f'(x)=3x^2$ si annulla nell'origine, MA SENZA ESSERE ESTREMO LOCALE

TEOREMA DI LAGRANGE: teorema del valore MEDIO: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, derivabile all'interno $(a,b)$, continua

Allora $\exists\, c\in(a,b)$: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$




esso è il coefficiente angolare del segmento di coord $\overline{(a,f(a))(b,f(b))}$

All'interno del segmento esiste ALMENO UN PUNTO IN CUI LA TANGENTE è parallela al segmento

DIM: Lagrange

Eq della retta per A e B: $y-(f(a)) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Poniamo $\omega(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$

$\omega(a) = f(a) - f(a) = 0$

$\omega(b) = f(b) - \left[\cancel{f(a)} + \frac{\cancel{f(b)-f(a)}}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)}\right] = 0$

$\omega$ continua su $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$

$\omega'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad x \in (a,b)$

$\exists$ punto $c$ tale che $\omega'(c)=0$, la tesi diventa

$\exists\, c$ in $(a,b)$ tale che $\underline{\omega'(c)=0}$

Per Weierstrass $\exists\, x_1, x_2$ (punt. di massimo e minimo) $\in [a,b]$: ~~$\omega(x_1) <$~~

$$\underbrace{\omega(x_1)}_{m} \le \omega(x) \le \underbrace{\omega(x_2)}_{M} \quad \forall x \in [a,b]$$

2 casi: ① $m = M \Rightarrow \omega$ costante $\forall x \in [a,b]$

$\omega'(c) = 0$ per costanti.

② $m < M$: Sappiamo che $\omega(a) = 0 = \omega(b)$ ^ quindi all'ex ci sta o min o max

$\exists\, i \in \{1,2\} : x_i \notin \{a,b\}$ quindi $x_i \in (a,b)$

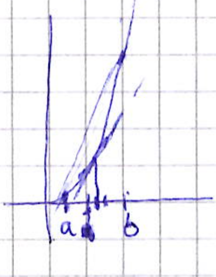
Essendo $x_i$ un massimo e minimo assoluto, segue che

$\omega'(x_i) = 0$ (Fermat)

OSS $f \in C([a,b])$ derivabile in $(a,b)$, $f(a) = f(b)$ allora $\exists c \in [a,b]$ t.c. $f'(c) = 0$

Casi particolari: $f = x^2$, da cui $f'(x) = 2x$

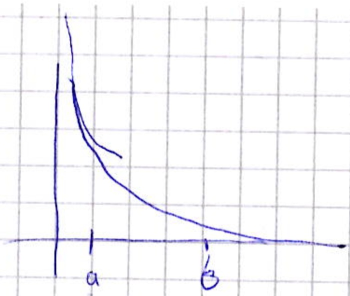
Dati $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\exists\, c \in (a,b)$: $\frac{b^2-a^2}{b-a} = 2c$




il punto di Lagrange è $\frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{\cancel{b-a}} = 2c$

$\frac{b-a}{2} = c$

2) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ $\quad f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$




$\exists c : \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b-a} = -\frac{1}{c^2}$

$\frac{\frac{a-b}{ab}}{b-a} = -\frac{1}{ab} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow c = \sqrt{ab}$ → MEDIA GEOMETRICA

OSS $0<a<b$ : $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \Rightarrow \cancel{4ab} \le a^2 \mp 2ab + b^2 = (a-b)^2$

In generale, dati $x_1, x_2 \dots x_n$, $x_i \ge 0 \ \forall i, \dots, n$

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} (x_i)\right)^{1/n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Diseguaglianza di Young: $x, y > 0$, $p, q > 0 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Allora $xy \le \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

(se $p = q = 2$, $\quad xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$

Test DI MONOTONIA $f(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile, Allora $f$ crescente $\Leftrightarrow f'(x) \ge 0$ (decrescente $\Leftrightarrow f'(x) \le 0$)

DIM = direzione "$\Rightarrow$" $\forall x, y \in (a,b)$ si ha $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \ge 0$

$f$ derivabile, con $\lim_{y \to x}$ è rapporto INCREMENTALE,

$y \to x \Rightarrow f'(x) \ge 0$ (per permanenza del segno

per implicazione $\Leftarrow$ si usa Lagrange $\forall x \in (a,b)$ sia $f'(x) \ge 0$

$x_1, x_2 \in (a,b)$ $\quad x_1 < x_2$

Vogliamo vedere $f(x_1) \le f(x_2)$. Applichiamo Lagrange a $f$ su $[x_1, x_2]$

$f(x_2) - f(x_1)$ → non negativo

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \ \cancel{c \in (x_1, x_2)} \ \ge 0 \qquad f'(c) \ge 0$$

$x_2 - x_1$ → positivo

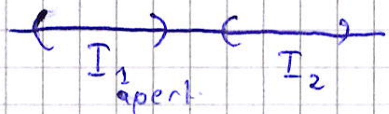
OSS: Non è valido necessariamente che $f$ strett $\Rightarrow f'(x) > 0$

è VERO CHE $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strettamente crescente

Sia $I$ un intervallo aperto $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in $I$

allora $f$ costante se $f' = 0$ su $I$

L'affermazione è falsa non appena $I$ non è un intervallo




$I_1 \cup I_2 = I$

non è intervallo perché $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

La derivata è nulla ma non costante su $I$. (es funzione definita a tratti)

ES

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{N.D. per } x \neq 0$$

(dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non intervallo)

$$f'(x) \overset{\cancel{quindi}}{=} ?$$

Nelle funzioni definite "a gradini"

RICERCA PUNTI MASSIMO e MINIMO $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile$(a,b)$

① Weierstrass. Esistono

② Fermat $f'(x) = 0$ nei punti di massimo e minimo

- Calcolo di funzione agli estremi $f(a), f(b)$ [Fermat non parla di max, min nei estremi]

- Calcolo derivata.

$$f'(x)$$

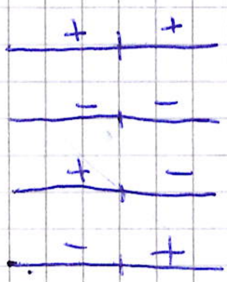
- trovare punti critici: risolvere $f'(x) = 0$

- Se non esistono punti critici allora non hanno punti di max, min locale. Allora i punti di massimo e minimo ASSOLUTO sono $a, b$, gli ESTREMI

- Se $x_0$ è punto stazionario ($f'(x_0) = 0$) è necessario studiare il segno della derivata in un intorno $x_0$

- trovati tutti i punti critici $x_0^i \ldots x^r$ e confrontino i valori

$$f(x_0^i) \quad i = 1, \ldots, r, \quad f(a), f(b)$$




crescita =

funzione cresce e poi decresce (massimo relativo)

(minimo relativo)

ES

$$f(x) = x e^{-x^2}, \quad x \in [0, 2]$$

$(fg)' = f'g + g'f$

$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$ Triangolo di Tartaglia.

$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$

ES $f(x) = x|\log(x)|$ $x>0$

è derivabile su tutta la funzione, tranne per $x=1$

quindi $f(x) = \begin{cases} x\log x & x \geq 1 \\ -x\log x & 0<x<1 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} \log x + 1 & x \geq 1 \\ -(\log x+1) & 0<x<1 \end{cases}$ nel punto 1 vi è un punto

$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = 1 \overset{?}{\Rightarrow} f'_+(1)$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -1 \overset{?}{\Rightarrow} f'_-(1)$

Teorema: si suppone $f: [a,b) \Rightarrow \mathbb{R}$, continua in $a$ e derivabile in $(a,b)$ tale che

$\exists \lim_{x \to a^+} f'(x) = m \in \mathbb{R}^*$ (estesa) (analogamente $\lim_{x \to b^-}$ $f'_-(b)$)

Allora $\exists f'_+(a) = m$

DIM sia $h>0$ applichiamo Lagrange a $f$ su $[a, a+h]$ $h<b$

$$\exists\ t_h \in (a, a+b) : \underbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}_{\text{rapporto incrementale}} = f'(t_h)$$

quando $h \to 0$, $t_h \to a^+$ e $f'(t_h) \to m$ (da ipotesi)

ma il limite $h \to 0$ del rapporto incrementale è la derivata di $a$

ES $x^2 \log|x|$ $x \in \mathbb{R} / \{0\}$

$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = 0$ quindi si può considerare

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ continua su tutta la retta reale

$\tilde{f}$ derivabile in $x=0$? funzione pari quindi $\lim_{x \to 0^+} = \lim_{x \to 0^-}$

Per $x \neq 0$ $f'(x)$ $2x\log|x| + x^2 \cdot 1/x$ $2x\log|x| + x$

e $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \Rightarrow f'_+(0) \overset{\text{per parità}}{=} f'_-(0) \Rightarrow \tilde{f}'(0) = 0$

$f'$ è una funzione di classe $C^1$ sulla retta

$f(x) = x^2 \sin(1/x) \quad , x \neq 0 \quad x \in \mathbb{R}/\{0\}$

$\exists \lim_{x \to 0} f(x)$ perchè $\sin(1/x)$ limitata $= 0$

Sia $\tilde{f}$ l'estensione per continuità di $f$

funzione $\tilde{f}$ derivabile all'origine?

$$\tilde{f} \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0 \quad \tilde{f}(x) = \tilde{f}'(x) \qquad 2x \sin(1/x) - \cancel{x^2} \cos 1/x \cdot \cancel{1/x^2}$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) \nexists$ NON esiste $\quad 2x \sin 1/x \sim 0$ , ma $\lim \cos(1/x) \nexists$

Applicando la definizione di derivata

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(0+h) - \tilde{f}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h^2 \sin 1/h)}{h} = 0$$

Esiste il limite del rapporto incrementale in $x=0$ di $\tilde{f}$, quindi e' la derivata

$$\tilde{f}'(0) = 0$$

$\tilde{f}$ derivabile su $\mathbb{R}$ , ma $\notin C^1(\mathbb{R})$

(dato che $\tilde{f}'$ non è continua in $x=0$)

$C^1$ funzioni che ammettono derivata continua

$a_n = \frac{\log n}{n}$ successione - monotona decrescente?

$a_n > a_{n+1} \Rightarrow \frac{\log n}{n} > \frac{\log(n+1)}{n+1}$

Le funzioni aiutano

$f(x) = \frac{\log x}{x}$ test di monotonia

$f'(x) = \frac{\cancel{x}1 - \log x}{x^2} < 0$ calcolo $1 - \log x < 0 \Rightarrow \log x > 1 \Rightarrow$ ~~log x ≥ 1~~

$x > e$

quindi $a_n = \frac{\log}{n}$ è definitivamente strettamente crescente $(n \geq 3)$

ES Trovare se esiste il più piccolo numero $C_n > 0$ tale che $(a+b)^n \leq C_n(a^n+b^n)$

$(a+b)^n \leq C_n(a^n+b^n)$ da 2 variabili a 1

Dividendo per $b^n$

$\left(\frac{a}{b}+1\right)^n \leq C_n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n+1\right)$ Poniamo $t = \frac{a}{b} > 0$

$(t+1)^n \leq C_n(t^n+1) > 0 \Rightarrow \frac{(t+1)^n}{t^n+1} \leq C_n$

$f(t) = \frac{(t+1)^n}{t^n+1}$ ; $t > 0$ trovare $\sup[f(t)]$

studiare $\sup(0,+\infty)$ $(f(t) \leq C_n \quad \forall t > 0)$

$f'(t) = \frac{n(t+1)^{n-1}(t^n+1) - (t+1)^n(nt^{n-1})}{(t^n+1)^2} = \frac{n(t+1)^{n-1}(1-t^{n-1})}{t^n+1} \geq 0$

$f'(t) \geq 0$ se $t \leq 1$ (da 1 in poi è strettamente decrescente)

QUINDI $\sup(f(t)) = 1$ $C_n = f(1)$

$C_n = 2^{n-1}$ QUINDI

$(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n+b^n)$

# Teorema di "de l'Hopital"

Per risolvere forme indeterminate $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Teorema $f, g\ [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabili in $(a,b)$ t.ch $g, g' \neq 0$ in $(a,b)$

i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ (oppure $+\infty$ e $-\infty$)

ii) $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \quad l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

- $a = +\infty$
  $x \to b^-$
  $b = \pm\infty$

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

DIM: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$

Sia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $X_n \to a$

$f(x_n), g(x_n) \to 0$ per continuità possiamo supporre che $f(a) = g(a) = 0$

Se si considera l'intervallo $[a, X_n]$ per lagrange $h(x) = f(x_n)\, g(x) - g(x_n) f(x)$

$h(x)$ è continua in $[a, X_n]$ e derivabile in $(a, X_n)$

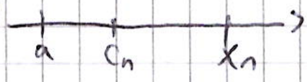
Si applica lagrange $\exists\, C_n \in [a, X_n]$ tale che $h(c_n) = \frac{h(x_n) - h(a)}{X_n - a}$

$h(X_n) = 0 \qquad h(a) = 0$

$h'(c_n) = f(x_n)\, g'(c_n) - g(x_n)\, f'(c_n) = 0$

$f(x_n)\, g'(c_n) = g(x_n)\, f'(c_n) \Rightarrow \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \qquad X_n \to a^+$

Quindi $\lim_{n \to +\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (per ipotesi)




$C_n \to a^+$

per uguaglianza $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

ES $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \quad \alpha, b \to 0 \quad \frac{\infty}{\infty}$ Si applica di De L'hopital

$\alpha = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{\beta x}}$ applico de L'hospital $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\beta e^{\beta x}} = 0 \Rightarrow *$

$* = 0$

$\alpha$ generico $>0$

$$\lim \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{\beta}{\alpha}x}}\right)^\alpha = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\beta/\alpha\, x}}\right)^\alpha = 0$$

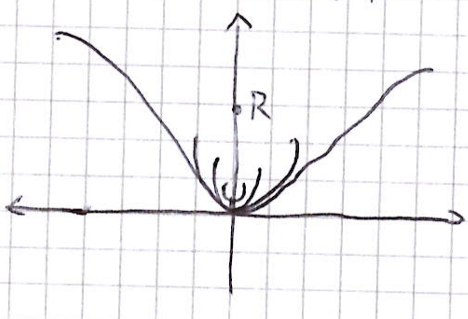
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log_\alpha x)^\alpha}{x^\beta} \qquad t=(\log_\alpha x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{sen}(x)}{x^3} =$$

$$\exists \lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$\frac{x\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}$$

DERIVATA SECONDA: flesso, concavità, convessità




Si considerano le semicirconferenze con centro sull'asse y tangente al grafico di f sull'equazione

$$y = R-\sqrt{R^2-x^2}$$

$\forall R$ si ha $y'(0) = y(0) = 0$

si seleziona quella che non solo ha tangente in $x=0$ ma anche la stessa velocità di variazione di pendenza in $x_0$

Si sceglie R in modo che

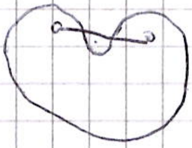
$$y''(0) = f''(0)$$

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}, \quad y'' = \frac{R^2}{(R^2-x^2)^{3/2}}$$

$y''(0) = \frac{1}{R}$, quindi si fa sì che

$$f''(0) = 1/R$$

Concavità e convessità



concavo

convesso

partendo dalla def di concavità e convessità di funzione...

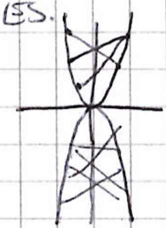
DEF: $f: I \to \mathbb{R}$ $I$ intervallo è convessa se il suo epigrafico (coppie di punti $(x,y) \in \mathbb{R}$) è un insieme convesso

$$epi\, f \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \ , y \geq f(x)\}$$

$f$ è concava se $-f$ è convessa
(concava)

Def: $f: I \to \mathbb{R}$ è convessa se $x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $x_1$ e $f(x_1)$, e $x_2$ e $f(x_2)$ ~~si trova~~ non ha punti sotto (sopra) il grafico di $f$.

ES.



ogni segmento è sopra il grafico

$x_1\ x_2$

$$(1-t)\cancel{x}_1 + t(x_2) \qquad t \in [0,1]$$

$$f[(1-t)x_1 + x_2] \leq (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$$

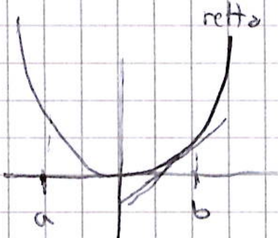
Teorema

Una funzione convessa (o concava) in $I$ è continua, salvo per gli estremi. Inoltre possiede derivata destra e sinistra nei punti interni ad $I$

Teorema: ① $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile $f$ convessa (o concava) se e solo se $f'(x)$ è crescente (o decrescente) in $(a,b)$

② $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte allora $f$ è convessa (o concava) se e solo se $f''(x) \geq 0$ (o $f''(x) \leq 0$)

Teorema: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $(a,b)$ $f$ convessa (concava) se e solo se il grafico $\forall x_0 \in (a,b)$ il grafico si mantiene $(a,b)$ ~~sopra~~ sopra (sotto) il grafico della retta tangente in $(x_0, f(x_0))$ tranne che in quel punto



la tangente sta sotto
la funzione: convessa

Il flesso è il punto di cambio tra concavità e convessità

opoune $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \to \cancel{\infty}$

$x_0$ è un punto di flesso se $\exists$ un intorno di $x_0$ $(x_0, x_0+t)$ $t>0$ in cui $f$ convessa e un intorno di $(x_0 - s, x_0)$ in cui $f$ è concava

Teorema: se esiste un punto di flesso la sua derivata 2° è 0
$f''(x)=0$

viceversa non è necessariamente vero

$f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3 \quad f''(x)=12x^2$

$f''(x)=0$ si annulla per $x=0$. Ma per $f'(x)=0$, quindi essendo la derivata prima positiva per $x>0$ e negativa per $x<0$, quindi $x=0$ è un minimo

Teorema: $f:(a,b)$ derivabile $x_0 \in (a,b)$ punto di flesso, allora il grafico di $f$ attraversa la retta tangente ad $f$ nel punto $(x_0, f(x_0))$

$f(x)=x^3$

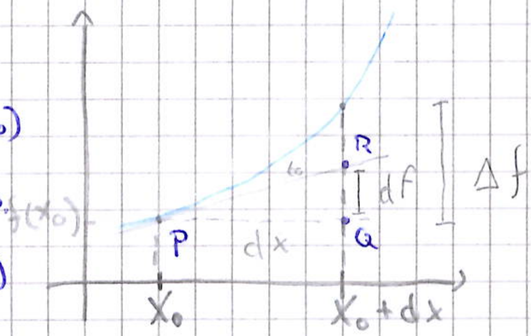
$f'(x)=3x^2$

$f''(x)=6x$

$f''(x)=0$ per $x=0$ è di flesso $(x_0, f(x_0))$

# LINEARIZZAZIONE (= approssimazione tramite funzioni lineari)

**DEF:** Con linearizzazione si intende l'approssimazione di una quantità non lineare con una funzione lineare. Naturalmente è necessario dare informazioni anche sull'errore commesso - o piccolo -




es. $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$

Si aggiunge a $x_0$ un incremento $dx$ piccolo.

L'incremento $\Delta f$ quindi è $f(x_0+dx)-f(x_0)$
esso NON È LINEARMENTE PROPORZIONALE all'incremento $dx$.

Quindi si sostituisca al grafico $f$ la retta tangente a P.
L'incremento è pari alla lunghezza del segmento QR ovvero alla tangente $\cdot$ $dx$. Essendo la tangente la derivata prima in $x_0$ si ha che il DIFFERENZIALE (linearmente proporzionale a $dx$) ha valore:

$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

La differenza tra $df$ e $\Delta f$ sarà l'errore dell'approssimazione, e si può trovare sfruttando la definizione di derivata

$$\lim_{dx \to 0} \frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} = f'(x_0)$$

Si può quindi dire che

$$\frac{f(x_0+dx)-f(x_0)}{dx} = f'(x_0) + \varepsilon(x_0)$$

dove $\varepsilon$ è un infinitesimo che tende a zero per $dx \to 0$. Si ottiene:

$$\underbrace{f(x_0+dx)-f(x_0)}_{\Delta f} = \underbrace{f'(x_0)\,dx}_{df} + dx\,\varepsilon(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta f - df = dx\,\varepsilon(x_0). \quad \text{dove} \quad \frac{\varepsilon(x_0)}{dx} \to 0 \quad \text{per} \quad dx \to 0$$

**DEF:** Siano $f$ e $g$ due funzioni in un insieme A e sia $x_0$ un punto di accumulazione in A, SE il limite per $x \to x_0$ del rapporto tende a zero, allora diremo che
$f(x)$ è un O-PICCOLO di $g(x)$ per $x \to x_0$

cioè

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \quad \text{per } x \to x_0 \Rightarrow f(x)\ o(g(x))$$

ES. $x^2 = o_0(x)$ per $x \to 0$ poiché $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0$

$o(1)$ $x \to 0$ $= 0$  $\lim_{x \to 0} \frac{o(1)}{1} = 0$

$x^3 = o_0(x^2) = o_0(x)$  $\frac{x^3}{x^2} \to 0,\ x \to 0$

in generale

$x^\beta = o_0(x^\alpha)$  $\forall\ 0 < \alpha < \beta$ o $\lim_{x \to 0} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = 0$ per $\forall \alpha < \beta$

oppure

$x^\beta = o_\infty(x^\alpha)$ per $0 < \beta < \alpha$ perché $\lim_{x \to \infty} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = 0$ per $\forall \beta < \alpha$

$o(x) - o(x) = o(x)$

Infinitesimo meno infinitesimo = infinitesimo

$\frac{g(x)}{o(g(x))} \to 0$

$o(x) + o(x^2) = \begin{cases} o(x^2) & x \to \infty \\ o(x) & x \to 0 \end{cases}$

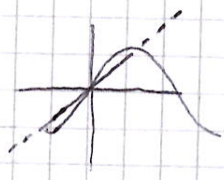
TEOR: per $x \to x_0$ $f(x) \sim g(x)$ se e solo se $f(x) = g(x) + o_{x_0}(g(x))$

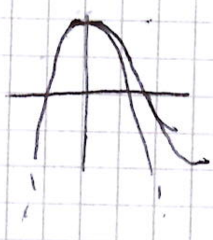
Dim "$\Rightarrow$" $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} - 1 = 0$

"$\Leftarrow$" $\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{g(x)} + \frac{o(g(x))}{g(x)} = 1 + 0$

es

$$\left.\begin{aligned} \sin(x) &= x + o(x) \\ e^x &= 1 + x + o(x) \\ \log(1+x) &= x + o(x) \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \tfrac{1}{2}x + o(x) \end{aligned}\right\} x \to 0$$





$\cos x = 1 + o(x)$ $\not\Rightarrow$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  NON è approssimazione lineare

È necessario, per avere approssimazioni più profonde è usare l'approssimazione POLINOMIALE (di grado n)

Prob

# APPROSSIMAZIONI POLINOMIALI

Trovare un polinomio che "APPROSSIMI" una data $f$

$\{P_n(x)$, $\deg P_n$ "=" $n$ (più precisione in seguito)

$\boxed{x_0 = 0}$ Si vuole che: $P_n(0) = f(0)$
$P_n'(0) = f'(0)$
$P_n''(0) = f''(0)$

$P_n(0)^{(n)} = f^{(n)}(0)$

Teorema/Definizione: (polinomi di Mac Laurin):

$f$ derivabile $n$ volte in $(x) = 0$ allora $\exists!$ (esiste ed è unico) $T_n(x)$ di grado minore o uguale di $n$ tale che $f(0) = T_n(0) \dots f_n^{(n)}(0) = T_n^{(n)}(0)$

INFATTI
$$T_n(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

(polinomio di ordine $n$ di $f$ (per $x=0$))

si può scrivere $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!}$

Osservazioni: (i) $\deg T_n \leq n$ ($= n$ se $f^{(n)}(0) \neq 0$)
(ii) Se $n < m$ allora $T_m = T_n + \sum_{k=n}^{m} f^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!}$

ES =

$f(x) = \cos(x) \Rightarrow T_2(x) = 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}(-1) x^2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} x^2$

$\cos(x) = T_2(x) + o(x^2)$

Teorema: Sia $x_0 = 0 \in (a,b)$, $f$ derivabile $n$ volte in $x_0 = 0$
Allora, per ogni $n$, $f(x) = T_n(x) + o(x^n)$, $x \to 0$

Dim ($n=2$): $f(x) \overset{?}{=} f(0) + f'(0)x + f''(0) \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

I.e. $f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2} = o(x^2) \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - T_2(x)}{x^2} = 0 \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Si risolve per teorema di De L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x}{2x} \overset{?}{=} 0 \quad \left[\frac{0}{0}\right.$$

($f''$ continua in $x=0$ ?)

$$\lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{2} \overset{?}{=} 0$$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = f''(x) + o(1) \quad x \to 0$$

$$f'(x) - f'(0) = f''(x)\,x + x\,o(1) = x f''(0) + o(x)$$

Quindi

$$f'(x) - f'(0) - f''(0)x = o(x)$$

QUINDI

$$\frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x}{2x} = o(x) \to 0$$

<u>OSS</u> Un argomento simile funziona per ogni $n$

$$\left(f(x) - T_n(x)\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0) \qquad x \to 0$$

<u>Teor</u>: $x_0 \in (a,b)$, $f$ derivabile $n$ volte in $x_0$ (generico)

allora $f(x) = T_{n,x_0}(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \qquad x \to x_0$

(Formula di Taylor) con resto di Peano

$$T_{n,x_0}(x) = \sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

<u>OSS</u>: $T_{n,x_0}$ con $x_0 = 0$ coincide con polinomio di Mac Laurin

es ① $f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

② $\sin(x) \qquad x_0 = 0$

$$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

③ $f(x) = \cos x$

$$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n$$

④ $\sinh(x)$

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

⑤ $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}}_{\binom{\alpha}{n}} x^n + o(x^n)$$

$\binom{\alpha}{n}$ coeff binomiale esteso su tutto $\mathbb{R}$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{} + o(x^{2n+1})$$

$$T_{2n+1}(x) + o(x^{2n+1}) = T_{2n+2}(x) + o(x^{2n+2})$$

Si può quindi aggiungere a $T_{2n+1}(x)$ un $o(x^{2n+2})$

$T_{n,x_0}(f;x)$ polinomio di Taylor di ordine $n$ per $f$ centrato in $x_0$

<u>OSS</u>: (iii) $T_{n,x_0}(\alpha f + \beta g; x) = \alpha T_{n,x_0}(f;x) + \beta T_{n,x_0}(g;x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(iv) $(T_{n,x_0}(f;x))' = T_{n-1,x_0}(f', x)$

es

$f(x) = \sin x$

$$T_{5,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$(T_{5,0}(\sin x, x))' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = T_{4,0}(\underbrace{\cos x}_{(\sin(x))'}, x)$$

Dim: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}(f;x)}{(x-x_0)^n} \overset{?}{=} 0$$

per ipotesi induttiva:

se $f$ = $n-1$ volte derivabile in $x_0$ l'enunciato vale

$$g(x) = T_{n-1,x_0}(g;x) + o((x-x_0)^{n-1}) \quad x \to x_0$$

$$g(x) - o((x-x_0)^{n-1})$$

Per De l'Hospital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - (T_{n,x_0}(f;x))'}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{?}{=} 0$$

ES. Formula di Taylor utile per l'applicazione sui limiti

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x e^x + x^2 \cos x}{x^3}$$

Si può approssimare la funzione con un $o(x^3)$ per eliminare l'errore con ordine = 3

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$$

$$x \cdot e^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \overbrace{x\, o(x^2)}^{o(x^3)} =$$

$$\cos x = 1 + o(x) \quad \text{quindi} \quad x^2 \cos x = x^2 + \overbrace{x^2 o(x)}^{o(x^3)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - (\cancel{x} + \cancel{x^2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)) + \cancel{x^2} + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \frac{-\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{2}\right) + \cancel{o(x^3)}}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$$

Taylor con RESTO DI PEANO $x_0 \in (a,b)$ $f$ deriv. n volte in $x_0$

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n) \qquad x \to x_0$$

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

ES $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad T_{3,0}(x)$

Prendiamo $x = 1/2$ (relativamente distante da 0)

$$\underbrace{\left|\sqrt{e} - T_{3,0}(1/2)\right|}_{79/48} \leq \text{Errore (da stimare)}$$

approssimazione di un punto con il suo sviluppo di Taylor

Teor: Resto di Lagrange $x_0 \in (a,b)$, $f$ $n+1$ volte derivabile in $(a,b)$
Allora $\exists\, c \in (x_0, x) \vee (x, x_0)$

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{Resto di Taylor [secondo Lagrange]}}$$

$(x-x_0)^{n+1}$ e $(n+1)!$ sono termini facilmente calcolabili

OSS: ① per $n=0$ esso è il teorema di Lagrange

$$f(x) = f(x_0) + (f'(c)(x-x_0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

② A priori $c$ dipende da $x_0, x$ e $n$

③ Se $|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad \forall x \in (a,b)$ allora $|f(x) - T_{n,x_0}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

per $n \to +\infty \quad \frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \to 0$

ES

$$f(x) = e^x, \; x_0 = 0, \; x = 1/2, \; \text{per } 0 < c < 1/2 \qquad 0 < e^c < \sqrt{3}$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{4!}(1/2)^4 \sim 0{,}0045$$

DIM : per semplicità $a = x_0$, $b = x$

$n=2$ :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2$$

$$\exists K : \quad f(b) - \left(f(a) + f'a\,(b-a)\right) = K \boxed{\frac{(b-a)^2}{2}} \neq 0$$

Si definisce

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - K(b-x)^2$$

$$g(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)\ K(b-a)^2 = 0 \quad \text{per def di } K$$

$$g(b) = f(b) - f(b) - f'(b)(0) - K(b-b)^2 = 0$$

Per Teorema di Lagrange

$$\exists c \in (a,b) : g'(c) = 0$$

$$g'(x) = -f'(x) = -\cancel{f'(x)} - f''(x)(b-x) + \cancel{f'(x)} + 2K(b-x)$$

$$g(c) = 0 \Rightarrow -f''(c)(b-c) + 2K(b-c) \Rightarrow \quad c \neq b \quad \text{perché} \quad c \in (a,b)$$

$$= f''(c) = 2K \Rightarrow K \ \frac{f''(c)}{2}$$

nel caso n generico

Il resto è lo stesso sia in Peano che in Lagrange, ma è la DESCRIZIONE di esso che cambia.

OSS: Taylor vs convessità:

$n=1$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2$$

Si suppone che $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ la funzione è CONVESSA

allora

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

convessità implica convessità per tangenti.

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \underbrace{E_{n,x_0}(x)}_{\text{Resto}}$$

Def $f$ infinitamente derivabile in $x_0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ "Serie di Taylor di $f$ in $x_0$"

1 Converge? Dove converge?

2 Se converge, la serie riproduce $f$?

Se $\lim_{n\to+\infty} E_n = 0$ allora $T_{n,x_0}(x) \to f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n = f(x)$$

~~Il limite delle successioni parziali converse~~ per $n\to\infty$ converge a $f(x)$

la somma delle successioni parziali tendono a $f(x)$, quindi per $n\to\infty$ la serie di Taylor converge a $f(x)$

ES

$f(x) = e^x$ Allora $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(in particolare $e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ; $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k!}$

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ $|x|<1$ $= \frac{1}{1-x}$ $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ $|x|<1$

$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ $\alpha = -1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

ES Sia $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ CONTINUA PER COSTRUZIONE

Risulta che $f$ è infinitamente derivabile in $x=0$ e tutte le derivate sono nulle. La serie di Taylor CONVERGE a 0

La serie di Taylor converge alla funzione $g(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$
MA $f(x) \neq g(x)$, $\forall x \neq 0$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$z \in \mathbb{C}$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ nel campo complesso è assolutamente convergente, perché $= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z^k|}{k!} = e^{|z|}$

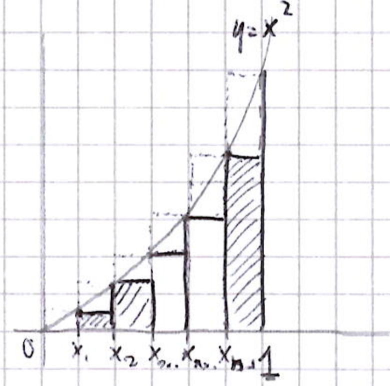
Si calcoli $e^{iy} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = 1 + iy - \frac{y^2}{2} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!}$

$$= \underbrace{1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots}_{\cos(y)} + i \underbrace{\left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} \right)}_{\sin(y)}$$

$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ es

$$\left.\begin{aligned} e^{-iy} &= \cos y - i \sin y \\ e^{iy} &= \cos y + i \sin y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cosh(y) \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{iy}}{2i} = \frac{1}{i} \sinh(y) \end{aligned}$$

# INTEGRALI DEFINITI




$$\text{Area} \geq \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$0 = x_0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 \frac{2}{n} < x_{n-1} = \frac{n-1}{n} < x_n = 1$$

L'area è MAGGIORATA dai rettangoli CIRCOSCRITTI della funzione

$$A \leq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$n$ e non $n-1$ perchè si aggiunge un rettangolo creatosi da $x_n$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \geq A \geq \frac{1}{n^3}\,\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = A = 1/3$$

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Dividiamo $[a,b]$ in $n$ intervalli uguali, ciascuno di lunghezza $\frac{(b-a)}{n}$

$$x_0 = a < x_1 = a + \frac{b-a}{n} < x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n} < \dots < x_{n-1} = a + \frac{(n-1)(b-a)}{2} <$$

$$< x_n = b$$

All'interno di ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1 \dots n$, si sceglie un punto arbitrario $\xi_i$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{b-a}{n}} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$ (somma di Cauchy-Riemann)

**DEF**: la funzione $f$ è detta integrabile su $[a,b]$ se $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$ = finito e indipendente dalla scelta delle $\xi_i$.

il limite finito $S_n$ $n\to\infty$ è denotato con la scrittura:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ = integrale definito di $f$ su $[a,b]$

$a$ → estremo inferiore dell'integrale

**Tcor** Sia $f \in C([a,b])$ allora $f$ è integrabile

ha senso parlare $\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

(anche le funzioni monotone limitate sono integrabili)

Oss: non tutte le funzioni sono integrabili:

es.

su c $[0,1]$ si consideri $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

non è integrabile poiché $S_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$ con $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ arbitrario

$\mathbb{Q}$ perché $x_i$ ha diversi valori a seconda del suo campo di appartenenza.

L'integrale ha un significato GEOMETRICO

$\int_a^b f(x)\,dx$ ha significato di AREA CON SEGNO,


in quanto le aree al di sopra dell'asse X vengono sottratte a quelle al di sotto

$A_{TOT} = A_1 - A_2 + A_3$

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

Siano $f, g$ integrabili in $[a,b]$

1 Linearità dell'integrale: $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$

$$\int_a^b c\,dx = c \int_a^b 1\,dx = c(b-a) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

2. Additività rispetto al dominio di integrazione $a<c<b$ $= \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

se ~~a<b<c~~ ~~la formula vale~~ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

3 Monotonia dell'integrale

se $f \geq 0$ in $[a,b]$ allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

in generale

$f \geq g$ in $[a,b]$ allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

TEOR DELLA MEDIA : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Allora $\exists\, c \in [a,b]$ tale che

$$f(c) = \left(\frac{1}{b-a}\right) \cdot \int_a^b f(x)\,dx = \left(\text{valor medio di } f \cdot [a,b]\right)$$

DIM: Essendo $f$ continua per Weierstrass esistono $m$ e $M$ (min, e max di $f$) su $[a,b]$.

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$$

per monotonia dell'integrale

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{m\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}} \leq \boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx} \leq \frac{M\cancel{(b-a)}}{\cancel{b-a}}$$

$$\Downarrow$$

Teorema del valor intermedio

$$\exists\, f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

DEF: Si dice che una funzione $G$ derivabile è UNA PRIMITIVA di $f$ su $[a,b]$ se $G'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

per esempio
$f(x) = x^2$ allora $G(x) = \frac{x^3}{3}$ è una primitiva di $f$ su qualunque intervallo

$f(x) = 2x$ allora $G(x) = x^2$ ...

OSS: (i) la primitiva, se $G$ è primitiva di $f$, anche $G(x) + c$ $c \in \mathbb{R}$ sono primitive di ~~f~~ $f$

(ii) Se $G_1$ e $G_2$ sono 2 primitive di $f$ allora $G_1' = F = G_2'$ da cui $(G_1 - G_2)' = 0$

Le funzioni a derivate nulle sono costanti se parallele all'asse $x$
La differenza di 2 primitive della stessa funzione su un'intervallo è una costante.

La collezione di tutte le primitive di $f$ in un intervallo è uguale all'insieme di tutte le funzioni di forma

$$\{G + c \mid G \text{ primitiva fissata}, c \in \mathbb{R}\}$$

Domande

1 Quali funzioni ammettono primitive? Per esempio $f$ discontinuità a salto non ha primitiva)

2. Tutte le funzioni continue ammettono primitive (non sempre però è possibile produrre esplicitamente la primitiva)

I Teorema fondamentale del calcolo integrale: Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua e $G$ la sua primitiva
Allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a) = \left[G(x)\right]_a^b = G(x)\Big|_a^b$$

es
$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-0 = 1/3$$

Dim. Dividiamo $[a,b]$ in $n$ intervalli uguali con estremi $x_0=a,\ x_1=a+\frac{b-a}{n}, \dots, x_n=b$
Allora
$$G(b)-G(a) = \underline{G(x_n)}\underbrace{-G(x_{n-1})+G(x_{n-1})}_{\text{aggiunto e sottratto}}\underbrace{-G(x_{n-2})+G(x_{n-2})}_{\text{i valori}}+\dots-G(x_1)+\underbrace{G(x_1)-G(x_0)}$$

Per ipotesi, $G$ è continua e derivabile, quindi applico Lagrange a $G$ su ogni $[x_{i-1},x_i]$.

$$\xi_i \in (x_{i-1},x_i)$$
$$= G(x_i)-G(x_{i-1}) = G'(\xi_i)\cdot(x_i-x_{i-1})$$
$$f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\dots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$

è la somma di Cauchy-Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$

e il limite per $n\to\infty$ è uguale all'integrale $= \int_a^b f(x)\,dx$

INTEGRALE INDEFINITO

Def: $\int f(x)\,dx$ come l'insieme di tutte le primitive di $f$

METODI DI RISOLUZIONE DI INTEGRALI

0. integrazione per SCOMPOSIZIONE

$$\int \lambda f + \mu g \, dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1. Integrazione per SOSTITUZIONE
2. Integrazione per PARTI.

SOSTITUZIONE: Sia $f(x)$ e sia $G(x)$ una primitiva.

Si ponga $x = \varphi(t)$ (cambiamento di variabile)

si ha $G(\varphi(t))' = \underbrace{G'}_{f}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \Rightarrow f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

$$\Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = G(\varphi(t)) = \int f(x) dx \text{ con } (x = \varphi(t))$$

Nel cas dell' integrale definito

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dx \qquad \text{con } \alpha = \varphi(a), \ \beta \ \varphi(b)$$

PARTI: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \Rightarrow$

$= f(x) g'(x) = (f \cdot g)' - f'(x) g(x) \Rightarrow \int f g' \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)$

Nel caso definito

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)$$

ES: $\int h(x) dx$

OSS: con $f$ pari (su $\mathbb{R}$) $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

OSS: con $f$ dispari: $\int_{-a}^{a} f(x) dx = \int_0^a f(x) - \int_0^a f(x) = 0$

ES: $\int_{-1}^{1} e^{-|x|} dx = 2 \int_0^1 e^{-x} dx = 2 - e^{-x} \Big|_0^1 = 2\left(-\frac{1}{e} + 1\right)$

ES $\int x \sin x \, dx = -x\cos x - \int \cancel{-}\cos x \, dx = -x\cos x + \sin x + C$

ES $\int x^n f(x) dx$ se $f(x) = \sin, \cos x, e^x, \sinh x, \cosh x \Rightarrow$ $u(x) = x^n$, $v'(x) = f(x)$ $\Rightarrow$

$= x^n \int f(x) dx - n \int x^{n-1} \left(\int f(x) dx\right) dx =$

$= \cancel{x^n \int f(x) dx - n \int\left[x^{n-1} \int\right.}$

$\int P(x) f(x)\, dx$ , con $f(x)$: $\sin(x), \cos(x), e^x, \sinh(x)$ e $\cosh(x)$ P polinomio stessa cosa.

ES $\int e^x \sin x\, dx = \begin{matrix} v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x \\ u(x) = \sin(x) \end{matrix} = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = \begin{matrix} v'(x) = e^x = v(x) \\ u(x) = \cos x \end{matrix}$

$= e^x \sin x - \left( e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx \right) =$

$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \Rightarrow \int e^x \sin x\, dx = \underline{\frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}} + c$

OSS $\int (\cosh x)^2\, dx = \begin{matrix} u(x) = \cosh(x) \\ v'(x) = \cosh(x) \end{matrix} = \cancel{\cosh(x)}\ \sinh x = v$

$\Rightarrow \cosh(x) \sinh(x) - \int \underbrace{(\sinh(x))^2}_{(\cosh^2) - 1} dx \Rightarrow \begin{matrix} u(x) \sinh x \\ v'(x) = \sinh(x) \\ v(x) = \cosh(x) \end{matrix}$

$\Rightarrow \cosh(x)\sinh(x) - \left( \sinh(x)\cosh(x) - \int (\cosh x)^2\, dx \right) =$ INUTILE

$\Rightarrow \cosh x \sinh x - \int ((\cosh(x))^2 - 1)\, dx \Rightarrow \frac{1}{2}(\cosh(x)\sinh(x) + x) + c$

ES $\int (e^x \sin x)\, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - \sin x) + c$

$\int f(x) g(x)\, dx$ ove $f(x) \begin{cases} e^x \\ \cosh \\ \sinh \end{cases}$ , $g(x) \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases}$

ES $\int \log x\, dx = \begin{matrix} u(x) = \log x \\ dv = 1 \Rightarrow v = x \end{matrix} = x \log x - \int \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}}\, dx = x \log x + \cancel{x} + c$

ES $(\exists t)$ $\int x^m (\log x)^n\, dx = \begin{matrix} u(x) = (\log x)^n \\ v'(x) = x^m \Rightarrow v(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} \end{matrix} \Rightarrow \frac{x^{m+1}}{m+1} (\log x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m \cdot (\log x)^{n-1}$

ES $\int \arctan(x)\, dx = \begin{matrix} u(x) = \arctan(x) \\ v'(x) = 1 \Rightarrow v = x \end{matrix} = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx =$

$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$

ES $\int_0^1 \frac{1}{\cosh x}\, dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$ $\qquad \varphi(e^x) = t \Rightarrow e^x = t$

$\Rightarrow x = \log t$, $dx = \frac{1}{t}\, dt$

$= 2 \int_1^e \frac{1}{t + 1/t} \cdot \frac{t}{t}\, dt = 2 \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = 2 \arctan t + c$

$= 2 \arctan(e^x) = 2\left(\arctan(e) - \frac{\pi}{4}\right) = f(\varphi(t))$

ES $\int \tan(x)\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx \Rightarrow$ $-\sin x\, dx = dt$ $= -\int \frac{1}{t}\, dt = -\log|t| + c \Rightarrow -\log|\cos x| + c$

$$\int \sin^2 x \, dx \overset{(1)}{=} \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx =$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \begin{cases} 2\cos^2 x - 1 & (2) \\ 1 - 2\sin^2 x & (1) \end{cases}$$

$$= x - \tfrac{1}{2}\sin(2x) + c \Rightarrow \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$$

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

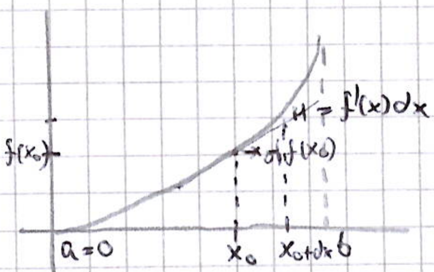
$$\int \cos^2 x \, dx \overset{(2)}{=} \tfrac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$$

## LUNGHEZZA di un' ARCO di CURVA REGOLARE

$f \in C^1([a,b])$

$$\text{Lunghezza}\Big|_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}$$




$\sqrt{(dx)^2 + f'(x)^2} = \sqrt{f'(x)^2} = dx$

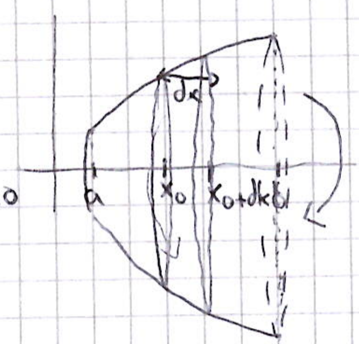
ES: per $f(x) = x^{3/2}$, $a = 0$ $b > 0$ =

$$= \int_0^b \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x} \, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \left(1 + \tfrac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^b = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \tfrac{9}{4}b\right)^{3/2} - 1\right]$$

## VOLUMI DI SOLIDI DI ROTAZIONE (rispetto all' asse x)

$$V_a^b = \int_a^b dV(x) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$



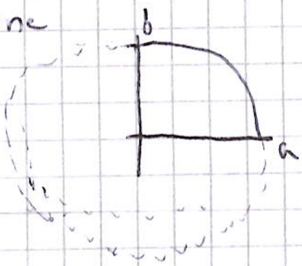

$f(x)^2$ = ~~area~~ raggio
Area = $\pi \cdot$ raggio
Altezza = $dx$

ES Volume di ellissoide di rotazione

$$V = 2\pi \int_0^a b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= 2\pi b^2 \int \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$2\pi b^2 \left(\tfrac{2}{3}a\right) = \tfrac{4}{3}\pi a b^2$$




$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot b$$

AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE

$$A = \int_a^b dS(x) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx =$$

## Integrali GENERALIZZATI ("impropri")

1 Integrale di funzioni "continue a tratti"
2 Integrale di funzioni illimitate
3 Integrale di funzioni su domini illimitati

INTEGRALE DI FUNZIONI CONTINUE A TRATTI $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti, se $\exists\, r_1 < r_2 < \dots < r_k$ : t.c. $f$ abbia discontinuità a salto in $r_i$ con $i=1,\dots,k$ e sia altrimenti continua

su tutti gli intervalli: $(a,r_1)\,(r_1,r_2)\dots(r_k,b)$ $f$ è continua e ammette limiti finiti agli estremi

p.e. $f|_{(r_3,r_4)}$ può essere estesa per continuità ad una funzione automaticamente continua su un intervallo chiuso

quindi $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{r_1} \tilde{f}_1(x)\,dx + \int_{r_1}^{r_2} \tilde{f}_2(x)\,dx + \int_{r_k}^{b} \tilde{f}_{k+1}(x)\,dx$

INTEGRALE DI FUNZIONI ILLIMITATE

$f:[a,b) \to \mathbb{R}$, continua t.c. $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$

$\int_a^b f(x)dx$ sia $\varepsilon$ piccolo $>0$ si trova il punto in cui $f[a,b-\varepsilon]$, quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx .$$

Se il limite esiste finito diremo che $f$ è integrabile su $[a,b]$ e il suo integrale è dato dal limite

es $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ $\qquad \alpha>0$

$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{(b-x)^\alpha}$

$\alpha = 1$ $\int_a^b \frac{1}{b-x} = -\log|b-x| + c \Rightarrow \lim \ -\log|b-x|\Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\log(\varepsilon)+\log(b-a) =$
$= +\infty$ = NON INTEGRABILE

$\alpha \neq 1 = \lim \frac{1}{-\alpha+1}(b-x)^{-\alpha+1}\Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-\alpha}\left(\varepsilon^{-\alpha+1} - (b-a)^{-\alpha+1}\right)$

$\Rightarrow$ diverge se $-\alpha+1 < 1 \Rightarrow \alpha > 1$
converge per $\alpha < 1$ $\qquad = \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

CRITERI DI INVERTIBILITÀ AL FINITO: $f,g\ [a,b) \to$, $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$

① confronto: se $0 \le f(x) \le g(x)$ con $g(x)$ integrabile allora $f(x)$ integrabile
② confronto asintotico se $f(x) \ge 0$, $g(x) > 0$ $f(x) \sim g(x)$ $x\to b$ allora $f$ integrabile con $g$
③ integrità assoluta. se $|f(x)|$ integrabile allora $f(x)$ integrabile

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ , $\int_1^3 \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx$

# INTEGRALE DI FUNZIONI SU DOMINI ILLIMITATI

$f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

ES $\lim_{b \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1}$ $\qquad \alpha > 0$

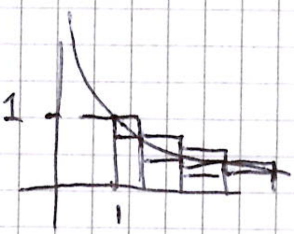
$\alpha = 1 \qquad \lim_{b \to \infty} \log x \Big|_1^b = \log b$ diverge $+\infty$

$\alpha \neq 1 \qquad \frac{1}{1-\alpha} x^{\alpha-1} \Big|_1^b = \lim_{b \to \infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(b^{1-\alpha} - 1\right)$ diverge per $\alpha < 1$

converge per $\alpha > 1$: $\frac{\alpha}{-\alpha+1}$

Applicazione: divergenza della serie armonica

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ divergente}$$




$$\underbrace{\int_1^n 1/x\,dx}_{\substack{\downarrow n \to +\infty \\ +\infty}} \leq \sum_{k=1}^{n-1} 1/k$$

INTEGRALE DI FUNZIONI SU DOMINI ILLIMITATI

$f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

## FUNZIONI INTEGRALI: $I$ intervallo, $x_0 \in I$ $f \in C(I)$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi \quad , \text{ con } x \in I \qquad [\text{funzione integrale}]$$

**Teorema fondamentale del calcolo, II**: $F$ derivabile su $I$, $F'(x) = f(x)$

OSS: (i) $F \in C^1(I)$ [In generale, con $f \in C^n(I)$, $F \in C^{n+1}(I)$]

(ii) In particolare, ogni $f \in C(I)$ ammette primitiva [ogni $f$ continua]

Dim: Calcolo del rapporto incrementale

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f(\xi)\, d\xi - \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi}{h} =$$

$$= \frac{\int_{x}^{x+h} f(\xi)\, d\xi}{h} = \text{valor medio di } f \text{ su } I\,[x, x+h]$$

Si usa il teorema della media $\exists\, c_h \in [x, x+h]$ t.c.

$$\frac{\int_{x}^{x+h} f(\xi)\, d\xi}{h} = f(c_h)$$

Si fa il limite del rapporto incrementale $h \to 0$.

$$f(c_h) \to f(x) \qquad h \to 0$$

OSS: Si supponga che $f$ non sia continua su $I$, ma $F$ esista [calcolando in modo improprio]

(per es. $f$ ha discontinuità a salto, oppure è illimitata.)

$F$ è comunque continua, e risulta derivabile in tutti i punti di continuità di $f$ con $F'(x) = f(x)$ ~~per og~~

ES: ① $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ allora $F(x) = |x|$ (derivabile in tutti i punti $\neq 0$)

② $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad \alpha = 1/3$ quindi integrabile $\quad F = 3/2\, x^{2/3}$

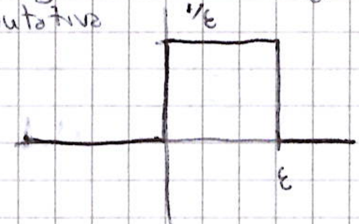
Convoluzione: $f, g$ assolutamente integrabili su $\mathbb{R}$ $\left(\text{esistono finiti } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx\right)$

Si forma una funzione $(f * g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(x-u)\, dx$ integrabile

$\hookrightarrow$ Prodotto di convoluzione

$f * g = g * f$ commutativa $\qquad (f * g) * h = f * (g * h)$ associativa

$I_\varepsilon(x) =$




$I_\varepsilon * f = \int_{-\infty}^{+\infty} I_\varepsilon(u)\, f(x-u)\, dy$, ma $I_\varepsilon = 0$ $(-\infty, 0) \vee (\varepsilon, +\infty)$, quindi

$\int_0^\varepsilon I_\varepsilon(u)\, f(x-u)\, dy = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(x-u)\, dy$ poniamo $x - y = t$ [x è parametro] $-dy = dt$

$= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\cancel{x}}^{\cancel{x}-\varepsilon} f(t)\, dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x} f(t)\, dt$ questo è il VALOR MEDIO DI $f$ su $[x-\varepsilon, x]$

Se si fa $\lim_{\varepsilon \to 0} (I_\varepsilon * f) = f(x)$

$\delta(x) =$ "Delta di Dirac"

$\int_{-1}^{1} f(x)\, \delta(x)\, dx = f(0)$ infatti

$(\delta * f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)\, f(x-u)\, dy = f(x)$

# INTEGRALE DI FUNZIONI RAZIONALI $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ $P, Q$ polinomi

3 Passi:

1 DECOMPOSIZIONE

Sia $Q$ polinomio di grado $n$, $Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ $a_n \neq 0$

allora $\exists !$ decomposizione di $Q$ in fattori "irriducibili" su $\mathbb{R}$

$$a_n (x - b_1)^{n_1} \dots (x - b_l)^{n_l} (x^2 + c_1 x + d_1)^{m_1} \dots (c_k x + d_k + x^2)^{m_k}$$

essendo $b_1 \dots b_n$ radici reali di $Q$, di molteplicità rispettiva $n_1, \dots, n_l$

e fatt. quadratici $x^2 + c_i x + d_i$ $i_1 \dots k$ irriducibili t.c. $c_i^2 - 4d_i < 0$ $\forall i_1 \dots k$ di molteplicità rispettiva $m_{1 \dots k}$

ES
$Q(x)(x - 2)^2 (x^2 + 1)$ grado 4.

radici reali $b_1 = 2$ $n_1 = 2$ e discriminante $(x^2+1) \geq 0$

$k = 1$, $c_1 = 0$, $d_1 = 1$ $l = 1$ (radice reale di molte. 2) $m_1 = 1$

2. DIVISIONE:

Siano $P, Q$ polinomi, $\deg P \geq \deg Q$, allora $\exists$ polinomi $S, R$ t.c.

$$P(x) = Q(x) S(x) + R(x)$$

e $\deg R < \deg Q \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{P}{Q} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \Rightarrow \int \frac{P}{Q} = \underbrace{\int S}_{\text{facile!}} + \int \frac{R}{Q}$$

3. RAPPRESENTAZIONE: Siano $R, Q$ polinomi, con $\deg R < \deg Q$ allora

$$\frac{R}{Q} = \frac{A_{11}}{x - b_1} + \frac{A_{12}}{(x - b_1)^2} + \dots \frac{A_{1n_1}}{(x - b_1)^{n_1}} + \frac{A_{21}}{(x - b_2)} \dots + \frac{A_{l1}}{x - b_l} + \dots + \frac{A_{l n_l}}{(x - b_l)^{n_l}} +$$
$$+ \frac{C_{11} x + D_{11}}{x^2 + c_1 x + d_1} + \dots + \frac{C_{1m_1} x + D_{1m_1}}{(x^2 + c_1 x + d_1)^{m_1}} + \dots + \frac{C_{k1} x + D_{k1}}{(x^2 + c_k x + d_k)} + \dots$$
$$+ \frac{C_{mk} x + D_{mk}}{(x^2 + c_k x + d_k)^{mk}}$$

$$\int \frac{R}{Q} dx \to \frac{1}{(x - b)^n} \quad n = 1, 2, 3 \dots + \int \frac{Bx + E}{(x^2 + cx + d)^m} \quad m = 1, 2, 3 \dots n$$

$$\int \frac{1}{(x - b)^n} dx = \begin{cases} n = 1 \Rightarrow \log|x - b| \\ n > 1 \to \frac{1}{1 - n} \cdot (x - b)^{1-n} \end{cases}$$

$$\int \frac{Bx+E}{(x^2+cx+d)^m}\,dx \to \int \frac{\frac{B}{2}(2x+c-c)+E}{(x^2+cx+d)^m} = \frac{B}{2}\underbrace{\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^m}}_{f'/f} + E - c\frac{B}{2}\int \frac{1}{(x^2+cx+d)^m}\,dx$$

$$\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^m}\,dx \Rightarrow \begin{cases} \text{se } m=1 \to \log|x^2+cx+d| \\ \text{se } m>1 \Rightarrow \frac{1}{m}(x^2+cx+d)^{1-m} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+cx+d)^m} \qquad m=1,2,3\ldots \quad \text{per ipotesi irriducibili}$$

$$x^2+cx+d = \underbrace{x^2+cx+\frac{c^2}{4}}_{(x+c/2)^2} + \underbrace{\left(d-\frac{c^2}{4}\right)}_{>0}$$

si pone $\boxed{t = \frac{x+c/2}{\sqrt{d-c^2/4}}}$ (definizione) $\Rightarrow x = \sqrt{d-c^2/4}\,t - c/2 \quad \sim dx = \sqrt{d-c^2/4}\,dt$

$$\Rightarrow t^2(-c^4/4+d) - \left(d-\frac{c^2}{4}\right) = (t^2+1)(d-c^2/4) \Leftarrow \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(d-c^2/4)^m}\sqrt{d-c^2/4}\,\boxed{\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}} = J_m(t)$$

$$J_1(t) = \operatorname{arctg}(t) \qquad \frac{1}{(t^2+1)^m} = \frac{1+t^2-t^2}{(t^2+1)^m} = \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}} - \frac{t^2}{(t^2+1)^n}$$

$$J_m(t) = J_{m-1}(t) - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^m}\,dt$$

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)^m}\,dt = \begin{matrix} u = t \\ v' = \frac{t}{(t^2+1)^m} \Rightarrow v = \frac{1}{2}\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(t^2+1)^{m-1}} = \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(t^2+1)^{m-1}} - \frac{1}{2(1-m)}J_{m-1}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{J_{m-1}(t)} - \frac{1}{2(1-m)}\cdot\frac{1}{(t^2+1)^{m-1}} + \underline{\frac{1}{2(1-m)}J_{m-1}(t)} = \frac{t(t^2-1)^{1-m}}{2(m-1)} + \frac{2m-3}{2m-2}J_{n-1}$$

ricorsiva!

$$\text{Deg } P_n < \text{Deg } Q_n \qquad \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$m=2 \qquad Q_n \quad ax^2+bx+c$

ES

$$\int \frac{1}{x^2-x}\,dx = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} = \frac{Ax+Bx-B}{x(x-1)} \Rightarrow \begin{cases} -B=1 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{1}{x-1} + \int \frac{1}{x} = \log|x-1| + \log|x| + c$$

con 2 radici coincidenti

$$\int \frac{2x-1}{x^2+4x+4} = \frac{2x-1}{(x+2)^2} \qquad t = x+2 \qquad x = x-2$$

$$= \int \frac{2t-5}{t^2} = \int \frac{2t}{t^2} - \int \frac{5}{t^2} = \log|t^2| - 5/t + c$$

$m=2$ Denominatore NON HA RADICI $ax^2+bx+c$ $b\neq 0$ $\Delta<0$

ES

$$=\int \frac{x}{x^2+x+1} \qquad \Delta = 1-4 = -3 < 0$$

$(x^2+x+1)' = 2x+1 \Rightarrow$ modifico $x$ in modo che sia la derivata.

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}\right] = \frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right).$$

$$\frac{1}{x^2+x+1} = (x+a)^2+b \Rightarrow (x+\alpha)^2 = x^2+2\alpha x+\alpha^2 \Rightarrow$$

$$x^2+x+1 = x+2(1/2)x+1/4-1/4+1$$

$$(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2 = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\underbrace{(x+1/2)^2}_{x}+\underbrace{(\sqrt{3}/2)^2}_{a}} = \int \frac{1}{(x+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\alpha}\right)+c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{(x+1/2)2}{\sqrt{3}}\right)+c$$

$m>2$

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x+2}dx \qquad Q_n = x^2(x+2)+(x+2) = (x^2+1)(x+2)$$

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/5 \\ B = 9/5 \\ C = -3/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2} + \frac{1}{5}\int \frac{9x-3}{x^2+1} = 1/5\log|x+2| + \frac{1}{5}\left[\int \frac{9x}{x^2+1}dx - \frac{3}{5}\int \frac{1}{x^2+1}dx\right]$$

$$= 1/5\log|x+2| + \frac{9}{10}\log|x^2+1| - 3/5\arctan(x) + c$$

## FUNZIONI RAZIONALI di $e^x$

$e^x = t \qquad x = \log t \qquad dx = \frac{dt}{t}$

$$\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{1 + 1/t}{t + 1/t} \cdot \frac{1}{t}\,dt$$

$$\int \frac{t+1}{(t^2+1)t}\,dt \Rightarrow \frac{A}{t} + \frac{Bt + c}{t^2+1} = \quad \begin{matrix} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} + \frac{1-t}{t^2+1} \Rightarrow \int \frac{1}{t} + \int \frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1} = \log|t| + \arctan(t) - \tfrac{1}{2}\log|t^2+1| + c$$

## FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

$\int (\sin x)^n (\cos x)^m\,dx \qquad n, m \in \mathbb{N}$

- n o m è dispari

$\int f(\sin x)\cos x\,dx \rightsquigarrow \sin x = t \qquad \cos x\,dx = dt$

$\int f(\cos x)\sin x\,dx \rightsquigarrow \cos x = t \qquad -\sin x\,dx = dt$

$\int (\sin x)^3 dx$

$(\sin x)^3 = \sin x\,(\sin x)^2 = \sin x \cdot (1 - \cos^2 x) = f(\cos x) \Rightarrow$

$= \begin{matrix} \cos x = t \\ -\mathrm{sen}\,x\,dx = dt \end{matrix} \Rightarrow \int (1 - t^2)\,dt$

$\int (\sin x)^3 (\cos x)^2 . \qquad \sin x^3 \cdot \cos x^2 = \sin x\,\underbrace{(1 - \cos x^2)\cdot \cos x^2} \qquad f(\cos x) \Rightarrow \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{matrix}$

$\mathrm{sì.} - \int (1 - t^2)(t^2)\,dt = \int t^2 dt - t^4 dt$

- n e m sono pari

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, \frac{1}{4}(1 + \cos(2x))^2 = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)(1 + \cos(2x))^2 dx$$

$= 1 + \cos^2 2x + \cancel{2\cos 2x} + \cos 2x - \cos^3 2x - \cancel{2\cos 2x}$

$-\cos^3 2x + \underbrace{\cos^2 2x}_{\text{usare formule}} + \cos 2x + 1$

$\int \cos\alpha x \sin\beta x \, dx \qquad \int \cos\alpha x \cos\beta x \, dx \qquad \int \sin\alpha x \sin\beta x \, dx$

## Formule di Prostaferesi

- $\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$

- $\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \text{sen} \frac{u-v}{2}$

- $\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$

- $\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$

$\int \cos nx \sin mx \, dx \qquad n, m > 0 \qquad n \neq m$

2° caso $\qquad \frac{u+v}{2} = nx \qquad \frac{u-v}{2} = mx \Rightarrow \begin{matrix} 2nx = u+v \\ 2mx = u-v \end{matrix}$

$\Rightarrow \qquad \begin{matrix} v = nx - mx \\ u = nx + mx \end{matrix}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \int \left[ \sin(n+m)x - \sin(n-m)x \right] dx$

## FORMULE RAZIONALI di sin e cos

$t = \text{tg} \frac{x}{2} \qquad x = 2\text{arctg}\, x \qquad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\int \frac{\sin x - 5\cos x}{3 + \sin x} dx = \int \frac{\sin x}{3+\sin x} dx - 5 \underbrace{\int \frac{\cos x}{3+\sin x}}_{\frac{f'(x)}{f(x)}} \Rightarrow \log|\sin x + 3|$

$\int \frac{\sin x}{3+\sin x} dx = \int \left( \underbrace{1}_{x} - \frac{3}{3+\sin x} dx \right)$

$-3 \int \frac{1}{3+\sin x} dx \qquad t = \text{tg} \frac{x}{2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$dx = \frac{2}{1+t^2} dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{3(1+t^2)+2t} dt$

## FUNZIONI IRRAZIONALI

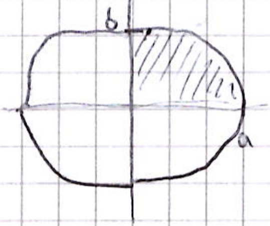
$A: \sqrt{a^2-x^2} = x = a\sin x = dx = a\cos t\, dt = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = |a\cos t|$

$B = \sqrt{a^2+x^2} \cdot x = a\sinh t = dx = a\cosh t\, dt = \sqrt{a^2(1+\sinh^2 t)} = \underline{a\cosh t}$

$C = \sqrt{x^2-a^2} = x = a\cosh t \text{ -- } dx = a\cosh t\, dt$

## AREA ELLISSI

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$




$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$A \; 4b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

caso particolare

(1) $A = \int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\, dx$ sostituzione $x = a\sin t$, $dx = a\cos t\, dt$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a\int R(a\sin t, a\cos t)\cos t\, dt$

$$\Rightarrow 4\frac{b}{\cancel{a}}a\int_0^{\pi/2} \cancel{a}\cos t\, \cancel{a}\cos t\, dt = 4ba\underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\, dt}_{\pi/4} \Rightarrow \pi ab = A$$

## Lunghezza di arco di parabola $x^2$ $\quad x \in [0,a]$

$$\int_0^a \sqrt{1+2x^2} = \int_0^a \sqrt{1+4x^2}\, dx$$

$B = \int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\, dx$ ricordando $1+\sinh^2 x = \cosh^2 x$

quindi $x = a\sinh t$, $dx = a\cosh t\, dt$

$= \int R(a\sinh t, a\cosh t)\, a\cosh t$

$2x = \sinh t$
$2dx = \cosh t\, dt$

$$\int\sqrt{1+\sinh^2 t} = \frac{1}{2}\int_0^{\text{arcsinh}(2a)} (\cosh t)^2\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\sinh t\cosh t + t)\right]_0^{\text{arcsinh}(2a)} =$$

$$\frac{1}{4}\left(2a\sqrt{1+2a^2} + \overbrace{\text{arcsinh}(2a)}^{\log(2a+\sqrt{1+4a^2})}\right)$$

$C \int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ $\qquad x = a\cosh t$

$dx = a\sinh t\,dt$

$$\int \underbrace{R(a\cosh t, a\sinh t)\,\sinh t}_{e^t}\,dt$$

(2) $\int R\left(x, x^{n_1/m_1}, x^{n_2/m_2}, \dots x^{n_k/m_k}\right)dx$ $\qquad$ minimo comune multiplo di $(m_1, \dots m_k) = n$

sostituzione $x = t^n \Rightarrow dx = nt^{n-1}$

es $x^{n_1/m_1} = t^{n \cdot \frac{n_1}{m_1}}$ $\qquad$ $m_1$ divide $n$ PER DEFINIZIONE, quindi $n/m_1$ intero

$$\int R\left(t^n, t^{\alpha n_1}, t^{\beta n_2}, \dots, t^{z n_k}\right) nt^{n-1}\,dt$$

ES

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2x^{1/3}+3}\,dx \qquad \int \frac{x^{1/2}}{2x^{1/3}+3}\,\frac{1}{x}\,dx \qquad R(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x})$$

$x \quad y \quad z$

$$R(x,y,z) = \frac{y}{(2z+3)x}$$

m.c.m $= 2,3 = 6$

$x = t^6$

$dx = 6t^5\,dt$

$$\frac{6}{2}\int \frac{\cancel{t^3}\,2t^2+3-3}{(2t^2+3)\,t^{\cancel{6}}}\,dt \Rightarrow$$

$$3\int 1 - \frac{3}{2t^2+3}\,dt = 3t - \underbrace{\frac{9}{2}\int \frac{1}{\cancel{2}t^2+3/2}\,dt}_{\frac{9}{2}\int \frac{1}{t^2+3/2}}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\, dx = \alpha! \qquad \alpha > -1$$

FUNZIONE $\Gamma$ DI EULERO $\quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \underset{\frac{x^2}{2}=t}{=} \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{2}\,\Gamma(\alpha+1) \Rightarrow \sqrt{2}\,\Gamma(1/2) =$$

$x = \sqrt{2t}$

$dx = 1/\sqrt{2}\ 1/t\, dt$

FUNZIONE DI GAUSS

$$= \int_0^1 |\log x|^n dx = \int_0^1 (-\log x)^n dx \Rightarrow$$

$-\log x = t \Rightarrow x = e^{-t}$

$-\frac{1}{x} dx = dt \Rightarrow dx = -e^{-t}\, dt$

$$= \int_{+\infty}^{\infty} t^n e^{-t}\, dt \Rightarrow \Gamma(n+1) \Rightarrow n!$$

$$x \in (0, \pi/2) \qquad 0 < \sin x < 1 \qquad \Rightarrow (\sin x)^{2n+1} < (\sin x)^{2n} < (\sin x)^{2n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n+1} dx < \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n} dx < \int_0^{\pi} (\sin x)^{2n-1} dx$$

$$I_{n,m} = \int_0^{\pi} (\sin x)^m (\cos x)^n\, dx$$

2 casi

i. $m, n$ pari

ii. $n$ arbitrario, $n$ dispari

i. $I_{n,m} = \frac{n-1}{n+1}\frac{n-3}{m+3} \cdots \frac{1}{n+m-1} \boxed{I_{n+m,0}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (n+m-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (m+n)}\frac{\pi}{2}$

ii. $I_{n,m} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-3}{m+3} \cdots \frac{2}{n+m-2} I_{n+m-1,1} = \frac{1}{m+n}$

DALLA DISUGUAGLIANZA

$$\frac{2n}{2n+1} \le \left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right]^2 \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

applicando i carabinieri con $\lim_{n\to\infty}$. FORMULA DI WALLIS

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-2)!!\,(2n)!!}{[(2n-1)!!]^2}$$

# EQ Differenziali (ordinarie)

| Eq. | algebriche (polinomiali) | |
|---|---|---|
| deg 1. | $ax+b=0$ | equazione |
| | $x_0$ | soluzione |
| deg 2. | $ax^2+bx+c=0$ | equazione |
| | $x_1, x_2$ | soluzioni |

**Def (1)** = Un equazione differenziale di grado "ordine" n è una relazione del seguente tipo e forma:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$ → dipendente di ordine n

ove $F: U \to \mathbb{R}$

con $U \subset \mathbb{R}^{n+2}$ (con n+2 variabili)

(2) la funzione $y = y(x)$, con $x \in I \subset \mathbb{R}$, è soluzione dell'equazione in (1) se:

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x) \dots y^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{su } I$$

a volte l'intervallo $I$ non è determinato a priori, e quindi fa parte del processo di ricerca di $y(x)$

(3) Integrale generale di (1) è una famiglia di soluzioni $y(x, c)$ - con c una famiglia di parametri - tali che ogni soluzione del problema sia un caso particolare della famiglia

In (1) l'equazione è detta:

(i) Lineare, se F dipende linearmente da $y, y', \dots, y^{(n)}$
es. $a_0 + a_1(x) y + a_2(x) y' + \dots + a_{n+1}(x) y^{(n)} = F(x, y, y', \dots y^{(n)})$

(ii) Omogenea, se $\exists\, k$ : $F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'', \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda F(x, y, y', \dots y^{(n)})$

(iii) Autonoma se F non dipende esplicitamente da x
$F = F(y, y', y'', \dots y^{(n)})$

(iiii) di forma normale se l'equazione può essere scritta nella forma
$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)})$, quindi
$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$

ES (popolazione) di Differenziali

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \lambda - \mu + \dots$$

$\lambda$ = tasso natalità
$\mu$ = tasso mortalità
... = altri effetti

rapporto crescita popolazione

ES Primordine $(n=1)$ = $F(x, y, y') = 0$

$y' = f(x)$ (per calcolo di primitiva di f)

$F(x, y, y') = y' - f(x)$

l'integrale generale $y(x, c) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt + c$, con $c \in \mathbb{R}$ (arbitraria)

In generale $y(x, c)$ si può imporre una condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ (Problema di Cauchy) per esempio: Problema di Cauchy del prim'ordine in forma normale

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

OSS: Se $f$ è sufficientemente buona (regolare) allora $\exists!$ soluzione, per $x$ non troppo distante da $x_0$ $|x-x_0| < \varepsilon$

es: $\begin{cases} N'(t) = 2\ N(t) \\ N(0) = 5 \end{cases}$

$N(t) = 5e^{2t}$
$N'(t) = 2 \cdot 5e^{2t} = 2N(t)$

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = \varepsilon \quad (= \lambda - \mu)$$

$\varepsilon > 0$ crescita ESPONENZIALE

ES: $xy' + y = 0$

$xy' = -y$

$y(x) = \frac{c}{x}$, con $x \neq 0$

$y'(x) = -\frac{c}{x^2} \cdot x = -\frac{c}{x} = -y$

si impone $y(1) = 2$ $\Rightarrow$ $c = 2$ $= +\frac{2}{x}$

$x_0 = 1$

Eq a VARIABILI SEPARABILI (1° ordine, forma normale)

$$y' = a(x)\, b(y), \quad a \in C(I),\ b \in C(J)$$

1. OSS: Se $y_0$ è uno zero di $b$ ($b(y_0) = 0$), allora la soluzione $y(x) = y_0$ è una soluzione (costante). Tali soluzioni sono dette STAZIONARIE
infatti $y'(c) = 0$

2. Si suppongano a questo punto $b(y) \neq 0$, quindi si divide:

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x) \quad \text{da cui} \quad \int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\,dx = \int a(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ per una soluzione $y = y(x)$ si avrebbe la validità

ma $$\int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\,dx = \int \frac{1}{b(y)}\,dy = \int a(x)\,dx$$

la soluzione lega la soluzione $f(y)$ alla $f(x)$

$$B(y) = \int \frac{1}{b(y)}\,dy \qquad A(x) = \int a(x)\,dx$$

si sta trovando $B(y) = A(x) + c$

da cui $y(x) = B^{-1}(A(x) + c)$

OSS: Imponendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, se $b$ è derivabile con continuità in un intorno di $y_0$ allora $\exists!$ soluzione per $|x - x_0| < \varepsilon$

ES [La caduta di un grave] - senza attrito -

$F = ma$ diventa $\cancel{m}g = \cancel{m}y''$

$g = y''$ è un equazione del secondo ordine ma

$v = y' \Rightarrow g = v' \qquad v = gt + c \Rightarrow$

DA CUI $\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + ct + d$

$d$ = posizione iniziale
$ct$ = velocità iniziale

$v(t) = y'(t) = gt + c$

con $t$ in crescita, $v(t)$ dovrebbe continuare a crescere, ma ciò è irrealistico. Non è stato infatti considerato L'ATTRITO

In presenza di attrito:

$$F = \cancel{m}g - \frac{h}{m}y' = \cancel{m}y'', \quad h > 0$$

poniamo $v = y'$: $v' = g - \frac{h}{m}v$ (forma normale / variabili separabili)

Soluzioni stazionarie

- $v = \frac{mg}{h}$

altre soluzioni:

$$\int \frac{1}{g - \frac{h}{m}v}\, dv = \int dt = t + c$$

$$-\frac{m}{h}\log\left|g - \frac{h}{m}v\right| = t + c \Rightarrow \log|g - (h/m)v| = -\frac{h}{m}(t + c) \text{ da cui}$$

$$\left|g - \frac{h}{m}v\right| = K_0 e^{-\frac{h}{m}t} \qquad K_0 > 0$$

se $\left[g - \frac{h}{m}v\right] > 0$ allora

con $\left(g - \frac{h}{m}v\right) < 0$

Si ottiene $g - \frac{h}{m}v = k_0 e^{-\frac{h}{m}t}$ i.e. $v(t) = \frac{mg}{h} - k_0 e^{-\frac{h}{m}t}$

con $k=0$ si ritrova la soluzione stazionaria!

con $t \to \infty$ $\quad v(t) = \frac{mg}{h}$

(i) $y' = g(ax+by)$ con $a,b \in \mathbb{R}$ $a,b \neq 0$

a priori non sembra a variabili separabili, ma si pone

$$z(x) = ax+by$$

$$z'(x) = a+by' = a+bg(ax+by) \overset{!}{=} a+bg(z)$$

$\Rightarrow z'(x) = a+b\,g(z)$ questo è a variabili SEPARABILI

$$\overset{!}{=} a(x)\,b(z)$$

(ii) $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ non a var. separabili

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz$$

$$y' = z+xz' \Rightarrow z+xz' = g(z)$$

$$z' = \frac{g(z)-z}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}\cdot g(z)-z$$ variabile separabile.

ES $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ non è a var separabili

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2}{x^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}, \text{ con } g(z) = \frac{2z}{1+z^2}$$

Sia $z = \frac{y}{x}$ : $xz' = y'-z \Rightarrow \cancel{x}g(z)-z = \frac{2z}{1+z^2}-z$

$$= \frac{2z-z-z^3}{1+z^2} = \frac{z-z^3}{1+z^2} \Rightarrow z' = \frac{1}{x}\cdot\frac{z(1-z^2)}{1+z^2}$$

$$z' = a(x)\cdot b(z)$$

$z=1$ è soluzione stazionaria $x=x$

$z=0$ $y=0$

$$= \int \underbrace{\frac{1+z^2}{z(1-z^2)}}\,dz = \log|x|+c = \cancel{\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{1-z^2} = \frac{A-Az^2+Bz^2+Cz}{z(1-z^2)}}$$

$$\int\frac{1-3z^2}{z-z^3}\,dz - 2\int\frac{-2z}{1-2z}\,dz = \log\left|\frac{z-z^3}{(1-z^2)^2}\right|$$

$\cancel{A=1}$

$\cancel{C=0}$

$\cancel{A+B=1 \Rightarrow B=1-A=0}$

$$= \log\left|\frac{z}{1-z^2}\right| = \log|x|+c = \frac{z}{1-z^2} = kx \Rightarrow e^c = \left|\frac{z}{x(1-z^2)}\right| \Rightarrow cx = \frac{y/x}{1-(y/x)^2}$$

$$Cx = \frac{\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{x^2}{x^2} = C\cancel{x} = \frac{y\cancel{x}}{x^2-y^2} = (x^2-y^2) + \tfrac{1}{C} y = 0$$

$$= y^2 + y/c - x^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{c}\right)^2 + 4$$

$$~~y(x)~~ - \frac{1}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{c}\right)^2 + 4x^2}$$

$$y(x) = \frac{\phantom{xx}}{2}$$

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (1° ordine)

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$F(t, y, y')$ è lineare in $y$ e $y'$

$$a_1(t)y' + a_2(t)y = g(t)$$

supponendo che $a_1(t)$ non si annulli mai

$$(1) \quad y' + a(t)y = g(t)$$

con $a, g$ siano continue in $I \subseteq \mathbb{R}$

Essa si risolve con una formula chiusa.

Teorema: $\exists$ una soluzione se $a, g \in C(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$
Se $g(t)$ non è identicamente nulla, l'equazione si dice COMPLETA
Se invece $g(t)$ è identicamente nulla, essa si dice OMOGENEA

Teorema: l'integrale generale di (1) si ottiene aggiungendo una soluzione particolare dell'equazione completa alla soluzione generale dell'equazione omogenea.

1) Si risolve $y' + a(t)y = 0$

$$* = \frac{d}{dx}\left(ye^{A(t)}\right)$$

con $ye^{A(t)} = C \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow y = Ce^{-A(t)}$

$a(t) \to A(t)$ primitiva di $a(t)$

$e^{A(t)}(y' + a(t)y) = 0$ (*) così facendo si può arrivare a $[\ldots]' = 0$

$$e^{A(t)}y' + a(t)ye^{A(t)} = 0$$

La derivata dell'esponenziale ha come proprietà quella di avere come derivata se stessa per la derivata

$\left[e^{A(t)}y\right]' = 0$ poiché $a(t)e^{A(t)}y$ = derivata di $e^{A(t)}$

questo significa $e^{A(t)}y = C$

$$\Rightarrow y(t) = Ce^{-A(t)}$$

lo spazio delle soluzioni ha dimensioni 1.
Questa è la soluzione GENERALE delle eq. OMOGENEE.

2) Soluzione particolare di (1)

Si supponga $y(t) = \underline{\underline{c(t)}}e^{-A(t)}$

$$y(t) = c'(t)e^{-A(t)} - c(t)a(t)e^{-A(t)}$$

$$c'(t)e^{-At} \cancel{- a(t)c(t)e^{-A(t)}} \cancel{+ a(t)c(t)e^{-A(t)}} = g(t)$$

$$c'(t) = g(t)e^{A(t)}$$

$$c'(t) = \int g(t)e^{A(t)}dt \qquad \text{DETERMINATO}$$

## INTEGRALE GENERALE per eq. diff. LINEARI

$$y(t) = Ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int g(t) e^{A(t)} dt$$

L'ipotesi sono che $g(t)$ e $a(t)$ sono continue in $I$

$$y' + a(x)y = f(x) \qquad \text{con } a, f \in C(I)$$

<u>OSS</u>: Se $y_1(x), y_2(x)$ risolvono il problema "completo"

i.e. $y_1' + a y_1 = f$ si ottiene $(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = 0$

$y_2' + a y_2 = f$

Quindi $y_1 - y_2$ risolve il problema omogeneo associato

Teor:
Si è dimostrato che l'integrale generale del problema completo è uguale all'integrale del problema associato + una qualunque soluzione particolare del problema completo.

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI (usato nel passo 2)

$$y(x) = c\, e^{-A(x)}$$

bisogna considerare $c$ ~~non~~ come ~~sol~~ costante ma come funzione di $x$

$$y(x) = c(x) e^{-A(x)} \Rightarrow y'(x) = c'(x) \cdot e^{-A(x)} - c(x) a(x) e^{-A}$$

$$\underbrace{c'(x) e^{-A(x)} \cancel{- c(x) a(x) e^{-A(x)}}}_{y'(x)} \cancel{+ a(x) c(x) e^{-A(x)}} = f(x)$$

$$c'(x) e^{-A(x)} = f(x) \Rightarrow c'(x) = f(x) e^{A(x)}$$

$$c(x) = \int f(x) e^{A(x)} dx \Rightarrow y = e^{-A(x)} \int f(x) e^{A(x)} dx$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = \underbrace{c\, e^{-A(x)}}_{\text{integrale generale problema omogeneo}} + \underbrace{e^{-A(x)} \int f(x) e^{A(x)} dx}_{\text{una specifica soluzione}}$$

Supponiamo di aggiungere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y' + a(x) y = f(x) \end{cases} \qquad a, f \in C(I)$$

per risolvere il problema di Cauchy conviene calcolare $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$

$$y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \int_{x_0}^{x} f(t)\, e^{+\int_{x_0}^{t} a(s)\,ds}$$

per $x = x_0$ l'integrale vale $0$, quindi

$$y(x_0) = y_0\, e^{0} + e^{0} \cdot 0 \Rightarrow y(x_0) = y_0$$

ES.

$$CR\,\dot{u}(t) + u(t) = E \qquad (C, R, E \text{ costante})$$

Supponendo $C, R \neq 0$

$$\underbrace{\dot{u}(t) + \frac{1}{CR}}_{a(x)} u(t) = \underbrace{\frac{E}{CR}}_{f(x)} \qquad \frac{1}{CR} = \frac{1}{\tau}$$

(eq.ne lineare dell' 1° ordine, coeff costanti)

1) $u(t) = C e^{-t/\tau}$ integrale generale del problema omogeneo

con $A(t) = \frac{1}{\tau}\int dt = \frac{t}{\tau}$

2) Soluzione particolare

$$\bar{u}(t) = E$$

con $\bar{u}$ la soluzione particolare

Quindi integrale generale

$$u(t) = C e^{-t/\tau} + E \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$u(0) = C + E \quad \Rightarrow C = u(0) - E \quad \Rightarrow$$

formula per problema Cauchy

$$u(t) = (u_0 - E)\, e^{-t/\tau} + E$$

per $t \to \infty \qquad u(t) \to E$

convoluzione tranne per gli estremi

OSS: Se $x_0 = 0$, $a(x) = a$, $f(x) = f$ costante, si ha $y(x) = y_0\, e^{-ax} + \cancel{e^{-ax}} \int_0^x f(t)\, e^{-a(x-t)}\, dt$

ES $\begin{cases} y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$

$\left(a(x) = \dfrac{2}{x} \in C(I)\right.$ con $I \notin \{0\} \Rightarrow \begin{matrix}(0,+\infty)\\(-\infty,0)\end{matrix}$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad x_0 = -1, \; y_0 = 2$

avendo condizione iniziale -1 guarderemo in $(-\infty, 0)$

$$A(x) = \int_{x_0=-1}^{x} \frac{2}{\xi}\, d\xi = 2\Big[\log|\xi|\Big]_{-1}^{x} = 2\log|x| - \cancel{2\log|-1|} =$$

essendo $x<0$ $\quad 2\log(-x) \quad x<0$

$$y(x) = 2e^{-2\log(-x)} + e^{-2\log(-x)} \int_{-1}^{x} \frac{1}{\xi^2} e^{2\log(-\xi)}\, d\xi$$

$$= \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_{-1}^{x} \frac{1}{\xi^2}\, \xi^2\, d\xi =$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}(x+1) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}, \quad x<0$$

condizione verificata in quanto $-1+3=2$

$y' + 3y = e^{\alpha x}\sin x \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad a(x) = 3$ costante

$\tilde{y}(x) = Ce^{-3x}, \; C \in \mathbb{R}$ $\quad$ Integrale generale del problema omogeneo applicato

$$\bar{y}(x) = e^{-3x}\int e^{\alpha x}\sin x \cdot e^{3x} = e^{-3x}\int e^{x(3+\alpha)}\sin x\, dx$$

$$\int e^{\overbrace{(3+\alpha)}^{\beta}x}\underbrace{\sin x}_{g'}\, dx = -e^{\beta x}\cos x + \beta\int \cos x\, e^{\beta x}\, dx =$$

$$= -e^{\beta x}\cos x + \beta\left[e^{\beta x}\sin x - \beta\int \sin x\, e^{\beta x}\, dx\right]$$

$$= -e^{\beta x}\cos x + \beta e^{\beta x}\sin x - \beta^2\int e^{\beta x}\sin x\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{\beta x}\sin x\, dx = \frac{e^{\beta x}}{1+\beta^2}(\beta\sin x - \cos x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y}(x) = \frac{e^{\alpha x}}{1+(3+\alpha)^2}\big((3+\alpha)\sin x - \cos x\big)$$

$\Rightarrow$ integrale generale

$$y(x) = Ce^{-3x} + e^{\alpha x} \cdot \frac{(3+\alpha)\sin x - \cos x}{1+(3+\alpha)^2}$$

ES $y' + xy - x = 0$ $\quad \begin{pmatrix} a(x) = x \\ f(x) = x \end{pmatrix} \to A(x) = \frac{x^2}{2}$

$\tilde{y}' + x\tilde{y} = 0 \rightsquigarrow \tilde{y}(x) = c e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\bar{y}' + x\bar{y} - x = 0 \sim \bar{y}(x) = 1$

$y(x) = c e^{-\frac{x^2}{2}} + 1$

fattibile come variabili separabili

$y' = x(1-y)$

$\int \frac{1}{1-y} dy = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$

$-\log|1-y| = x^2/2 + c \rightsquigarrow 1 - y = c e^{-x^2/2}$

ES $e^{x+y} y' = -x \Rightarrow e^{x+y} y' + x = 0$ $\quad$ l'equazione è lineare?

$e^y y' + e^{-x} x = 0 \Rightarrow y' = \frac{-e^{-y} x}{e^y}$ $\quad$ NON LINEARE

$e^x \underbrace{e^y y'}_{[e^y]'} + x = 0$

$e^y = z$

$e^x z' + x = 0$ $\quad$ LINEARE! $[\text{in } z]$ $\quad z' + \frac{1}{e^x} x = 0 = z' + e^{-x} x$

$y(x) = \log(e^{-x}(1+x) + c)$

ES $y' + 2xy^2 = 0$

$y(0) = -1$

$y^2$ non è lineare, ma è a variabili separabili

$y' = -2x y^2$

soluzione $y = 0$ stazionaria

$= \int \frac{1}{y^2} dy = -2 \int x dx$

$= -\frac{1}{y} = -x^2 + c \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x^2 - c}$

con $x_0 = 0$ $\quad \frac{1}{-c} = -1 \Rightarrow c = 1$

$y(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ $\quad : \quad x \in (-1, 1)$

ES 1

$$\begin{cases} yy' = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Oss: non possono esserci equazioni stazionarie, in quanto con $y' = 0$ non esiste soluzione. Quindi $y$ e $y' \neq 0$

$y' = \frac{1}{y}$ $\quad\quad y' = a(x)\,b(y)$

non c'è dipendenza da $x$, quindi $a(x) = 1$
e $b(y) = 1/y$

$\frac{1}{y}$ è continua per tutti i punti tranne $y = 0$

PD RIFARE

$\int \frac{1}{b(y)}\,dy = \int a(x)\,dx$ quindi

$\int y\,dy = \int 1\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x + c$

$\Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{2(x+c)}$ ma $y(0) = 2$, quindi la radice è positiva.

$y(0) = \sqrt{2c} = 2 \Rightarrow c = 2$

$\Rightarrow y(x) = \sqrt{2x+4}$

l'intervallo ha senso solo per $x \geq -2$

ES 2

$y' = 2x\sqrt{1-y^2}$ $\quad\quad a(x) = 2x$, $b(y) = \sqrt{1-y^2}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = 2\int x\,dx$ $\quad\quad \sqrt{1-y^2} = 0$ quindi $y = \pm 1$

$x^2 = \int \frac{1}{\cancel{\ }}$ $\quad y = \sin t$, $dy = \cos t$ $\quad x^2 = \frac{1}{\cos t}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \arcsin y = x^2 + c \Rightarrow$ arcsin definito $-1 < y < 1$, immagine $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

$y = \sin(x^2+c)$, con $x^2 + c \in [\pi/2, \pi/2]$

$y(\sqrt{\pi}) = 1/2 \Rightarrow \sin(\pi + c) = 1/2$, con $\pi + c \in [-\pi/2, \pi/2]$

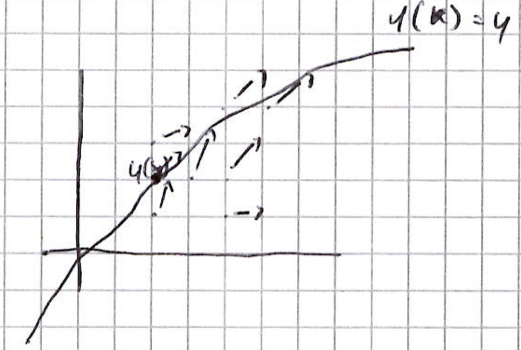
$\pi + c = \pi/6 \in [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow c = \pi/6 - \pi = -5/6\,\pi$

Significato geometrico

$y'(x) = F(x, y(x))$

Si considerano

$f(x, y)$




$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- $y(x) = 0$ è soluzione stazionaria $\forall x \in \mathbb{R}$

$y(x) = 0 \quad x \leq 0$

$y(x) = \frac{x^2}{4} \quad , x \geq 0$

$\sqrt{|v|}$ è derivabile per estensione quindi $\in C^1(\mathbb{R})$

$$\sqrt{\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x^2}{4}}$$

ES $\quad y' = ay(1 - by) \quad a, b > 0 \quad$ [equazione logistica]

- soluzioni stazionarie:
  $y = 0, \quad y = \frac{1}{b}$

$= \int \frac{1}{y(1-by)} = a \int dx \Rightarrow at + c$

$\Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{b}{1-by} = \frac{1}{y(1-by)} \Rightarrow$

$= \log|y| - \log|1 - by| = \log\left|\frac{y}{1-by}\right| = at + c,$

$= \left|\frac{y}{1-by}\right| = e^{at+c} = c_0 e^{at} \quad , \text{con } c_0 > 0$

$\frac{N'}{N} = \varepsilon$

$N' = \varepsilon N\left(-\frac{N}{k} + 1\right) = \varepsilon N - \frac{\varepsilon}{k} N$

correzione

$\frac{y}{1-by} > 0 \quad$ se $\quad y$ e $1 - by > 0 \quad (o\ " < 0)$

$\frac{y}{1-by} = k e^{at} \quad$ con $k \in \mathbb{R}$

$y(t) = \frac{ke^{at}}{1 + bke^{at}} \quad k \in \mathbb{R}$

$y(0) = \frac{k}{1+bk} \quad$ per $t \to \infty = \frac{1}{b}$

# Teorema di Cauchy

Siano $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ (considerare $y$ come unica variabile da derivare, tutto quello che dipende da $t$ diventa costante)

$\Downarrow$

$f_y$

$$\left[ \text{es} \quad f(x,y) = x^2 y^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 3y^2 \right]$$

e sia $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua in $D \subset \mathbb{R}^2$ e tale che $\exists (t_0, y_0) \in D$ allora

ESISTE un intorno $I$ di $t_0$ tale che il problema di Cauchy ammetta una ed una sola soluzione definita in $I$

Per ogni insieme chiuso e limitato $K \subset D$ $\exists$ una costante $L_K$ tale che $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L_K |y_1 - y_2|$

Se ciò accade si dice che $f$ è localmente Lipschitziana rispetto ad $y$, uniformemente in $t$

~~Esempio~~ Dimostrazione

$f_y$ continua, sia $K \subset D$ chiuso e limitato.

$$M_K = \max_{\text{con } (t,y) \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \right| \quad \text{per lagrange} \quad y \to f(x,y)$$

$$\exists \bar{y} \text{ t.c. } |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t,\bar{y}) (y_1 - y_2) \right| \leq M_K |y_1 - y_2|$$

dipendendo da $k$ la costante corrisponde alla dipendenza di $L_K$.

ES

$$\begin{cases} y' = |y| + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

continua in $\mathbb{R}^2$ senza dipendenza da $t$. ~~in $\mathbb{R}^2$~~

Non derivabile in $y=0$, quindi non ha derivata continua.

Si considera un chiuso limitato $K$ in $\mathbb{R}^2$, si ottiene $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| =$

$$|y_1| + \cancel{1} - |y_2| - \cancel{1} = \big||y_1| - |y_2|\big| \leq |y_1 - y_2|$$

LOCALMENTE LIPSCHITZIANA.

Esiste ed è unica la soluzione.

## Variabili separabili

$f(t,y) = a(t)\, b(y)$

$a, b$ continue $\Rightarrow$ esiste una soluzione

con $a, b'$ continue $\Rightarrow$ soluzione è UNICA

Valgono le ipotesi del teorema di Cauchy

$y' + a(t)y = g(t)$

$f(t,y) = g(t) - a(t)y$

se $a(t)$ e $g(t)$ ~~sono unici~~ ~~esiste~~ ~~ed è unica~~ continue $\Rightarrow$ esiste una soluzione

derivata: $f_y(t,y) = -a(t)$ con $a(t)$ continua esiste ed è unica la soluzione in un intorno di $(t_0, y_0)$

l'esistenza globale della soluzione non è discussa

Es)
$$\begin{cases} y' + 2ty^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \frac{1}{t^2+1} \qquad t \in \mathbb{R}$$

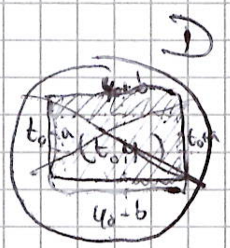
hanno 2 domini di $t$ DIVERSI!

$$\begin{cases} y' + 2t^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad \frac{1}{t^2-1} \qquad t \neq \pm 1$$

Esistono funzioni

Intervallo MASSIMALE DELL'UNICITÀ

$f(t,y)$ $\qquad (t_0 y_0)$




Sappiamo già che per ipotesi di Cauchy che localmente $\exists$ soluzioni

$$R\left\{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{matrix} t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b \end{matrix}\right\} \qquad a, b > 0$$

$f$ essendo continua ammette massimo per Weierstrass

$$M = \max_R |f(t,y)|$$

$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ dove $\varphi$ è soluzione di Cauchy

$-M \leq \varphi'(t) \leq M$ $\qquad \varphi$ ha un grafico compreso fra le rette $y = y_0 - M(t-t_0)$, $y = y_0 + M(t-t_0)$

possono succedere che le rette taglino il "rettangolo" nei suoi lati verticali o orizzontali

nei punti di ascissa $t_0 \pm \frac{b}{M}$ se $b/M < a$

$t_0 \pm a$ se $b/M > a$

$R(t,y) \qquad (t_0, y_0)$

$\delta = \min\{b/M, a\}$ = la soluzione è definita almeno in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

ciò si può fare infinite volte

Si prende il nuovo PUNTO

$$(t_0, y_0) = (t_0 + \delta, \varphi(t_0 + \delta, y_0))$$

e si fa lo stesso ragionamento fino ad arrivare a

$[t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_2]$ con soluzione $\varphi_1$

Se si considera l'intervallo $[t_0 + \delta, t_1 - \delta]$ si hanno 2 soluzioni COINCIDENTI

$$\varphi_1 \equiv \varphi$$

$[t_0, t_{MAX}]$ $\sim$ $[t_{MIN}, t_{MAX}]$

$\hookrightarrow$ in cui la funzione $\varphi$ esiste ed è unica

Teorema di ESISTENZA e UNICITÀ GLOBALE

$f, f_y$ continue in $\bar{S} = [a, b] \times \mathbb{R}$. Inoltre esistono 2 numeri positivi $h, k > 0$ per cui risulta $|f(t,y)| \leq h + k|y|$ $(t, y)$ in $S$

allora ogni soluzione del problema di Cauchy è definita su tutto l'intervallo $[a, b]$

Se $|f(t,y)| \leq h$ , ok , ma con $k = 0$

Se $|f_y(t,y)|$ $f(t,0) + \int_0^y f_y(t,s)\,ds$

$$f(t,y) = a(t)\,y + g(t)$$

$$|f(t,y)| \leq |a(t)y| + |g(t)| =$$

$$|a(t)|\,|y| + |g(t)| \leq M_a(y) + M_g$$

$M_a = \max|a(t)|$ $M_g = \max|g(t)|$

$$\begin{cases} y' = \cos(ty) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

non è facile arrivare alla soluzione, è continua?

$f(t,y)$ $\cos(ty)$ continua

$f'_y = t(-\sin(ty))$ continua

Esiste soluzione ed è unica.

$$|f(t,y)| = |\cos(t,y)| \leq 4$$

Si applica il teorema di esistenza globale

$$\begin{cases} y' = \frac{y^5}{1+y^4} \\ y(0) = \end{cases}$$

Condizione teorema esistenza globale

$$|f(t,y)| = \frac{|y^5|}{1+y^4} = |y| \frac{y_4}{1+y_4} \leq |y|$$

$y' = f(x,y)$ forma normale, 1° ordine

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Può essere scritto IN FORMA VETTORIALE

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

con $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$y' + a(x)y = b(x)$

$$\vec{y}' + a(x)\vec{y} = \vec{b}(x)$$

può essere scritto in forma matriciale.

## EQUAZIONI DEL 2° ORDI

(*) $y'' = f(x, y, y')$ forma normale

Ponendo $y' = v(x)$ il problema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = f(x, y, v) \end{cases}$$

Il problema di Cauchy è determinato per

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

avendo 2° condizioni, sulla $y$ e sulla $v$

ES. $y'' + y = 0$ EQUAZIONE LINEARE 2° ORDINE A COEFF. COSTANTI

$y_1(x) = \sin x$
$y_2(x) = \cos x$

INTEGRALE GENERALE
$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases} \Rightarrow$ In $x_0 = 0 \Rightarrow C_2 = y_0 \Rightarrow C_2 = \beta$

$x_0 = \beta = C_1 \cos x - \beta \sin x \Rightarrow C_1 = \alpha$

Considerazioni.

EQUAZIONI LINEARI DI 2° ORDINE

$\underbrace{a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y}_{\mathcal{L} y} = f$ con $a_0, a_1, a_2, f$ continue

con $\mathcal{L}$ operatore lineare

$\mathcal{L} : C^2(I) \to C(I)$ $\mathcal{L} = a_0(x) \frac{d^2}{dx} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x)$

$D = \frac{d}{dx}$ l'operatore di derivazione manda $C^1(I)$ a $C(I)$

$C(I) \supset C^1(I) \supset C^2(I) \supset \dots \supset C^{n-1}(I) \supset C^n(I)$

La linearità è compresa $\mathcal{L}(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \mathcal{L} y_1 + \mu \mathcal{L} y_2$ $\forall \lambda, \mu, y_1, y_2 \in C^2$

ES
$y'' = 0$

integrale generale

$y = C_1 x + C_2$ $(y')' = 0 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow y = C_1 x + C_2$

Teorema di esistenza e unicità di Cauchy in 2 variabili:
Siano $a, b, f \in C(I)$, $x_0 \in (I)$

Allora il problema di Cauchy - forma normale -

$y'' + a(x) y' + b(x) y = f(x)$

$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$ Ammette una e una sola soluzione in $C^2(I)$

# STRUTTURA GENERALE DELL' INTEGRALE G

Sapendo

$$\mathcal{L} : C^2(I) \to C(I) \quad , \mathcal{L} = a_0 D^2 + a_1 D + a_2 \qquad a_i \in C(I)$$

allora il problema "completo" $\mathcal{L}(y) = f$

il problema omogeneo associato = $\mathcal{L}(y) = 0$

Teori: (a) = L'insieme delle soluzioni del problema omogeneo formano uno spazio vettoriale di dim (Reale) = 2

(b) = L'integrale generale del problema completo è dato sommando l'integrale generale del problema omogeneo ~~più~~ con una soluzione particolare

ES.

$t^2 z'' - 3t z' + 3z = 0$ equazione lineare omogenea del 2° ordine

$z_1(t) = t$
$z_2(t) = t^3$ } con $z_1$ e $z_2$ linearmente indipendenti

l'integrale generale è $c_1 t + c_2 t^3$

(1) Integrale generale del problema omogeneo

(2) Ricerca di una soluzione particolare

Non esistono metodi generali di Risoluzione del problema omogeneo.

(1) Risolubile certamente nel caso di coeff costanti

(2) 2 casi:

- Se il termine $f$ ha forma particolare [metodo di somiglianza]
- Se si è risolto il problema omogeneo [Variazione delle costanti]

# RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI, 2° ORDINE, COEFF. COSTANTI

$az'' + bz' + cz = 0$ $\qquad a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

"Ansatz": $z(t) = e^{rt}$ $\qquad r = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

Si sostituisce $z(t)$ all'equazione

$z'(t) = r e^{rt}$ $\qquad e^{rt} \neq 0$ quindi non gioca nessun ruolo nell'eq.

$z''(t) = r^2 e^{rt}$ $\qquad$ sempre $\neq 0$

$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + e^{rt} = 0 \Rightarrow \cancel{e^{rt}}(ar^2 + br + c) = 0$

$ar^2 + br + c = 0$ Equazione caratteristica

CASI:

(1) $\Delta > 0$ si hanno 2 soluzioni $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad \Delta = b^2 - 4ac$ $\qquad$ controllo indipendenza con matrice Wronskiana

Integrale generale: $z(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ $\qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(2) $\Delta < 0$ $\quad b^2 < 4ac$ l'equazione ammette 2 radici complesse coniugate

$r_1 = \alpha + i b$ $\qquad r_2 = a - i b$

$z_1(t) = e^{(\alpha + i\beta)t}$ $\qquad z_2(t)\, e^{(\alpha - i\beta)t}$

$z_1(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \sin\beta t)$

$z_2(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \sin\beta t)$ $\qquad$ Sia la parte reale che la parte immaginaria sommando va a 0

$\tilde{z}_1(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t)$ $\qquad \tilde{z}_2(t) = e^{\alpha t}(\sin\beta t)$

Integrale generale $\quad e^{\alpha t}(c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t)$ $\qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(3) $\Delta = 0$ $\quad b^2 = 4ac$ $\quad$ 2 soluzioni coincidenti (contro le 2 linearmente indipendenti necessarie)

$r = \frac{-b}{2a}$ da cui $z_1(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$

La seconda soluzione si trova [indipendente]

$z_2(t) = \tilde{c}(t)\, e^{+rt}$ $\quad$ si può usare? $\quad z_2'(t) = \tilde{c}'(t) e^{rt} + r\tilde{c}(t) e^{rt}$

$z_2''(t) = (\tilde{c}''(t) + r\tilde{c}'(t))e^{rt} + r(\tilde{c}'(t) + r\tilde{c}(t))e^{rt}$

$\overset{!}{=} [a(\tilde{c}'' + 2r\tilde{c}' + r\tilde{c}) + b(\tilde{c}' + r\tilde{c}) + c\tilde{c}]\, e^{rt} = 0$

$\overset{!}{=} \underbrace{\tilde{c}(ar^2 + br + c)}_{\text{Equazione di cui } r \text{ è soluzione}} + \underbrace{\tilde{c}'(2ra + b)}_{\substack{r=0 \\ \frac{-b}{2a} = r}} + \underbrace{\tilde{c}''(a)}_{\substack{a \neq 0 \\ \text{perché secondo ordine}}} = 0$

$z(t) = e^{rt}(c_1 + c_2 t)$, $\quad e^{rt}$, $\quad te^{rt}$

3 caso $\Delta = 0$ 2 soluzioni r COINCIDENTI
(dipendenti)

se f(x) è della forma

$$f(x) = e^{\gamma t}(P_m \cos(\delta t))$$

con $m$ = grado del polinomio
$\gamma$
$\delta$

allora si usa

$$\bar{y}(x) = t^k e^{\gamma t}(Q_m \cos(\delta t) + R_m \sin \delta t)$$

$k = \{0, 1, 2\}$ se $\gamma + i\delta$ è
soluzione semplice $k=1$
" doppia $k=2$
NON SOLUZIONE $k=0$

$Q_m$ e
$R_m$ incognite (POLINOMI DI GRADO m)

## 2 ORDINE, NON OMOGENEO, coeff costanti

$ay'' + by' + cy = f(x)$ $\qquad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$

(1) Metodo di SOMIGLIANZA

$f(x) = P_r(x)$ polinomio di grado $r$

Si cercano soluzioni che siano simili ad $f$

$$\begin{cases} y(x) = Q_r(x) & \text{se } c \neq 0 \\ y(x) = x\,Q_r(x) & \text{se } c = 0 \quad b \neq 0 \quad \text{(si alza il grado)} \\ y(x) = x^2 Q_r(x) & \text{se } c = 0 \quad b = 0 \quad \text{(si alza ulteriormente il grado)} \end{cases}$$

ES 1

$y'' - \omega^2 y = 1 + x^2 \qquad \mathrm{Deg}(P_2(x)) = 2 \qquad c \neq 0$

soluzione polinomi generici di grado 2

$\bar{y}(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$

$\bar{y}'(x) = C_1 + 2C_2 x$

$\bar{y}''(x) = 2C_2$

$= 2C_2 - \omega^2 (C_0 + C_1 x + C_2 x^2) = 1 + x^2$

$$\begin{cases} 2C_2 - \omega^2 C_0 = 1 & \Rightarrow C_0 = \dfrac{-2+\omega^2}{\omega^4} \\ -\omega^2 C_1 = 0 & \Rightarrow C_1 = 0 \\ -\omega^2 C_2 = 1 & \Rightarrow C_2 = -\dfrac{1}{\omega^2} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{\omega^2}\left(-\frac{2}{\omega^2} + 1\right) - \frac{1}{\omega^2} x^2$$

ES 2 $\quad y'' + 2y' = x \qquad c = 0 \quad b \neq 0 \qquad P(x) = 1$

$\bar{y}(x) = x(C_0 + C_1 x) = C_0 x + C_1 x^2$

$\bar{y}'(x) = C_0 + 2C_1 x$

$\bar{y}''(x) = 2C_1$

$$\begin{cases} 2C_1 + 2(C_0 + 2C_1 x) = x \\ 2C_1 + 2C_0 = 0 \quad \Rightarrow C_1 = -C_0 \\ 4C_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} C_1 &= 1/4 \\ C_0 &= -1/4 \end{aligned}$$

$$\bar{y}(x) = x\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x\right)$$

(iii) ~~Metodo~~

$$f(x) = A e^{\lambda x} \qquad A \in \mathbb{R} \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

Si cercano soluzioni della forma

$\bar{y}(x) = e^{\lambda x} \gamma(x)$

$\bar{y}'(x) = e^{\lambda x}(\gamma' + \lambda\gamma)$

$\bar{y}''(x) = e^{\lambda x}(\lambda(\gamma' + \lambda\gamma) + \gamma'' + \lambda\gamma')$

$\overset{!}{=} e^{\lambda x}(\gamma'' + 2\lambda\gamma' + \lambda^2\gamma)$

quindi $\cancel{e^{\lambda x}}\left[a(\gamma'' + 2\lambda\gamma' + \lambda^2\gamma) + b(\gamma' + \lambda\gamma) + c\gamma\right] = A \cancel{e^{\lambda x}}$

$$a\gamma'' + \gamma'(2a\lambda + b) + \gamma(a\lambda^2 + b\lambda + c) = A$$

3 casi

- $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$ $\qquad$ $\lambda$ non è radice del polinomio caratteristico

  Si prende $\gamma(x) = \text{costante} = \dfrac{A}{a\lambda^2 + b\lambda + c} = \gamma(x)$

- $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ ($\lambda$ soluzione) ma $2a\lambda + b \neq 0$

  $\Delta \neq 0$ $\qquad$ $\gamma'(x)$ costante $= \dfrac{A}{2a\lambda + b} = \gamma(x) \dfrac{A^x}{2a\lambda + b}$

  $$\bar{y}(x) = \frac{Ax}{2a\lambda + b} e^{\lambda x}$$

- $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ $\qquad$ $2a\lambda + b = 0$ $\qquad$ $\Delta = 0$

  il problema omogeneo ammette un'unica soluzione

  $$\gamma''(x) = \frac{A}{a} \Rightarrow \gamma \frac{Ax^2}{2a} \Rightarrow \bar{y}(x) = \frac{A}{2a} x^2 e^{\lambda x}$$

Implica che $\bar{y}(x) =$

OSS: Si può applicare, con opportune modifiche, il metodo di somiglianza ai casi anche più generali. Per esempio $f(x) = P_r(x) + Ae^{\lambda x}$ opp. $f(x) = P_r(x) A e^{\lambda x}$

$y'' + 2y' + 3y = 2e^{3x}$

trovare $\qquad A=2 \qquad \lambda = 3$

Equazione caratteristica $\quad r^2 + 2r + 3 = 0$

Equazione particolare

$\bar{y}(x) = \dfrac{2e^{3x}}{3^2+2\cdot 3+3}$ (costante)

$y = \dfrac{1}{9}$ una soluzione particolare

$y'' + 2y' - 3y = 2e^{-3x} \qquad A=2;\ \lambda = -3$

$\lambda = -3$ soluzione dell'eq caratteristica $\quad r^2 + 2r - 3 = 0$

quindi $\quad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$2a\lambda + b \overset{?}{\neq} 0 \qquad a=1,\ b=2 \qquad \lambda = -3 \Rightarrow -4 \neq 0$

$\bar{y}(x) = \dfrac{2}{-4}\cdot x e^{-3x} = -\frac{1}{2} x e^{-3x}$

ES $\quad y'' + 2y' - y = 2\underbrace{e^x \cos(3x)}_{} = 2 \operatorname{Re} e^{x(1+3i)}$

$e^{x(1+3i)} = e^x(\cos(3x) + i\sin(3x))$

$\lambda = 1+3i$

$\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' - \tilde{y} = 2e^{(1+3i)x}$

$\tilde{y}$ 6 $\operatorname{Re}(\tilde{y}) + i\operatorname{Im}(\tilde{y})$

$\tilde{y}'' = \underline{\operatorname{Re}(\tilde{y}'')} + i\operatorname{Im}(\tilde{y}'') + 2(\underline{\operatorname{Re}(\tilde{y}')} + i\operatorname{Im}(\tilde{y}') - \underline{\operatorname{Re}(\tilde{y})} - i\operatorname{Im}(\tilde{y}) = \underline{2e^x}(\cos 3x + i\sin$

in questo caso

1 trovare soluzione $\lambda = 1+3i$
2 Prendere parte reale

$\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' - \tilde{y} = 2e^{(1+3i)x} \qquad A=2 \qquad \lambda = 1+3i$

$(1+3i)^2 + 2(1+3i) - 1 \overset{?}{=} 0$

$1 + 6i - 9 + 2 + 6i - 1 \neq 0 \quad = -7 + 12i \qquad \lambda$ non è radice dell' eq. caratteristica

$\tilde{y}(x) = \dfrac{2}{-7+12i} e^{(1+3i)x}$

$y(x) = \operatorname{Re}(\tilde{y}(x)) =$

$\overset{!}{=} \dfrac{2(-7-12i)}{49+144} \cdot e^x (\cos(3x) + i\sin(3x)) =$

$= \dfrac{-14}{193} e^x \cos(3x) + \dfrac{24}{193} e^x \sin 3x$

$$2y'' + y' + 2y = 3\sin(2x) = 3\,\mathrm{Im}\left(e^{2ix}\right)$$

Si risolve prima

$$2\tilde{y}'' + \tilde{y}' + 2\tilde{y} = 3e^{2ix} \qquad \left[\lambda = 2i \qquad A = 3\right]$$

$$y(x) = \mathrm{Im}\left(\tilde{y}(x)\right)$$

(1) $\tilde{y}(x) \; \dfrac{3}{-6+2i} e^{2ix}$ $\quad 2i$ è soluzione

$$2(2i)^2 + 2i + 2 \stackrel{?}{=} 0$$

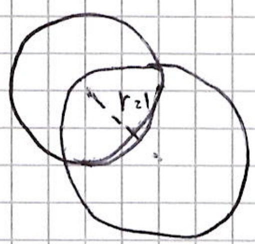
$$-6+2i \neq 0$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{3}{-6+2i} e^{2xi}\right)$$

$$\mathrm{Im}\left[\frac{3(-6-2i)}{36+4} e^{x}\left(\cos(2x) + i\sin(2x)\right)\right]$$

$$= -\frac{6}{40}\cos 2x - \frac{18}{40}\sin 2x \Rightarrow y = \frac{3}{20}\cos 2x - \frac{9}{20}\sin 2x$$

Sul principio di sovrapposizione.




Fare si che il secondo cerchio più grande divide in due aree uguali il cerchio più piccolo

Come fare.

Principio di sovrapposizione.

$$y'' + 3y = x + 2\cos x$$

Sapremmo risolvere

$$y_1'' + 3y_1 = x \qquad \bar{y}_1 = C_0 + C_1 x \;:\; 0 + 3(C_0 + C_1 x) = x \Rightarrow \tfrac{1}{3}x$$

$$y_2'' + 3y_2 = 2\cos x \qquad \bar{y}_2 = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) = \cos x$$

$$\tilde{y}'' + 3\tilde{y} = 2e^{ix} \qquad A = 2 \quad \lambda = i \qquad r^2 + 3 = 0 \qquad (i)^2 + 3 = 0 = -1+3 = 2 \neq 0$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{2}{2} e^{ix}$$

$$y_2(x)$$

Quindi

$$\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \Rightarrow \underbrace{\mathcal{L}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}_{\bar{y}} = \mathcal{L}(\bar{y}_1) + \mathcal{L}(\bar{y}_2) \Rightarrow x + 2\cos x$$

$$= \frac{x}{3} + \cos x$$

## 2 Variazione delle COSTANTI

$$y'' + ay' + by = f(x) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Si applica quando conosciamo 2 soluzioni linearmente indipendenti del problema omogeneo

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

(certamente vero se $a, b \in \mathbb{R}$, in generale si assumono $a, b, f$ continue)

soluzioni $y_1$, $y_2$

Si cercano soluzioni in forma

$$\bar{y}(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$$

$$y'(x) = C_1'(x)\, y_1(x) + C_1(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2(x) + C_2(x)\, y_2'(x)$$

Richiediamo che

$$C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0$$

Quindi

$$\bar{y}'(x)\ C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)$$

$$\bar{y}''(x) = C_1' y_1'(x) + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''$$

Si sostituiscono quindi

$$C_1' y_1' + \underline{C_1 y_1''} + C_2' y_2' + C_2 y_2'' + a(\underline{C_1 y_1'} + C_2 y_2') + b(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f$$

$$C_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + C_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + (C_1' y_1' + C_2' y_2') = f$$

Si ricorda che per ipotesi soddisfano l'equazione omogenea

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = 0$$

$$y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' y_1' + C_2' y_2' = f \\ C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \end{cases}$$

Sistema di 2 equazioni lineari con incognite $C_1'$ e $C_2'$

$y_1$ e $y_2$ sono NOTI

Si ha una soluzione se det della matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

determinante Wronskiano

il det $\neq 0 \ \forall (x)$ [conseguenze del teorema di esistenza e unicità di Cauchy]

Se det $= 0$ vuol dire che $\begin{matrix} y_1 \\ y_1' \end{matrix}$ è dipendente da $\begin{matrix} y_2 \\ y_2' \end{matrix}$

Quindi le due soluzioni sono DIPENDENTI

Si trova che [con metodo di Kramer]

$$C_1' = \frac{-y_2 f(x)}{y_2' y_1 - y_2 y_1'} \qquad C_2' = \frac{y_1 f(x)}{y_2' y_1 - y_2 y_1'}$$

Sono quozienti di funzioni continue il cui quoziente NON si annulla MAI ($\det \neq 0$). Si INTEGRA

$$C_1(x) = \int \frac{-y_2 f}{y_2' y_1 - y_2 y_2'} dx \qquad C_2 = \int \frac{y_1 f}{y_2' y_1 - y_2 y_1'} dx$$

Si è trovata la soluzione ~~generale~~ particolare

$$y_1(x) \int \frac{-y_2(x) f(x)}{y_2'(x) y_1(x) - y_2(x) y_1'} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x) f(x)}{y_2'(x) y_1(x) - y_2(x) y_1'(x)} dx$$

la soluzione dell'integrale generale si trova

$$y'' + \omega^2 y = f(t)$$

1) trovare soluzioni del problema omogeneo associato $\bar{y}$

$$r^2 + \omega^2 = 0 \qquad r_{1,2} = \pm i\omega \qquad y_1 = e^{i\omega x} \quad y_2 = e^{-i\omega x} \Rightarrow y_1 = \cos(\omega x) \quad y_2 = \sin(\omega x)$$

$$\begin{matrix} y_1' = -\omega \sin(\omega x) \\ y_2' = \omega \cos(\omega x) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1' \cos\omega x + C_2' \sin(\omega x) = 0 \\ C_1' \cdot (-\omega \sin(\omega x)) + C_2' \omega \cos(\omega x) = f \end{cases}$$

$$\det \begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin(\omega x) \\ -\omega\sin(\omega x) & \omega\cos(\omega x) \end{vmatrix} = \omega[\underbrace{\cos^2\omega x + \sin^2\omega x}_{=1}] = \omega$$

$$C_1' = \frac{-\sin\omega x \cdot f(x)}{\omega} \qquad C_2' = \frac{\cos\omega x \cdot f(x)}{\omega}$$

$$C_1(x) = \int_0^x -\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) f(t)\, dt$$

$$C_2(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x \cos(\omega t) f(t)\, dt$$

$$\bar{y} = \cos(\omega x) \int_0^x -\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) f(t)\, dt + \sin(\omega x) \int_0^x \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^x \left[-\sin(\omega t)\cos(\omega x) + \cos(\omega t)\sin(\omega x)\right] f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^x f(t) \sin[\omega(x-t)]\, dt = \frac{1}{\omega} \underbrace{f \overset{\text{convoluzione}}{*} \sin(\omega x)}_{\text{se } \begin{cases} f = 0 \text{ per } x < 0 \\ \sin(\omega x) \text{ per } x < 0 \end{cases}}$$

## (1) MODELLO DI CORPO SOGGETTO A FORZA DI RICHIAMO

$$m\ddot{y} = -ky \quad \text{con } \ddot{y} = a(t),\ m = \text{massa},\ K = \text{cost. el} > 0$$

$$= \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0 \qquad \omega^2 = \frac{K}{m} > 0$$

$$= y + \omega^2 y = 0$$

l'integrale generale dell'equazione:

$$y(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = \tilde{C}_1 \cos(\omega t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega t)$$

$$= A \cos(\omega(t-\alpha)) \qquad \left[\begin{array}{l} \tilde{C}_1/\tilde{C}_2 = -\tan\alpha \\ \tilde{C}_1^2 + \tilde{C}_2^2 = A \end{array}\right]$$

$A$ = ampiezza del moto
$\alpha$ = fase
$\omega$ = frequenza = $\frac{2\pi}{T}$

La legge descrive OSCILLAZIONI LIBERE

Si aggiunge termine di attrito

$$m\ddot{y} = -ky - h\dot{y}$$

$$= \ddot{y} + \frac{h}{m}\dot{y} + \omega^2 y = 0 \qquad \delta = \frac{h}{2m} > 0$$

$$= \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

Si calcola discriminante $\Delta = 4\delta^2 - 4\omega^2$

$$r_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

Ci saranno 3 casi:

1° caso: $\delta > \omega$ [Resistenza elevata], $\Delta > 0$

$r_{1,2} \in \mathbb{R}, < 0$, distinte

I.G. $y(t) = C_1 e^{-r_1 t} + C_2 e^{-r_2 t}$
OSS: per $t \to \infty$ il corpo tende a fermarsi

2° caso $\delta = \omega$. $\Delta = 0$

$r_1 = r_2 = -\delta < 0$

I.G. $y(t) = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t e^{-\delta t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}$
$C_1$ costante
per $t \to \infty$ il sistema tende a fermarsi, non c'è oscillazione.

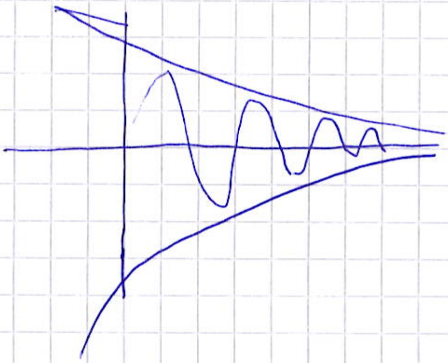
- caso $\delta < \omega$ [attrito debole]

Ci sono 2 radici

$$r_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

I.G. $y(t) = e^{-\delta t}\left(C_1 \cos(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\, t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\, t)\right)$

tende a 0 per $t \to \infty$



$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = f(t)$$ [completa, con $f(t)$ esterna]

I.G. $= \tilde{y}(t)$ (soluzione del problema omogeneo) $+ \bar{y}(t)$ (soluzione particolare)

Si suppone che $f(t) = B\cos(\gamma t)$ $\gamma > 0$ $\left(= \mathrm{Re}(Be^{i\gamma(t)})\right)$ $i\gamma = \lambda$

i) Senza attrito $\delta = 0$

$$\bar{y}(t) = (\text{caso } \omega^2 \neq 0, \delta = 0) = \gamma \neq \omega = \frac{B}{-\gamma^2+\omega}\mathrm{Re}\left[e^{i\gamma(t)}\right] = \frac{B\cos(\gamma t)}{\omega^2 - \gamma^2}$$

$y(t)$ $\gamma = \omega$ $\lambda$ radice del polinomio caratteristico

$$\frac{B}{2\omega} t \sin(\omega t)$$

I.G. $\underbrace{C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)}_{\text{oscillazioni libere periodiche (periodo } \frac{2\pi}{\omega})} + \bar{y}(t)$

- nel caso $\omega \neq \gamma$ $\bar{y}(t)$ è periodica, periodo $\frac{2\pi}{\gamma}$

Complessivamente sarà un moto periodico se $\frac{\gamma}{\omega} \in \mathbb{Q}$

- Se $\gamma = \omega$ $\bar{y}(t)$ diverge a $+\infty$ e quindi l'oscillazione ha effetto di risonanza.
  L'ampiezza ESPLODE

ii (con attrito $\delta > 0$)

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = B\cos(\gamma(t))$$

$$\bar{y}(t) = B\rho\cos(\gamma(t-\tau)) \quad , \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\tan(\gamma\tau) = \frac{2\gamma\delta}{\omega^2-\gamma^2}$$

La risonanza scompare!

I.G. $y(t) = \tilde{y}(t) + \bar{y}(t)$ il moto del sistema è dettato da $\bar{y}(t)$ a regime ($t$ molto grandi)

$\tilde{y}(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$

è periodico di $T = \frac{2\pi}{\gamma}$, e ampiezza

## EQUAZIONI DIFF LINEARI DI ORDINE N, coeff. costanti.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \qquad a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0,\ f \in C(I)$$

problema associato OMOGENEO

$$a_n \tilde{y}^{(n)} + \ldots a_1 \tilde{y}^{(1)} + a_0 y = 0$$

(1) I.G. del problema omogeneo

$y(x)$ = Combinazione lineare di n soluzioni linearmente indipendenti

L'insieme delle soluzioni del problema omogeneo è uno spazio vettoriale di dim n su $\mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

(2) Soluzioni del problema omogeneo

Si trova l'eq caratteristica $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$ (grado n)
a coeff reali ci sono n numeri reali e n complesse coniugate

le radici $r_{1\ldots p}$ , $\alpha_1 + i\beta_1$, ..., $\alpha_q + i\beta_q$
le molteplicità $s_{1\ldots p}$ , $t_1, \ldots t_q$

$$s_1 + \ldots s_p + 2(t_1 + \ldots t_q) = n$$

radici $r_1$: $c_1 e^{r_1 x}$ , $x e^{r_1 x}$ $x^2 e^{r_1 x} + \ldots + x^{s_1 - 1} e^{r_1 x}$

radici $\alpha_1 \pm i\beta_1$: $e^{\alpha_1 x}\cos(\beta_1 x)$ ; $e^{\alpha_1 x}(\sin\beta_1 x)$, ..., $x^{t_1-1} e^{\alpha_1 x}(\cos\beta_1 x)$, $x^{t_1-1} e^{\alpha_1 x}(\sin(\beta_1 x$

radici $r_i$.
radici $\alpha_i + i\beta_i$
⋮
radici $r_p$
radici $\alpha_p + i\beta_p$

Sommando le radici si trovano le n SOLUZIONI

Soluzione particolare

# CENNI A ALTRI METODI RISOLUTIVI (2° ORDINE)

① Riduzione dell'ordine (vale in ogni ordine)

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Si suppone che $f$ non dipenda da $y, y', \dots y^{(k)}$ per un certo $k < n-1$

$$y^{(n)} = \tilde{f}(x, y^{(k+1)}, \dots y^{(n-1)})$$

Si pone $v = y^{(k+1)}$, quindi l'equazione diventa

$$v^{(n-k-1)} = \tilde{f}(x, v, \dots, v^{(n-k-2)})$$

una volta trovato $v(x)$ la si integra $k+1$ volte per avere $y(x)$

P.es. $n=2$

$$y'' = f(x, y') \qquad y' = v$$

$$v' = f(x, v)$$ diventato un problema del prim' ordine.

Si ricorda poi che $y = \int v \, dv$

ES. Pratico.

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{x}{x^2+1}(y')^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$ non rientra in nessuna categoria

ponendo $y' = v$ => si ottiene $v' = \dfrac{x}{x^2+1} v^2$

eq. a variabili separabili!

$v = 0$ soluzione stazionaria

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{x}{x^2+1} dx + c$$

per aver trovato $v$ ~~non~~ si può imporre solo la condizione $y'(0) = 1$

ES. $y^{(4)} + y''' - 2y'' = 1$

ponendo $v = y''$ allora $v'' + v' - 2v = 1$

eq. LINEARE di secondo ordine! $\Delta = \sqrt{1+8} = 3$

$r^2 + r - 2 = 0 \qquad r_{1,2} = 1, -2$

I.G. omogenea: $v(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$

con $v$ costante $v'$ e $v'' = 0$ quindi $v = -\frac{1}{2}$ => $v(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}$

$y' = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x + C_3$

$\to y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 + C_3 x + C_4$

2° Metodo di d'Alembert:

Si suppone di avere un eq$^{ne}$ lineare omogenea con $y_1$ una soluzione. Allora si può trovare un'altra soluzione $y_2$ -Linearmente indipendente-

$$y_2 = v(x)\, y_1(x)$$

ES Equazione di Legendre:

$$(1-x^2)y'' - 2x y' + 2y = 0$$

equazione lineare omogenea a coeff NON costanti.

$y_1 = x$ soluzione ovvia.

Si trova seconda soluzione della forma

$$y_2 = v(x)\, y_1(x) = x\, v(x)$$

$$y_2' = v(x) + x v'(x)$$

$$y_2'' = v'(x) + v'(x) + x v''(x)$$

Si aggiungono le soluzioni all'eq

$$(1-x^2)(2v' + xv'') - 2x(v + xv') + 2(xv) = 0$$

$$(x - x^3) v'' + 2(1-2x^2) v' \cancel{+(2x)v} = 0$$

$$= (x^2 - x^4) v'' + 2(x - 2x^3) v' = 0$$

$$= \frac{d}{dx}\left((x^2 - x^4) v'\right) = 0$$

avendo derivata costante si vede come

$$(x^2 - x^4) v' = C \implies v' = \frac{C}{x^2 - x^4} = \frac{C}{x^2(1-x^2)}$$

$$v' = C\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1-x^2}\right) \implies v(x) = C\left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - \frac{1}{x}\right) + D$$

$$y_2 = x \cdot v(x)$$

3° Metodo. Eq$^{ne}$ di Eulero

$$x^2 y'' + b x y' + c y = g(x) \qquad , x > 0$$

Si fa cambio di variabili: si pone $x = e^s$

$$\tilde{y}(s) = y(e^s)$$

$$\frac{d\tilde{y}}{ds} = y'(e^s) e^s \quad , \text{cioè} \quad y'(e^s) = e^{-s} \frac{d\tilde{y}}{ds}$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} = y''(e^s) e^{2s} + \underbrace{y'(e^s) e^s}_{\frac{d\tilde{y}}{ds}} \implies y''(e^s) = \left(\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} - \frac{d\tilde{y}}{ds}\right) e^{-2s}$$

si sostituisce nell'equazione

$$\cancel{e^{2s}} e^{-2s} \frac{d^2\tilde{y}(s)}{ds^2} - \frac{d\tilde{y}(s)}{ds} + b\,\frac{d\tilde{y}(s)}{ds} + c\tilde{y}(s) = g(e^s)$$

$$= \frac{d^2\tilde{y}(s)}{ds^2} + (b-1)\frac{d\tilde{y}(s)}{ds} + c\tilde{y}(s) = g(x)$$

eq. ni lineari a variabili costanti.

ES

$$\left[\begin{array}{l} x^2y'' + 3xy' + y = x \\ x^2y'' - 2xy' + 2y = \log(x) \end{array}\right]$$

## PEANO

(1) $\begin{cases} y' = f_1(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

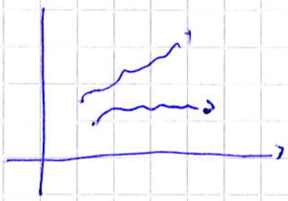
Se la funzione $f$ è $C(I)$ allora esiste ~~una~~ una soluzione.

È UNICA se

(2) $\begin{cases} y' = f_2(t,y) \\ y(t_0) = y_1 \end{cases}$

Cosa succede se si ha una condizione $y_1$ leggermente distaccata da $y_0$ e $f_1$ dista poco $f_2$? Le soluzioni distano poco

TEOREMA: Siano $f_1(t,y)$ e $f_2(t,y)$ 2 funzioni continue su un aperto $D \subset \mathbb{R}^2$ e siano localmente LIPSHITZIANE uniformemente in $t$ e rispetto ad $y$



Siano $(t_0, y_0)$ $(t_0, y_1) \in D$ e siano $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ rispettivamente le soluzioni di 1 e 2.

Allora nell'intervallo $[t_0, t_0+T]$ entrambe le soluzioni sono definite e vale la disuguaglianza

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq (|y_0 - y_1| + (t-t_0)M)\, e^{L|t-t_0|} \qquad t \in [t_0, t_0+T]$$

Dove $M = \max_{(t,y)\in K} |f_1(t,y) - f_2(t,y)|$, $K$ insieme chiuso e limitato $\subset D$

Contiene i grafici $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$

$L$ = costante di Lipschitzianità.

Le 2 funzioni si assomigliano per un intervallo $[t_0, t_0+T]$. Più $T$ cresce più le due funzioni divergeranno.

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$n=1 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$n=1 \quad f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ grafico : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$

$n=2 \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ grafico $\{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \ x,y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2+1}$

$n$ generico grafico $\{(x_0 \dots x_n, f(x_0, \dots, x_n)) : x_i \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Si considera

$n=2 \quad f: \underset{\mathbb{R}^2}{(x,y)} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}}{f(x,y)}$

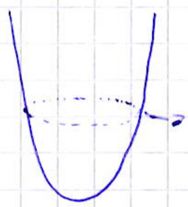
Linee di livello : $c$ = costante

$(x,y)$ vedere tutti i punti tale che $f(x,y) = c$

Supponiamo che $f(x,y) = x^2 + y^2$

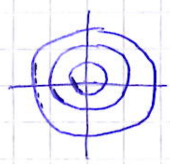
$f(x,y) \geq 0$

prendiamo $f(x,y) = r \Rightarrow x^2 + y^2 = r$
- con $r>0$ le curve di livello sono circonferenze di raggio $\sqrt{r}$
- $r=0$ si ottiene un singolo punto $(0,0)$
- $r<0$ allora non esiste NESSUN PUNTO



si trova una circonferenza di raggio $\sqrt{r}$

mostrandolo in un grafico diventa



con crescita di $r$ cresce la circonferenza

per $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\left.\begin{matrix} z = x^2 & y = 0 \\ z = y^2 & x = 0 \end{matrix}\right\}$$ 2 piani per formare uno spazio

$z = c$

$x^2 + y^2 = z$ si ha preso i piani perpendicolari al grafico.

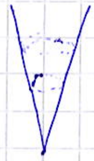
Se si prendono dei valori $r$ equidistanziati si nota come all'aumento ~~riduzione~~ di $c$ la densità aumenta

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ La funzione $f(x,y)$ ha forma conica

$x^2+y^2 \geq 0$

$\sqrt{x^2+y^2} = r$ = elevo $x^2+y^2 = r^2$

$r=0$ $(0;0)$
$r>0$ circonf
$r<0$ $\{\emptyset\}$



con $r$ equidistanziat, le circonferenze saranno equidistanziati

LA COSTANTE NON DEV'ESSERE SEMPRE POSITIVA

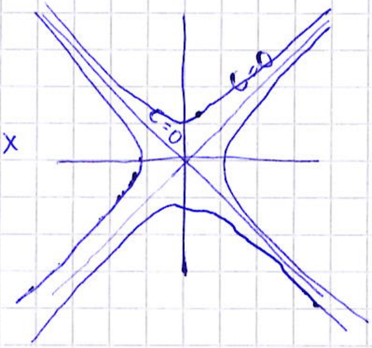
$f(x,y) = x^2-y^2$

c costante $x^2-y^2=c$

con $c \in \mathbb{R}$

$c>0$ iperboli
$c=0$ $x^2=y^2$ bisettrici $y=\pm x$
$c<0$ iperboli

le iperboli hanno sempre asintoti in $c=0$




$n=3$ Superfici di LIVELLO

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$

con $k$ costante $\in \mathbb{R}$ si chiameranno SUPERFICI DI LIVELLO

il grafico della funzione vive in $\mathbb{R}^4$

ES $f(x,y,z) = x^2+y^2+z$

$f(x,y,z)=k \Rightarrow z = k-x^2-y^2$ paraboloidi ellittici

ES $f(x,y,z) = (x+y)^2 - z^2 = k$

se $k=0$ $z = \pm(x+y)$

# LIMITI

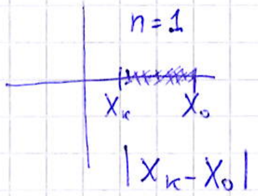
Limiti per successioni

Sia $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ $\quad x_k \in \mathbb{R}^n \ \forall k$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Si dice che $x_k \to x_0$ per $k \to +\infty$ se $|x_k - x_0| \to 0$

$$\sqrt{(x_1^k - x_1^0)^2 + (x_2^k - x_2^0)^2 + \dots + (x_n^k - x_n^0)^2}$$

il modulo, geometricamente, rappresenta la distanza.




Sia $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definita in almeno un'intorno sferico $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$U_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$$

non definita in $x_0$. Sia $L \in \mathbb{R}^*$

Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se per $\forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ $x_k \in \mathbb{R}^n, x_k \neq x_0$, $x_k \to x_0$ per $k \to \infty$

si ha che $f(x_k) \to L$, cioè $\left( \underbrace{|f(x_k) - L| \to 0}_{\text{se } L \text{ finito } \in \mathbb{R}} \right)$ Se $L \in \mathbb{R}$ $f(x_k) \in \mathbb{R}$ !! perchè $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

* Se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ 0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - L| < \varepsilon$ (con $L \in \mathbb{R}$)

Se $L = +\infty$ (o $-\infty$) $\forall K > 0 \ \exists \delta : 0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) > K$ (o $\overset{-\infty}{f(x) < -K}$)

per un numero $x \in \mathbb{R}$ $\quad x \to \infty$ è facilmente definibile
per un numero $f(k) \in \mathbb{R}^n$ si considera $k \to \infty$ se $\|f(k)\| \in \mathbb{R} \to \infty$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ se $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $x_n \in \mathbb{R}^n$

$$\underset{\mathbb{R}}{f(x_k)} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}}{f(x_0)} \qquad k \to \infty$$

Il limite, se esiste, è UNICO.

Teorema limite della somma, del prodotto e del quoziente

Se $\exists \lim (x_1 + x_2) = \lim x_1 + \lim x_2$
$\quad \exists \lim kx = k \lim x$

Teorema del confronto

Teorema di continuità per somma, prodotto, quoziente e composizione

RIMANGONO ANCORA VERE

$f(x_k) \to x_0$

es $f(x,y) = \sin y$ in 2 dimensioni ma solo con variabile y
funzione continua!

$f(x,y) = \dfrac{\sin y}{1+x_2}$ definita in tutto $\mathbb{R}^2$, rapporto tra funzioni continue

$f_1(x,y) = \sin y$ continua $\Downarrow$ f: funzione CONTINUA

$f_2(x,y)\ \dfrac{1}{1+x_2}$ continua

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita in almeno un intorno sferico $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Si suppone che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ con $L \in \mathbb{R} + \{+\infty\}, \{-\infty\}$

1 Se $L > 0$ allora $\exists\, \delta > 0 : f(x) > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta$

2 Se $f(x) \geq 0$ in un intorno $x_0$ (Salvo al più di $x_0$ stesso) allora $L \geq 0$

Se $f(x) > 0$ può essere che $L = 0$ es $\frac{1}{n} > 0 \quad n \to \infty \quad 1/n \to 0$

3 Se $f(x)$ è continua in $x_0$ e $f(x) > 0$ allora $f(x)$ si mantiene positiva almeno in un intorno di $x_0$ ie. $\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(x) > 0$ per $0 < |x - x_0| < \delta$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ (caso $n=1$)

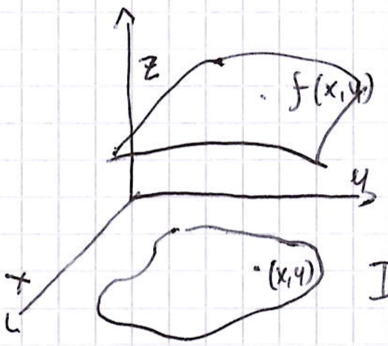
nel caso $n > 1$ ?

Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita in tutto lo spazio o almeno per $|x|$ abbastanza grande
Si dice che $\lim_{|x| \to \infty} \cancel{f(x)} = L$ per $L \in \mathbb{R}$ se $\exists\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, k > 0 : 0 < |x| > k$ si ha $|x - L| < \varepsilon$

Se $L = +\infty$ (oppure $-\infty$) $\forall r > 0\ \exists\, k : \forall x \in \mathbb{R}^n\ |x| > k$ si ha $f(x) > r$ $+\infty$
$(f(x) < -r)$ $-\infty$

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$
$D \subseteq \mathbb{R}^2$

il grafico di $f$ è l'insieme di tutti i punti $\{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$



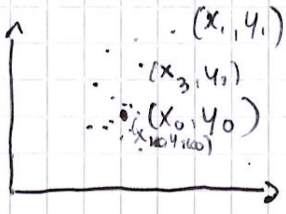

la funzione in $f(x,y)$ porta ad un grafico di superficie in $\mathbb{R}^3$
[gli assi sono infatti 3]

es
- $2x+3y$ è un piano
- $x^2+y^2$ è una superficie di ROTAZIONE (con una simmetria Radiale) [Paraboloide]
- $x^2-y^2$ è una SELLA
- $\sqrt{x^2+y^2}$ è un CONO

le superfici di livello sono quei valori per i quali una funzione assume un valore $c$. es. se si mette $c = x^2+y^2$ si vede che a quel valore la funzione è una circonferenza

LIMITE SUCCESSIONALE

il $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) =$




i punti $(x_k,y_k)$ si avvicinano sempre più a $(x_0,y_0)$

$$(x_k,y_k) \longrightarrow \boxed{(x_0,y_0)} \qquad k \to \infty$$

$$x_k \to x_0 \qquad k \to +\infty$$
$$y_k \to y_0$$

Se $(f(x_k,y_k))_k \to \ell \in \mathbb{R}$ indipendentemente dalla scelta della successione $(x_k,y_k)$

Può essere fatto per $\mathbb{R}^n$

Una funzione è continua in $(x_0,y_0) \in D$ se $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

ES

$$f(x) = \sin^2 x + x$$

nulla vieta di pensarla come funzione di più variabili.

$f(x,y) =$ La continuità è preservata poiché è continua $f(x)$

ES

$$f(x,y) \quad \frac{\sin^2 x + x}{y^2+1}$$

il numeratore ha UNA SOLA VARIABILE ed è continuo

il denominatore è continuo su tutto $y$.

Quoziente di 2 funzioni continue è una FUNZIONE CONTINUA

LIMITE DI FUNZIONE

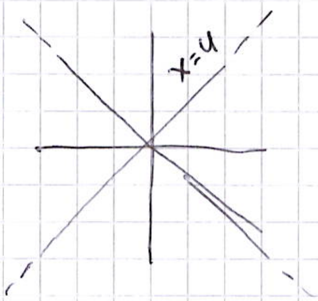
$$\overset{?}{\nexists} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} =$$

definita su $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$

= non esiste!

Ossia si considera di limitare la funzione sulla BISETTRICE

$$G f = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D \, , z = f(x,y)\}$$




$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

su tutti i punti della bisettrice la curva vale $1/2$

si prende $y=-x$

$$f(x,-x) = -\frac{1}{2} \quad \forall x = -y$$

Se si prendono quindi i punti che si avvicinano a 0 dalla bisettrice $y=x$ vale $1/2$
n a 0 dalla bisettrice $y=-x$ allora vale $-1/2$

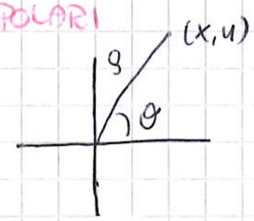
NON è RISPETTATA la condizione di limite PER QUALSIASI successione

basta trovare 2 curve $y_1(x)$ e $y_2(x)$ t.c. $f(x, y_1(x)) = C_1$, $f(x, y_2(x)) = C_2$, $C_1 \neq C_2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0 \qquad \exists = 0$$

si può verificare con le COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} \rho\cos\theta = x \\ \rho\sin\theta = y \end{cases}$$




$\rho$ = distanza dall'origine

$\theta$ = angolo

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f(x,y) = \frac{2\cancel{\rho^2}\cos^2\theta\,\rho\sin\theta}{\cancel{\rho^2}} = \left|2\rho\overbrace{\cos^2\theta\sin\theta}^{\le 1}\right| \le 2\rho\,(x_k y_k) \to 0$$

quando ci si avvicina all'origine
$\rho_k = 0$

Questo possibile quando con una stima è maggiorabile da $\rho \to \mathbb{R}$

ESERCIZI

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \quad \text{esiste?}$$

tipico errore: vedendo lungo l'asse $y$ $(x=0)$ si vede che $\cancel{x}\to 0$
prendendo $y=\alpha x$ la retta diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\alpha x}{x^4+\alpha^2x^2} \quad \alpha\in\mathbb{R} \quad x \to 0$$

vedendo che lim di tutte le rette convergenti l'origine è SEMPRE ZERO
NON si può dedurre che $\lim f(x,y) = 0$

Se si fa lim lungo la parabola $y=x^2$ $\quad f(x,x^2) = \frac{1}{2} \neq 0$

Limite non esiste.

# DOMINIO DI FUNZIONE

per una funzione ad 1 variabile è semplice

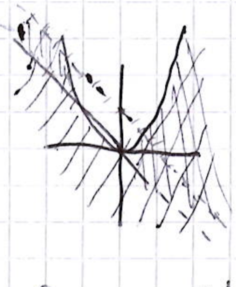
ES $\quad \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{\log(2x)}$

$$\begin{matrix} 2x>0 \\ 2x\neq 1 \\ x^2-x\geq 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x>0 & \cap \\ = x\neq \frac{1}{2} & \cap \\ \{x\leq 0 \cup x\geq 1\} & \end{matrix} \Bigg\} \; x\geq 1$$

per funzione di 2 variabili

$$\frac{\sqrt{x^2-y}}{\log(x+y)}$$

$$\begin{matrix} x+y>0 \\ x+y\neq 1 \\ x^2-y\geq 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y>-x \\ y\neq 1-x \\ = y\leq x^2 \end{matrix}$$



Il dominio è dato dall'intersezione dei vari domini.
NON È TRIVIALE!

$E \subset \mathbb{R}^n$ sottoinsieme

**Def** (1) Sia $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. $\quad U_r$ (intorno simmetrico) $(x_0,y_0) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r\}$
"INTORNO SFERICO"

(1) Si dice che $(x_0,y_0)$ è un PUNTO DI FRONTIERA di $E$ se $\forall r>0$, $U_r(x_0,y_0)\cap E \neq \{0\}$,
$U_r(x_0,y_0)\cap CE \neq 0$ (interseca sia $E$ che il suo complemento)
$\forall r$

(2) $\partial E$ = {Insieme dei punti di frontiera}

(3) $\overline{E} = E \cup \partial E$ (chiusura)

(4) $\mathring{E} = E \setminus \partial E$ (interno)

(5) E aperto se $\forall (x_0,y_0) \in E \ \exists r>0 : U_r(x_0,y_0) \subset E$

E chiuso se $\mathbb{R}/E$ è aperto

(6) E connesso (per archi) se dati due punti $(x_0,y_0), (x_1,y_1)$ esiste curva continua che li connette $\in E$

(7) E limitato se $\exists\ r\ (x_0,y_0)$ tale che $E \subset U_r(x_0,y_0)$

ES $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua Allora $\{(x,y) \mid f(x,y) \geq 0\}$ chiuso

$\{(x,y) \mid f(x,y) > 0\}$ aperto

OSS intersezione finita e di aperti è aperta
unione finita di chiusi è chiusa

Intersezione arbitraria di chiusi è chiusa
unione arbitraria di aperti è aperta

NON è detto in generale per gli altri

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + 1/n) = (0,1)$$

ES. Si consideri $E \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1,\ x^2+y^2 > 0\}$

La frontiera di E ?

(0,0) ? si

$x^2+y^2=1$
$x^2+y^2>0$
$(0,0)$

$\partial E \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \cup \{0,0\}$

$\overline{E} \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

## TEOREMA DI WEIERSTRASS (in $\mathbb{R}^n$)

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato, $f\ E \to \mathbb{R}$ continua.
f ammette massimo e minimo assoluto, quindi $\exists (x_m,y_m), (x_M,y_M) \in E$ tale che $f(x_m,y_m) \leq f(x,y) \leq f(x_M,y_M) \quad \forall (x,y) \in E$

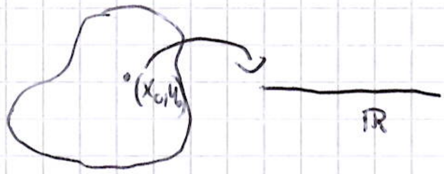
## TEOREMA DEGLI ZERI

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ connesso, $f\ E \to \mathbb{R}$ continua, $P, Q \in E$ t.c. $f(P) \cdot f(Q) < 0$
Allora $\exists\ R \in E$ t.c. $f(R) = 0$

# DERIVATA DI $\mathbb{R}^n$

$f: \underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\text{aperto}}{\mathcal{U}}} \to \mathbb{R}$ , $f(x,y)$ aperto $\mathcal{U} \ni (x_0, y_0)$

$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$




Sia dato

$f(x, y_0)$ con $y_0$ fissata.

## DERIVATA PARZIALE

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) \overset{def}{=} \frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se $\exists \lim$ f ammette "derivata parziale" x nel punto $(x_0, y_0)$

Stessa cosa si può dire per y

Si considera $f(x_0, y)$ con $x_0$ fissata.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

"derivata parziale" in y nel punto $(x_0, y_0)$

In $\mathbb{R}^n$ esisteranno n derivate parziali per $x_i$

## GRADIENTE

$(\vec{\nabla} f)(x_1, \dots x_n)$ = vettore le cui coordinate sono le derivate parziali rispetto alla componente $x_i$

$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots x_n)$

per $n=2$

$f(x,y)$ $(\vec{\nabla} f)(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$

ES 1

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3_3, y^2_2)\Big|_{(x_0,y_0)=(1,2)} = \quad , \quad \frac{d}{dx} = 4x^3_i\Big|_{x=1} = 12x^2 = 12$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 y^2)\Big|_{(x,y)=(1,2)} = 2y\Big|_{y=2} = 4$$

ES 2

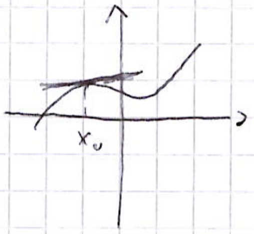
$$\frac{\partial}{\partial x}(y\cdot\sqrt{x})\Big|_{(0,0)} = \lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

Def: $f$ __derivabile__ in $(x_0,y_0)$ se $\exists\,(\vec{\nabla} f)(x_0,y_0)$

$y = f(x)$

retta tangente al grafico di $f$ nel punto $(x_0, f(x_0))$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

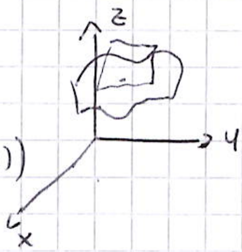


in 2 variabili

$z = f(x,y)$

piano tangente alla superficie di $f$ nel punto $(x,y,f(x,y))$

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$



__OSS!__ la derivabilità in $(x_0,y_0)$ NON IMPLICA continuità in $(x_0,y_0)$

ES $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{con } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{con } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

derivabile in $(0,0)$?

- la funzione sugli assi vale sempre 0: esistono $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}$
- funzione __NON continua__ per $(0,0)$, poiché $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$

inoltre continuità NON implica DERIVABILITÀ in $(x_0,y_0)$
[basta considerare $f(x,y) = |x|$]

derivabilità $\not\Leftrightarrow$ continuità

vettore

$\exists f(x)$ t.c. $= f(x_0) - A \cdot (x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$

$A = Df(x_0)$

DEF: $f$ __differenziabile__ in $(x_0,y_0)$ se

$$\underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)}_{\text{incremento } \Delta f} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}_{df \text{ "differenziale" in } (x_0,y_0)} + \underbrace{o(\sqrt{h^2+k^2})}_{\text{ERRORE}}$$

Si chiede che $\exists \frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

i.e. il $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$\Delta f = df + o(\sqrt{h^2-k^2})$$

OSS $\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) = 0$. La differenziabilità implica derivabilità e CONTINUITÀ in $(x_0,y_0)$ : esiste il piano tangente

TEOREMA (condizione sufficiente di Diff) $(n=2)$

Sia $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ t.ch. $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ in $\mathcal{U}$ e sono CONTINUE in $\mathcal{U}$.

Allora $f$ è differenziabile in $\mathcal{U}$

ES
$$f(x,y) \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[ differenz $\Rightarrow$ derivabilità ] ($\not\Leftarrow$)

$\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$ la funzione ammette derivate parziali e che esse sono continue nell'aperto.

La funzione è quindi differenziabile in tutti i punti tranne l'ORIGINE

ES
$$f(x,y) \begin{cases} \frac{x^2}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

trovare i punti di $\mathbb{R}^2$ per cui $f(x,y)$ sia DIFFERENZIABILE

$\mathbb{R}^2 / \{(x,y) : y = 0\}$ = aperto! $\mathcal{U}$

sull'aperto definito la derivata parziale esiste ed è CONTINUA nella derivata parziale DIFFERENZIABILE in $\mathcal{U}$

punti dell'asse $x$:

- nell'origine $(x=0)$ è differenziabile?
  - $D_x(0,0) = 0$ ~~perché~~
  - $D_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(0,h)}^{0} - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{h} = 0$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - D_x(0,0) - D_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \text{? NO!}$$

se calcolata con $y = x^2$ $f(x,x^2) = 1$

denominatore va a zero, quindi $\lim \neq 0$

- diversi dall'ORIGINE $(x_0, 0)$ $x_0 \neq 0$

nell'intorno $(x, y \pm h)$ la funzione NON è CONTINUA, ma $\frac{c}{0} = \infty$

Def: $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

$$C^1(\mathcal{U}) = \left\{ f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\mathcal{U}) \right\}$$

Se $f \in C^1(\mathcal{U})$ allora è differenziabile

ES $z = x^2 + y^2$

piano tangente in $(1,1)$

- $D_x(1,1) = 2x = 2$
- $D_y(1,1) = 2y = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 = \frac{\partial f}{\partial y} = f(1,1)$$

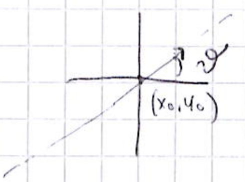
$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1) = 2x + 2y - 2 = 2(x+y-1)$$

ES Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità di

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\tan(xy)-xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

# DERIVATA DIREZIONALE

$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$




$\vec{v}=(\cos\vartheta,\sin\vartheta)$

$(|\vec{v}|=1)$

$\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{u}=(u_1,\dots,u_n)$ $\quad\vec{v}=(v_1,\dots,v_n)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}\overset{DEF}{=}\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\in\mathbb{R}$ Prodotto SCALARE

$\left(\vec{u}\cdot\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}u_i^2\geq0\right)\Rightarrow\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=$ NORMA, o lunghezza, di $u$

$<\vec{u},\vec{v}>=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\vartheta$

$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$

i punti della retta sono dati da "PARAMETRIZZAZIONE" $\begin{cases}x(t)=x_0+t\cos\vartheta\\ y(t)=y_0+t\sin\vartheta\end{cases}$

$f(x_0+t\cos\vartheta,y_0+t\sin\vartheta)=$ funzione $g(t)$ definita dalla sola variabile $t$

<u>Def</u>. $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ $\quad(x_0,y_0)\in\mathcal{U}$, $\vec{v}=(\cos\vartheta,\sin\vartheta)$ versore

$$D_{\vec{v}}f:=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t\cos\vartheta,y_0+t\sin\vartheta)-f(x_0,y_0)}{t}=g'(t)\Big|_{t=0}$$

Derivata "direzionale"

P es. $\vec{i}=\vec{v}=(1,0)$ $\quad(\vartheta=0)$ $\qquad\vec{j}(0,1)\quad\vartheta=\pi/2$

$D_{\vec{i}}f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ $\qquad D_{\vec{j}}f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

derivata direzionale $(1,0)$ corrisponde a derivata parziale $\partial f/\partial x$

$\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x}$

$f(x,y)=xe^{xy}$ $\qquad\begin{cases}x(t)=t\cos\vartheta\\ y(t)=t\sin\vartheta\end{cases}$

$D_{\vec{v}}f(0,0)$ (angolo generico $\vartheta$)

$g(t)=t\cos\vartheta\, e^{t^2\cos\vartheta\sin\vartheta}$

$g'(t)=\cos\vartheta\, e^{t^2\cos\vartheta\sin\vartheta}+t\cos\vartheta(2t\cos\vartheta\sin\vartheta)e^{t^2\cos\vartheta\sin\vartheta}$

$=e^{t^2\cos\vartheta\sin\vartheta}(\cos\vartheta+2t^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta)$

$D_{\vec{v}}f(0,0)=\cos\vartheta\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 y}$

$\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$(D_{\vec{v}} f)(0,0) =$

$g(t) = (t^3 \cos^2\theta \sin\theta)^{1/3} = t(\cos\theta)^{2/3} (\sin\theta)^{1/3}$

$g'(t) = (\cos\theta)^{2/3} (\sin\theta)^{1/3} = D_{\vec{v}} f$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ (ma $D_{\vec{v}} f(0,0) \neq 0$ in generale)

OSS $f$ differenziabile nell'origine ?

$\frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{\to} 0$ per $(x,y) \to (0,0)$

Teor FORMULA DEL GRADIENTE $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) \in \mathcal{U}$, $f$ differenziabile in $(x_0,y_0)$, $\|\vec{v}\| = 1$

$N=2$

Allora $(D_{\vec{v}} f)(x_0,y_0) = (\vec{\nabla} f)(x_0,y_0) \cdot \vec{v}$

$\overset{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\theta$

Dim $\frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cancel{t}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cancel{t}\sin\theta + o(t)}{t}$

$t \to 0$ $\hookrightarrow$ Differenziabilità che si è data come ipotesi in $(x_0,y_0)$

Riepilogo

$f \in C^1(\mathcal{U}) \Rightarrow f$ differenziabile in $\mathcal{U} \Rightarrow f$ continua in $\mathcal{U} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ derivabile in } \mathcal{U}\ (\exists \vec{\nabla} f) \Rightarrow f \text{ ha derivate} \\ \text{direzionali in } \mathcal{U} \text{ e vale la Formula del gradiente} \end{cases}$

tuttavia $f \in C(\mathcal{U})$, con derivate direzionali $\not\Rightarrow$ differenziabile

oppure $f$ derivabile, con derivate direzionali $\not\Rightarrow$ $f$ continua

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$

$f(x,y)$ NON continua ma con derivate parziali sempre continue

OSS: $f$ differenziabile in $(x_0,y_0)$, $\vec{\nabla} f(x_0,y_0) \neq (0,0)$

$f$ ha massima crescita con

$\vec{\nabla} f (x_0,y_0)$ fornisce la DIREZIONE con tasso di crescita massimo

Inoltre il gradiente è SEMPRE ORTOGONALE alle linee di LIVELLO infatti

Max $\|Df(x_0)\| \, \|V\| \cos\alpha$ $\alpha \in [0, 2\pi]$ con $\alpha = 0$ allora $V$ e $Df(x_0)$ paralleli

## REGOLE DI DERIVAZIONE

**Teor** $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entrambe derivabili

Allora:

$$\vec{\nabla}(\lambda f + \mu g) = \lambda \vec{\nabla} f + \mu \vec{\nabla} g$$

$$\vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} g \qquad \text{(Regola di Leibniz)}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\vec{\nabla} f - f\vec{\nabla} g}{g^2} \qquad (g \neq 0)$$

**Teor** DERIVAZIONE DI funzioni COMPOSTE

(1) $f(x,y)$ differenziabile, $g(z)$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x,y) = g(f(x,y))$$

$$(\vec{\nabla} h)(x,y) = g'(f(x,y))(\vec{\nabla} f)(x,y) \leftarrow$$

(2) $f(x,y)$, $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_2$, $r(t) = (x(t), y(t))$

$$f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t)) = g(t)$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t) \leftarrow$$

$$= \text{gradiente } (\vec{\nabla} f)\underbrace{(x(t), y(t))}_{r(t)} \cdot \vec{r}'(t) \leftarrow$$

**ES** Gradiente di una funzione radiale

$$h(x,y) = g(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\rho(x,y)}) \Rightarrow g(\rho) \qquad \text{"radiale"}$$

$$(\vec{\nabla}\rho)(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}, \frac{\partial f}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right)$$

$$(\vec{\nabla} h)(x,y) = g'(\rho) \cdot \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}\right) = \left(g'(\rho)\frac{x}{\rho}, g'(\rho)\frac{y}{\rho}\right)$$

**OSS** $|\vec{\nabla}\rho| = 1 \Rightarrow |(\vec{\nabla} h)| = |g'(\rho)|$

## Eq.$^{ne}$ del Trasporto OMOGENEO:

$$c\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \text{[eq. diff alle derivate parziali]}$$

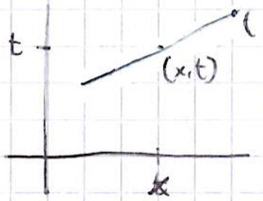
$u(x,t)$ incognita $\qquad c \in \mathbb{R}$

$$\ldots = (\vec{\nabla} f)(x,u) \cdot \vec{v} = (D_{\vec{v}} f)$$

$$\vec{v} = \frac{(c,1)}{\sqrt{1+c^2}} \Rightarrow D_{\vec{v}}\, u = 0$$

prodotto scalare del vettore normalizzato $(c,1)$ con GRADIENTE

è costante nella direzione individuata dal vettore $u$



$$u(x,t) = u(x+cs, t+s) \begin{cases} x(s) = x+cs \\ t(s) = t+s \end{cases}$$

con $s=-t$

$\to u(x-ct, 0)$

$\Downarrow$


in generale $u(x,0) =$ è il valore $u(x)$ in tempo 0

$= v(x) \Rightarrow$

$\to v(x-ct)$

al crescere del tempo la funzione TRASLA con velocità $c$

$$u(x,t) = v(x-ct) \quad \text{ove} \quad v(x) = u(x,0)$$

## OPERATORE DI LAPLACE

in $\mathbb{R}^n$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

eq.$^{ne}$ delle ONDE

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u = 0$$

eq$^{ne}$ della propagazione del calore

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u = 0$$

## GENERALIZZAZIONE DI LAGRANGE

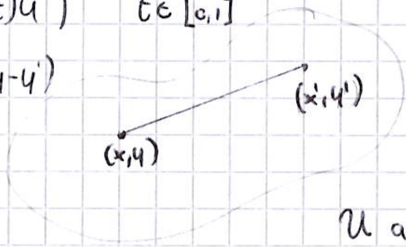
Sia $f \in C([a,b])$, derivabile in $(a,b)$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

in 2 variabili $\varphi(t) := f(tx+(1-t)x', ty+(1-t)y')$ $t\in[0,1]$

$$\overset{!}{=} f(x'+t(x-x'), y'+t(y-y'))$$

$$f(x,y) - f(x',y') =$$




$\varphi(0) = f(x',y')$

$\varphi(1) = f(x,y)$

$\mathcal{U}$ aperto
f differenziabile su $\mathcal{U}$

$\exists\, \tau \in (0,1) : \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)\cdot 1$

$$\varphi'(\tau) = \frac{\partial f}{\partial x}(\dots,\dots)\cdot(x-x') + \frac{\partial f}{\partial t}(\dots,\dots)\cdot(y-y')$$

$$\overset{!}{=} \vec{\nabla}(\dots,\dots)\cdot(x-x', y-y')$$

$= [(x,y)(x',y')]$ segmento $= \{t(x,y)+(1-t)\cdot(x',y'), t\in[0,1]\}$

$$\exists(\xi,\eta) \in \text{segmento} : (\vec{\nabla} f)(\xi,\eta)\circ(x-x', y-y')$$

$$\xi = x' + \tau(x-x')$$
$$\eta = y' + \tau(y-y')$$

## FUNZIONE A GRADIENTE NULLO

$f(x,y)$, $(\vec{\nabla} f)(x,y) = 0$ su $E \subset \mathbb{R}^2$ aperto <u>connesso</u>!

- Si può dedurre che la funzione è COSTANTE? NO

  Se si prendono 2 intervalli (aperti) a gradienti costanti, non è detto che la sua unione sia sempre costante!

Se $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^2$ aperto <u>CONNESSO</u>

allora f costante su $\mathcal{U}$

es $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = f(x,y)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y}{y^2+x^2} = 0$$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 0$ per invarianza $\left(\frac{x}{y}\right)$ e $\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\vec{\nabla} f(0,0) = 0$$

$f = f(x,y)$

Si suppone che $\exists \ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ su $\mathcal{U}$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^2$

Domanda: Si può derivare parzialmente $\frac{\partial f}{\partial x}$, e $\frac{\partial f}{\partial y}$ ?

- generalmente no, ma se possibile si trovano le DERIVATE SECONDE

$$f_{xx} \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad f_{xy} \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{yy} \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad f_{yx} \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

ES

$f(x,y) = x^2 \sin y \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos y$

$f_{xx}(x,y) = 2\sin y \qquad f_{xy}(x,y) = 2x\cos y \qquad f_{yx}(x,y) = 2x\cos y \qquad f_{yy}(x,y) = -x^2\sin y$

$f_{xy} = f_{yx}$

ES

$f(x,y) = x^3y^2 + y$

$f_x(x,y) = 3x^2y^2$

$f_y(x,y) = 2yx^3 + 1$

$f_{xx}(x,y) = 6xy^2$

$f_{xy}(x,y) = 6x^2y$

$f_{yx}(x,y) = 6x^2y$

$f_{yy}(x,y) = 4y$

$\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$ [in molti CASI]

TEOR (Schwartz): Sia $f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ definite e continue in $\mathcal{U}$ aperto $\subseteq \mathbb{R}^2$

allora le 2 derivate COINCIDONO

Def $\quad C^2(\mathcal{U}) := \left\{ f \ \middle| \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \in C(\mathcal{U}) \right\}$

Oss $\quad f \in C^2(\mathcal{U}) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in C^1(\mathcal{U})$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ differenziabili su $\mathcal{U}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sono $\in C(\mathcal{U})$

$\Rightarrow f \in C^1(\mathcal{U}) \Rightarrow f$ differenziabile

Es: $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Dom $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ esiste? } = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \overset{\to 0}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{[y(x^2-y^2)+xy(2x)](x^2+y^2) - xy(x^2-y^2)2x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$ [fuori dall'origine]

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = -\frac{h^5}{h^4} = -h = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$ segno OPPOSTO! ↯

↳ scambio x e y

Schwarz fallisce, non c'è continuità tra $f_{xy}$ e $f_{yx}$

## FORMULA DI TAYLOR, con resto di Peano

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f \in C^2(A)$, A aperto, per ogni $x_0 \in A$ vale il seguente sviluppo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x_0) h_i h_j + o(|h|^2)$$

$\begin{cases} x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) & \text{vettore} \\ h = (h_1, \dots, h_n) & \text{vettore} \end{cases}$

per $h \to 0$

cosa si intende con $o(|h|^2)$? $\lim_{h \to 0} \frac{o(|h|^2)}{|h|^2} = 0$

~~ap~~ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x_0 = (x_0, y_0)$ $h = (h, k)$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) k +$$
$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 y_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) k^2 \right] +$$
$$+ o(h^2 + k^2)$$

Essendo $f \in C^2(A)$ si usa Swartz

## DIFFERENZIALE SECONDO

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$

La funzione $d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h(h_1, \dots, h_i, \dots h_n)$

porta a $= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) h_i h_j = d^2 f(x_0)$

Si dice Differenziale secondo di f nel punto $x_0$

la matrice delle derivate PARZIALI seconde è detta HESSIANA

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$ nell'ipotesi che tutte le derivate parziali siano calcolabili si trova una matrice dei coefficienti i e j

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n \partial^2 x_1}(x_0) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

oss. Se $f \in C^2(A)$ la matrice è SIMMETRICA

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \text{ per Shwartz}$$

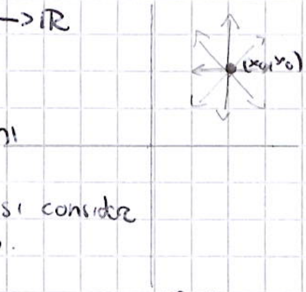
$n=2$ Differenziale SECONDO

$$d^2f(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)h^2 + 2f_{x,y}(x_0,y_0)hk + f_{yy}(x_0,y_0)k^2$$

- mappa ≡ funzione
- $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- $x \longmapsto g(x)$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = f_{xy}(x_0,y_0)$

# OTTIMIZZAZIONE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

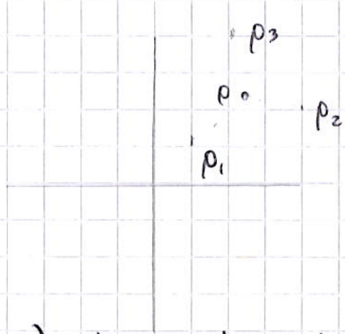



$n=2$

mettere un VINCOLO vuol dire limitare il movimento in una SOLA DIREZIONE

- Estremi liberi: punti interni di A. In particolare, si considera A sia aperto.
- Estremi vincolati: insiemi NON APERTI. ES $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\}$ | $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$
- Sulla frontiera di A

ES




$p_1(x_1,y_1)$
$p_2(x_2,y_2)$
$p_3(x_3,y_3)$

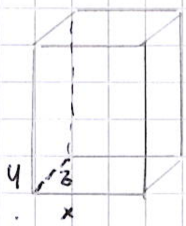
Trovare un punto tale che la distanza sia minimizzata

$$f(x,y) = d_{p,p_1} + d_{pp_2} + d_{pp_3} \qquad p=(x,y)$$

Ricerca di estremi liberi. [di minimo in questo caso]

$d_{pp_1} = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$
$d_{pp_2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$
$d_{pp_3} = \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}$

ES




superficie assegnata di $2S$

$x,y,z>0$

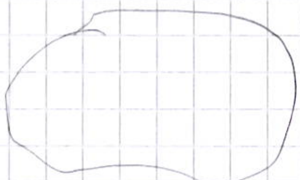
- $V(x,y,z) = xyz$

2 vincoli
$$\begin{cases} \text{si massimizza nei punti } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x>0,\ y>0,\ z>0\} \\ g(x,y,z) = 2xy+2yz+2xz = 2S \Rightarrow xy+yz+zz=S \end{cases}$$

Ricerca di estremi vincolati [di massimo in questo caso

# RICERCA DI ESTREMI LIBERI

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $A$ aperto



A

1) $x_0$ è un punto di MASSIMO (o MINIMO) ASSOLUTO per $f$ e che $f(x_0)$ è MASSIMO (risp. minimo) GLOBALE di $f$ in $A$ se

$$\forall x \in A \text{ si ha } f(x) \leq f(x_0)$$
$$(f(x) \geq f(x_0))$$

2) $x_0$ è punto di massimo (risp. minimo) relativo o locale per $f$ e che $f(x_0)$ è massimo (risp. minimo) LOCALE di $f$ in un intorno $x_0$ se

$$\exists\, \mathcal{U}_{x_0} \text{ tale che } \forall x \in \mathcal{U}_{x_0} \text{ si ha } f(x) \leq f(x_0)$$
$$(f(x) \geq f(x_0))$$

- Esistenza:

nel caso di $A$ chiuso e limitato, in cui $f$ è continua per teor di WEIERSTRASS la funzione ammette un minimo o massimo ASSOLUTO

- Unicità del massimo

~~possono~~ massimo (o minimo) GLOBALE se $\exists$ è UNICO.
i PUNTI di MASSIMO possono essere infiniti (es. $\sin x$, $\max = 1$ per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

- Ricerca e caratterizzazione dei punti estremi

2 casi.
- Estremi liberi = si usa il calcolo differenziale + teorema di Fermat
- Estremi VINCOLATI: Moltiplicatori di Lagrange

(Fermat)
**Prop:** Sia $\mathcal{U}$ aperto, $(x_0, y_0)$ punto di minimo o massimo locale per $f$, allora $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0) = \underline{0}$

**DEF**: data $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, si dice $(x_0, y_0)$ PUNTO CRITICO se $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = (0,0)$

es
$$f(x,y) = 3x^2 + y^2 - x^3 y \qquad f(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 3x^2 y \qquad \text{poniamo } \vec{\nabla} f = 0 \qquad \begin{cases} 6x - 3x^2 y = 0 \\ 2y - x^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(2 - xy) = 0 \\ 2y - x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x^3$$

la primo eq ci dice che $x = 0$ oppure $x \neq 0$, $y = \frac{2}{x}$
$x = 0$ ~~non è~~ si implica $y = 0$

$$y = \frac{2}{x} \quad \text{i.e.} \quad \frac{4 - x^4}{x} \Rightarrow 4 = x^4 \Rightarrow x \begin{cases} +\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

3 PUNTI CRITICI

$(0,0)$ $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

se $x\sqrt{2}$ $y = \sqrt{2}$
se $x = -\sqrt{2}$ $y = -\sqrt{2}$

Se $f(x_0, y_0)$ è un PUNTO CRITICO, allora bisogna guardare al differenziale secondo, come nelle funzioni in una variabile.

## FORME QUADRATICHE

**Def**: Una forma quadratica (F.Q) è un polinomio omogeneo di 2° grado su $\mathbb{R}^n$ in n variabili

i.e. $q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$ ( = (vettore h - riga -) $A$ (h - colonna) )

↳ matrice con coeff $a_{ij}$

$a_{12} h_1 h_2$

$a_{21} h_2 h_1$ Sommati sono $\underbrace{(a_{12}+a_{21})}h_1 h_2$

$\tilde{a}_{12} = \frac{a_{12}+a_{21}}{2} = \tilde{a}_{21}$ simmetrica!

OSS: Si può sempre assumere che $A$ sia simmetrica $A^t = A$

ES $n=2$ $q(h_1,h_2) = h_1^2 + 2h_2^2 - 6h_1h_2$

matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$n=3$ $q(h_1, h_2 h_3) = h_1^2 + 2h_2^2 + h_3^2 - 6h_1h_2 + 3h_1h_3$

$A \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3/2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

OSS $q(t\underline{h}) = t^2 q(h)$ (q a segno costante lungo ogni retta per l'origine)

ES $n=2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | $h_1^2 + h_2^2$ | def pos | a) $>0$ $\forall (h_1,h_2) \neq (0,0)$ |
| b | $-h_1^2 + h_2^2$ | indefinita | b) $>0$ se $h=(0,h_2)$ $<0$ per $h=(h_1,0)$ |
| c | $-h_1^2 - h_2^2$ | def neg | c) $<0$ $\forall h=(h_1,h_2) \neq (0,0)$ |
| d | $h_1^2$ | semidef pos | d) $\geq 0$ $=0$ se $h=(0,h_2) \neq (0,0)$ |
| e | $-h_1^2$ | semidef neg | e) $\leq 0$ $e=0$ se $h=(0,h_2) \neq (0,0)$ |

**DEF**: la forma quadratica $q(h)$ è detta: $[h \in \mathbb{R}^n]$

- Definita POSITIVA se $q(h) > 0$ $\forall h \neq \underline{0}$
- Definita NEGATIVA se $q(h) < 0$ $\forall h \neq \underline{0}$
- Semidefinita positiva se $q(h) \geq 0$, ma $\exists h \neq \underline{0} : q(h) = 0$
- Semidefinita negativa se $q(h) \leq 0$ e $\exists h \neq 0 : q(h) = 0$
- INDEFINITA se $\exists h : q(h) > 0$ e $\exists k : q(k) < 0$

$n=2$ $\quad q(h_1,h_2) = a h_1^2 + 2b h_1 h_2 + c h_2^2$

Matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{simmetrica}$$

1. Caso se $a=c=0 \Rightarrow A \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ Indefinita ES $q(1,1) \neq q(1,-1)$

2. Caso sia $a \neq 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $q(h_1,h_2) = \underbrace{a\left(h_1 + \frac{b}{a} h_2\right)^2}_{\geq 0} + c h_2^2 - \frac{b^2}{a} h_2^2$

$= \dfrac{ac-b^2}{a} \underbrace{h_2^2}_{\geq 0}$

Il segno dipende da

$a$ e $\dfrac{\det A}{a}$

**TEOREMA** (FQ per $n=2$): La F.Q $q(h_1,h_2)$ è

1. Definita positiva: con $a>0$ e $\det A > 0$
2. Definita NEGATIVA con $a<0$ e $\det A > 0$
3. Indefinita se $\det A < 0$
4. Semidefinita positiva se $\det A = 0$ $a>0$
5. Semidefinita negativa se $\det A = 0$ $a<0$

OSS. in $\mathbb{R}^n$ sia $A = A^t$ la matrice associata a forma quadratica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Siano i minori principali le sottomatrici costituite da $k \times k$ elementi

Allora $q$ è definita positiva se $\det A_k > 0$ $\forall k = 1 \dots n$
è definita negativa se $(-1)^k \det A_k > 0$ $\forall k = 1 \dots n$

ES

$q(h_1,h_2) = -2h_1^2 + 2h_1 h_2 - 3h_2^2$

$A \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \cdot\ -2<0 \\ \cdot\ \det(A) > 0 \end{array}\right\}$ definita negativa!

ES $\quad q(h_1,h_2,h_3) = 5h_1^2 - 8h_1 h_3 + 3h_2^2 + 4h_3^2$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{l} 5>0 \\ \det \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} > 0 \\ \det A > 0 \end{array}\right\}$ def positiva!

# TEST DEGLI AUTOVALORI

Matrice simmetrica è diagonalizzabile, quindi $q$ FQ su $\mathbb{R}^n$, $A = A^t$

A "diagonalizzabile": $\exists\, \Delta$ ortogonale t.c. $A = \Delta^t D \Delta$

ove $D$ è diagonale, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

la forma $q(\underline{h}) = \underline{h}^t A \underline{h} = h^t \Delta D \Delta^t h =$

$= (\Delta^t h)^t D \underbrace{\Delta^t h}_{h'}$

$= (h')^t D h' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (h'_i)^2$

**TEOR** $\underline{h}$ come sopra è

def. POSITIVA s.s.e $\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots n$.
def NEGATIVA s.s.e $\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, \dots n$

semidef. POSITIVA s.s.e $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots n$ ma $\exists j$ t.ch $\lambda_j = 0$
semidef NEGATIVA s.s.e $\lambda_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots n$ ma $\exists j$ t.ch. $\lambda_j = 0$

INDEFINITA se $\exists \lambda_i < 0$ e $\exists \lambda_j > 0$

ES $n=2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0 = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 =$

$= \lambda^2 - \lambda(a+c) + ac - b^2$

$= \lambda^2 - \lambda \, Tr(A) + \det A$

Se si sommano le soluzioni
$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow$

$\lambda_1 + \lambda_2 = Tr\, A$

Se si moltiplicano
$\lambda_1 \cdot \lambda_2$

$\lambda_1 \lambda_2 = \det A$

per essere def POSITIVA $\underbrace{\lambda_1 > 0 \text{ e } \lambda_2 > 0}_{\det A > 0}$, ~~o $\underbrace{\lambda_1 < 0 \text{ e } \lambda_2 < 0}_{Tr\, A < 0}$~~

per essere def NEGATIVA $\det A > 0$, $Tr\, A < 0$

**Teor.** Sia $q$ FQ su $\mathbb{R}^n$ def. positiva. Allora

$\exists c > 0 : q(\underline{h}) \geq c |\underline{h}|^2, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$

# FORMULA DI TAYLOR

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + (\vec{\nabla} f)(x,y) \circ (h,k) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)k^2\right)$$
$$+ o(h^2+k^2)$$

Con un punto critico $(\vec{\nabla} f)(x,y) = 0$

quindi lo spostamento $(h,k)$ è dato dal DIFFERENZIALE SECONDO
la matrice è HESSIANA.

Se $f(x,y) \in C^2(I)$ allora l'HESSIANA è simmetrica
perchè $f_{x,y} = f_{yx}$ per Shwartz

Casi di FQ $d^2 f(x,y)$

1) DEFINITO POSITIVO allora $\Rightarrow$ minimo relativo
Definito NEGATIVO allora $\Rightarrow$ massimo relativo ($h, k$ possono solo DIMINUIRE)

2) Indefinita allora esso è PUNTO DI SELLA

3) Semidefinito NEGATIVO non definito per vettore $= \underline{0}$
Semidefinito POSITIVO non definito per vettore $= \underline{0}$

ES

$f(x,y) = x^2 + y^2$

- Ricerca PUNTI CRITICI

$\vec{\nabla} f = 2(x,y) \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

- Studio matrice Hessiana

$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Matrice DEFINITA POSITIVA

$\Rightarrow (0,0)$ minimo locale

ES

$f(x,y) = x^2 - y^2$

punti critici

$\vec{\nabla} f = 2(x,-y) \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$

Hessiana

$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\det A < 0 \Rightarrow$ indefinito $\Rightarrow$ punto di SELLA

ES.

$f(x,y) = x^4 + y^4$

- punti critici $\vec{\nabla} f = 4(x^3, y^3)$
- Hessiana: $H = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ nessuna informazione

[fosse stato $x^4 - y^4$
allora ~~non~~ $(0,0)$ sarebbe
stato punto di sella
però $o(h^2+k^2)$]

$o(h^2+k^2) > 0$ sempre
minimo ~~rel~~ assoluto

ES

$f(x,y)\ 3x^2 + y^2 - x^3 y$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x - 3x^2 y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x^3 = 0\end{array}\right\} \quad (0,0),\ (\sqrt{2},\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},-\sqrt{2})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 - 6xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3x^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6-6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

1 $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ => def positiva => MINIMO LOCALE

2 $H_f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \det(\ ) = -48 < 0$ => SELLA

3 $H_f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) =$ => SELLA

- non esistono PUNTI di massimo e MINIMO globale

$$f(x,0) = 3x^2 \to \pm\infty \quad x \to \pm\infty$$
$$f(x,x) = 3x^2 - x^4 \to -\infty \quad x \to \pm\infty$$

$f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$\vec{\nabla} f(x,y) = 4x^3 - 12xy^2,\ 4y^3 - 12x^2y$

$\dfrac{\partial f}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2,\ f_{xy} = -24xy \qquad f_{yy} = 12y^2 - 12x^2$

- Punti critici

$$\begin{array}{l} 4x^3 - 12xy^2 = 0 \\ 4y - 12x^2y = 0 \end{array} \to \begin{cases} x(x^2-3y^2) = 0 \\ y(y^2-3x^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3}x^2 \\ y = 0 \\ y^2 - 3x^2 = 0 \Rightarrow \ +3x^2 = y^2 \end{cases} \ \nexists\ \forall x,y \neq 0$$

UNICO PUNTO => $(0,0)$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nessuna informazione né minimo locale né MASSIMO LOCALE

è limitata?

$$f(x,0) = x^4 \to +\infty$$
$$f(x,x) = -4x^4 \to -\infty$$

origine è punto di SELLA

$f(x,y,z) = 3x^2+2y^2+z^2-2xz+2x+2y+1$

$$\begin{cases} f_x = 6x-2z+2 = 0 \\ f_y = 4y+2 = 0 \\ f_z = 2z-2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 4z+2=0 \\ y=-1/2 \\ z=x \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} z=-\frac{1}{2} \\ y=-1/2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{matrix}$$

punto critico $\left(-\frac{1}{2}, -1/2, -\frac{1}{2}\right)$

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

non dipende da $(x,y,z)$

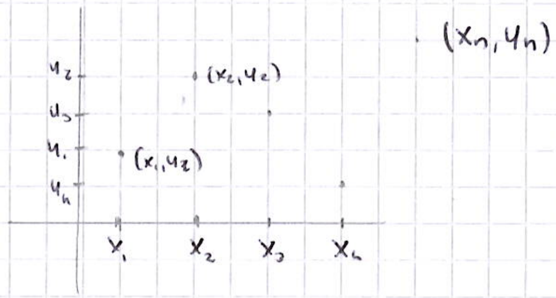
3 minori
$\det(6)\ 6>0$
$\det\begin{pmatrix}6&0\\0&4\end{pmatrix}\ 24>0$
$\det(H)\ 32>0$
$\Rightarrow$ def POSITIVA

punto critico è di MINIMO LOCALE

limitato? sì, da $-1$

$\cancel{f(z,0,z^2) = 3z^2}$

# Metodo dei MINIMI QUADRATI




Si suppone che ci sia dipendenza LINEARE da $x$, e $y$ : $y = \beta x + \alpha$
Qual'è la miglior retta che INTERPOLA MEGLIO i risultati ottenuti sperimentalmente?

Se fosse vera $y_i = \beta x_i + \alpha_i \quad \forall i = 1 \dots n$

<u>Problema</u>: determinare $\beta$ e $\alpha$ in modo tale da OTTIMIZZARE la deviazione

- MINIMIZZARE l'errore quadratico dato da $y_i - \beta x_i - \alpha_i$

(quadratico per evitare che il segno compensi)

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta x_i - \alpha)^2}_{=: E(\beta,\alpha)}$$ sia MINIMA con $x_i$ e $y_i$ dati.

MINIMIZZAZIONE!
- calcolo derivate parziali:

$$\frac{\partial E}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} 2(\beta x_i + \alpha - y_i)\, x_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} 2(\beta x_i + \alpha - y_i)$$

$\bar{x}$ = Valor MEDIO $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$E_\beta = 2\beta \bar{q} + 2\alpha \bar{x} - 2\bar{p}$$

$$E_\alpha = 2\beta \bar{x} + 2\alpha - 2\bar{y}$$

Eq punto critico

$$\begin{cases} \cancel{2}\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \cancel{2}\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i = \cancel{2} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \cancel{2}\beta \sum_{i=1}^{n} x_i + \cancel{2}\alpha \cdot n = \cancel{2} \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta \bar{q} + \alpha \bar{x} = \bar{p} \\ \beta \bar{x} + \alpha = \bar{y} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \bar{q} & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{vmatrix} = \bar{q} - \bar{x}^2 \neq 0$$

VARIANZA $\sigma^2_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^n =$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{2\bar{x}}{n} \sum x_i + \bar{x}^2$$

$$= \bar{q} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 = \bar{q} - \bar{x}^2$$

$\geq 0$ ($>0$ perche ci sono ERRORI $(x_i - \bar{x}) > 0$)

regola di Cramer

$$\bar{\beta} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{p} & \bar{x} \\ \bar{y} & 1 \end{vmatrix}}{\sigma^2_x} = \frac{\bar{p} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma^2_x}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{q} & \bar{p} \\ \bar{x} & \bar{y} \end{vmatrix}}{\sigma^2_x} = \frac{\bar{q}\bar{y} - \bar{p}\bar{x}}{\sigma^2_x}$$

$$\bar{\beta} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma^2_x} \qquad \frac{\text{COVARIANZA}}{\text{VARIANZA}}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\sigma^2_x \bar{y} - \sigma_{xy}\bar{x}}{\sigma^2_x}$$

COVARIANZA

$$\sigma^2_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$= \bar{p} - \cancel{\bar{y}}\bar{x} - \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$$

$$= \bar{p} - \bar{x}\bar{y}$$

Scrivere l'Hessiana

$$H_E(\beta,\alpha) = \begin{pmatrix} 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2n \end{pmatrix} = 2n \begin{pmatrix} \bar{q} & \bar{x} \\ \bar{x} & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{q} > 0$ definitivamente

$\det(H) = \bar{q} - \bar{x}^2 > 0$ (detto prima)

Definitivamente POSITIVA.

[$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ MINIMO LOCALE]

$$f(x,y) = \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2y^2}{2} + 2y^4$$

$$f_x = 2x^3 - 3xy^2 = 0$$
$$f_y = 8y^3 - 3x^2y = 0$$

$2x^3 - 6xy^2 = 0 \Rightarrow x(2x^2 - 6y^2) = 0$ ⟨ $x=0$ ; $2x^2 - 6y^2 = 0$

$8y^3 - 6x^2y = 0 \Rightarrow y(8y^2 - 6x^2) = 0$ ⟨ $y=0$ ; $4y^2 - 3x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 3y^2 \quad \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

$$H = \begin{pmatrix} 6x^2 - 3y^2 & -6\cdot yx \\ -6yx & 24y^2 - 3x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nessun' informazione

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4\right) = \frac{1}{2}\left[\left(x^2 - 2y^2\right)^2 + x^2y^2\right] \geq 0$$

$(0,0)$ punto di MINIMO ASSOLUTO

ES

$$f(x,y) = xy - e^{xy}$$

$$\begin{cases} f_x = y - ye^{xy} = y(1 - e^{xy}) \\ f_y = x - xe^{xy} = x(1 - e^{xy}) \end{cases} = 0$$

⟨ $e^{xy} = 1 \Rightarrow xy = 0$ ; $y = 0$ — verifica!

⟨ $x = 0$ ; $e^{xy} = 1$ — $xy = 0$

$(x,0)$ punti critici
$(0,y)$ punti critici

$$H = \begin{pmatrix} -y^2e^{xy} & 1 - e^{xy} - xye^{xy} \\ 1 - e^{xy}(1+xy) & -x^2e^{xy} \end{pmatrix}$$

$H(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}$ $\det(H) = 0$

$H(0,y) = \begin{pmatrix} -y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(H) = 0$

Si consideri

$t = xy$
$g(t) = t - e^t$

$f(x,y) = g(xy)$

Si studia

$g'(t) = 1 - e^t > 0$ per $t < 0$
$< 0$ per $t > 0$

$\Downarrow$

$t = 0$ ha punto di MASSIMO assoluto

$\Downarrow$

$xy = 0$ sono punti di massimo assoluto $(x,0)$, $(y,0)$ sono massimi assoluti

$f(x,y) \leq -1$ $\quad -1$ MASSIMO ASSOLUTO

$f(x,y) = (y-x^3)(y-2x^3) = y^2 - 2x^3y - x^3y + 2x^6$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2(y-2x^3) + (y-x^3)(-6x^2) = \cancel{2}x^2y - 3x^2y + 12x^5 = -3x^2\left[3y - 4x^3\right] = 0$

$-3x^2(3y-4x^3)$ $\begin{cases} x=0 \\ 3y = \frac{4x^3}{3} \end{cases}$

$2y - 3x^3$ $\quad y = \frac{3}{2}x^3$

$\frac{\partial f}{\partial y} = y - 2x^3 + (y - x^3) = 2y - 3x^3 = 0$

$(0,0)$ punto critico

$f(0,0) = 0$

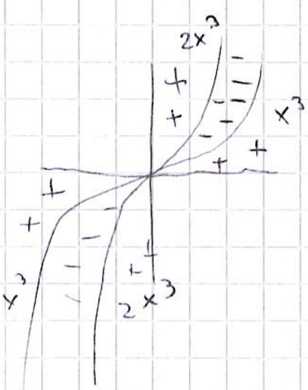
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $-18xy^3 + 24x^4 + 36x^6 = -18xy + 10x^4$

$-9x^2$

$2$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ [semidefinita positiva]

quando $f(x,y)$ positiva?




$y = x^3$
$y = 2x^3$

$y > 2x^3$ $\quad f(x,y) > 0$
$y < x^3$ $\quad f(x,y) > 0$

l'origine è PUNTO DI SELLA, poiché in un intorno la funzione è POSITIVA e NEGATIVA

$(0,0)$ punto di SELLA

LIMITATA SUPERIORMENTE/INFERIORMENTE?

NO!

$f(x,y) = x^3y^2 - 3xy + 1$

$f_x = 3x^2y^2 - 3y = 0 \quad = y(x^2y - 1) = 0$ $\qquad (0,0)$ punto CRITICO $\qquad f(0,0) = 1$
$f_y = 2x^3y - 3x = 0 \quad x(2x^2y - 3) = 0$

$f_{xx} = 2xy^2 \qquad f_{xy} = (x^2y - 1) + x^2y = 2x^2y - 1 \qquad f_{yy} = 2x^3$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ ~~def~~ NEGATIVA $Det(H) < 0$ $\quad$ SELLA

$f(x,y) - f(0,0) = x^3 + y^2 - 3xy = xy(x^2y - 3)$ $\quad$ positiva per entrambi positivi

$y > 3/x^2$ $\quad$ per $xy > 0$

oppure

$y < \frac{3}{x^2}$ $\quad$ per $xy < 0$

all'origine è è punto di SELLA

# TEOR DI WEIERSTRASS (su n-variabili)

Sia $f: E \to \mathbb{R}$ continua, con $E \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato

$f$ ammette MASSIMO e MINIMO assoluto, cioè $\exists$ $\underline{x}_m$ e $\underline{x}_M$ $\in E$.

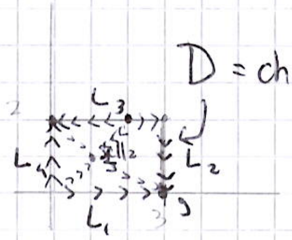
$$f(\underline{x}_m) \leq f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_M) \quad \forall \underline{x} \in E$$

ES trovare max e min assoluti di $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ su $D = \left\{(x,y): \begin{matrix} 0 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{matrix}\right\}$

2) possibilità: max e min assoluti cadano ALL'INTERNO (Fermat)

o sul bordo

D = chiuso e limitato




1.

$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad x = y$

$f_y = 2 - 2x = 0 \qquad x = 1$

$\Rightarrow (1,1)$ incluso nel dominio!

$f(1,1) = 1$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} Tr\, H > 0 \\ Det < 0 \end{matrix} \quad \text{sella! in } (1,1)$$

All'interno del dominio non ci sono max o MIN.

MAX o MIN sul bordo (su $L_1, L_2, L_3, L_4$)

$\partial D = \bigcup_{i=1}^{4} L_i$ Bordo

- $L_1$ insieme $(x,0)$ $0 \leq x \leq 3$
  Su $L_1$ calcolare

  $f(x,0) = x^2$, $0 \leq x \leq 3$ $= x \in [0,3]$ Cresce! MAX in 3 $f(3,0) = 9$

$L_2$ $(3,y)$ $y \in [0,2]$

$f(3,y) = 9 - 6y + 2y = 9 - 4y \big|_{0 \leq y \leq 2}$ decresce MIN in $y = 2$ $f(2) = 1$

$L_3$ $f(x,2)$ $x \in [0,3]$

$f(x,2) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \big|_{x \in [0,3]}$ 0 in $x = 2$

$L_4$ $f(0,y)$ $y \in [0,2]$

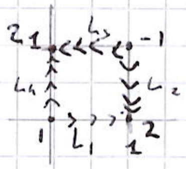
$f(0,y) = 2y$ ~~max in~~ crescente per y crescenti $f(0,0) = 0$

MINIMO ASSOLUTO $(0,0) = 0$ e $(2,2) = 0$

MASSIMO ASSOLUTO $(3,0) = 9$

ES $f(x,y) = x^4+y^4-4xy+1$ su $D = \{(x,y)\ [0,1]\times[0,1]$

$f_x = 4x^3-4y = \quad y = x^3 \Rightarrow (0,0)$
$f_y = 4y^3-4x = \quad x = y^3 \Rightarrow (1,1)$



$f(-1,-1)$ fuori da

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(1,1) = -1 \\ f(0,0) = 1 \end{matrix}$$

$H_f(0,0) \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ Det<0 SELLA

$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} > 0$ minimo locale (essendo nel bordo...)

$L_1\ (x,0)\quad x[0,1]\quad f(x,0) = x^4+1$ crescente $f(1,0) = 2$

$L_2\ (1,y)\quad y\in[0,1]\quad f(1,y) = y^4-4y+2$ dec

$L_3(x,1)\quad x\in[0,1]\quad f(x,1) = x^4-4x+2$

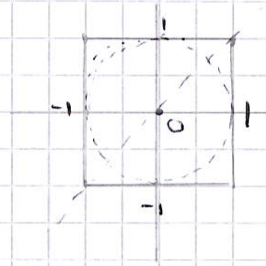
$L_4(0,y)\quad y\in[0,1]\quad f(0,y) = y^4+1$ crescente $f(0,1) = 2$

P. di MASSIMO ASS $(1,0)\ (0,1) = 2$
MINIMO ASS $(1,1) = -1$

$g(x) = x^4-4x+2$
$g'(x) = 4x^3-4 = 4(x^3-1) = 0$ per $x=1$ tra $[0,1]$ funziona $<0$ decresce

ES $f(x,y)\quad (x^2+y^2)e^{-(1+x^2+y^2)}$ su $D = [-1,1]\times[-1,1]$

punti critici, massimi e minimi locali



punti critici sono di MAX assoluto

Proprietà
- $f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0) \in \mathbb{R}^2$

$(0,0)$ è MINIMO ASSOLUTO

$f(\pm x,\pm y) = f(x,y)$ simmetria!
simmetria RADIALE (su tutti i punti della circonferenza f assume stesso valore)

Punti critici

$f_x = 2xe^{-(1+x^2+y^2)} + (x^2+y^2)(2x)e^{-(1+x^2+y^2)} = 2x(1-(x^2+y^2))\cancel{e^{-(1+x^2+y^2)}} = 0$

$f_y = 2y(1-(x^2+y^2))\cancel{e^{-(1+x^2+y^2)}} = 0$

$\begin{cases} x=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ ma

$(0,0),\ \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

$\begin{cases} y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

$(0,0)$ $(\pm1,0)$ $(0,\pm1)$

Si studia senza Hessiano [vedere negli assi!]

$\tilde{f}(r) = r^2e^{-1-r^2}$ Si studia $\tilde{f}' = 2re^{\cdots} + r^2(-2r)e^{\cdots} = 2r(1-r^2)e^{-1-r^2}$

$f(x,y) = \tilde{f}(\sqrt{x^2+y^2})$ $= 0$ $r \geq 0$ ~~oppure~~ ~~r=±1~~ per $x\,1$

esistono altri massimi e minimi locali? quindi

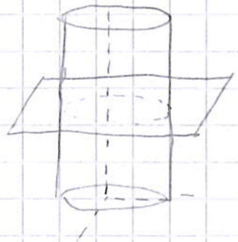
come si comporta agli estremi? (Di dominio)

## COORDINATE CILINDRICHE NELLO SPAZIO

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(\rho, \theta, t) \to (x, y, z)$

$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\sin\theta$
$z = t$



$z = t$ si ha una circonferenza

ad ogni QUOTA, sezionando il cilindro si ha n circonferenze

## COORDINATE SFERICHE

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(\rho, \varphi, \theta) \to (x, y, z)$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

x,y proiezioni del vettore sul piano xy $\theta \in [0, 2\pi]$

$\varphi \in [0, \pi]$

Definizione $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ n non necessariamente = m
definita almeno in un intorno $U_{x_0}$ di $x_0 \in \mathbb{R}^n$, salvo $x_0$ non essere definita in $x_0$

$\exists\, L \in \mathbb{R}^m$

Dire che $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ se $\lim_{x \to x_0} |f(x) - L| = 0$

$g(x) = |f(x) - L|$ è una funzione in $\mathbb{R}$!

Le COMPONENTI di $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono funzioni $f_i: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $i = 1 \dots m$ tali che

$f(x) = (f_1(x), f_2(x) \dots f_m(x))$ quindi

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f_1(x), \lim_{x\to x_0} f_2(x), \dots, \lim_{x\to x_0} f_m(x)\right)$$

$f$ continua in $x_0$ se

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. $f$ è continua in $x_0$ se $f_i$ è continua in $x_0$ $\forall i \dots m$

## differenziabilità

$f$ è differenziabile in $x_0$ se ogni $f_i$ (per $i = 1 \dots m$) è differenziabile in $x_0$

$$\forall i = 1 \dots m \quad f_i(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) h_j + O(|h|^2) \quad h \to 0$$

Si possono scrivere in forma compatta usando una NOTAZIONE MATRICIALE

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Introduce la MATRICE GIACOBIANA di $f$

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x_0)$$

[gradiente è m=1]

la differenziabilità di $f$ si esprime con la relazione

$f(x_0 + h) - f(x_0) = D_f(x_0)h + O(|h|)$ $h \to 0$

Matrice $(\underset{\text{codominio}}{m} \times \underset{\text{Dominio}}{n})$

il differenziale di $f$ nel punto $x_0$ è la funzione lineare $df(x_0)$:

$$df(x_0)h = Df(x_0)h$$

Teorema: Condizione sufficiente affinché una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sia differenziabile in A è che <u>TUTTI</u> gli elementi di $Df(x_0)$, $\forall x_0 \in A$ siano funzioni continue in A

$f$ differenziabile $\Rightarrow$ $f$ continua
$\not\Leftarrow$ $f$ derivabile e continua in derivate

NON è implicato l'inverso

Teor: Sia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ e supponiamo sia definita almeno in un intorno C di $x_0$ in A la funzione composta

$g \circ f$ da $C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ Se f è differenziabile in $x_0$ e g è " in $f(x_0) = y_0$ allora $f \circ g$ è differenziabile in $x_0$ e la sua matrice Jacobiana è il prodotto delle matrici Jacobiane di f e g calcolate in $x_0$ e $y_0$

$$D(g \circ f)(x_0) = D(g)(f(x_0)) \cdot D(f)(x_0)$$

$\hookrightarrow$ Matrice $k \times n$ $\hookrightarrow$ M $k \times m$ $\hookrightarrow$ Matrice $m \times n$ $\to$ dominio!
$\hookrightarrow$ codominio!

Superfici regolari (parametrizzate) $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Def: una superficie parametrizzata da $f = f(u, v)$ dove si dice REGOLARE se f è differenziabile in A e inoltre la mat Jacobiana di f ha rango 2 in ogni punto di A

Cosa succede se in qualche punto di A, le condizioni vengono meno, allora saranno chiamati <u>punti singolari</u>

Si prende la sfera di raggio $R > 0$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ implicitamente

in forma parametrica $f \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $f(\varphi, \theta) = (x, y, z)$

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta & & = f_1(\varphi, \theta) \\ y = R\sin\varphi\sin\theta & \varphi\,[0, \pi] & = f_2(\varphi, \theta) \\ z = R\cos\varphi & \theta\,[0, 2\pi] & = f_3(\varphi, \theta) \end{cases}$$

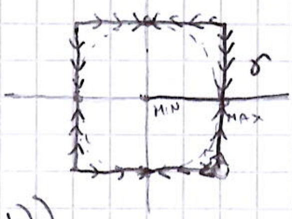
Cos'è la Jacobiana? $3 \times 2$

$$J\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{pmatrix}(\varphi, \theta) \qquad Df(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & +R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta \\ -R\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$R\sin\varphi = 0$ allora si annulla anche $(2\times 1)$ e $2\times 2$ quindi NON HA RANGO 2

sono i poli della sfera $\leftarrow$ allora per $\varphi = 0$ o $\pi$ NON ci sono punti regolari

COSA succede sul bordo




$f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-1(x^2+y^2)}$

$f|_{\gamma_1} = f(1,y) : y\,[-1,1]$

$= (1+y^2)\, e^{-(2+y^2)} \quad (= f|_{\gamma_3}\ f(-1,y))$

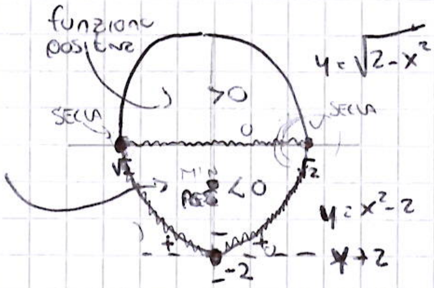
STUDIO $g(y)$

$g'(y) = 2y\, e^{-(2+y^2)} + (1+y^2)(-2y)\, e^{-(2+y^2)} = \overbrace{2y\,(1-(1+y^2))}^{-2y^3}\, e^{-(2+y^2)}$

$g'(y) > 0$ per $y<0$
$g'(y) < 0$ per $y>0$

nel punto $(\pm1, y)$ essi sono PUNTI DI MINIMO del bordo.
$-1$ è minimo locale, perché avendo simmetria radiale se ci si allontana dall'origine risulta sempre più basso.
(non globale)

ES




funzione è negativa

$f(x,y) = (y)(y+2)(y-x^2+2) = (y^2+2y)$

(a) trovare p.c. e studiarne la natura
(b) $\exists$ max e min assoluto su $\mathbb{R}^2$?
(c) trovare max e min assoluto in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2},\ x^2-2 \le y \le \sqrt{2-x^2}\}$

$f_x = (y)(y+2)(-2x) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad -x^2+2=0 \quad x^2 = \sqrt{2}$

$f_y = 2(y+1)(y-x^2+2) + (y)(y+2) = 0 \quad = (y+2)\,[2+3y]$ con $x=0$ $\quad y=-2,\ y=-2/3$

punti critici: $(0,-2)$ = sella $(0,-2/3)$
$(+\sqrt{2},0) = (-\sqrt{2},0)$ = selle

$y \quad 2+3y+3y+6 = 6y+8 = 3y+4$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3y+4 \end{pmatrix} \quad H_f$

$(0,-2/3)$ è MINIMO ASSOLUTO in D perché unico punto più basso nelle $y<0$ e punto critico

MASSIMO e MIN ASSOLUTO su $\mathbb{R}^2$?

~~MINIMO ASSOLUTO S.~~
MAX? o MIN?

$f(0,y) = (y)(y+2)^2 \to \pm\infty \quad y \to \pm\infty$

NON LIMITATA sup o inf

MAX assoluto su D?

# FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI A VALORI VETTORIALI

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\qquad n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

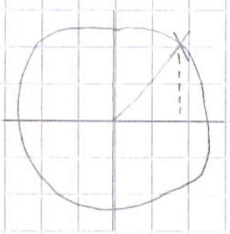
$m = n = 1 \qquad f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$m = 1 \qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

- Trasformazioni di Coordinate
- Curve/superfici in forma parametriche

Coordinate

$x^2 + y^2 = 1$



$x^2+y^2$ NON è funzione poiché per ogni $x$ ci sono più $y$,

ma il punto può essere espresso come $\cos\theta$ e $\sin\theta$

$f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$

$\hookrightarrow \theta \in [0, 2\pi]$

$f(\theta)$ essa è RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA (dipendente da param $\theta$)

$x^2+y^2=1$ è rappresentazione IMPLICITA (non della forma $x = y$

Stessa cosa si fa per la SFERA

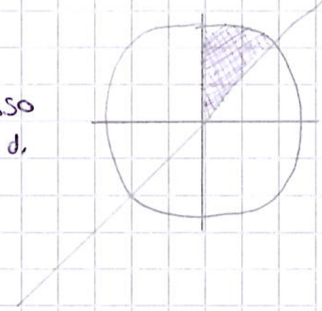
$x^2+y^2+z^2=1$

ha rappresentazione parametrica con $\varphi$, e $\theta$

$f(\varphi, \theta) = (x, y, z)$

$$\begin{cases} x = \sin\varphi\cos\theta \cdot R \\ y = \sin\varphi\sin\theta \cdot R \\ z = \cos\varphi \cdot R \end{cases}$$

$\times R$ con $\mathbb{R}$ fisso come raggio di sfera $> 0$




TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(x, y) \longrightarrow (\rho, \theta)$ è possibile fare l'inverso? sì $\leftarrow$

Coordinate POLARI sul piano

$f\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(\rho, \theta) \rightarrow (x, y)$ $\qquad x = \rho\cos\theta \qquad \rho \in [0, \infty) \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \rho$

$\qquad\qquad\qquad\qquad y = \rho\sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

in questo caso $\rho$ è variabile

# INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

$f: I \to \mathbb{R}$

$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$|x_{i+1} - x_i| = \frac{b-a}{n}$

Si sceglie

$\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$ $i = 1 \dots n$

Si considera SOMMA CAUCHY - RIEMANN

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

Si studia il comportamento per $n \to \infty$, e se $\exists$ ed è indipendente dalla scelta di $\xi_i$

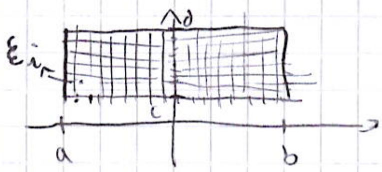
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$n=2$

↳ In due variabili ?

$f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

Si segue la stessa procedura




$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$

Si dividono gli intervalli in n parti. verranno $n^2$ spazi di AREA $\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$

Si prende un punto

$\xi_{ij} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ $1 \leq i,j \leq n$

E si calcola SOMMA di CAUCHY - RIEMANN di

$$\frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} f(\xi_{ij}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{SE } \exists \text{ ed è finito}} \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

Integrale DOPPIO di f

OSS: le funzioni CONTINUE sono INTEGRABILI **Teor** $f \in C([a,b] \times [c,d])$

Come per gli integrali a 1 variabili, l'INTERPRETAZIONE GEOMETRICA è ~~come~~ il VOLUME con segno della funzione.

OSS: Non tutte le funzioni $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ sono integrabili!
$a=0=c$ $b=1=d$

ES

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

NON INTEGRABILE, valore cambia a seconda dello $\xi_i$ scelto

$f: \Omega \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\Omega$ continua

come si calcola

$$\iint \overset{\tilde{f}(x,y)}{f(x,y)}\, dx\,dy = ?$$

$\Omega \in [a,b] \times [c,d]$

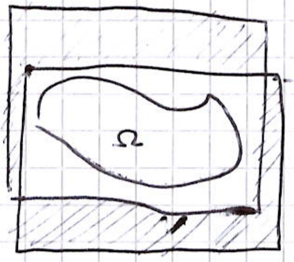
Supponiamo che $f(x,y)$ è continua, ma $\tilde{f}(x,y)$ lo è?

$\Omega$ non è rettangolo necessariamente!

$\Omega \in [a,b] \times [c,d]$ in cui è definita.

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin \Omega \end{cases}$$

Per fare sì che la funzione non cambi dalla scelta del rettangolo




ES

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ [0,1] \times [0,1] \mid x \in \mathbb{Q}\}$$

$f(x,y) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}$

Si prende $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) = 1 & \text{su } \Omega \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$

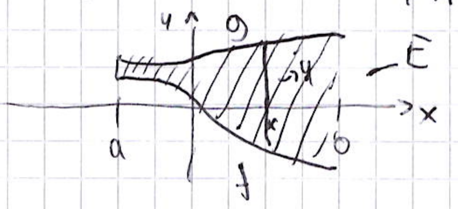
Si riprende l'esempio PRECEDENTE! non integrabile

Quali SONO GLI INSIEMI su cui si può integrare?

Def: il sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ è detto

(1) $y$-semplice se $\exists\ a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$, $g_1, g_2$ continue in $[a,b]$:

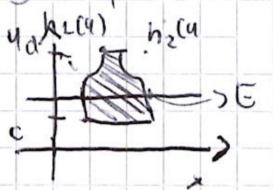
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$




l'intersezione di una retta verticale con E trova un SEGMENTO o l'insieme vuoto

(2) $x$-semplice se $\exists\ c,d$, con $c<d$, $h_1, h_2 \in C([c,d])$

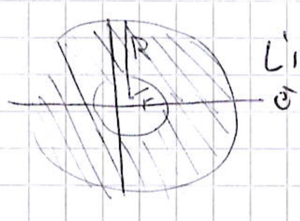
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d\ \ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$



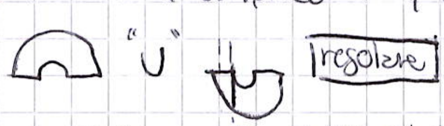

(3) semplice, se $x$-semplice o $y$-semplice (almeno una delle due)

(4) regolare se unione finita ("disgiunta") di insiemi semplici

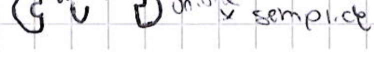
ES




L'insieme NON è $x$-semplice o $y$-semplice (retta verticale e orizzontale trova 2 segmenti)

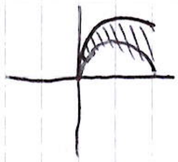



perchè gli insiemi sono $y$-semplici oppure



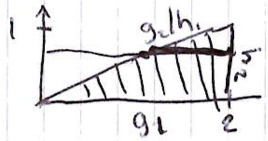
ES

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\,[0,1]\,,\ x(1-x)\leq y\leq x(2-x^2)\}$$



Insieme y-semplice.

ES




$=$ y-semplice $=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,2]\quad 0\leq y\leq \frac{1}{2}x\}$

x-semplice $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[0,1]\ +2y\leq x\leq 2\}$

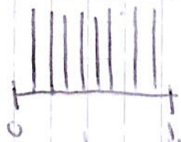
OSS: Un insieme regolare è limitato perchè gli insiemi semplici sono limitati (perchè unioni finite di insiemi limitati sono limitati.)

Un insieme semplice è limitato perchè la variabile indipendente è limitata e la variabile ~~indipendente~~ dipendente è limitata tra due funzioni continue, e per Weierstrass sono limitate da un massimo e un ~~minimo~~ minimo

ES 2

$$\Omega=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1] \mid x\in\mathbb{Q}\}$$ regolare?

NO




$\mathbb{Q}\cap[0,1]$

l'unione è numerabile, non finita!

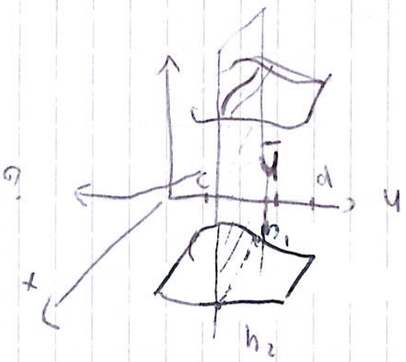
fosse stato $\mathbb{N}\cap[0,+\infty)$ sarebbe stato regolare

COME DEFINIRE?

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dx$$

$\Omega$ semplice, $f:\Omega\to\mathbb{R}$ continua.

Per esempio $\Omega$ = x-semplice




Qual'è l'area della superficie barrata?

$y=\bar{y}$ è integrale

$$\int_{h_1(\bar{y})}^{h_2(\bar{y})} f(x,\bar{y})\,dx$$

aggiungendo un dy ad $\bar{y}$ si aggiunge

$$\text{~~Area~~}\int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,\bar{y})\,dx\right)dy$$

con $\Omega$ x-semplice

↳ Integrale INTERNO

↳ Integrale ESTERNO

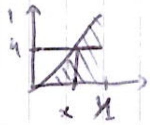
$$\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(\bar{x},y)\,dy\right)dx$$

con $\Omega$ y-semplice

Se infine $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$ è regolare allora

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Omega_i} f(x,y)\,dx\,dy$$

ES

$T =$  $\quad f(x,y) = xy$

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy \overset{y\text{-simpl.}}{=} \int_0^1 \left( \int_0^x xy\,dy \right) dx = \int_0^1 x \left( \frac{y^2}{2}\Big|_0^x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{8}}$$

X semplice

$$\int_0^1 \left( \int_y^1 xy\,dx \right) dy = \int_0^1 y \left( \frac{x^2}{2} \right)_y^1 dy = \frac{1}{2}\int y(1-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}$$

PROPRIETÀ dell'integrale doppio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare, $f, g \in C(\bar{D})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1. Linearità: $\iint_D [\lambda f(x,y) + \mu g(x,y)]\,dx\,dy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \mu \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$

2. Monotonia $f \geq g$ su $D \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$

3. Additività rispetto al dominio di integrazione: $|D \cap D'| = 0$ [$|\cdot|$: area] allora $\iint_{D \cup D'} f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy$$

4 (i) se $|D| = 0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$

(ii) se $|D| > 0$ e $f(x,y) \geq 0$ su D allora $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0 \Rightarrow f = 0$ su D

(iii) su U aperto e $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0 \ \forall D \subset U$ allora $f \equiv 0$ su U

5 D connesso, allora $\exists (x_0, y_0) \in D$: $\frac{1}{|D|} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0, y_0)$

6 $\left| \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy \leq \left( \sup_{(x,y) \in D} |f(x,y)| \right) |D|$

# BARICENTRO

$D$ lamina materiale (lamina, corpo sottile quasi 2d)

$\rho(x,y)$ densità puntuale

La massa totale di $D$ sarà $M = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy \overset{\rho \text{ costante}}{=} \rho|D|$

le coordinate $(\bar{x},\bar{y})$ del baricentro sono definite da $\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy$$

es

$T$ = triangolo di vertici $(0,0),(1,0),(0,1)$ Trovare BARICENTRO nei casi:

(a) $\rho$ costante

b $\rho(x,y) = c(x+1)$

 $y = -x+1$

caso a

$$|T| = \iint_T 1\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 1\,dy\right) dx = \int_0^1 1-x\,dx = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{|T|}\iint_D x\,dx\,dy = 2\int_0^1 x(1-x)\,dx = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3} = \bar{y}$$

$\cancel{\bar{y} = 2}$

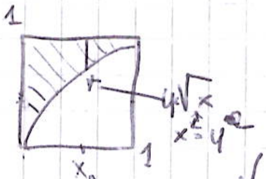
caso b) essendo la densità dipendente Non c'è simmetria

$$M = c\iint_T (x+1)\,dx\,dy = c\int_0^1 (x+1)\left(\int_0^{1-x} dy\right) dx = c\int_0^1 (1+x)(1-x)\,dx = c\,1 - \int_0^1 x^2\,dx = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}c$$

$$\bar{x} = \frac{c}{2}\iint_T (x+1)\,x\,dx\,dy = \frac{3}{2}\int_0^1 (x+1)x\int dy = \frac{3}{2}\int_0^1 (x+1)(x)(1-x) = \frac{3}{2}\int_0^1 x - x^3\,dx \overset{!}{=} \frac{3}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{2}\iint_T (x+1)\,y\,dx\,dy = \int_0^1 x+1 \int_0^{1-x} y\,dy\,dx =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^1 (x+1)(1-x)^2\,dx = \frac{3}{4}\left[x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\cancel{3}}{4}\cdot\frac{\cancel{10}\,5}{\cancel{24}\,\cancel{8}\,4} = \frac{5}{16}$$

D: 


$$\iint_D \sin(y^3)\,dx\,dy$$

$\bar{y}$-semplici $= \int_0^1 \left( \int_{\sqrt{x}}^1 \sin y^3\, dy \right) dx = ?$

$\bar{x}$ semplice $\int_0^1 \sin(y^3) \left( \int_0^{y^2} dx \right) dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \sin(y^3)^3\, 3y^2\, dy$ integrazione per parti: $y^3 = t$, $3y^2\, dy = dt$

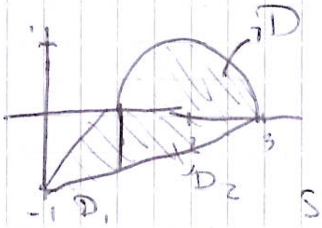
$= \frac{1}{3}\int_0^1 \sin t\, dt = \frac{1}{3} -\cos t \Big|_0^1 = 1/3\,(1-\cos 1)$

ES

$$\iint_{[-1,1]\times[-1,1]} (x+\sin y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 x\,dx \int_{-1}^1 \sin y\, dy$$

OSS $\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)\,h(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$

il dominio dev'essere un rettangolo!




Su D calcolare

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

Eq. $y = x-1$
$y = \frac{1}{3}x - 1$
$y = \sqrt{1-(x-2)^2}$

Si suddividono i due insiemi:

$D = D_1 \cup D_2$ con $D_i$ $\bar{y}$-semplice

$D_1 = \{x,y \mid x\in[0,1],\ \frac{1}{3}x-1 \le y \le x-1\}$

$D_2 = \{(x,y) \mid x\in[1,3],\ \frac{1}{3}x-1 < y \le \sqrt{1-(x-2)^2}\}$

$= \iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 x\left(\int_{\frac{1}{3}x-1}^{x-1} \cancel{x}y\,dy\right)dx + \int_1^3 x\left(\int_{\frac{1}{3}x-1}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} \cancel{x}y\,dy\right)dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[(x-1)^2 - (\tfrac{1}{3}x-1)^2\right]dx + \frac{1}{2}\int_1^3 x\left[(1-(x-2)^2) - (\tfrac{1}{3}x-1)^2\right]dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\frac{8}{9}x^2 - \frac{4}{3}x\right)dx + \frac{1}{2}\int_1^3 x\left(-\frac{10}{9}x^2 + \frac{14}{3}x - 4\right)dx$

$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{8}{9}\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{10}{9}\frac{x^4}{4} + \frac{14}{3}\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2}\right]_1^3\right\}$

$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{27}{18} + \frac{7}{2}\right\} = 1$

$\int_a^b f(x)\,dx$ con $f$ integrabile (e.g. continua)

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ $f$ integrabile (e.g. continua) con $D$ regolare

## COME CALCOLARE $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$?

Come con integrali semplici

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{=}{\overset{x=\varphi(t)}{=}} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Oss. Ta mappa $\varphi(t)$ o è monotona crescente o decrescente. Se crescente $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ l'ordine rimane. Se decrescente: valori si scambiano e si cambia il segno

Si può applicare una cosa simile sull'integrazione doppia.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \overset{\substack{x=f(u,v)\\ y=g(u,v)}}{=}$$

Si hanno due coppie di variabili: $(u,v)$, e $(x,y)$ e ad ogni punto $(u,v)$ corrisponde univoca coppia $(x,y)$

$$= \iint_{D'} f(x(u,v),\,y(u,v))\,|\det J|(u,v)\,du\,dv$$

$J$ ↳ matrice jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$D'$ = dominio $D$ in termini di coordinate $(u,v)$ in corr. biunivoca.

Cambiamento in coordinate POLARI

ES $u=\rho$
$v=\theta$

↳ $x=\rho\cos\theta$ $(=f(\rho,\theta))$
$y=\rho\sin\theta$ $(=g(\rho,\theta))$

Solitamente si fanno cambi di variabili con $|J|\geq 0$

quindi ↳ $\iint_{D'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$

$$J=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}$$

$|J| = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho \geq 0$

Esso funziona in $n$ variabili!

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

con $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\varphi$ angolo con asse $z$

$\theta$ angolo polare della proiezione su $(x,y)$

$\varphi\in[0,\pi]$; ~~$\varphi[-\pi,\pi]$~~

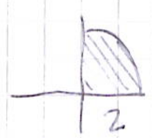
$\theta\in[0,2\pi]$

$$J=\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{pmatrix}$$

$|J| = \rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin^3\varphi\sin^2\theta +$
$+\rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^3\varphi\cos^2\theta =$
$= \rho^2(\sin^3\varphi + \cos^2\varphi\sin\varphi) =$

$|J| = \rho^2(\sin\varphi) > 0$ per ogni punto eccetto $\varphi = 0, \pi$

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad D\left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$$




con coord polar.

$$= \iint_{D'} \frac{\rho^3 \cos\theta \sin^2\theta}{\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta \qquad D'\left\{(\rho,\theta) : \rho^2 \in [0,2],\ \theta \in [0,\pi/2]\right\}$$

$D' : [0,2] \times [0,\frac{\pi}{2}]$

$$= \int_0^2 \rho^2\,d\rho \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin^2\theta\,d\theta = \frac{8}{9}$$

Es Calcolo volume ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$V = 2c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$$

trovare z come funzione (x, y)

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

1 calcolo $x' = \frac{x}{a}$ $y' = \frac{y}{b}$

$$D = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \quad \text{per } z = 0 \ \ (\text{intersecato } (x,y))$$

2 coordinate polar. $x'$, $y'$
(simmetria rotazionale

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}$$ coord. ellittiche

$$2c \iint_{D'} \sqrt{1-\rho^2}\ |J| = ab\rho\ d\rho\,d\theta = 2abc \iint_{D'} \sqrt{1-\rho^2}\,d\rho\,d\theta$$

$D' : \rho^2 < 1$
$[0,1] \times [0, 2\pi]$

$$\cancel{2\pi}\ abc \int_0 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho$$

$$V_{\text{ellissoide}} = \frac{4}{3}\pi abc$$

## Trasformazioni di coordinate e invertibilità

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ha senso parlare di invertibilità)

Quand'è che $f$ è INVERTIBILE?

Si suppone che $f$ sia lineare (spazio vettoriale)

- $f(\lambda V + \mu W) = \lambda f(V) + \mu f(W)$

$f(x) = A(x)$

~~Quando~~ $f$ invertibile se $\det A \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} &f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ &f^{-1}(x) = A^{-1}x \end{aligned}\right\} \text{Inversione GLOBALE}$$

Se $f$ NON lineare non è intuitiva la sua invertibilità GLOBALE
Si può fare localmente in un intorno sferico

Per si usa la matrice Jacobiana:
- funzione continua e ~~con derivabile~~ derivabile, [differenziabile]

$f \in C^1(A)$

Teorema di INVERTIBILITÀ LOCALE: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ A aperto
$f: C^1(A)$

Supponiamo che per $x_0 \in A$ si abbia $\det(J) \neq 0$

$\left.\begin{array}{l}\text{Esistono intorni nel punto } x_0 \\ \text{intorno } V \text{ di } f(x_0)\end{array}\right\}$ tali che $f$ è biunivoco, quindi localmente invertibile

Se $g: V \to U$ allora $g \in C^1(V)$ e inoltre $J(f(x_0)) = J(f(x_0))^{-1} \; \forall x \in U$

ESEMPIO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f'(x) \neq 0$ $\quad$ con $f \in C^1(A)$ $\quad f'$ è o positiva o negativa sempre

$f(x) \neq 0$ e dunque è invertibile globalmente

Es $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ $\quad$ (invertibile localmente ma non globalmente)

$(x,y) = (x, y+2\pi)$ non iniettiva globalmente!
Calcolo Jacobiana

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin x \\ e^x \sin y & e^x \cos x \end{pmatrix} = e^x(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^x \neq 0 \; \forall x$$

per ogni punto $x$ è possibile determinare un intorno $U$

Test dell'invertibilità locale nelle trasformazioni di coordinate

~~Polari~~

DEF:
Sia $A$ aperto e $\mathbb{R}^n$ una trasformazione di coordinate $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice DIFFEOMORFISMO GLOBALE se $f \in C^1(A)$, $f$ è globalmente invertibile in $A$ e la funzione $g: f(A) \to$ e $C$ in $f'(A)$

DEF:
$f$ è DIFFEOMORFISMO LOCALE se $f \in C^1(A)$ ogni punto $x_0 \in A$ ha un intorno $U \subset A$ in cui $f$ è invertibile con inversa $C^1$

COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (\rho,\theta) \to (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \qquad \rho \in [0,+\infty] \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

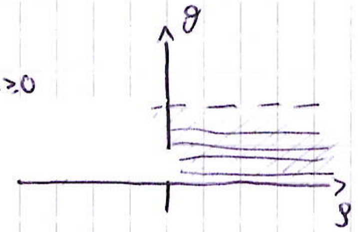
$$Df(\rho,\theta) = \rho \geq 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{si annulla per} \\ \rho = 0\end{matrix}\right)$$

il punto $\rho$ corrisponde all'origine degli assi!
↳ $(0,\theta)$ PUNTO SINGOLARE

$$A = (0,+\infty) \times (0, 2\pi)$$

$f$ ristretta ad $A$ è diffeomorfismo GLOBALE con il piano $\mathbb{R}^2$ privato di $y=0$ e $x \geq 0$

$x \geq 0$



INVERTIBILITÀ GLOBALE

Locale $\exists\, U$ intorno di $x_0$ e $V$ intorno di $f(x_0)$ tali che $g: V \to U$ biunivoca $g \in C^1(V$
Globale, $U = A$ $\quad f: A \to f(A)$
~~Globale~~ = $g: f(A) \to A$ che inverte $f$
$g \in C^1(A)$

$$\overset{\to \text{aperto}}{f: (a,b) \to \mathbb{R}} \qquad (n=1) \qquad f \in C^1(a,b)$$

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ allora $f'$ ha segno costante in $(a,b)$
$\Rightarrow f$ è invertibile globalmente

Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{matrix}\rho \in [0,+\infty) \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ t \in \mathbb{R}\end{matrix}$$

$$Df(x,y,z) \quad Df(\rho,\theta,t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1(\rho(\cos^2 + \sin \dots = \rho$$

Det $= 0$ se $\rho = 0$
se $\rho = 0$ $\quad x=0, y=0, z=t$
~~corrisponde~~

i punti singolari sono $(0,0,z)$

$f$ ristretta a $U = (0,+\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ è diffeomorfismo globale fra $U$ e $\mathbb{R}^3$
privato dei punti ~~[illegible]~~ $y=0$ e $x \geq 0$

# COORDINATE SFERICHE

$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$ $\qquad \rho \in [0,+\infty)$
$y = \rho\, \cancel{\cos\varphi}\, \sin\varphi \sin\theta$ $\qquad \varphi \in [0,\pi]$
$z = \rho \cos\varphi$ $\qquad \theta \in [0,2\pi)$

$$Df(\rho,\varphi,\theta) \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad = \rho^2 \sin\varphi$$

$\downarrow$

punti singolari $\rho = 0$, $\varphi = 0,\pi$

$\rho=0$ corrisponde all'origine degli assi $x,y,z$
$\varphi=0,\pi$ corrispondono ai poli della sfera

togliendo $\rho=0$ e $\varphi=0,\pi$ si trova un diffeomorfismo globale

$$U = (0,+\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi)$$

$\mathbb{R}^3$ privato dei punti $(x,y,z)$ privato dei punti tali che $y=0,\ x \geq 0$

ES
$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2+2x+1}\, dx\, dy \qquad D: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \quad x \leq x^2+y^2 \leq 1\}$$

$x^2+y$

Si guarda il dominio

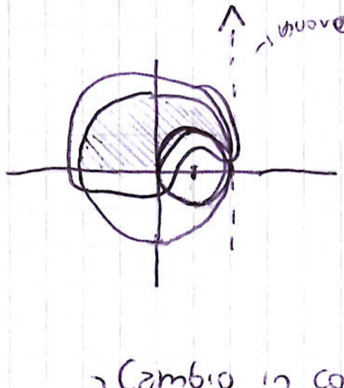
$x^2+y^2-x=0$ $\qquad x^2+y^2-x=0 \Rightarrow$
$\qquad x^2+y=1 \Rightarrow$ circonferenza di $R=1$

$x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + y^2 - \frac{1}{4}$

$= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$ circonferenza con centro $y=0$ e $x=\frac{1}{2}$ e $R = \frac{1}{2}$

$\uparrow$ nuove coordinate

grafico insieme



bordi inclusi.

Manipolo funzione

$x^2+y^2-2x+1$
$(x-1)^2+y^2 \qquad (1,0)$

$\nearrow$ Cambio in coordinate polari.
-con quale centro?
essendo il denominatore conviene in $(1,0)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta + 1 \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\iint_{D'} \frac{(\rho\cos\theta+1)(\rho\sin\theta)}{\rho^2}\, d\rho\, d\theta$$

$D' =$ $\rho\sin\theta \geq 0 \Rightarrow \sin\theta \geq 0 \Rightarrow \boxed{\theta \in [0,\pi]}$
$\rho\cos\theta + 1 \leq (\rho\cos\theta+1)^2 \rho^2\sin\theta) \leq 1$
$\rho^2\cos^2\theta + 2\rho\cos\theta + \rho^2\sin^2\theta = \rho^2 + 2\rho\cos\theta + 1$

$\rho\cos\theta + 1 \leq \rho^2\cos\theta + 1 \leq 1$
$\rho\cos\theta \leq \rho^2(\rho\cos\theta) \leq 0$
$\cos\theta \leq \rho + 2\cos\theta \leq 0$
$-\cos\theta \leq \rho \leq -2\cos\theta$

$\downarrow$

$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$\downarrow$

cos negativo poiché $\rho$ positivo

$1 \leq \rho \leq 2$

condizione sia per $\theta \in [\pi/2, \pi]$ sia per $\rho$ $[\cos\theta \leq \rho \leq -2\cos\theta]$

$$\iint \frac{(\rho\cos\theta + 1)\rho\sin}{\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta =$$

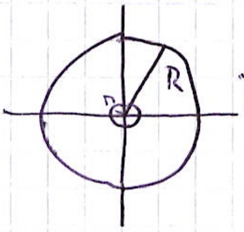
$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \left( \int_{-\cos\theta}^{-2\cos\theta} [\rho\cos\theta\sin\theta + \sin\theta]\, d\rho \right) d\theta$$

INTEGRALI IMPROPRII

$$\iint_{B_R} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,\alpha}}\, dx\, dy \qquad B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$$

Nel punto $(x,y) = 0$ non è definita!

Si mette $\varepsilon$ nel termine non definito per poi fare $\lim_{\varepsilon \to \infty} \int f(x,y)$




$B'_R \{r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2\}$ poi $\lim_{r \to 0}$

$$= \iint_{[r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2]} \frac{1}{R^\alpha}\, \rho\, d\rho\, d\theta \qquad 2\pi \int_r^R \frac{1}{\rho^{(\alpha-1)}}\, d\rho$$

$\alpha = 2$: $2\pi \log|\rho| \Big]_r^R = 2\pi(\log R - \log r)$

$\alpha \neq 2$: $2\pi \int \rho^{1-\alpha} d\rho = \frac{1}{2-\alpha}\rho^{(2-\alpha)} \Big|_r^R = \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(R^{2-\alpha} - r^{2-\alpha}\right)$

$\Rightarrow$

Si manda $\lim_{r \to 0}$:
- $\alpha = 2$ divergente!
- $\alpha < 2$ converge a $\frac{2\pi}{2-\alpha} R^{2-\alpha}$
- $\alpha > 2$ diverge!

## INTEGRALI TRIPLI!!!! (ultimo argomento se giudo)

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

① Integrazione "per fili"

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ della forma $\Omega = \{(x,y,z) \mid g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$
$(x,y) \in D$ e $g_1$ e $g_2$ continue in $D$

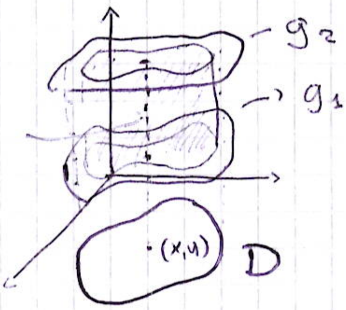
$2 = 1+1$

$3 = 2+1 = 1+2$

Un integrale triplo è un integrale doppio integrato singolarmente

$g_1$ e $g_2$ sono CONTINUE in $D$

$$\iint_D \left( \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$




Stessa cosa può essere fatta con $D$ per $(x,z)$, $(y,z)$

Esempio: (semisfera superiore, raggio $R$)

$$\iiint_\Omega x^2 z\,dx\,dy\,dz$$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2}_{D} \le R^2,\ \underset{g_1}{0} \le z \le \underset{g_2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\}$

$\Omega \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le R^2,\ 0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$\iint_{x^2+y^2 \le R^2} x^2 \left( \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\,dz \right) dx\,dy \Rightarrow \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \le R^2} x^2 (R^2-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

Passaggio in coord. polari. (J)!!

$$\frac{1}{2} \iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} \rho^2 \cos^2\theta\,(R^2-\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^R \rho^3 (R^2-\rho^2)\,d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^R \rho^3 R^2 - \rho^5\,d\rho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{R^6}{4} - \frac{R^6}{6}\right] = \frac{R^6\pi}{24}$$

~~METG~~

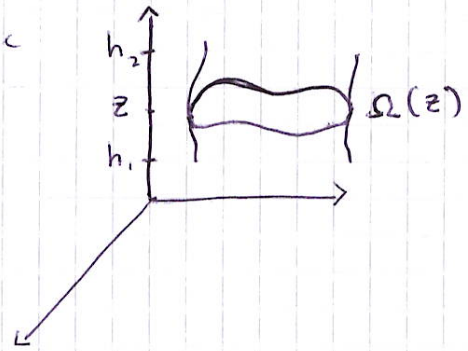
## (2) Per "Strati"

$\Omega \subset \mathbb{R}^3 \qquad \Omega \subset \{(x,y,z) : h_1 \le z \le h_2 ,\ (x,y) \in \Omega(z)\}$

↳ Dominio regolare del piano

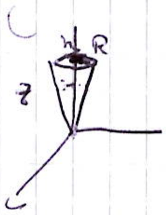
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz =$$

$\Omega(z)$ può variare per ogni $z$ è una funzione




$$= \int_{h_1}^{h_2} \left( \iint_{\Omega(z)} f(x,y,z)\, dx\,dy \right) dz$$

Esempio (cono)




$h$ altezza

$R$ raggio alla cima

$\Omega(z) = \left\{ x^2+y^2 \le \left(\frac{R}{h} z\right)^2 \right\}$

$$\iiint_{C(R,h)} x^2+y^2 \, dx\,dy\,dz = \int_0^h dz \left( \iint_{x^2+y^2 \le \left(\frac{R}{h}z\right)^2} x^2+y^2 \, dx\,dy \right) =$$

$$= \int_0^h \left( \iint_{\left[0,\frac{R}{h}z\right]\times[0,2\pi]} \rho^3 \, d\rho\, d\theta \right) dz = \frac{\pi}{2} \int_0^h \left(\frac{R}{h} z\right)^4 dz = \frac{\pi}{10} \left(\frac{R}{h}\right)^4 h^5$$

CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz \rightarrow \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\, |\det J|\, du\,dv\,dw$$

$x = x(u,v,w)$
$y = y(u,v,w)$
$z = z(u,v,w)$

per esempio coord sferiche
$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$
$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$
$z = \rho \cos\varphi$

$J = \rho^2 \sin\varphi$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $\rho(x,y,z)$ densità

$$M = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz \overset{\rho\ \text{costante}}{=} \text{Volume di } \Omega$$

$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint x\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$

$\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint y\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$

$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint z\, \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$