MATRICI

DEF: Una matrice è una tabella di numeri ordinata da righe e colonne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ 3 righe x 4 colonne.

$A(a_{ij})$

a = elemento generico
i = elemento di riga : $1 \dots n$
j = elemento di colonna : $1 \dots n$

Se $i \neq j$ A è rettangolare
Se $i = j$ A è quadrata
es
$i = j = n$ allora A si dice di ORDINE n

il vettore può essere indicato come matrice

LE OPERAZIONI CON LE MATRICI

SOMMA

DEF: Date 2 matrici A_{ij} e B_{ij} [il numero delle righe e colonne è uguale nelle matrice A e B] definisco SOMMA (+) la matrice C_{ij}

$$A_{ij} + B_{ij} = C_{ij}$$

Si sommano le componenti

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si identifica l'ELEMENTO NEUTRO

$\mathbb{0} : O_{ij} : O_{ij} = 0 \ \forall \ ij \in$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \end{matrix}$$

$A + O = A$ per proprietà COMMUTATIVA $O + A = A$

siano O, A (p,q)

Si suppone che $O(O_{ij})$ e $A(a_{ij})$

$O + A = (a_{ij} + O_{ij})$

per proprietà della somma dei numeri reali

$O_{ij} + A_{ij} = A_{ij} \Rightarrow O + A = A$

Proprietà associativa
date 3 matrici A_{pq} B_{pq} C_{pq}

$A(a_{ij})$ $B(b_{ij})$ $C(c_{ij})$

$$\underbrace{(A+B)}_{E}+C = A + \underbrace{(B+C)}_{D}$$

$i \dots p$
$j \dots q$

$A + D = E + C$

$D(ij) = (a_{ij}) + (b_{ij})$

$E(ij)$ $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})$

PRODOTTO TRA MATRICI

$\vec{v} = (v_x \, v_y \, v_z)$

$\vec{w} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ il prodotto scalare vettoriale è

$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$

1 Il numero di colonne della prima radice deve essere uguale alle righe della seconda matrice.

Supponiamo di avere A_{pq} e B_{qp} il prodotto $A \cdot B$

$$A \cdot B = C = (C_{ij}) = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj} =$$

l'elemento c_{ij} è il prodotto dell'elemento di riga per l'altro elemento della stessa colonna

a_{ik} $\quad$ b_{kj}
$i = 1 \dots p$ $\quad$ $k = 1 \dots q$
$k = 1 \dots p$ $\quad$ $j = 1 \dots r$

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \\ a_{n1} & & & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = \sum_{k=1}^{q} a_{1k} b_{k1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1q} b_{q1}$$

ES

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

possibile? le colonne della ~~riga~~ PRIMA sono uguali alle colonne della seconda

$$\begin{pmatrix} 1+1+1 & 1 \\ 1+1+1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 prima riga per prima colonna
2 prima riga per seconda colonna
3 seconda riga per ~~seconda~~ colonna
4 seco

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+2 \\ 3+0 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

ELEMENTO NEUTRO RISPETTO AL PRODOTTO

MATRICE DIAGONALE

DEF Una matrice $A(ij)$ è una matrice diagonale se e solo se $a_{ij}=0$ per ogni $\forall i \neq j$

ES $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ matrice diagonale

OSS Anche la matrice ~~nulla~~ è diagonale. δ

MATRICE IDENTITÀ

$I = (\delta_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

la matrice identità e la matrice ~~identità~~ diagonale sono quadrate.

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO

La proprietà commutativa NON VALE

ES controesempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ci stanno esempi con matrice identità $B = I$ quadrata $I(\delta_{ij})$

$A \cdot I = I \cdot A \quad = C = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj}) = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} \delta_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$

alcuni pezzi "muoiono". ovvero quando in δ $i \neq j$

$= a_{ij} = A$. poiché per ogni $n \neq j$ è 0, tranne $\delta_{jj} = 1$

$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y = c_2 \\ a_{21} x + a_{22} y = c_2 \end{cases}$

MATRICE DI COEFFICIENTI e X e Y

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$AX = Y$

$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}$ Ammesso e non concesso che esista può essere un buon modo tale che $x = A^{-1} y$

Analogia tra sistemi lineari ed equazioni di primo grado

MATRICE TRIANGOLARE

$A \to (a_{ij})$ Si definisce triangolare superiore se $a_{ij} = 0$ per $\forall i > j$

$$O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = O_{ij}$$

Si def triangolare inferiore se $a_{ij} = 0$ $\forall i < j$

Utilità

per dimostrare certi teoremi è complicato farlo in generale (Teorema di Binet) il teorema è complicato, ma con il determinante è semplice.

DEF: La matrice TRASPOSTA, data di una MATRICE $A(a_{ij})$ che si definisce A^t il cui elemento generico $C_{ij} = A_{ji}$

$$A^t = C_{ij} = a_{ji}$$

es $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = A^t\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Lungo la diagonale la trasposta è la stessa, e le altre sono ruotate

ES

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} : A^t = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} = A = (-A^t)$$

si pesa nel lato della diagonale

LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA VALE

$A(BC) = (AB)C$

$K \in \mathbb{R}$: $KA = (Ka_{ij})$

$K \in \mathbb{R}$: A, B = $K(A+B) = KA + KB$

$A(B+C) = AB + AC$

$(A+B)C = AC + BC$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(AB)^T = B^T \cdot A^T$

DIM $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$A = (a_{ik})$ $B = (b_{kj})$

DATO $D = AB = \sum d_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}$

$D^T = (d_{ji})$

$B^T = C = (c_{jk})$ $A^T = E = (e_{ki})$

$CE = \sum c_{jk} \cdot e_{ki}$

$(A \cdot B \cdot C)^T = C^T B^T A^T \overset{ASSOC}{=} ((AB)C)^T = C^T \cdot (AB)^T = C^T B^T A^T$

$\left(\prod_1^n A_i\right)^T =$ reciproco $A_n^T \cdot A_{n-1}^T \cdot \dots \cdot A_1^T = \prod_1^n A^T_{(n-i+1)}$

$\left(\sum A_i\right)^T = \sum A_i^T$

PROPRIETÀ: dato $A = (a_{ij})$ $D = A + A^T$ è simmetrica

$E = A - A^T$ è antisimmetrica

$D = D^T$ è simmetrica quindi $A + A^T = (A + A^T)^T$

$A + A^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A$ è simmetrica quindi $A + A^T$

$E = -E^T$ è antisimmetrica, quindi $A - A^T = -(A - A^T)^T$

$A - A^T = -(A - A^T)^T = -(A^T - (A^T)^T) = -(A^T - A) = A - A^T$ antisimmetrica

$M \Rightarrow$ $S = M + M^T$ simmetrica

$A = M - M^T$ Antisimmetrica

$S + A = 2M$ $M = \frac{1}{2}(S + A)$

A_i = i = da 1 a n righe A^j = j da 1 a n colonne

le righe sono LINEARMENTE INDIPENDENTI

Siano $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$

$A_1 \dots A_n$ righe di matrice

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

Si dice COMBINAZIONE LINEARE di $\lambda_i A_i$ la sommatoria in i da 1 a n

$A_1 \dots A_n$ sono linearmente indipendenti se

$$\sum \lambda_i A_i = 0 \iff \lambda_i = 0$$

ES $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$a(1\ 0) + b(1\ 1) = 0 = (0\ 0)$

$a(1\ 0) = (a, 0) \Rightarrow a+b = (a+b)(0,b) = 0, 0$
$b(1\ 1) = (b, b)$

$\begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a=0$

1 0 sono linearmente
1 1 indipendenti perche
i coeff sono 0 0

$a(1\ 1) + b(2\ 2) = (0\ 0)$

$a+2b=0$
$a+2b=0$ $\sim$ $a+2b=0 \Rightarrow$ sistema di 1 eq in 2 incognite.
ci sono coppie di valori INFINITE

$= a = -2b$

$a = -2l$
$b = l$ $\Rightarrow (-2l, l)$

in sintesi, il rango di una matrice ci dice se 2 mstrici sono LINEARMENTE DIPENDENTI

Se si trova una dipendenza tra le righe e le colonne e' stonks.
Si può riscrivere una riga come combinazione lineare delle altre:

es $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix}$ =

Siano $A_1 \dots A_n$ LINEARMENTE DIPENDENTI, e siano $\lambda_1 \dots \lambda_n$ coefficienti t.c. $\lambda_i \neq 0$ si possono scrivere

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = 0 \quad = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n = 0$$

significa che si possono scrivere righe come funzione di altre righe

$\lambda_i A_i = -\lambda_1 A_1 - \lambda_2 A_2 - \dots \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_{i+1} A_{i+1}$ = erso somma di tutti TRANNE $\lambda_i A_i$

$A_i = \sum a_j A_j \quad j \neq i$ combinazione delle altre righe eccetto la riga i-esima

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$aA_1 + bA_1 + cA_1 = 0$

$A_3 = A_1 + A_2 = A_1 + A_2 - A_3 = 0 \cdot a=1, b=1, c=-1$

DEF: Il rango di una MATRICE è il numero massimo di righe o colonne quadrate linearmente indipendenti

ES $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ possono essere individuate in sottomatrici es. rango 1 sono es con lato 2 sono 3 sottomatrici.

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

DETERMINANTE

DEF: Data una matrice A_{ij} di ordine di ordine $n \geq 1$ si definisce matrice AGGIUNTA di A_{ij}, una matrice di ordine $n-1$ ottenuta cancellando la riga i e la colonna j

ES: $A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{matrix}$

Se indichiamo il simbolo A_{ij} (Matrice aggiunta)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

DEF (determinante per matrici di ordine 1)

$$A_{\cancel{11}} = (a_{11})$$

$$Det(A) = a_{11}$$

DEF (ordine 2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$Det(A) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{22}$$

DEF (Matrici di ordine n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \dots & \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$Det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, Det(A_{ij})$$

→ Matrice aggiunta

con i costante si ha uno sviluppo secondo la riga i esima

↳ si può fare con i, mettendo lo sviluppo secondo la j-esima colonna.

esiste un'alternanza per termine (-1)

F

ES.

Si suppone di calcolare il determinante di una matrice di ordine 2 secondo la prima riga.

$$\text{Det}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

$$= \left[1 \; a_{11} \det(A_{11})\right] + \left[-1 \; a_{12} \det(A_{12})\right]$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

FORMULA DI LAPLACE $= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, \text{Det}(A_{ij})$

Si può calcolare il determinante di una matrice m sapendo come calcolare il determinante $n-1$

ES det di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sviluppo secondo la prima riga

$$\text{Det}(A) = 1 \cdot 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \underbrace{0 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{0} + \underbrace{0 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{0} =$$

$$= 1 \cdot 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \quad (1 \cdot 2) - (1 \cdot 1) = 2 - 1 = \underline{1}$$

Per teorema di Laplace il determinante è lo stesso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per teorema di Laplace conviene sviluppare il determinante dalla riga h, che HA PIÙ zeri.

$$\text{Det}(A) = 0+0+0+0 - 1 \cdot \text{Det}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcolo det. del det per riga 1.

$$-\left(+1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -\left(+1\left(-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) - 1\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)\right) = -(0 - (-1)) = -1$$

PROPRIETÀ

<u>OSS:</u> Se una matrice $A = (a_{ij})$ di ordine n ha una riga o una colonna nulla allora il $Det(A) = 0$

Teorema della trasposta

Data una matrice $A = (a_{ij})$ ordine n allora

$$Det\ A = Det\ A^t$$

Dim: det $n=2$

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$Det\ A = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$
$$Det\ A^t = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

ordine n

$$A = (a_{ij}) \qquad A^t = (a_{ji})$$

$$Det\ A \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\ det(A_{ij}) \qquad i \text{ esima}$$

$$Det\ A^t = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, \underset{a_{ij}}{\underset{\shortparallel}{a_{ji}}}\ \underset{det(A_{ij})}{\underset{\shortparallel}{det(A_{ji})}} \ldots$$

Per quello che si è detto sulla trasposta. Allora $det\ A_{ij} = det\ A_{ji}$.

Data $A = (a_{ij})$ possiamo indicare la riga i esima con $A_i = a_{i1}, a_{i2} \ldots a_{in}$ in tal caso posso scrivere le matrici come

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_n \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = (A^1\, A^2 \ldots A^n)$$

<u>Teorema</u> se p righe di una matrice sono linearmente dipendenti allora si può scrivere una riga come combinazione lineare delle altre

Dim: dire che $A_1 \ldots A_n$ sono linearmente dipendenti significa che se

$$\sum \lambda_i A_i = 0$$

esiste una somma $\lambda_i \neq 0$ così si può scrivere

$$A_i = -\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \lambda_n A_n)$$

Teorema sia $A = (A_1 \dots A_n)$

e sia $A_i = \lambda B_i + \mu C_i$

$B_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix} = (b_{i1} \dots b_{i,n})$

$C_i = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (c_{i1} \dots c_{in})$

Tesi

$$\operatorname{Det}(A) = \lambda \det(A_1 \dots B_i \dots A_n) + \mu \det(A_1 \dots C_i \dots A_n)$$

es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underset{\mu}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Det} A = \underbrace{2 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

$\operatorname{Det} A = 1$

$\operatorname{Det} b = 2 \cdot 0 - (-1) = 1$

↳ sviluppato per 1° riga

Teorema: Dato una matrice di ordine n, scambiando 2 righe o colonne il determinante cambia segno, da cui

$$\operatorname{Det}(A_1 A_2 \dots A_i \dots A_h \dots A_n) = -\det(A_1 A_2 \dots A_h \dots A_i \dots A_n)$$

prova

$n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det(A) \; a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \quad \det(B) = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22})$$

Si suppone vero per $n-1$ si dimostra per n

Se B è matrice $n \geq 3$ ottenuta scambiando la 1 esima riga per la h esima riga.

Se calcolo il determinante di una riga $k \neq i, h$

$$\det(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \, b_{kj} \det(B_{kj})$$

per ipotesi B_{kj} è una matrice di ordine $n-1$ e per essa si ha

$$\operatorname{Det}(B_{kj}) = -\operatorname{Det}(A_{kj})$$

inoltre $b_{kj} = a_{kj}$ per $k \neq i, h$

Teorema

Se in particolare una matrice di ordine n ha 2 righe uguali (o colonne uguali) allora $\det(A)=0$

dim
sfruttando il teorema

$$Det(A_1 \dots A_i \dots A_j \dots A_n)$$
$$= -Det(A_1 \dots A_j \dots A_i \dots A_n)$$

$$Det(A) = -Det(A) \Rightarrow 2\,Det(A)=0$$

Teorema
A di ord n se
se una riga o una colonna si aggiunge una combinazione lineare delle altre il risultato non cambia

A_i riga

$$A_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \lambda_k A_k$$

allora si ha $Det(A_1 \dots A_i \dots A_n) =$
$$= Det\left(A_1 \dots A_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \lambda_k A_k \dots A_n\right)$$

Teorema
Data A di ordine n
Se le righe (o colonne) sono linearmente dipendenti

$$\det(A)=0$$

Teorema: data una matrice diagonale $A=(a_{ij})$ di ordine n

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{Bmatrix} \qquad \det(A) = \prod_{i=1}^{m} a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots$$

Se $A = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = Det(A) = 1$

Laplace $\sum_{i=1}^{m} (-1)^{2i} a_{11} \det(A_{11}) \Rightarrow a_{11}\det(A_{11}) = a_{11}a_{22}\det(A_{22}) =$

$= \cancel{a_{33}}\; a_{11}a_{22}a_{33}\det(A_{33}) \dots$
$a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \underbrace{\det(A_{nn})}_{1}$

TEOR Data una matrice triangolare (sup o inf) allora il determinante di A:

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Dim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \det A^{n} = \prod_{i=1}^{m} a_{ii}$$

IL RANGO è il numero massimo di righe o colonne linearmente indipendenti

data $A = \begin{pmatrix} 2 & k & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ determinare k affinché le righe della matrice siano linearmente indipendenti.

Soluzione: trovo $\det(A) = 0$ (per casi linearmente dipendenti)
trovo $k \neq k$ tale che $\det(A) = 0$

$$\det A = -1 \begin{vmatrix} k & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = A(-k-2) + (-2-1) = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i A_i = 0 \quad = \quad a(2,1,1) + b(1\,1\,0) + c(1\,2\,-1) = (0\,0\,0)$$

$$(2a, a, a) + (b, b, 0) + (c, 2c, -c) =$$

$$= (2a+b+c, a+b+2c, a+(-c)) = (0\ 0\ 0)$$

$$\begin{cases} 2a+b+c = 0 \\ a+b+2c = 0 \\ a-c = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 3c+b=0 \\ 3c+b=0 \\ a=c \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} b=-3c \\ 3b-3b=0 \\ a=c \end{matrix}$$

es $(1,-3,1)$ con $a,b,c \neq 0$

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ = Calcolo $\det A$ senza usare Laplace direttamente

Se sostituisco una riga alla combinazione lineare il $\det(A)$ è lo stesso

$R_2 \Rightarrow R_2 - R_1$ (da riga 2 a riga 2 - riga 1)

$$A_1 + \sum_{\substack{i=1 \\ k+1}}^{n} \lambda_i A_i$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 = R_3 - R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

R.

nella prima colonna ci sta 1 solo numero, si cerca di creare una forma triangolare.

$R_3 = R_3 - R_1$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

scambio righe e colonne il determinante cambia segno

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-2-1) = -(-3) = \boxed{3}$$

Sapendo che il determinante $\neq 3$ posso dire che il rango della matrice $\underline{A = 5}$

ES

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

rango non 3 perche $A_3 = A_1 + A_2$
non 2 perche $A_2 = 2A_1$
1

MATRICE INVERSA
A di ordine N

DEF: B è inversa di A (A^{-1}) se

$$A \cdot B = A \cdot A^{-1} = I$$

$$A^{-1} A = I$$

OSS: con A di ordine 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} A = I$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ si crea una funzione di 4 eq di 4 incognite

DEF: Data una matrice A di ordine n si dice MATRICE DEI COFATTORI A una matrice B_{ij} il cui elemento generico b_{ij}

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \operatorname{Det}(A_{ij})$$

ES $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

~~teorema~~:
OSS: il determinante ammette MATRICE INVERSA se $\neq 0$

$$A(A^{-1}) = I \qquad \text{teorema di Binet}$$

$$\operatorname{Det}(A A^{-1}) = \operatorname{Det}(A) \operatorname{Det}(A^{-1}) = \operatorname{Det}(I)$$

$$\operatorname{Det} A^{-1} = \frac{1}{\operatorname{Det} A}$$

Essendo $\operatorname{Det}(I) = 1$, se il $\operatorname{Det}(A) = 0$ allora non può essere possibile

perché $0 = 1$

Teorema: Data una matrice A invertibile (con $\operatorname{Det}(A) \neq 0$) di ord. N risulta che $A^{-1} =$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\operatorname{cof}(A))^t$$

ES $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (\operatorname{cof}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Det} A = (-1) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} ((\operatorname{cof}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ => moltiplicando AB

$(A \cdot B)^{-1} (AB) = B^{-1} \cdot A^{-1} AB$

$A = B$
$\nRightarrow AC = BC$

$\Downarrow$

$I = B^{-1} \cdot \underbrace{A^{-1} A}\cdot B$

$B^{-1} I = B \Rightarrow I$

QUINDI ANCHE

$(A \cdot B \cdot C)^{-1} = A \cdot (B \cdot C)^{-1} = (B \cdot C)^{-1} A^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$

Si ricorda NON VALE LA COMMUTATIVA nelle moltiplicazioni

ES

$A \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 3+h & k-1 & k \end{pmatrix}$ studiare l'invertibilità della matrice al variare di h e k

La matrice è invertibile se il $Det(A) \neq 0$

$DET(A) = -2 \begin{vmatrix} -1 & k \\ k-1 & k \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & k \\ 3+h & k \end{vmatrix} = 0 \quad = \quad -2(-k - k^2 + k) + k(k - 3k - hk) = 0$

$= -2k^2 - 2k^2 - hk^2 = 0 \Rightarrow hk^2 \neq 0 \qquad h \neq 0 \quad e \quad k \neq 0$

Per calcolare dopo A^{-1}

$A^{-1} = \frac{1}{-hk^2}$

DOMANDE TEORICHE - Dimostrazione proprietà

$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ Si può usare la proprietà della matrice inversa se vera se falsa basta controesempio.

$({}^tA)^{-1} \cdot {}^tA = I = {}^t(A^{-1}) \cdot {}^t(A) =$ teorema trasposta

$(A A^{-1})^t$
$\hookrightarrow I^t = I$ confermato

$Det(A+B) = Det(A) + Det(B)$ vera?

Per esempio sfortunato favorevole

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underbrace{A+B}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ avendo 2 righe uguali $Det(A+B) = 0$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$1 \qquad -1 \qquad = 0$

$Det\, B = 0$
$Det\, A = 1$

$Det(A+B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$

CONTROESEMPIO!

RANGO DI MATRICE

teorema dell'Orlare

trovare max numero righe o colonne linearmente indipendenti

ES

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$Det(A) = 0$

Se ci sta almeno una sottomatrice con righe e colonne indipendenti allora il rango è DUE

ES $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ha rango 1 perché tutte le sottomatrici sono DIPENDENTI

Se si individua almeno una matrice (almeno 1)

le sottomatrici orlabili sono MENO RISPETTO a provare ogni sottomatrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

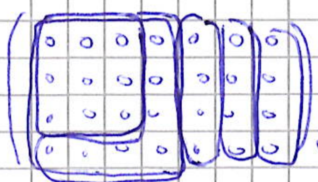
per i minori di ordine 2 posso costruire solo la MATRICE STESSA

prendendo ordine 1

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{pmatrix}$$

se solo le 4 matrici hanno determinante $= 0$ allora il rango della matrice ha numero dell'ordine 1

comodo per matrici rettangolari



Il rango MAX è 4 essendo la massima sottomatrice di ordine 4 il minor

orlando vengono 3 sottomatrici

se ha matrice con $det \neq 0$ allora posso dire che

forse ha ~~det~~ rango di 3

LA RIDUZIONE DI GAUSS-JORDAN

~~il rango~~ nel metodo di Gauss-Jordan è importante ridurre "a scalini" la matrice, avendo cura che il primo elemento sia diverso da zero (per comodità)

ES
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si scambia la prima e la seconda riga, tanto ci interessa il determinante $\neq 0$, quindi anche se si inverte non importa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow A_3 = A_3 - 2A_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ $R_3 \to R_3 - 3R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix}$ MATRICE A SCALINI

il rango della matrice è 3

i primi numeri dopo lo zero sono detti PIVOT

nel caso di una quadrata è la diagonale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$ Gli scalini in una rettangolare NON SONO UNIFORMI

Nel momento in cui la matrice è a scalini il suo rango è PARI AL NUMERO DELLE RIGHE

Nel caso in cui nella matrice si presentano dei parametri si può ~~sempre~~ fare in modo di rendere il parametro dopo la prima riga 0

$$\begin{matrix} k & 1 & 1 \\ 2k & 0 & 2 \end{matrix} \qquad R_2 \to R_2 - 2R_1 \qquad \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nel calcolo del rango ci saranno elementi parametrici

ES.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 2R_1$ (elimino 2 da 2° riga, primo numero)
$R_3 \to R_3 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Il rango è 1, con 1 pivot.

ES PARAMETRICO

$h = 0$ $\det(A) = 0$ $\quad h, k \neq 0$ $rA = 3$

$h = 0$ $k \neq 0$ sostituendo si ha

esercizio vecchio $\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 3 & k-1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 3 & k-1 & k \end{pmatrix}$ $k \neq 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Prova con Gauss-Jordan

Det $\neq 0$ Rango $= 2$
per $\forall k$ non ci sta un valore che annulla ogni determinante!

Teorema di Rouché - Capelli

Soluzione di sistemi lineari attraverso studio del rango di due matrici

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{.1} & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

1 Se $rk(A) < rk(A|B)$ il sistema non ammette soluzioni

2 Se $rk(A) = rk(A|B)$ il sistema ammette uno o più soluzioni

2a. n = numero di incognite, se $rk(A) = rk(A|B) = n$ allora ha UNA SOLA SOLUZIONE

2b. se $rk(A) = rk(A|B) < n$ il sistema ammette più soluz

Teorema di Cramer

da un sistema lineare del tipo $\begin{cases} ax + by = s_1 \\ cx + dy = s_2 \end{cases}$

si creano le sottomatrici seguenti $D = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{\text{coeff}}$ $D_x = \begin{pmatrix} s_1 & by \\ s_2 & dy \end{pmatrix}$ $D_y = \begin{pmatrix} a & s_1 \\ c & s_2 \end{pmatrix}$

termini noti, coeff x, coeff y, termini noti

Si calcolano i determinanti del coeff x e y

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb = \begin{cases} = 0 & \text{indeterminato con Cramer} \\ = l & \text{determinato} \end{cases}$$

Se è determinato allora si calcolano i determinanti D_x e D_y

$D_x = s_1 d_y - s_2 b$ $\Rightarrow$ Le soluzioni del sistema sono individuate DA =

$D_y = a s_2 - c s_1$

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

il metodo può essere applicato per matrici anche 3x3, ovvero con 3 equazioni in 3 incognite.

o più.

ES

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -2x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -2 \\ 4x_3 - 7x_4 = 1 \\ -3x_4 = 0 \end{cases} \qquad A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$rk(A|B) = 4 = rk(A) = 4 \Rightarrow$ Una sola soluzione

ES

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_3 - x_4 = -2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$rk(A) = 3 = rk(A|B) =$

risoluzione con Kramer

$$\begin{cases} x_4 = t \\ x_3 = 2 - t \\ x_2 + x_3 = 1 - t \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 - t \end{cases} \qquad x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 / \Delta \\ \Delta x_2 / \Delta \\ \Delta x_3 / \Delta \end{pmatrix}$$

$AX = Y$

$X = (\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$ è la soluzione

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \qquad (A|B) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$rk(A|B) = rk(A) = 2$ soluzione (infinite) $< n$

prendo sottomatrice con det $\neq 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + t - \overset{v}{x_4} \\ +x_2 = -(2 - t) \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1 + t - v + 2 - t$$

$$x_1 \; \frac{\begin{vmatrix} 1 + t - v & 1 \\ 2 - t & 1 \end{vmatrix}}{-1}$$

$x_2 = 2 - t$ $\qquad \Rightarrow S = (\dots, 2-t, t, v)$

$x_3 = t$ $\qquad \infty$ soluzioni

$x_4 = v$

ESERCIZI

$$A \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

I modo per determinante

$$\text{Det } A = |A| = -2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$2(1-\lambda) + (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 3\right) = 0$$

$$(1-\lambda)(\cancel{2} + 1 - 2\lambda + \lambda^2 - \cancel{3}) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda(-2+\lambda)) = 0$$

- $\lambda = 1$
- $\lambda = 0$
- $\lambda = 2$

Se $\lambda = 0$ allora A

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = 2$$

Se $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = 2$$

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Det $\neq 0 \Rightarrow R = 2$

II modo co Gauss Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 2R_2 - 3R_1 \\ \to 2R_3 - (1-\lambda)R_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -3(1-\lambda) & 2(1-\lambda) \\ 0 & -2-(1-\lambda)(1-\lambda) & 2 \end{pmatrix}$$

$$-2-(1-\lambda)(1-\lambda) \Downarrow -2-1+\lambda^2-2\lambda \Downarrow -\lambda^2+2\lambda-3$$

$$R_3 = 3(1-\lambda)R_3 - (-\lambda^2+2\lambda-3)R_2$$

pivot

$$\begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3(1-\lambda) & 2(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 2\lambda(1-\lambda)(\lambda-2) \end{pmatrix}$$

$$2\cdot(-3\cdot(1-\lambda)) - 2(1-\lambda)(-\lambda^2+2\lambda-3)$$

$$(1-\lambda)(\cancel{-6}+2\lambda^2-4\lambda+\cancel{6}) = (1-\lambda)(2\lambda\cdot(\lambda-2))$$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = 2}$ $\to$ per questi valori il rango è < 3

con $\lambda = 1$ R è 1

perché $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RIORDINARE RIGA

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \cancel{1} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Non si può usare il teorema dell'orlare

SISTEMI LINEARI

a_{ij} coefficienti di variabile

$A=(a_{ij})$ Matrice dei coefficienti $:$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

$AX = Y$

$A = a_{ij}$ coefficienti

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Teorema di Ronché - Capelli

Se A è matrice di coefficienti e A' la matrice completa IL SISTEMA HA SOLUZIONE SE E SOLO SE IL RANGO DELLA MATRICE A è uguale a quello di A'

$$rk\, A = rk\, A'$$

$x+y=1$
$x+y=2$

$$A' \begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

A ha rang 1 $\quad rk = 1$

$rk A' = 2$

$x+y=1$
$2x+2y=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & \vdots & 2 \end{pmatrix} : \quad rk A = 1 = rk A' = 1$$

in particolare se
$Y = 0$

se A è una matric

$Ax = 0$

Se A è una matrice QUADRATA e $rk\,A = n$ il sistema ha 1 soluzione IDENTICAMENTE NULLA

$$X = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

ES

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

rango $A = 2$ quadrata.

soluzione $x = 0$, $y = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad rank\,A = 2$$

Si può ridurre l'equazione $x + y = 0$

Calcolare soluzioni di sistemi lineari con matrici quadrate ordine n con rango n

Teorema di Kramer

Se A è matrice di ordine n e il rango è n allora

$$AX = Y$$

se rang $A = n$ allora è invertibile $\to A^{-1}$

$$\underbrace{A^{-1} A}_{I} X = A^{-1} Y$$

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ ax' + by' + cz' &= d' \\ ax'' + by'' + cz'' &= d'' \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A = matrice coeff. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix}$

Se voglio scrivere con cramer $\to$

$$X_1 = \frac{\left| \begin{pmatrix} c_1 & \\ \vdots & \\ c_n & \end{pmatrix} \right|}{|A|}$$

$$X_2 =$$

$$\vdots$$

$$X_n = \frac{\left| \begin{pmatrix} \cdots & c_1 \\ \cdots & c_n \end{pmatrix} \right|}{|A|}$$

$k = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & +1 & 1 \end{pmatrix}$$

$rkA = 2$

$rk($

$Det(A|B)\ 1 + 1 = 2 \Rightarrow rk\,(A|B) = 3$ quindi $> rk(A)$

~~NON HA SOLUZIONI~~

$1 + 0 - 1 = 0 \qquad rk\,(A|B) = 2 \Rightarrow 1$ soluzione

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+z=1 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$(A|B)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Det(A) = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Roche - Capel:

$$\Downarrow$$

$$rk(A|B) = 3 = rk(A)$$

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|=1} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{1} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{1} \right) = s = (2, 0, -1)$$

Riduzione di Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} x+y+z=1 \\ -y=0 \\ -z=1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gauss-jordan $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -8 & -13 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} R_3 = R_3 - 2R_2 \\ R_4 = R_4 - R_2 \end{matrix}$

$R_2 = R_2 - 2R_1$

$R_3 = R_3 - 3R_1$

$R_4 = R_4 - 2R_1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ +3x_2 + 6x_3 = +2 = \frac{1}{2}\cancel{6}^3 + 2 = \\ 4x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_4 = 0 \\ x_3 = 1/4 \\ x_2 = 7/2 \end{matrix}$$

$\cancel{kx + y + z = k}$

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ x + ky - kz = 1 \end{cases} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & k & -k & 1 \end{pmatrix} \text{ rango}$$

trovare rango A

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & k & -k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ k & k \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -k \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k(k-2k) + k + 2 + k + 1 = 0$$

$$+k^2 - 2k - 3 = 0 \quad \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \qquad \text{se } k \neq 3 \text{ e } k \neq -1$$

$\Rightarrow$ sistema ha 1 soluzione $\Rightarrow rk(A) = rk(A|B) =$

SPAZIO VETTORIALE

Un'insieme V è uno spazio vettoriale se presi ogni elemento w

$v + w \in V \qquad \forall v, w \in V$

$\forall k \in \mathbb{R} \qquad k v \in V$

Sia $V : \{ M(2x2\,\mathbb{R}) : v \in (2x2\,\mathbb{R}) : v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \}$

V è uno spazio vettoriale

1 Siano $v = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}$ $\Rightarrow w + v = \begin{pmatrix} a+a' & 0 \\ 0 & b+b' \end{pmatrix} \in V$

2 $k \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & 0 \\ 0 & kb \end{pmatrix}$ $\quad V$ è un sottospazio vettoriale (2×2)

I polinomi sono spazi vettoriali?

$P_2[x]$ = Polinomi ordinati di grado 2

$v = a + bx + cx^2 \in P_2[x]$

$w = a' + b'x + c'x^2$

$v + w = \underbrace{(a+a')} + \underbrace{(b+b')}x + \underbrace{(c+c')}x^2 \in R_2(x)$ è sempre polinomio ordinato di grado 2

$kw = \underbrace{ka} + \underbrace{kb}x + \underbrace{kc}x^2 \in P_2(x)$

ES

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R} : x + y = 0 ,\ z = 0 \right\}$ SOTTOSPAZIO VETTORIALE

Nello spazio si intuisce che x e y sono linearmente dipendenti.

Si prende v che soddisfi le proprietà descritte

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \Rightarrow \begin{matrix} x + y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$

$w = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in V = \begin{matrix} x' + y' = 0 \\ z' = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow v + w \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} = \begin{matrix} (x + x') + (y + y') = 0 \\ (z + z') = 0 \end{matrix}$

$\Downarrow$

$\underbrace{x + y}_{0} + \underbrace{x' + y'}_{0} = 0$

VERIFICATO! spazio vettoriale.

$k v : \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$ $\quad kx + ky = k\overbrace{(x+y)}^{0} = 0$

$kz = 0 \quad \rightarrow$ verificato!

CONTROESEMPIO

$$V \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x + y = 1 \quad z = 0 \right\}$$

Elementi generici

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad w \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

somma

$$\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} = \overbrace{x + y}^{1} + \overbrace{x' + y'}^{1} = 1 \notin V$$

$\Downarrow$

V NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

RIDUZIONE DI VETTORE IN VETTORI ELEMENTARI (BASI)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per essere BASI dello spazio vettoriale essi devono essere LINEARMENTE INDIPENDENTI,

dalla quale la combinazione di essi generano tutti i vettori dello spazio 2x2.

$$v = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ allora $a = b = c = d = 0$

BASE CANONICA

La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è l'insieme delle basi e_i $i = 1 \dots n$

$$B_c = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \}$$

$$e_1 \; (1, 0, 0 \dots 0)$$
$$e_2 \; (0, 1, 0 \dots 0)$$
$$e_n \; (0, 0, 0 \dots 1)$$

Le basi canoniche per i polinomi sono

$$B_n \; \{ 1, x, x^2, x^3, \dots x^n \}$$

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Sia V uno spazio vettoriale, un sottoinsieme $W \subseteq V$ è SOTTOSPAZIO VETTORIALE se valgono 2 proprietà

1. $\forall w_1, w_2 \in W$ $\qquad w_1 + w_2 \in W$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall w \in W$ $\qquad \lambda w \in W$

Ogni sottospazio vettoriale è a sua volta SPAZIO VETTORIALE

Es

$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - 3x = 0 \}$ è sottospazio? prendo w_1 e w_2

$$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \Rightarrow 2(y_1 + y_2) - 3(x_1 + x_2) = 0 ? \; \underbrace{2y_1 - 3x_1}_{0 \text{ per def}} + \underbrace{2y_2 - 3x_2}_{0 \text{ per def}} = 0$$

$$\lambda w_1 = -3\lambda x_1 + 2\lambda y_1 = 0 = \lambda \underbrace{(2y - 3x)}_{\text{per def}} = 0$$

VETTORI LINEARMENTE DIPENDENTI E INDIPENDENTI

Sia V uno spazio vettoriale e $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$. Si dice COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI $V_1, V_2 \dots V_n$ una qualunque somma del tipo

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n \in V$$

Si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI i vettori $V_1, V_2 \dots V_n$ se esiste una loro COMBINAZIONE LINEARE, con tutti coefficienti nulli, che da come RISULTATO IL VETTORE NULLO

ES vettori $V_1 (1,1,3)$, $V_2 = (0,1,1)$ e $V_3 = (1,0,2)$ dipendenti?

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

Si può creare una matrice di vettori per poi studiarne il rango

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 = 3R_2 - R_1 \\ R_3 = 3R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} R_3 = 2R_3 - R_2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rk = 2 < 3$$

dipendenti

infatti $(\lambda_1, \lambda_2 = -\lambda_1, \lambda_3 = -\lambda_1)$ sono SOLUZIONI, gli altri vettori possono essere considerati come combinazione lineare degli altri

Consideriamo 3 matrici [GENERATORI]

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

tutte e tre fanno parte del sottospazio vettoriale $M(2,2,\mathbb{R})$ - sono tutte matrici SIMMETRICHE 2x2 - nel quale il ... elemento è zero. Esistono infiniti altre matrici appartenenti al sottospazio $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$ e hanno seguente combinazione lineare.

Esiste però la possibilità di chiedersi se di tutti i sottospazi vettoriali della forma precedente ne esista uno più PICCOLO con forma

$$A = K_1 A_1 + K_2 A_2 + K_3 A_3 \quad \text{se ci si somma una matrice}$$
$$B = h_1 A_1 + h_2 A_2 + K_3 A_3 \quad \text{si trova}$$

$(K_1 + h_1) A_1 + (K_2 + h_2) A_2 + (K_3 + h_3) A_3$ che è SEMPRE sottospazio di $M(2,2,\mathbb{R})$ contenente A_1, A_2, A_3.

L'INSIEME delle combinazioni lineari dei vettori $v_1, v_2 \dots v_R$ al variare dei coeff $K_1, K_2 \dots K_n$ è un sottospazio vettoriale di V GENERATO dai vettori $\langle v_1, v_2 \dots v_R \rangle$

Dunque

$$\langle v_1, v_2 \dots v_r \rangle = \{ K_1 v_1 + K_2 v_2 + \dots + K_r v_r \mid K_i \; i = 1 \dots r \in \mathbb{R} \}$$

Nel caso precedente, ad esempio A_1 si ottiene mettendo $K_1 = 1$, $K_2 = K_3 = 0$

in quanto $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} + \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, ma così con qualsiasi combinazione $K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{R}$ si possono avere matrici APPARTENENTI al sottospazio F definito dalle matrici $(2,2,\mathbb{R})$ simmetriche e contenenti A_1, A_2, A_3

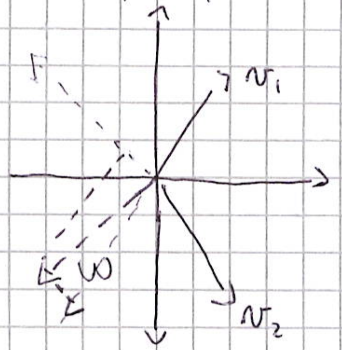
Si definisce SPAN LINEARE l'insieme di tutti i vettori che si possono scrivere come combinazione lineare di $V_1, V_2 \dots V_n$.

Lo span$(V_1, V_2, \dots V_n)$ è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE di $V_1, V_2 \dots V_n$

Geometricamente

Si può vedere che dati $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^2 \neq 0$, allora i generatori $\langle V_1, V_2 \rangle$ contiene tutti i vettori del tipo $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$.

Si tratta quindi dell'intero $\mathbb{R}^2$ se i vettori non sono paralleli, e della retta passante per l'origine e che contiene V_1 e V_2 se essi sono paralleli.



$w = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$

ogni vettore $V \in \mathbb{R}^2$ può essere considerato come generatore di $\langle v_1, v_2 \rangle$, ovvero un SISTEMA DI GENERATORI

BASI

Si dice che i vettori $V_1, V_2 \dots V_n$ sono una BASE di V se

- sono linearmente indipendenti
- sono un sistema di generatori

Le basi sono quindi interpretabili come SISTEMI DI GENERATORI meno quelli linearmente INDIPENDENTI.

Le 3 matrici, ad esempio, sono linearmente DIPENDENTI poiché $A_2 = 3A_1 - 5/2\, A_3$, quindi,

$$K_1 A_1 + K_2 (3A_1 - 5/2\, A_3) + K_3 A_3 = (K_1 + 3K_2) A_1 + (K_3 - 5/2\, K_2) A_3.$$

quindi dire $\langle A_1, A_3 \rangle$ è EQUIVALENTE al sistema di generatori $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$

Se V ha una BASE costituita da n vettori, ogni altra base di V è costituita da n vettori.
Si dice che V ha DIMENSIONE n e si scrive $\dim V = n$
Per ogni vettore V generato da una base esiste UNA sola combinazione λ_i tale che

$$V = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n$$

i coefficienti $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sono detti COMPONENTI di V rispetto alla BASE $V_1, V_2, \dots V_n$.

Geometricamente: in $\mathbb{R}^2$ una possibile base è $V_1 = (0,1)$ e $V_2 = (1,0)$, essi sono detti VERSORI.

- sono linearmente indipendenti
- sono generatori, infatti per ogni generico (x_1, y_2) di $\mathbb{R}_2$ vale la relazione $V = x_1(1,0) + x_2(0,1)$

Questo tipo di basi sono dette CANONICHE, per quelle basi fatte da $V_1(1,0,\dots 0)$ $V_2 = (0,1,\dots,0) \dots V_n (0,0 \dots 1)$ $\in \mathbb{R}^n[x]$

Siano B, e B'

$B = \{v_1 \dots v_n\}$

$B' \{v'_1, \dots v'_n\}$

$w \in V$

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$$

$$w' = \sum_{i=1}^{n} w'_i v'_i$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v'_j$$

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v'_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j w_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i}_{} \Big) v_j$$

w_i = coordinate i-esima del vettore di base B

$$w'_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$$ = è una matrice (a_{ij}) moltiplicato per w $\Rightarrow w' = A \cdot w$

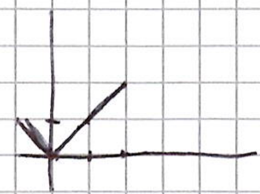
A è una matrice per la quale un elemento può essere cambiato secondo un'altra base

$$A^{-1} w' = w \iff w' = A w$$

ES

$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$B \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



$\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B' \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = a' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 2 = a' - b' \\ 2 = a' + b' \end{matrix} = 2a' = 4 \Rightarrow a' = 2 \quad b' = 0$

$\Rightarrow 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

↳ 2 volte il versore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad = a = 1/2 \quad b = -1/2$

$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} = a' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad = a' = b' = 1/2$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} A = \begin{matrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a' \\ b' \end{matrix}$

$B = \{(0,2,0)\ (1,1,0)\ (0,1,1)\}$

$B' = \{(1,0,2)\ (2,3,0)\ (0,4,4)\}$

$v = a(1\,0\,2) + b(2\,3\,0) + c(0\,4\,4) = (0\,2\,0)$

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 3b+4c=2 \\ 2a+4c=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1,1,0) = a'(1,0,2) + b'(2,3,0) + c'(0,4,4)$

$$\begin{cases} a'+2b'=1 \\ 3b'+4c'=1 \\ 2a'+4c'=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a'= \\ b= \\ c'= \end{matrix}$$

$(0,1,1) = a''(1,0,2) + b''(2,3,0) + c''(0,4,4)$

$$\begin{cases} a''+2b''=0 \\ 3b''+4c''=1 \\ 2a''+4c''=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a''= \\ b''= \\ c''= \end{matrix}$$

$$A = \cancel{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

$V =$ vettori da $B \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Matrici/Basi sono linearmente indipendenti?

Gauss-Jordan

$$Rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

V, W sono su V

$V \cap W = \{ v', v \in V \ v \in W \}$

MATRICE DIAGONALIZZANTE

La matrice diagonale nel caso di ENDOMORFISMI è fatta da una ~~vettore~~ matrice che nella sua diagonale gli autovalori:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La MATRICE DIAGONALIZZANTE è definita come la matrice che ha per colonne la ~~retta~~ base dello spazio costituita da autovettori

$$D = M^{-1} A_f M$$

Def: Date due matrici A e B si dicono SIMILI se $\exists$ una matrice M (invertibile) tale per cui,

$$B = M^{-1} A M$$

oss D è SIMILE ad A

La matrice M è quella "di passaggio" dalla base di partenza a quella degli autovalori

Se e ed e' sono due basi di V e sia dato un endomorfismo $f: V \to V$ e sia A la matrice associata rispetto ad e
A' la matrice associata rispetto ad e'

Se M è la matrice di passaggio da e ad e' allora si ha che $f(e) = eA$
$f(e') = e'A'$

$$\begin{aligned} f(e') &= f(eM) = \\ &= f(e) \cdot M \\ &= eA \cdot M \\ &= e'\cancel{M} AM \\ &= e'A' \end{aligned} \Rightarrow A' = M^{-1} A M$$

Se per base si ha quella degli autovalori la matrice è DIAGONALE

$$D = M^{-1} A M$$

M è la matrice di passaggio dalla base di partenza a quella degli autovettori

PRODOTTO SCALARE

$f: V \to V'$

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ autovalori

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$

$\vdots$

$f(v_n) = \lambda_n v_n$

$$\to \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ MATRICE ASSOCIATO DIAGONALE

Se ho $f: V \to V$ e A è matrice associata RISPETTO a basi
se

A' simile ad $A \Rightarrow A' = M^{-1} A M$

A e A' hanno stesso polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

$$\begin{aligned} P_{A'}(\lambda) &= |A' - \lambda I| \\ &= |M^{-1} A M - \lambda I I| \\ &= |M^{-1} A M - \lambda I M^{-1} I M| \\ &= |M^{-1} (AM - \lambda I M)| \\ &= |M^{-1} (A - \lambda I) M| = |M^{-1}|\,|A - \lambda I|\,|M| \\ &= \frac{1}{\cancel{|M|}} |A - \lambda I| \cdot \cancel{|M|} \end{aligned}$$

ES 1
Data

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) determinare autovalori e autospazi

b) trovare se diagonalizzabile

ES 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) determinare endomorfismo $\mathbb{R}^3$, l'espressione analitica

b) determinare base del $\ker(f)$

c) determinare mat DIAG A' tale che $A' = M^{-1} A M$

ES 3

$V(1, 0, K)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) per quale valori di k esso è un autovettore
- affinché sia autovettore allora $f(v) = \lambda(v)$

$A \cdot V = \lambda V$ se $\begin{pmatrix} -1 \\ 2-k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda k \end{pmatrix}$; $\lambda = -1$, $k = 2$, $-k = -k$ con $k = 2$ allora è AUTOVETTORE

3 trovare autospazi (trovare le basi degli autospazi)

$\lambda = 0$

$$(A - \lambda I)\, v = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eliminando si ottiene

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = a \\ y = 2a \\ z = a \end{matrix}$$

quindi $V_{\lambda=0} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow B_{\lambda=1} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim V_0 = 1$

la molteplicità algebrica indica il numero di volte che ci ...

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 2t \\ y = 0 \\ z = t \end{matrix}$$

$V_{\lambda=1} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \ t \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad B_{V_{\lambda=1}} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \dim V_1 = 1$

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - \cancel{2}y - \cancel{2}z = 0 \end{cases} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$$

$V_2 \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad B_{V_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \dim V_2 = 1$

$$\dim(V_0 + V_1 + V_2) = 3 = \dim(V) = \mathbb{R}_3$$

$$V_{\lambda=0} \cap V_{\lambda=1} \cap V_{\lambda=2} = \emptyset$$

Se $\lambda_1, \dots \lambda_n$ sono gli autovalori (molteplicità 1) dell'endomorfismo

allora $m_a(\lambda_i) = 1 \ \forall i$ $\qquad \dim V = n$

allora la matrice associata ad f rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di autovalori

$$D \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

è la matrice diagonale di coeff. autovalori ORDINATA secondo $\lambda_i = v_i$

A_f è diagonalizzabile se $D = M^{-1} A_f M$ — solo se la dim = molteplicità algebrica

e nella diagonale ho <u>AUTOVALORI</u>

CONDIZIONI PER LA DIAGONALIZZABILITÀ

$m_a(\lambda_i)$ molteplicità algebrica

$\dim V_{\lambda=i} = m_g(\lambda_i)$ molteplicità geometrica

Se $\forall \lambda_i$ è vero $\dim V_{\lambda=i} = m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$

allora f e quindi A_f è diagonalizzabile [necessità di $\sum_{i=1}^{n} m_a(\lambda_i) = n$]

MOLTEPLICITÀ

Def: Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia λ_0 un suo autovalore. Si dice MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA dell'autovalore λ_0 il numero che esprime QUANTE volte l'autovalore λ_0 annulla il polinomio caratteristico dato da

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

OSS: la somma delle molteplicità algebriche è minore o uguale all'ordine della MATRICE A, visto che il polinomio caratteristico ha ORDINE stesso della MATRICE

Def. Sia A matrice quadrata di ordine n e λ_0 un suo autovalore si dice MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA la dimensione dell'autospazio relativo a λ_0, ovvero il numero di elementi di una qualsiasi base dell'autospazio.

Si calcola con

$$m_g(\lambda_0) = n - rk(A - \lambda_0 I_n)$$

Relazione

$$0 \leq m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0) \leq n$$

OSS: Se un autovalore ha molteplicità algebrica 1 vuol dire che automaticamente ha molteplicità geometrica 1

ES

Determinare per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 2 & 2 & h \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

Matrice associata ad endomorfismo $f: V \to V$ $\quad \dim V = 4$

1) determinare autovalori

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & h \\ 0 & 2 & 2-\lambda & h \\ 0 & 0 & 0 & h-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= h-\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (h-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-2\right]\cdot(1-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = 3$
$\lambda = h$

i Se $h \neq 0, 1, \cancel{2}, 3$ allora matrice è diagonalizzabile poiché $\forall \lambda_i$ $m_a(\lambda_i) = 1 = m_g(\lambda_i)$ e somma delle molteplicità algebriche è 4

ii Cosa accade se h assume uno dei valori ?

$h = 0$
$\Downarrow$
DIAGONALIZZABILE

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \Rightarrow m_a(\lambda_1) = 2 \\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow m_a(\lambda_2) = 1 \\ \lambda_3 = 3 \Rightarrow m_a(\lambda_3) = 1 \end{array}\right\} 4$$

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$rk(A - \lambda I) = \cancel{1}2$ quindi sistema ridotto è

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - z = 0 \\ y = -z = -a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{\lambda=0} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \\ b \end{pmatrix} \cdot a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow B_{V_{\lambda=0}} \{(0,-1,1,0), (0,0,0,1)\}$$ DI

$$\dim V_{\lambda=0} = 2 = m_g(\lambda_0) = m_a(\lambda_0)$$

$h=1$

$m_a(\lambda_2) = 2 \Rightarrow m_g = n - rk(A - 2I)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ z + t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases} =$$

$\Rightarrow rk(A - 2I) = 3$

NON DIAGONALIZZABILE perche soluzione ammette ∞^1 -soluzioni, quindi $m_g = 1 \neq m_a$

$h=3$ $\quad m_a(\lambda_3) = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow rk = 3 \neq$ sistema ammette ∞^1 soluzion.

$m_g(\lambda=3) = 1$

non diagonalizzabile

APPLICAZIONE LINEARE

Siano V e V' spazi vettoriali $f: V \to V'$.
Sono applicazioni lineari se e solo se
- comunque presi v, w, $f(v+w) = f(v) + f(w)$
- $k \in \mathbb{R}$ $f(kv) = k f(v)$

Sono i due requisiti di un'applicazione LINEARE

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

per controllare se è lineare:

siano $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V: f(v) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$

$v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in V: f(v') = \begin{pmatrix} x' \\ z' \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f(v+v') \overset{?}{=} f(v) + f(v')$$

Verifico 1° proprietà

$$f(v+v') = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ z+z' \\ 0 \end{pmatrix}$$

↳ immagine del vettore $(v+v')$

$$f(v) = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(v') = f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ z' \\ 0 \end{pmatrix}$$

↳ immagine v

$$f(v) + f(v') = \begin{pmatrix} x \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ z' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ z+z' \\ 0 \end{pmatrix} = f(v+v')$$

Verifico 2° proprietà

$$f(kv) = k f(v)$$

$$kv = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \Rightarrow f(kv) = \begin{pmatrix} kx \\ kz \\ 0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = k f(v)$$

Es $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ z+t \end{pmatrix}$ $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x+y, z+t)\}$

$v' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4 : (x'+y', z'+t')$

$$f(v+v') = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \\ t+t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x'+y+y' \\ z+z'+t+t' \end{pmatrix}$$

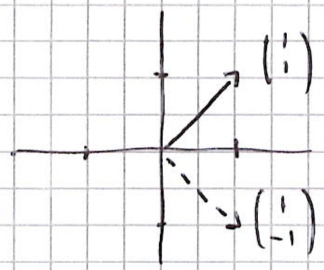
$$f(v) + f(v') = \begin{pmatrix} x+y+x'+y' \\ z+t+z'+t' \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to f\begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \\ y \end{pmatrix}$

OPERAZIONI MATRICI e VETTORI in ambito CARTESIANO

avendo una matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

se la moltiplico per un generico vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ può TRASFORMARLO



RUOTANDOLO e SCALANDOLO

es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Prendiamo 2 spazi vettoriali V e V' con relative basi

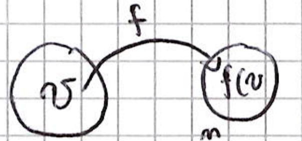
$B_V \{V_1, \dots, V_n\}$ con $\dim V = n \neq \dim V' = m$

$B_{V'} \{V_1', \dots, V_m'\}$

e sia f una applicazione lineare $f: V \to V'$

Sia v un vettore generico di V allora

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \qquad v' = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i'$$



$$f(v) = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i'$$

$$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j v_j)$$ è possibile essendo f lineare

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{f(v_j)}$$

rappresenta l'immagine del vettore v_j

essendo $f(v)$ un vettore di V' allora posso scrivere

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i'$$ sostituendo

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i'$$ scambiando gli indici

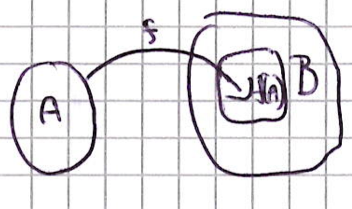
$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) v_i'$$

↳ Combinazione lineare della combinazione lineare di coefficienti.

IMMAGINE

date $f: A \to B$

l'immagine di f è il sotto insieme $f(A)$ di B formato dalle immagini degli elementi di A tramite f.



$Im(f) = \{b \in B : \exists\, a \in A$ per cui $f(a) = b\}$

l'immagine è il SOTTOINSIEME IN B di tutte le $f(a)$

il sottospazio $f(A)$ può anche essere identicamente B, ovvero tutti gli elementi $b \in B$ sono immagini $f(a)$. In quel caso la funzione è suriettiva. $\dim f(A) = \dim B$ (= ovviamente $\dim A \geq \dim B$)

Se ~~b~~ $f(a)$ $\forall a \in A$ se elementi distinti del dominio A hanno distinti elementi $f(a)$ allora è INIETTIVA.

Se sono entrambe le cose allora è BIIETTIVA (ISOMORFISMO)

ES. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = (x+2y,\ x+y,\ x-y)$$

per determinare l'immagine di f dobbiamo trovare tutti gli (a,b,c) per cui esista $f(x,y)$ tale che $f(x,y) = (a,b,c)$

$$\begin{cases} x+2y = a \\ x+y = b \\ x-y = c \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x+2y = a \\ -y = a-b \\ 0 = 2a-3b+c \end{array}$$

Se $f: V \to W$ è un omomorfismo di spazi vettoriali e V è generato da $v_1, v_2, \dots, v_n$, allora $f(V) = f(v_1) + f(v_2), \dots, f(v_n)$

$\dim f(V) \leq \dim V$

ES

$$f(a,b,c) = \overset{\alpha}{(2a+b+8c)} + \overset{\beta}{(3a-b+7c)}x + \overset{\gamma}{(-a-3c)}x^2 + \overset{\delta}{(b+2c)}x^3$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 = 2R_2 - 3R_1 \\ R_3 = 2R_3 + R_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R_3 = 5R_3 + R_2 \\ R_4 = 5R_4 + R_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B ~~$f(V) = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$~~ $: (a,b,c,d) = \alpha(2+3x-x^2) + \beta(1-x+x^3)$

$B_{f(V)} = \{(2+3x-x^2),\ (1-x+x^3)\}$

$\dim V = 3 \qquad \dim W = 4 \ \cancel{\geq}\ > \dim(f V)$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = y_i}$$

$$\begin{aligned} x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \dots + x_n a_{in} &= y_i \\ x_1 a_{21} + \dots + x_n a_{2n} &= y_2 \\ &\vdots \\ x_1 a_{m1} + x_2 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn} &= y_m \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$AX = Y$$

Matrice associata dalla base canonica alla base di arrivo

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- prendo una base di $V = \{(100)(010)(001)\}$
- trovo immagini di ogni base $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
- Scrivere vettori $f(v)$ come combinazione lineare dei componenti della base canonica

$$A_s f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ BASE ASSOCIATA all'applicazione LINEARE

Si riscrive l'applicazione lineare in forma di MATRICE

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{elemento generico di arrivo}}}{Y} = A_s f \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{elemento generico di partenza}}}{X}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

per trovare l'applicazione inversa basta fare $Y \cdot A_s f^{-1} = X$

(se invertibile $A_s f$)

$f: \mathbb{R}^3 \to M(2,2\,\mathbb{R})$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x \\ z & y \end{pmatrix}$$

1) Matrice associata alle basi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice associata rispetto alle ~~basi~~ immagini delle basi canoniche

$$A_{f(BB')} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ rispetto alla base canonica

Se la base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\text{immagine del primo vettore } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a, b, c, d sono le coordinate del cambio di base (cap 26 omomorfismi

$$B_{\text{nuova}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A_{(B'B'')} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ z \\ x+y+t+z+k \end{pmatrix}$$

$f\, M(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$

Se volessi trovare la matrice associata alla base canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{f(B\,\text{canonica})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

La matrice ottenuta in generale non è detto che è linearmente indipendente.

Qual'è la dimensione dell'immagine? (A_{f_B}) $\det \neq 0$ $rk = 4 = rk\, \mathbb{R}^4$

NUCLEO

Insieme dei vettori dello spazio considerato tale che $f(V)=0$

i vettori devono essere LINEARMENTE INDIPENDENTI e $\neq 0$

$$\text{Ker } f : \{ v \in V : f(V) = 0 \}$$

ENDOMORFISMO

Un applicazione f che da uno spazio lo porta allo stesso spazio

es
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

OSS: una condizione di iniettività dice che il nucleo di un' applicazione ha dim 0

Un endomorfismo deve essere tale solo se omomorfismo

DEF Sia $f : V \to W$ un' applicazione di due spazi vettorali. L'applicazione si dice omomorfismo di spazi vettoriali se è un' APPLICAZIONE LINEARE.
Per essere tale devono valere le proprietà

- $f(u+w) = f(u) + f(w)$ per ogni $u, v \in V$
- $f(k\,w) = k\,f(u)$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, $u \in V$

ISOMORFISMO

$f: V \to W$ = <u>ISOMORFISMO</u>

Condizione necessaria

$\dim V = \dim W$, con A_f associata. Si c

Se det $A_f \neq 0$ allora è <u>isomorfismo</u>

f è un ISOMORFISMO se per ogni vettore $w \in W$ esiste un unico elemento del dominio che ha per immagine w.

$B_V = \{v_1, \dots v_n\}$

$B_W = \{w_1, \dots w_n\}$

$f(v_1) = w_1$
$f(v_2) = w_2$
$\vdots$
$f(v_n) = w_n$

Se si scrive la matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & \ddots & & & \end{pmatrix} \left|\begin{matrix}\text{matrice} \\ \text{diagonale}\end{matrix}\right| \neq 0$$

ES. $f: M(2,2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ NON PUÒ ESSERE ISOMORFISMO perché det (Dom) $\neq$ det (codom)

$\dim(M(2,2,\mathbb{R})) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$

ES 2: $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow M(2,2,\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-4b+3d & b-2c \\ a+3c+2d & a+b+c \end{pmatrix}$

1 immagini di base canonica
2 Trovare invertibilità

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

det $\neq 0$ allora è isomorfismo

ES $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a+b + (b-c)x + (-a+c)x^2$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - x^2$
$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + x$
$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -x + x^2$

$$|A_f| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 1(-1) = 0$$

↳ Non isomorfismo
- Non linearmente indipendente

$f: V \to W$

Iniettiva se $\dim \ker f = 0$ (Se ci sta più di un elemento che da vettore nullo allora NON è iniettiva)

Suriettiva se $\dim W = \dim$ su f

Biettiva se $\dim V = \dim W$

(perché $\dim V = \dim f(V) + \dim(\ker f)$
e $\dim f(V) = \dim W$

ES.

Si suppone che si abbia la matrice associata alle basi.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A_f \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ qual'è l'applicazione analitica

per ottenere l'immagine

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_f \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$$ applicazione analitica $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ES

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + (a+b)x + (a+c)x^2 \qquad f\ \mathbb{R}^3 \to P^2[x]$$

1 trovare le immagini delle basi canoniche

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + x + x^2$

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x$ la matrice associata $A_{f(B)}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ a+c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x^2$

ES

$$f(a+bx+cx^2+dx^3) = \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & c \\ c+d & d \end{pmatrix}$$

$f\ P^3[x] \to M(3,2,\mathbb{R})$

$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

associata

$$A_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \\ c \\ c+d \\ d \end{pmatrix}$$

AUTOVALORI, AUTOVETTORI

$f: V \longrightarrow V$ 1

$v \in V$

$f(v) = \lambda v \Rightarrow f(v) - \lambda v = 0$

L'applicazione di v porta allo stesso vettore v moltiplicato λ

$f_\lambda = (f - \lambda I)$ con I identità $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A v = \lambda v$

$A v - \lambda I v = 0$

se si vuole trovare $f_\lambda v = 0$

allora $(A - \lambda I) v = 0$

ha soluzione quando $v = 0$ e quando

$\det (A - \lambda I) = 0$

ci saranno quindi λ_i valori che lo soddisfano e si chiamano AUTOVALORI

gli AUTOVETTORI sono lo spazio vettoriale ~~formato~~ da che soddisfa $|A - \lambda I| = 0$, chiamata EQ. CARATTERISTICA.

La dimensione degli

ES

$$A \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

λ è equazione di ORDINE 2.
Il grado del POLINOMIO CARATTERISTICO è dato dalla dim della MATRICE ASSOCIATA.

Una volta determinati gli autovalori, se presenti, è necessario trovare gli sottospazi vettoriali che soddisfano l'equazione.

ES

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y+2z \\ -x+2y+3z \end{pmatrix}$$

1 trovare matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda-1 & -2 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$1-\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda-1 & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left[(-\lambda-1)(3-\lambda)+4\right] - \left[3-\lambda+2\right] = 0$$

2 trovare λ $\longrightarrow$ $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

ESERCIZI

Date le seguenti matrici studiare se sono linearmente indipendenti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si forma la combinazione lineare dove i coeff sono 0

$$aA + bB + cC = 0$$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a + 0 + 0 = 0$$

Si crea un sistema lineare in cui si risolve la matrice in studio del rango come

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

il rango dev'essere uguale a 3 perché siano indipendenti

l'unico coefficiente che da la dipendenza di ogni matrice a 0 è la matrice nulla

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_3 = 2R_3 - R_2 \qquad rk = 3!$$

ES. Spazio ~~polinomi~~ vettoriale di GRADO ≤ 2

$$W = \{ \underset{v_1}{1+x^2}, \underset{v_2}{x}, \underset{v_3}{x^2} \}$$

determinare se è una base dello spazio 2X $P^2(x)$

Supponiamo che si consideri la base CANONICA

$$1 + 0x + 1x^2$$

$$\sum a_i x_i = \sum b_i x_i$$

$$a(1+x^2) + b(x) + c(x^2) = 0$$

$$a + ax^2 + bx + cx^2 = 0$$

$$\underset{0}{a} + \underset{0}{bx} + \underset{0}{(a+c)}x^2 = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0$$

Sono 3 vettori linearmente indipendenti: sono BASI DEI POLINOMI DI GRADO ≤ 2

Se avessimo avuto invece 10 vettori di spazio di polinomi il rango della matrice associata non può essere > 3

$=$

Determinare lo spazio somma di 2 generatori V e W

$B_V = \{x, -x, +x^2\}$ $\qquad$ $B_W = \{1+x^2, x, x^2\}$

Spazio somma

$V+W$ Si sommano le basi e poi si trovano i vettori risultanti linearmente indipendenti

$$A_{V+W} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

il rango è ≤ 3, ma essendo generato da una somma tra la base V e W (già vista)

$$\underset{3}{\dim(V+V)} = \underset{2}{\dim V} + \underset{3}{\dim W} - \dim(V \cap W)$$

$V+W = \{ v \in P^2[x] :$

Un esempio di sottospazio vettoriale creato da $V+W$:

$$V \left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ con } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\{ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a-b \\ b+c \end{pmatrix} \text{ con } a\,b\,c \text{ reali} \right\}$$

per formule cartesiane

$\cancel{x=x}$
$y = a - z + x$
$z = b + x$

Se il

coordinate generiche in forma parametrica

$$P = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a-b \\ b+c \end{pmatrix}$$

ES

Scrivere in forma PARAMETRICA un eq in forma cartesia

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2\times 2\,\mathbb{R}) : x+y=0 = z+t \right\}$$

per passare alla parametrica:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ z+t=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x=-y \\ z=-t \end{matrix}$$

si parametrizza

$x = \lambda$
$t = \mu$

$$= \begin{pmatrix} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\mu \\ t = \mu \end{pmatrix}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M(2\,2\,\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ -\mu & \mu \end{pmatrix} \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$V = \{ a + bx + cx^2 \in P^2(x) \; : \; a+c=0 \quad b=0 \}$

a) S_n una forma parametrica

b) Determinare una base e la dimensione

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-c \\ b=0 \\ c=c=\lambda \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$V = \{ a+bx+cx^2 \in P^2(x) \quad a+bx+cx^2 = \underbrace{-\lambda + 0 + \lambda x^2}_{\text{parametrico}} \quad \lambda \in \mathbb{R} \}$$

$B_V = \{ -1 + x^2 \}$

$\dim V = 1$

Completare una base di P_2 coi vettori

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un vettore v appartiene ad uno spazio vettoriale V?

Es Stabilire se $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - 3x = 1\}$ è un sottospazio vettoriale $\mathbb{R}^2$

$(0,0) \in W$? No, $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \neq 1$

Si esclude che sia un sottospazio vettoriale, perché NON è spazio vettoriale

(el neutro di spazio vettoriale)

$w_1(x_1, y_1) \quad w_2(x_2, y_2)$

$S_1 : w_1 + w_2 \in W$?

$w_1 + w_2 (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \Rightarrow 2(y_1 + y_2) - 3(x_1 + x_2) = 1 \Rightarrow$

$$\underbrace{2y_1 - 3x_1}_{1} + \underbrace{2y_2 - 3x_2}_{1} \neq 1$$

$$1 + 1 = 2$$

MATRICE ASSOCIATA AD UN'APPLICAZIONE LINEARE (RISPETTO ALLE BASI)

Consideriamo un'applicazione lineare $f: V \to W$

LA MATRICE ASSOCIATA rappresenta la trasformazione lineare di cui è riferita RISPETTO a 2 BASI FISSATE (solitamente basi canoniche).

Per determinarla

Siano le basi dell'applicazione

$B_V = \{V_1, V_2, \dots V_n\}$

$B_W = \{W_1, W_2, \dots, W_m\}$

- Per costruire la matrice associata si trova l'applicazione lineare rispetto alle basi

$f(V_1), f(V_2), \dots, f(V_n)$

- I vettori ottenuti SONO ELEMENTI di W e possono quindi essere espressi come COMBINAZIONE LINEARE

$$f(V_1) = a_{11}(W_1) + \dots + a_{m1}(W_m)$$
$$\vdots$$
$$f(V_n) = a_{n1}(W_1) + \dots a_{nm}(W_m)$$

LA MATRICE ASSOCIATA ha per j-esima colonna il vettore delle coordinate dell'immagine $f(V_j)$ rispetto alla base di W

$$A_F^{B_V, B_W} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

PRODOTTO SCALARE

- Prodotto scalare euclideo, o canonico. dato $f: V \to V$

il prodotto scalare canonico associa a una coppia di vettori $\vec{u}$, e $\vec{v}$ un numero REALE che è la somma dei prodotti delle componenti omonime dei due vettori.

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots v_n)$
$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$

$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$

Si indica con $\langle u, v \rangle$ oppure con $u \cdot v$ (da non confondere con la moltiplicazione tra vettori!)

Proprietà:

- commutativa
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- di omogeneità
$\lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- distributiva rispetto a somma tra vettori.
$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

NON VALE LA PROPRIETÀ ASSOCIATIVA, in quanto il prodotto scalare è definito tra 2 vettori

NORMA DI UN VETTORE

è un'applicazione che si indica con il simbolo $\|\vec{v}\|$ che associa ad ogni vettore un numero R reale.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

la norma ~~può~~ anche assumere la proprietà di lunghezza di vettore, o distanza tra punti.

Può essere anche descritto con il prodotto scalare

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Proprietà della norma:

1. È sempre positiva, e maggiore di zero tranne per il vettore nullo
1. La disuguaglianza triangolare e la disug. di Cauchy-Schwarz sono rispettate

- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Angolo tra vettori:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$ con $\theta \in [0, \pi]$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

da qui è chiaro che se i vettori sono PERPENDICOLARI il loro prodotto scalare è 0

VETTORI ORTOGONALI

dati $\vec{u}$ e $\vec{v} \in V$ si dicono ORTOGONALI se il loro prodotto scalare è 0. Due vettori ortogonali sono PERPENDICOLARI.

~~es~~ le basi sono ORTOGONALI sono basi formati da vettori ortogonali.

I VETTORI ORTONORMALI sono v. ortogonali di norma 1.

ES. Basi canoniche

$C = \{e_1, e_2, e_3\}$

$e_1 = (1,0,0)$
$e_2 = (0,1,0)$
$e_3 = (0,0,1)$

è una base ORTONORMALE

$$\|e_1\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1 = \|e_2\| = \|e_3\|$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = 0$$

ES. Normalizzazione

$B = \{V_1, V_2, V_3\}$

$V_1 = (2,0,0)$
$V_2 = (0,2,0)$
$V_3 = (0,0,2)$

essa è una base ortogonale, ma con norme $\neq 1$. per normalizzarli basta dividere ciascun vettore per la sua norma.

$$\|V_1\| = \sqrt{2^2} = 2 = \|V_2\| = \|V_3\|$$

$B' = \{V_1', V_2', V_3'\}$

$$V_1' = \frac{V_1}{\|V_1\|} = \left(\frac{2}{2}\ \frac{0}{2}\ \frac{0}{2}\right) = (1,0,0)$$

$$V_2' = \frac{V_2}{\|V_2\|} = (0,1,0)$$

$$V_3' = \frac{V_3}{\|V_3\|} = (0,0,1)$$

Si suppone endomorfismo con ASSOCIATA SIMMETRICA

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \quad \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = ac - \lambda a - \lambda c - \lambda^2 - b^2 = 0$$
$$= -\lambda^2 - \lambda(a+c) + ac - b^2 = 0$$

Le associate simmetriche hanno sempre RADICI REALI, e sono sempre diagonalizzabili.

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2)$$
$$= a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2$$
$$= a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2$$
$$(a-c)^2 + 4b^2 > 0 \text{ sempre.}$$

Se la matrice è SIMMETRICA e la base relativa è ORTONORMALE, allora anche l'endomorfismo è simmetrico

MATRICI ORTOGONALI

Una matrice A si dice ortogonale se

$$A^t A = I$$

oss

$$A^t A A^{-1} = I A^t$$
$$A^t = A^{-1}$$ la trasposta è uguale alla matrice inversa

Come trovare la matrice ortogonale?

OSS. Se A è ortogonale, il $\det(A) = \pm 1$ poiché $|A^{-1}|$
$\det A^t \cdot \det A = \det I$:
$\sqrt{\det^2 A} = \pm 1$
$\det A = \pm 1$

Se la matrice ha determinante $\neq -1$ allora non lo è

Prop: Una matrice ortogonale verifica che i vettori colonna sono ORTOGONALI tra loro e normali ORTONORMALI

ES

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ è ortogonale 2x2

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{-\sqrt{2}} \right| \cdot 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) ~~verif.~~ Determinare autovalori.
b) verificare se 2 autovettori distinti sono ortogonali tra loro
c) trovare P ortogonale tale che $D = P^{-1}AP$ diagonale

a) $|A - \lambda I| = 0 \quad \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ $\quad \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix}$

Det Autospazi

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} = 2x + 2y = 0 \quad x = -y \quad y = \lambda \quad \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R}$$

$\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} \quad x = y$$

b) $\left\langle \begin{matrix} -\lambda \\ \lambda \end{matrix}, \begin{matrix} \mu \\ \mu \end{matrix} \right\rangle = -\lambda\mu + \lambda\mu \neq 0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad -1 + 1 = 0$ ✓

c) diagonalizzare con vettori ortogonali.

-Normalizzare il vettore di autovettori

$$u = \frac{v}{\|v\|} \Rightarrow$$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$ vettori ortonormali

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

essendo P ortogonale, allora

$$P^{-1} = P^t$$

$$P^{-1} A P = D \Leftrightarrow$$

considerando l'endomorfismo da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Se A è ortogonale $\underset{B}{\underset{\parallel}{A^2}}$ è ortogonale?

$$B^t B = I$$

ES $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ y \\ x+z \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ calcolo autovalori $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\quad (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

↳ Simmetrica!

$(1-\lambda)^3 - 1 = 0$

$(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = 0$

$\lambda = 1$
$\lambda = 0$ } diagonalizzabile
$\lambda = 2$

$\boxed{\lambda = 0}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$ $\quad x+z=0$, $y=0$ $\quad x = -\alpha$, $y = 0$, $z = \alpha$ $\quad \{(-1,0,1)\}$

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad z = 0$, $x = 0$, $y = \alpha$ $\quad \{(0,1,0)\}$

forma cartesiana
$x = -z$
$y = 0$

$\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad x = z$, $y = 0$ $\quad \{(1,0,1)\}$

$$A_{B\,(\text{autovettori})} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left\langle \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle = 0$ ortogonali

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ ortonormale

Dimostrare che matrici simili hanno stesso polinomio caratteristico

Es esame

Dato $M(2,2,\mathbb{R}) \to M(2,2,\mathbb{R})$ dire quali valori l'endomorfismo simmetrico

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ è simmetrica per $k=0 \Rightarrow k=-k \quad 2k=0$

Scrivere forma analitica $$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Scrivere polinomio caratteristico

posto $k=0$ determinare la matrice diagonalizzante e la diagonale.

ENDOMORFISMO SIMMETRICO

Si dice che $f: V \to V$ è un <u>ENDOMORFISMO SIMMETRICO</u> se e solo se per ogni $v_1, v_2 \in V$ vale la relazione.

$$< F(v_1), v_2 > = < F(v_2), v_1 > \quad \forall v_1 v_2 \in V$$

Iniziamo con un esempio

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad f(x,y,z) = (x+2y, 2x+y, 3z)$

$$v_1 = (x_1, y_1, z_1) \sim\!\!> f(v_1) = (x_1 + 2y_1, 2x_1 + y_1, 3z_1)$$
$$v_2 = (x_2, y_2, z_2) \sim\!\!> f(v_2) = (x_2 + 2y_2, 2x_2 + y_2, 3z_2)$$

$$< f(v_1), v_2 > = x_2(x_1 + 2y_1) + y_2(2x_1 + y_1) + z_1 \cdot 3z_2 =$$
$$= x_1 x_2 + 2y_1 x_2 + 2x_1 y_2 + y_1 y_2 + 3z_1 z_2 =$$
$$< v_1, f(v_2) > = x_1(x_2 + 2y_2) + y_1(2x_2 + y_2) + z_1 \cdot 3z_2$$

Endomorfismo è SIMMETRICO

Proprietà

- MATRICE ASSOCIATA ad un endomorfismo simmetrico è simmetrica anch'essa ($A^t = A$)
- Se ~~una~~ matrice associata è riguardo le basi ORTONORMALI allora l'endomorfismo è simmetrico

ES

$f: P^3[x] \to P^3[x]$

$$\begin{cases} p_1(x) = x^2 + 2x^3 \in \ker f \\ p_2(x) = x \quad \text{autovettore corrispondente ad autovalore } 1 \\ p_3(x) = 1 + x^2 \quad \text{autovettore corrispondente a autovettore } \lambda = 1 \end{cases}$$

$f(1) = x + 2x^3$

$p_4 = (x + \sqrt{2}x^3)$

I primi 4 possono essere una base $P^3[x]$ = ? Si vede l'associata e si calcola rk

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad rk(A_f) < 3$$

Non va bene

ES $f: P^2(x) \to P^2[x]$

$f: \frac{d}{dx}$

$f(p(x)) = \frac{d\, p(x)}{dx}$

1 determinare se lineare
2 determinare immagine e nucleo
3 determinare se e' diagonalizzabile.

1.

$p_1(x) = a + bx + cx^2$
$p_2(x)$

$$\frac{d}{dx}(p_1 + p_2) = \frac{d}{dx}p_1 + \frac{d}{dx}p_2$$

$$\frac{d}{dx} k p_1(x) = k \frac{d}{dx} p_1(x)$$

2.

trovare immagini degli elementi in base canonica.

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

Immagine di f e' generata dalla combinazione di $v \in P^2(x)$: v

$\{ v \in P^2(x) : v = a1 + b = 2x \quad a, c \in \mathbb{R} \}$

$\ker f = \{ a + bx + cx^2 : b = 0, c = 0 \}$
$v = a \qquad \dim = 1$
$\mathcal{B}_{\ker f} \{1\}$

trovare diagonalizzabilità

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (-\lambda)^3 = 0 \qquad \lambda = 0 \quad m_a = 3$$

con $\lambda = 0$ l'autospazio Non ha dim 3, ma 1

ES

$f: M(2,2,\mathbb{R}) \longrightarrow M(2,2,\mathbb{R})$ e sia

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ per quale valori di k l'endomorfismo è simmetrico.

l'endomorfismo è simmetrico quando la associata (riguardo basi ORTONORMALI) è simmetrica

$k=0$

$$A_f \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ a+c & d \end{pmatrix}$$

$|A-\lambda I| = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda)^2\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0$$

$= \lambda = 1 \quad m_a = 1$

$\lambda = 0 \quad m_a = 2$ e anche $m_g = 1$

$\lambda = 2 \quad m_a = 1$

diagonalizzabile

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Trovare autospazi

$\lambda = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ 0=0 \\ a+c=0 \\ d=0 \end{cases}$$

$d=0$
$b=\beta$
$c=-a$
$a=\alpha$

$B(A-\lambda I) = \{(1,0,-1,0),(0,1,0,0)\}$ ~~$\dim(\ker(A-\lambda I)_{\lambda=0}) = 2$~~

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow B(V) = \{(0,0,0,1)\}$$

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} a=c \\ b=0 \\ a=c \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow BV_{(\lambda=2)} = \{(1,0,1,0)\}$$

determinare matrice diagonalizzante

base di Autovettori

Normalizzo basi

[se non fossero stati ortogonali si usa gram-Schmidt]

$\lambda=0 \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$v'_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

$v'_2 = \quad '' \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v'_3 = \quad '' \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$v'_4 = \quad '' \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \right\}$

$v_1 \perp v_2 \perp v_3 \perp v_4$

$$U' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ MATRICE DIAGONALIZZANTE (ortogonale)

$$D = \underset{\substack{\| \\ U^t}}{\boxed{U^{-1}}} A U$$

U^t in caso di matrice ortogonale

$f: m(3,2,\mathbb{R}) \to m(3,2,\mathbb{R})$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a-b \\ 0 & 0 \\ b-a & b-a \end{pmatrix}$$

- Dire se è diagonalizzabile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ diagonalizzabile?

$|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & & & \\ 1 & -1-\lambda & 0 & & & \\ 0 & 0 & -\lambda & & 0 & \\ 0 & 0 & & -\lambda & & \\ -1 & 1 & 0 & & -\lambda & \\ -1 & 1 & & & & -\lambda \end{pmatrix}$$

$(-\lambda)^4 \left((1-\lambda)(-1-\lambda)+1\right) = 0$

$-\lambda^4 \left(\lambda^2 + \lambda - \lambda\right)$

$-\lambda^6 \qquad m_a = 6$

$$\begin{cases} a-b=0 \\ \cancel{a-b=0} \\ -a+b=0 \\ \cancel{-a+b=0} \end{cases}$$

$a=b=\alpha$ dipende da un parametro, quindi ci sono 5

$b=\alpha$

$c=c$

$d=d$

$e=e$

$f=f$

$\dim(V_{\lambda=0}) = 5 \neq m_a(\lambda=0) = 6$

<u>NON diagonalizzabile</u>