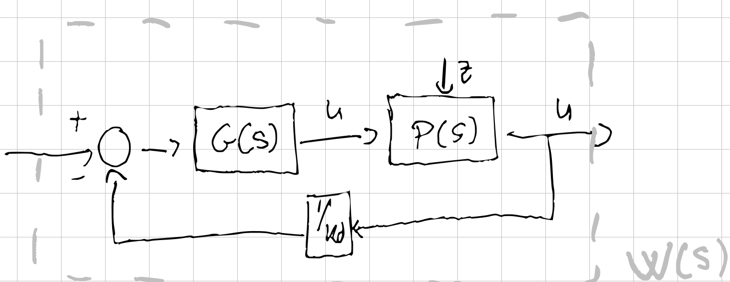
Progetto (sintesi) nel dominio di Laplace

- Usa le funzioni di TRASFERIMENTO al posto della risposta armonica (prog in frequenza -> Bode)
- Viene usato il LUOGO delle RADICI
- NON prevede RESTRIZIONI sul processo (può CONTENERE poli con Re[]>0, cioè $n_P^+>0$)
- il m_φ NON ha alcun rapporto con la AS del SdC IN GENERALE (Re[]>0)
- Non si lavora più in frequenza
- Si userà sempre la struttura canonica:



poli W(s) nel semipiano sx

A.S. del SdC

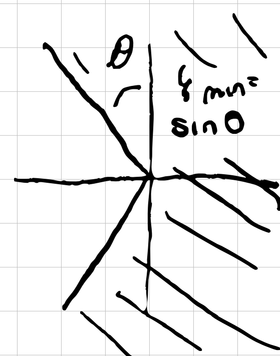
(hyp. P(s) priva di autov. "nascosti" con Re[]>0)

Nuova condizione di AS

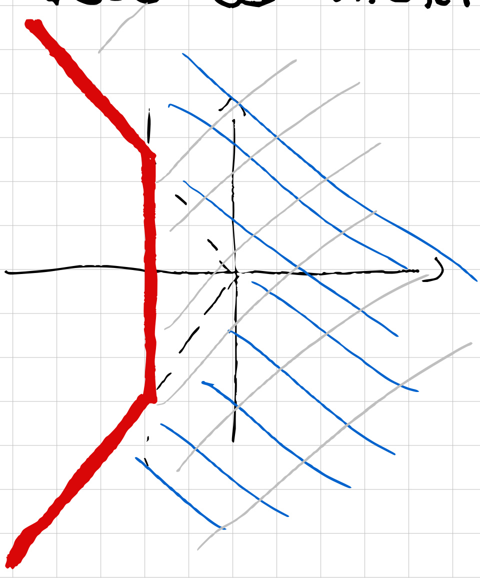
- Specifiche sul transitorio: anch'essa in termini di collocazione dei poli di $W(s)$

Es. Per "transitorio rapido"
- poli: $Re[\,]<0$
- maggiore è il valore in modulo del polo maggiore è la "velocità di convergenza" al
- per avere un "transitorio" si richiede che $Re[\,]<-\alpha$, quindi tutti i modi avranno $\tau < 1/\alpha$

Per "transitorio poco oscillatorio"
- Per limitare il contenuto oscillatorio "limito lo SMORZAMENTO.
- Poli con smorzamento maggiore di SOGLIA



VOGLIO TRANSITORIO RAPIDO e POCO OSCILLATORIO



Struttura canonica del controllore

$$G(s) = \frac{R(s)}{s^h}$$

$R(s)$ → "fz compensatrice"

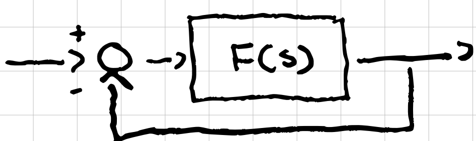
s^h → "elementi integratori per il tipo e/o astatismo"

La funzione compensatrice:

- AS
- Transitorio
- precisione di risposta ad R.P.

$R(s)$ può includere K_R per soddisfare specifiche del tipo $|e_r| \le e_{max}$, ma viene fatto ==al termine del processo==

<u>Scelta $R(s)$</u>: Basata sul luogo delle radici



($K_d = 1$ ipotesi non restrittiva - vedere CdN)

mettere in Relazione zeri, poli e cost. moltiplicative di $F(s)$ con collocazione dei poli in $W(s)$

Luogo delle radice (root locus)

$$W(s) = \frac{N_F(s)}{\underbrace{D_F(s) + N_F(s)}_{D_W(s)}} = \qquad F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_i)}$$

$m < n$

$$D_W(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - p_i) + K \prod_{i=1}^{m} (s - z_i)$$

N.B

K NON è propriamente K_F, ma lo si chiamerà GUADAGNO

i poli di $W(s)$ sono le radici $\prod_{i=1}^{n} (s - p_i) + K \prod_{i=1}^{m} (s - z_i) = 0$

↳ EQ DEL LUOGO DELLE RADICI (LdR)

è parametrica in K (valori REALI), e al suo variare cambiano i poli del sistema $W(s)$

• CONDIZ del MODULO

$$|K| = \frac{\prod |s-p_i|}{\prod |s-z_i|}$$

utile per la GRADUAZIONE del LdR

mi è possibile, quindi, da un punto del RAMO del luogo, sapere qual'è il guadagno necessario

• CONDIZ di FASE

$K>0$ cioè LdR^+

$$\sum_{i=1}^{n} \angle s-p_i = 180° + \sum_{i=1}^{m} \angle s-z_i + h\,360°$$

$K<0$ cioè LdR^-

$$\sum_{i=1}^{n} \angle s-p_i = \sum_{i=1}^{m} \angle s-z_i + h\,360°$$

K è scomparso => utili per il tracciamento del LdR.

$$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i) = -K\prod_{i}^{m}(s-z_i) = 0$$ EQ DEL LUOGO

TRACCIAMENTO: regole per il tracciamento qualitativo

fatti fondamentali:

- poiché $n > m$, l'equazione del LdR è di grado n ⇒
  ⇒ n radici per ogni valore di K (reale) ⇒
  ⇒ al variare di K ci saranno n rami
- le radici si muovono con CONTINUITÀ, quindi il LdR è CURVA CONTINUA su K, senza avere salti
- il LdR è simmetrico rispetto all'asse reale

① Per $K=0$ le radici (poli di $W(s)$) COINCIDONO con i poli di $F(s)$

② Tutto l'asse reale appartiene al LdR. In particolare, appartengono a LdR^+ tutti i punti dell'asse reale che lasciano a dx un numero dispari di poli e zeri, app. a LdR^- i restanti. si veda es. precedente
Ciò è CONSEGUENZA della cond. di FASE

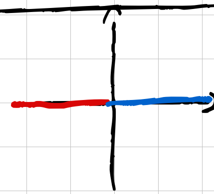
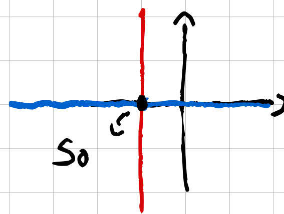
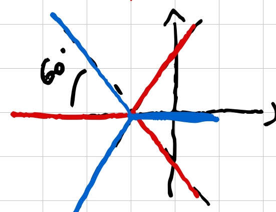
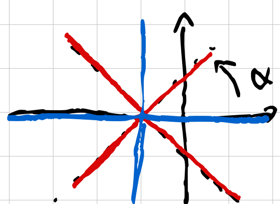
③ per $K \to \pm\infty$, le n radici tendono agli zeri di $F(s)$. le restanti tendono all'infinito lungo asintoti.
È conseguenza diretta dell'EQ del LUOGO

④ Gli asintoti del LdR sono $n-m$ semirette per LdR^+ e altrettante per LdR^-, che formano una stella regolare, ergo che si incontrano con il punto dell'asse reale di ascissa

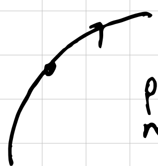
$$S_0 = \frac{\sum_{i}^{n} p_i - \sum_{i}^{m} z_i}{\underbrace{n-m}_{\text{grado relativo}}}$$ (centro degli asintoti)

LdR^-

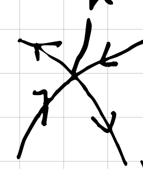
LdR^+

n-m	asintoti	
1		(s_0 irrilevante)
2		(s_0 da calcolare)
3		(. . .)
4		$\alpha = \dfrac{180}{n-m}$

PUNTI SINGOLARI



ci sono alcuni punti in cui si incontrano PIÙ RAMI DEL LUOGO



per $k = \bar{k}$ abbiamo 2 radici COINCIDENTI, soluzione multipla, con $\mu > 1$

Eventuali poli o zeri MULTIPLI di $F(s)$ sono PUNTI SINGOLARI.

Una radice multipla risolve l'equazione del luogo

$$\begin{cases} \prod (s-p_i) + k \prod (s-z_i) = 0 & (1) \\ \frac{d}{ds} \prod (s-p_i) + k \frac{d}{ds} \prod (s-z_i) = 0 & (2) \end{cases}$$

ogni punto singolare è soluzione di questo sistema, e viceversa (con $k \in \mathbb{R}$)

$$(2) \cdot \prod (s-z_i) =$$

$$(3) = \prod (s-z_i) \frac{d}{ds} \prod (s-p_i) + k \prod (s-z_i) \frac{d}{ds} \prod (s-z_i) = 0$$

i punti singolari sono AL MASSIMO $n+m-1$

$\Rightarrow$ dividendo per $\prod(s-p_i)\prod(s-z_i) \Rightarrow$

$$(4) \Rightarrow \sum \frac{1}{s-p_i} - \sum \frac{1}{s-z_i} = 0$$

(5) il luogo delle radici ha AL PIÙ $n+m-1$ punti singolari. Si trovano trovando come soluzione del sistema (1-2) con k reali, oppure risolvendo la (3) e sostituendo nella (1). Se il k corrispondente è reale, oppure (c) risolvendo la (4)

<u>oss</u> Eventuali zeri o poli multipli della FdT dell'anello aperto sono CERTAMENTE punti singolari del luogo

infatti zeri / poli sono punti del LdR per $K=0$ / $K=\pm\infty$

Se sono multipli, rappresentano radici multiple dell' LdR

punti singolari che sono zeri o poli multipli di $F(s)$ <u>NON</u> compaiono tra le soluzioni di (4) per com'è ricavata

(6) In un punto singolare, radice multipla dell'eq del LdR di molteplicità $\mu \geq 2$, confluiscono 2 o più rami del LdR, alternativamente di verso entrante ed uscente. I RAMI SONO TANGENTI alle rette che formano una stella regolare.

PROGETTO CON LdR

il controllore è progettato nella forma

$$G(s) = \frac{R(s)}{s^h}$$

con h fissato all'inizio secondo le specifiche di progetto, aggiungendo eventualmente anche elementi risonanti puri

Progetto a fase minima.

- Si può assumere che la $P(s)$ sia priva di zeri con $Re[\,] < 0$, quindi tale per cui tutti gli zeri siano sul semipiano SINISTRO.
- la FdT di $\hat{F}(s) = P(s)/s^h$ ha stessi zeri
- Sappiamo che per $k \to \infty$ m rami (m poli) convergeranno sugli zeri, mentre gli altri n-m sugli asintoti. Essi giacciono interamente sul semipiano sx solo se

$$n - m = 1 \qquad \text{oppure}$$

$$n - m = 2 \quad \text{e} \quad S_0 < 0$$

Si stabilizza, dunque, aggiungendo poli e zeri tali per cui ci è possibile ricondurci ad una delle due forme, poi si prende k "abbastanza grande" per avere conv. su asintoti e zeri

Vedi algoritmo

Stabilizzazione di processi a fase minima

1. Porre $R(s) = k_R$ e verificare se esistono valori di k_R tali per cui il sistema $W(s)$ è AS. (LdR + CdR), altrimenti andare avanti

2. Se $n-m > 2$ riportare grado relativo a 2 aggiungendo $n-m-2$ zeri in $R(s)$ - se possibile mantenendo $S_0 < 0$ -

3. Ora $n-m = 2$. Se $S_0 \geq 0$ spostare centro asintoti nel semipiano SX attraverso coppia polo-zero, con $p > 0$ e $z > 0$
$$S_0' = S_0 + z - p/2$$

4. Verifica della realizzabilità del controllore (grado $D_c \geq$ grado N_c), in caso aggiungere poli "lontani", in modo che non interferiscano con sistema

2° passo

$$G(s) = \frac{(s-z_1)\dots(s-z_{n-m-2})\,(s+z)}{s^h\,(s+p)}$$

3° passo

1° passo

Si può vedere che, con $0 < T < T_{max}$ qual è il più piccolo valore di T possibile si usi routh

Ricordarsi, nel calcolo del guadagno eventuali specifiche di progetto - FATTO ALLA FINE -

Si possono anche specificare poli con $Re[\,] < -a$!

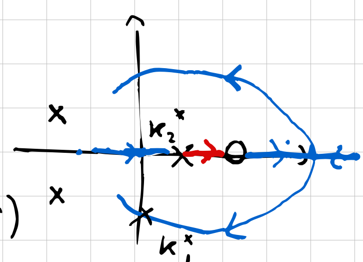
Se la $p(s)$ ha zeri in $Re[\,]>0$ allora
NON E' POSSIBILE utilizzare l'algoritmo di stabilizzazione!
- processo a fase NON MINIMA -

Si ricorda che si deve sempre verificare se serva il solo guadagno! l'LdR, a parte casi semplici - ved. dopo - NON aiuta. ES.

un polo di $P(s)$ ha $Re[\,]>0$ (oltre ad uno zero)

2a) zero a destra del polo

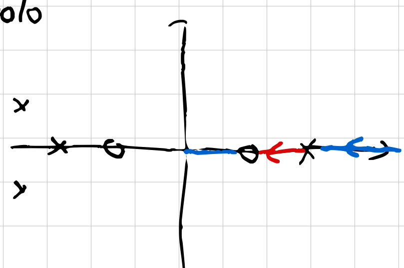
- LdR$^+$ ha sempre un ramo nel semipiano dx. Non c'è AS
- in LdR$^-$ ci sarà un intervallo in cui $k_1^* < k < k_2^*$ $(k_1^* < k_2^*)$ sarà A.S.



Si può comunque eseguire il passo 0 dell'algoritmo. (nonostante non c'è fase minima)

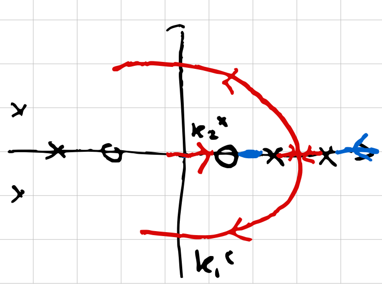
2b) zero a sinistra del polo

- LdR$^+$ ha sempre un ramo nel semipiano dx. Non c'è AS
- LdR$^-$ ha stessa situazione, c'è sempre radice in semipiano dx



In questo caso, si può aggiungere polo a dx dello zero

Se $k_1^* < k_2^*$ ci sarà AS per $k_1^* < k < k_2^*$



dato il processo

$$P(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \qquad n > m$$

Si può porre il controllore nella seguente maniera

$$G(s) = \frac{d_r s^r + d_{r-1} s^{r-1} + \dots + d_1 s + d_0}{s^r + c_{r-1} s^{r-1} + \dots + c_1 s + c_0}$$

bisogna ora imporre r e i $2r+1$ coefficienti tali che

$$D_w(s) = \underbrace{D_G}_{n} \underbrace{D_P}_{r} + \underbrace{N_G}_{m} \underbrace{N_P}_{r} = D_w^*$$

dove D_w^* sono i poli desiderati

N.B:

poiché D_w ha grado $n+r$ (visto che $m<n$), ed è monico (n monico, come D_G), allora anche D_w^* lo è. Basterà eguagliare i termini dei coefficienti $n+r-1 \dots 0$

Si ottiene sistema di eq. lineari, con
- $n+r$ equazioni
- $2r+1$ incognite $(d_r, \dots, d_0, c_{r-1}, \dots c_0)$

ESSO ha UNA SOLA SOLUZIONE per

$$n+r = 2r+1 \Rightarrow r = n-1$$

dato un processo, con $P(s)$ di ordine n, si può usare un controllore con $G(s)$ semplicemente propria e con grado $n-1$ per ASSEGNARE tutti i $2n-1$ poli

N.B. il controllore NON ha vincoli sul segno dei poli e degli zeri

E' possibile applicare lo stesso metodo anche nel caso in cui si supponga che la $G(s)$ debba avere dei poli fissi (es. per tipo e astatismo, o immaginari)
Si pone infatti:

$$G(s) = \frac{N_G}{D_G^f \, D_G^l}$$

dove D_G^f e D_G^l sono parte fissa e parte libera dei poli, di grado rispettivo n_G^f e n_G^l

• i parametri liberi quindi ora sono n_G^l coefficienti di D_G^l, monico, e $n_G^l + n_G^f + 1$ di N_G. Utilizzando il risultato di prima si trova che

$$\underbrace{n + n_G^l + n_G^f}_{\text{EQ.}} = \underbrace{2n_G^l + n_G^f + 1}_{\text{INC.}}$$

$$\Rightarrow \quad n_G^l = n-1$$