Tema 3: Grafos

Autómatas y Matemáticas Discretas
Escuela de Ingeniería Informática de Oviedo

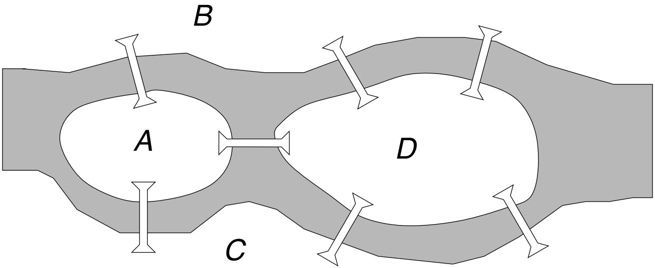
Contenidos

Parte I

Grafos: definiciones y nomenclatura

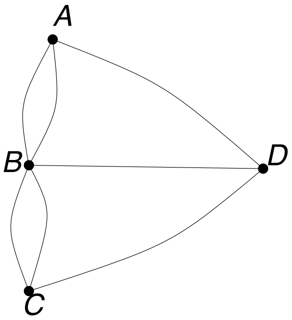
El problema de Könisberg

¿Es posible recorrer todos los puentes una y sólo una vez (y sin mojarse)?



El problema de Könisberg: Versión Grafos

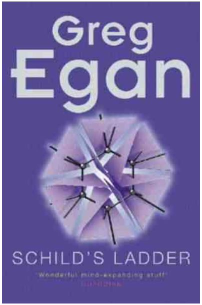
Cómo lo veía Euler... ¿Es posible recorrer todas las aristas una y solo una vez?



Sólo importa qué esta conectado con qué

Schild's Ladder, Greg Egan

En el principio era el grafo, más parecido al diamante que al grafito. Los ejes carecían de forma o longitud, los nodos no tenían posición. El grafo consistía únicamente en el hecho de que algunos nodos estaban conectados a otros.



Los grafos en la informática

- Los grafos aparecen frecuentemente en informática
  - Estructuras de datos (árboles)
  - Sistemas de ficheros
  - Estructura de enlaces entre páginas web
  - ...
- Permiten representar muchas situaciones
  - Redes de ordenadores
  - Problemas de optimización
  - Estructuras moleculares
  - ...

Definición de grafo no dirigido

Definición

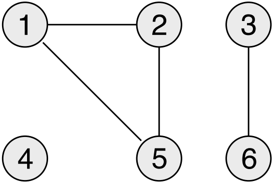
*Un **grafo simple no dirigido** es un par $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito no vacío de elementos llamados **vértices** y E es un conjunto de pares desordenados de elementos distintos de V llamados **aristas**. Es decir, una arista $e \in E$ tiene la forma $\{u, v\}$, donde $u, v \in V$ y $u \neq v$.*

Nótese que...

- La terminología en teoría de grafos varía muchísimo. En particular, los vértices de un grafo también reciben a veces el nombre de ***nodos***, y las aristas ***arcos***, ***ejes*** o ***líneas***.
- En un grafo no dirigido los bucles están excluídos.
- En grafos no dirigidos designaremos las aristas con la notación (u, v) (se sobreentiende que *no* importa el orden, es decir: $(u, v) = (v, u)$).

Representación gráfica

- Un grafo se representa por medio de puntos o círculos, que designan los vértices, y líneas que los unen, que representan las aristas.
- En la figura tenemos un ejemplo de grafo no dirigido con conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y aristas $E = \{(1, 2), (2, 5), (1, 5), (3, 6)\}$.



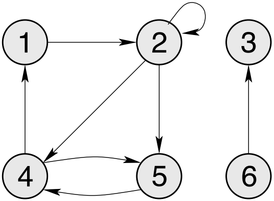
Definición de grafo dirigido

Definición

*Un **grafo dirigido** o **digrafo** G es un par (V, E), donde V es un conjunto finito no vacío y E es una relación binaria en V, es decir, un conjunto de pares ordenados de elementos de V. Los elementos de V reciben el nombre de **vértices**. El conjunto E es el **conjunto de aristas** de G. Es decir, una arista $e \in E$ tiene la forma (u, v), donde $u, v \in V$.*

Representación gráfica

- En la figura tenemos un grafo dirigido que, de acuerdo con la definición, tiene seis vértices ($V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) y ocho aristas ($E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5),$ $(5, 4), (3, 6)\}$). Las flechas apuntan del primer elemento de cada par al segundo.



Nótese que...

- Obsérvese que en un grafo dirigido es posible que una arista puede partir de un vértice y llegar a él de nuevo. Una arista de esta clase, es decir, de la forma $e = (v, v)$, recibe el nombre de ***bucle*** o ***lazo***.
- Cuando el sentido de las flechas no nos interesa (o, dicho de forma más técnica, la relación que el grafo representa es simétrica), es más conveniente el concepto de grafo no dirigido.

Más definiciones: Multigrafos

- Un ***multigrafo*** es un grafo no dirigido en el que permitimos la existencia de varias aristas conectando los mismos vértices y la aparición de bucles: $G = (V, E, f)$, donde V y E son conjuntos y $f : E \to V \times V$ asigna a cada arista $e \in E$ un par desordenado $f(e) = \{u, v\}$ de vértices de V (los vértices extremos de la arista e).
- Un ***multigrafo dirigido*** se define de forma exactamente igual, excepto que el recorrido de f está formado por pares ordenados de vértices.
- Dada la diversidad de nomenclaturas, usaremos ***grafo*** para referirnos a todos los casos globalmente e intentaremos especificar en cada situación particular si el grafo concreto es simple o no, dirigido o no.

Recopilando

Tipo de grafo	Dirigido	Simple	Lazos
Grafo	No	Sí	No
Multigrafo	No	No	Sí
Grafo dirigido (digrafo)	Sí	Sí	Sí
Multigrafo dirigido	Sí	No	Sí

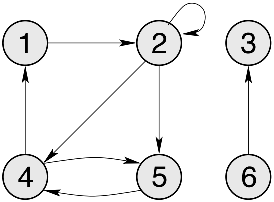
Cuadro: Cuadro resumen de los diferentes tipos de grafos

Incidencia

- Si (u, v) es una arista de un grafo dirigido, decimos que ***incide desde*** o ***sale de*** el vértice u, que será su ***vértice inicial***, y que ***incide hacia*** o ***entra en*** el vértice v, que será su ***vértice final***.
- Si estamos en un grafo no dirigido, decimos que (u, v) simplemente ***incide*** en los vértices u y v, que serán sus ***vértices extremos***.

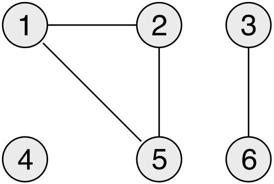
Incidencia en un grafo dirigido

- En la figura hay tres aristas que salen del vértice 2: son $(2, 2)$, $(2, 4)$ y $(2, 5)$.



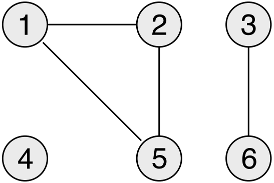
Incidencia en un grafo no dirigido

- En el grafo no dirigido de la figura, la arista $(3, 6)$ incide en los vértices 3 y 6.



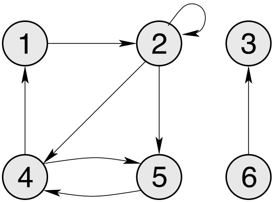
Grado en un grafo no dirigido

- El ***grado*** de un vértice en un grafo no dirigido es el número de aristas incidentes en él.
- El vértice 5 del grafo de la figura tiene grado 2
- **Importante**: Los bucles (para multigrafos) cuentan doble



Grado en un grafo dirigido

- En un digrafo, el ***grado de salida*** de un vértice es el número de aristas que salen de él, y el ***grado de entrada*** es el número de aristas que entran en él.
- El ***grado*** es la suma de los grados de salida y entrada.
- En el grafo dirigido de la figura, el vértice 2 tiene grado de salida 3, grado de entrada 2 y grado 5.



Caminos y ciclos

- Un ***camino*** de ***longitud*** k entre el vértice v_0 y el vértice v_k del grafo $G = (V, E)$ es una sucesión de aristas

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$$

  tales que $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ para $i = 2, 3, \ldots, k$, con lo que cada arista tiene por vértice inicial el vértice final de la anterior.
- Si no hay ambigüedad, un camino puede denotarse exclusivamente por la sucesión de vértices que visita: $C = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$.
- Esto puede hacerse, por ejemplo, cuando los grafos con los que trabajamos son simples.

Caminos y ciclos

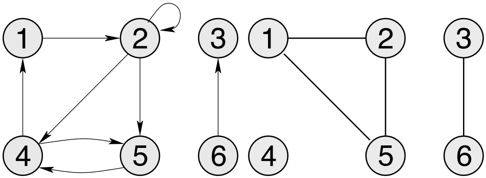
- La ***longitud*** del camino es el número de aristas que lo constituyen.
- El ***vértice inicial*** de $C = \{v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k\}$ es v_0, y el ***vértice final*** es v_k.
- Un camino es ***simple*** si todas sus aristas son distintas.
- Un camino $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ forma un ***ciclo*** si $v_0 = v_k$ y el camino contiene al menos una arista.
- El ciclo es ***simple*** si, además, las aristas que lo forman son todas distintas. Por ejemplo, un bucle es un ciclo de longitud unidad.

Parte II

Grafos y estructuras de datos

Adyacencia

- Si (u, v) es una arista de un grafo, decimos que el vértice v es ***adyacente*** al vértice u.
- En un grafo no dirigido, la relación de adyacencia es simétrica; no es así necesariamente en un digrafo.
- En el digrafo, el vértice 5 es adyacente al 2 (pero el 2 no lo es al 5). En el grafo, los vértices 1 y 2 son adyacentes entre sí.



(a) (b)

Matriz de adyacencia de un digrafo

- Un grafo con vértices $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se representa por una matriz booleana M, cuadrada, de dimensión igual al número de vértices n, y cuyos elementos se definen por

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, a_j) \text{ es una arista de } G \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- La matriz M representa la relación de adyacencia.
- Habrá un uno en la fila i, columna j, si hay una arista que va del vértice a_i al vértice a_j.

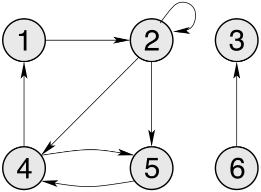
Observaciones sobre la matriz de adyacencia

- La matriz no será simétrica, en general, si el grafo es dirigido.
- La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido siempre será simétrica.
- Las aristas múltiples no quedan bien representadas en la matriz de adyacencia, pero sí los bucles o lazos, que provocan la presencia de unos en la diagonal principal.

Ejemplo de matriz de adyacencia: grafo dirigido

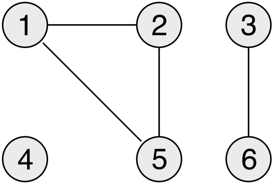
- Matriz de adyacencia para un grafo dirigido

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Ejemplo de matriz de adyacencia: grafo no dirigido

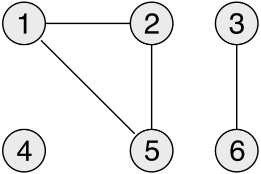
- Calcular la matriz de adyacencia para el siguiente grafo no dirigido
- Comprobar que la matriz es simétrica



Ejemplo de matriz de adyacencia: grafo no dirigido

- Matriz de adyacencia del grafo no dirigido

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Problemas de las matrices de adyacencia

- La representación por matrices de adyacencia tiene un inconveniente serio para grafos grandes: el tamaño de la matriz es proporcional al cuadrado del número de vértices.
- Si el número de aristas $|E|$ es comparativamente pequeño en relación a $|V|^2$, se desperdicia una cantidad enorme de espacio.
- La mayoría de los grafos se encuentra en este caso: son grafos ***dispersos***, donde $|E| \ll |V|^2$.

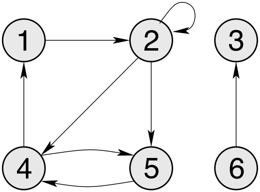
Listas de adyacencia

- La representación por ***listas de adyacencia*** es mucho más conveniente en esta mayoría de casos.
- Un grafo $G = (V, E)$ se representará por un vector de listas.
- El vector tiene $|V|$ posiciones, una por cada vértice; en la posición i-ésima se almacena la lista de los vértices adyacentes a a_i.
- El tamaño de esta representación es proporcional al número $|E|$ de aristas del grafo.
- En el caso de grafos ***densos*** (en los que $|E|$ y $|V|^2$ son comparables) es razonable considerar la matriz de adyacencia como representación alternativa.

Ejemplo de lista de adyacencia: grafo dirigido

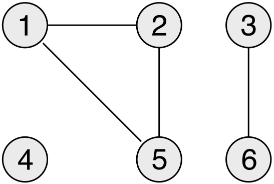
- Lista de adyacencia para un grafo dirigido

Vértice	**Adj**(V)
1	$\{2\}$
2	$\{2, 4, 5\}$
3	$\{\}$
4	$\{1, 5\}$
5	$\{4\}$
6	$\{3\}$



Ejemplo de lista de adyacencia: grafo no dirigido

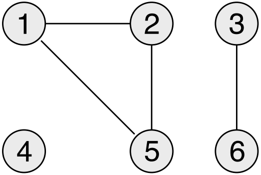
- Calcular la representación en listas adyacencia para el siguiente grafo no dirigido



Ejemplo de lista de adyacencia: grafo no dirigido

- Lista de adyacencia para el grafo no dirigido

Vértice	**Adj**(V)
1	$\{2,5\}$
2	$\{1,5\}$
3	$\{6\}$
4	$\{\}$
5	$\{1,2\}$
6	$\{3\}$



Parte III

Tipos de grafos

Grafos completos

- Un grafo completo es un grafo simple no dirigido en que todos los vértices están conectados entre sí.
- Para cada número de vértices n, existe esencialmente un solo grafo completo (todos son isomorfos entre sí), que se designa por K_n.

Teorema

El grafo completo de n vértices K_n tiene $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ aristas.

Ejemplos de grafos completos

- En la figura tenemos algunos grafos completos.

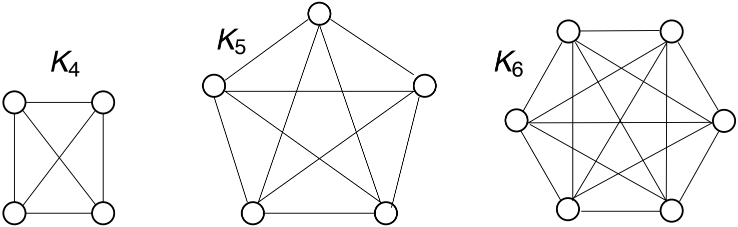
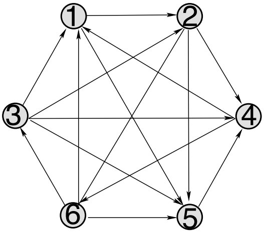


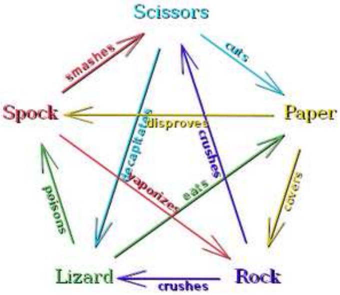
Figura: Grafos completos de cuatro, cinco y seis vértices

Torneos

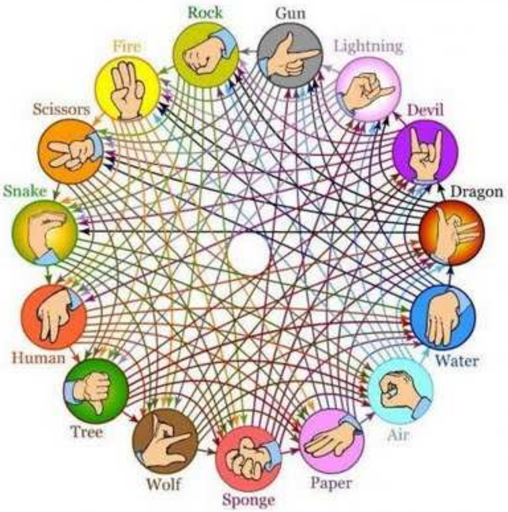
- Un ***torneo*** (***tournament***) es un grafo dirigido cuya versión no dirigida es un grafo completo.
- En el torneo de la figura podemos ver que el camino simple $(1, 2, 4, 6, 3, 5)$ pasa por todos los vértices. Un camino así se denomina ***camino hamiltoniano***.



Piedra, papel o tijera



Un torneo de 15 elementos



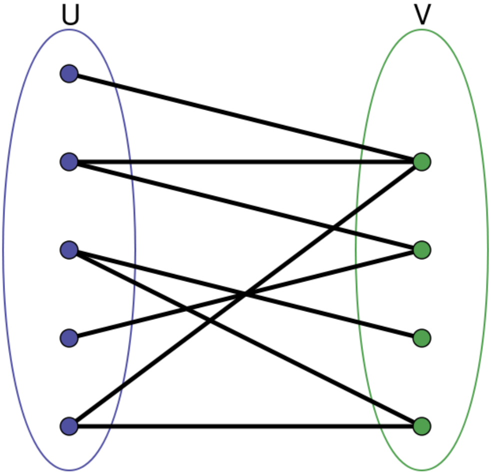
Grafos bipartitos

- Un ***grafo bipartito*** es un grafo no dirigido $G = (A, E)$ cuyo conjunto de vértices A es unión de dos conjuntos disjuntos U y V de forma que $(u, v) \in E$ implica que, o bien $u \in U$ y $v \in V$, o bien $u \in V$ y $v \in U$.
- Es decir, todas las aristas tienen un extremo en cada uno de los conjuntos U y V.

Teorema

Un grafo es bipartito si y solamente si carece de ciclos de longitud impar

Ejemplo de grafo bipartito



Grafos bipartitos completos

- Un ***grafo bipartito completo*** es un grafo bipartito y simple que tiene el mayor número de aristas posibles.
- Si tiene n nodos en una parte y m en la otra lo denotamos $K_{n,m}$.

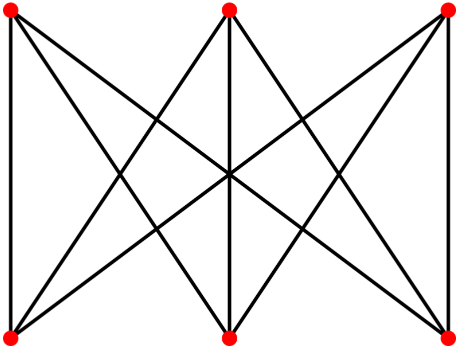
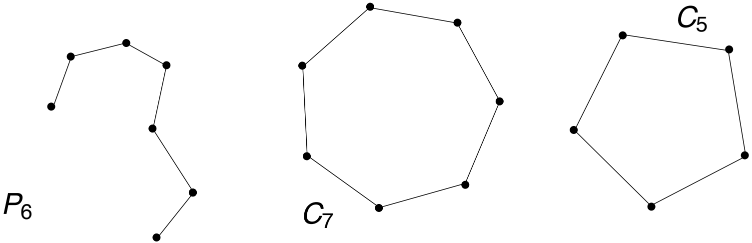


Figura: $K_{3,3}$

- El ***camino de longitud*** n es el grafo $P_n = (V, E)$, donde $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ y $E = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$.
- El ***ciclo de longitud*** n es el grafo $C_n = (V, E)$, donde $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E = \{(v_n, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$.

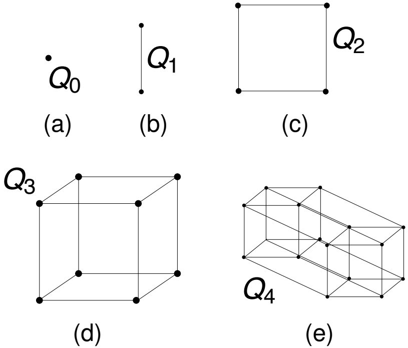


Grafos cúbicos

- Los grafos Q_n son la representación de la red de vértices y aristas de un cubo n-dimensional.
- El cubo de dimensión cero Q_0 consta, por definición, de un solo vértice.
- A partir de ahí, se obtiene Q_n uniendo por medio de aristas los vértices correlativos de dos copias de Q_{n-1}.

Grafos cúbicos

- En la figura podemos ver los primeros grafos cúbicos, hasta el de dimensión 4.



Parte IV

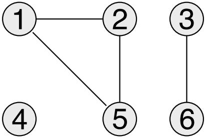
Conexión y accesibilidad

Accesibilidad

- Decimos que un vértice u' de un grafo es ***accesible*** (o ***alcanzable***) desde otro vértice u si existe un camino de u a u'.
- Es fácil ver que la relación de accesibilidad es transitiva
- Además, todo nodo es accesible desde sí mismo (por medio de un camino de longitud cero).
- En un grafo no dirigido, la relación también es simétrica; en un digrafo ya no tiene por qué ser así

Conexión

- Un grafo no dirigido es ***conexo*** si cada par de vértices está conectado por un camino (es decir, todos los vértices son mutuamente accesibles).
- Las ***componentes conexas*** de un grafo son los grupos de vértices que son accesibles entre sí.
- El grafo de la figura no es conexo ya que 6 es inaccesible desde 1. De hecho, hay tres componentes conexas.

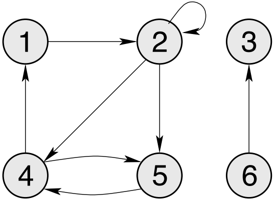


Componentes conexas

- En una componente conexa, todos los vértices son mutuamente accesibles.
- Por tanto, un grafo es conexo si y solamente si tiene una única componente conexa.
- Intuitivamente, las componentes son los diferentes “trozos” conexos en que el grafo se descompone.

Conexión fuerte

- Un grafo dirigido es ***fuertemente conexo*** si cualquier vértice es accesible desde cualquier otro.
- Las ***componentes fuertemente conexas*** de un digrafo son los grupos de vértices que son mutuamente accesibles.
- En el grafo de la figura tenemos tres componentes: $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3\}$ y $\{6\}$.



Accesibilidad de orden k

- Un vértice v es ***accesible de orden*** k desde otro vértice u, si existe un camino de longitud k exactamente que tiene a u por vértice inicial y a v por vértice final.
- Un vértice v_0 es accesible de orden cero desde sí mismo.
- Es evidente que v es accesible desde u si y sólo si

$$\exists k \geq 0 \text{ tal que } v \text{ accesible de orden } k \text{ desde } u$$

- Las definiciones anteriores establecen una serie de relaciones en el conjunto $V(G)$ de los vértices de un grafo G: la accesibilidad pura, y las accesibilidades de órdenes $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Matriz de accesibilidad

Definición

*Sea G un grafo con n nodos. La **matriz de accesibilidad de** G se define como la matriz booleana M_{acc} de dimensión $n \times n$ cuyos elementos vienen dados por*

$$(M_{acc})_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si } v_j \textit{ es accesible desde } v_i \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Matriz de accesibilidad de orden k

Definición

Sea G un grafo con n nodos. La ***matriz de accesibilidad de orden*** k ***de*** *G se define como la matriz booleana M_k de dimensión $n \times n$ cuyos elementos vienen dados por*

$$(M_k)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_j \text{ es accesible de orden } k \text{ desde } v_i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Matrices de accesibilidad no booleanas

- En algunos casos, las matrices de accesibilidad se definen, no como matrices booleanas, sino como matrices de enteros, poniendo en lugar de un uno el número total de caminos existentes del tipo indicado.
- Si utilizamos ese convenio, nuestras matrices de accesibilidad booleanas se obtienen a partir de las matrices enteras reemplazando por unos los enteros positivos, y dejando los ceros donde están.
- El paso inverso (de matriz booleana a entera) no es posible en general, puesto que al convertir a matriz booleana se pierde información.

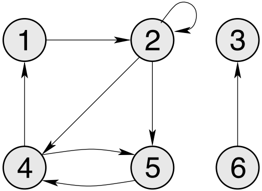
Cálculo de las matrices de accesibilidad

- Es evidente que la matriz M_1 coincide con la matriz de adyacencia.
- Como la accesibilidad de orden cero solamente se da entre vértices iguales, es también evidente que $M_0 = I_n$, la matriz identidad $n \times n$.

Cálculo de las matrices de accesibilidad (2)

- Para el grafo de la figura puede comprobarse que M_2 es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Cálculo de las matrices de accesibilidad (3)

Teorema

Para $k \geq 0$, se cumple que la matriz de accesibilidad de orden k es igual a la potencia k-ésima de la matriz de adyacencia. Es decir:

$$M_k = M^k$$

Cálculo de las matrices de accesibilidad (4)

Teorema

Si G es un grafo de n vértices,

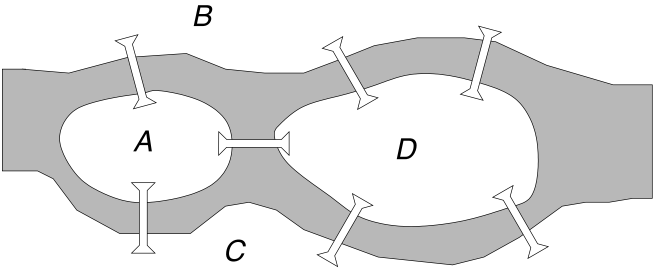
$$M_{acc} = I + M + M^2 + \cdots + M^{n-1}$$

Parte V

Recorridos eulerianos y hamiltonianos

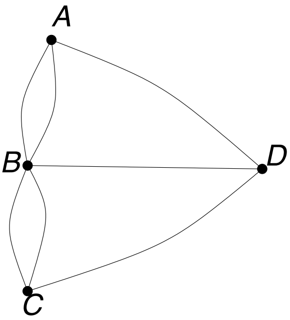
El problema de Könisberg

Recorrer todos los puentes una y sólo una vez



El problema de Könisberg: Versión Grafos

Encontrar un camino que use todas las aristas una y sólo una vez



Recorridos Eulerianos

Definición

Sea G un grafo no dirigido (simple o no).
Denominamos ***recorrido euleriano*** *de G a un camino que pasa por todas las aristas de G exactamente una vez. Es decir, si $C = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, la sucesión de aristas (v_1, v_2), (v_2, v_3), $(v_3, v_4), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ contiene cada arista de G exactamente una vez. Si además C es un ciclo, denominamos al recorrido un* ***circuito o ciclo euleriano****.*

Definición

Decimos que un grafo es ***euleriano*** *si posee un recorrido euleriano.*

Vértices pares e impares

Definición

Decimos que un vértice v de un grafo no dirigido G es ***par*** *(respectivamente,* ***impar****) si su grado es un entero par (resp. impar).*

Teorema

Sea G un grafo no dirigido. El número de vértices impares de G es siempre par.

Caracterización de los grafos eulerianos

Teorema

Sea G un grafo conexo no dirigido. Entonces, G posee un circuito euleriano si y solamente si G carece de vértices impares.

Corolario

Sea G un grafo conexo no dirigido. Si G tiene exactamente dos vértices impares, G posee un recorrido euleriano.

Algoritmo para la construcción de circuitos eulerianos

Para obtener un **circuito** euleriano en un grafo conexo sin vértices impares se puede utilizar el siguiente algoritmo:

1. Elegir un vértice inicial
2. Crear un ciclo a partir de ese vértice
3. Eliminar las aristas utilizadas en el ciclo
4. Repetir recursivamente el proceso en cada una de las componentes conexas
5. Pegar los ciclos obtenidos

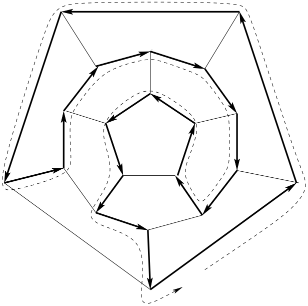
Algoritmo para la construcción de recorridos eulerianos

Para obtener un **recorrido** euleriano en un grafo conexo con exactamente dos vértices impares se puede utilizar el siguiente algoritmo:

1. Añadir una arista falsa entre los dos vértices de grado impar
2. Constuir un **circuito** euleriano en el grafo resultante
3. Eliminar la arista falsa

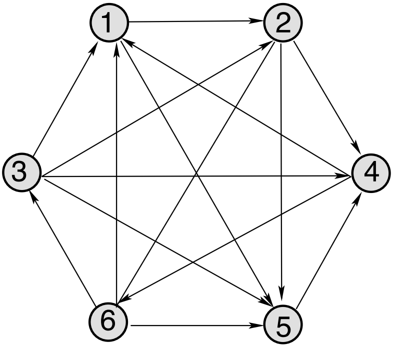
Definición

Sea G un grafo (dirigido o no). Un camino C en G se dice que es ***hamiltoniano*** *si C pasa por cada vértice del grafo exactamente una vez. Un ciclo que pasa exactamente una vez por cada vértice (excepto el vértice inicial, que aparece también como final), se denomina* ***ciclo hamiltoniano***



Torneos

- Un ***torneo*** (***tournament***) es un grafo dirigido cuya versión no dirigida es un grafo completo (todos los vértices están conectados dos a dos).

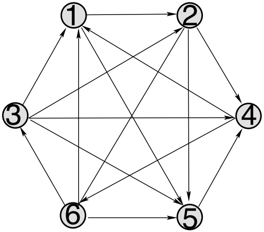


Torneos y caminos hamiltonianos

Teorema

Todo torneo posee un camino hamiltoniano

En el ejemplo un camino hamiltoniano es $1, 2, 4, 6, 3, 5$.



Algoritmo para obtener un camino hamiltoniano en un torneo

Para obtener un camino hamiltoniano en un torneo se puede utilizar el siguiente algoritmo:

1. Elegir un orden para los vértices del grafo
2. Insertar, en ese orden, los vértices en el recorrido **en la primera posición posible.** Habrá tres casos:
   1) Se puede insertar al principio
   2) No se puede insertar al principio, pero sí en el medio
   3) Sólo se puede insertar al final

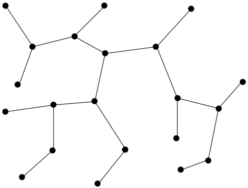
Parte VI

Árboles y recorridos de árboles

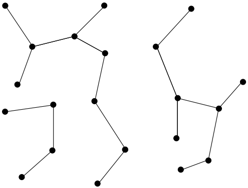
Definición de árbol

Definición

*Un **árbol** es un grafo no dirigido, conexo y acíclico. Un grafo no dirigido que es acíclico, pero posiblemente no conexo, se denomina **bosque**.*



(h)



(i)

Importancia de los árboles en Informática

- Los árboles son una estructura de datos con múltiples aplicaciones
  - Árboles de búsqueda
  - Sistemas de ficheros
- Básicos en el análisis sintáctico y semántico
  - Árboles de derivación
  - Evaluación de expresiones (recorridos)
- En Inteligencia Artificial
  - Árboles de decisión
  - Árboles de juego

Dos lemas

Lema

Sea G un grafo no dirigido con n vértices y e aristas. Si G es conexo, se verifica que $e \geq n - 1$.

Lema

Sea G un grafo no dirigido con n vértices y e aristas. Si G es acíclico, $e \leq n - 1$.

Caracterización de los árboles

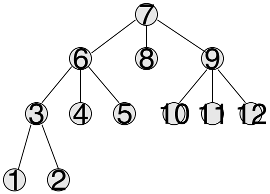
Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Son equivalentes:

1. *G es un árbol*
2. *Dos vértices cualesquiera de G están conectados por un único camino simple*
3. *G es conexo, pero si se le suprime una arista cualquiera, deja de serlo.*
4. *G es conexo y $|E| = |V| - 1$*
5. *G es acíclico y $|E| = |V| - 1$*
6. *G es acíclico, pero si se le añade una arista, deja de serlo*

Definición de árbol enraizado

- Un ***árbol enraizado*** es un árbol en el que marcamos uno de los vértices como vértice distinguido. Dicho vértice se denomina ***raíz*** del árbol.
- Por ejemplo, el árbol de la figura tiene por raíz el nodo 7.
- En los árboles enraizados es más común llamar ***nodos*** a los vértices



Conceptos en árboles enraizados

- Consideremos un nodo cualquiera v de un árbol enraizado de raíz r. Existe un único camino entre r y v; cualquier nodo presente en ese camino es un ***ancestro*** o ***antecesor*** de v.
- Si w es un ancestro de v, decimos que v es un ***descendiente*** de w.
- Todo nodo es, por definición, ancestro de sí mismo; un ancestro de v diferente a él es un ***ancestro propio***.
- Un ***descendiente propio*** se define de forma análoga.

Conceptos en árboles enraizados (2)

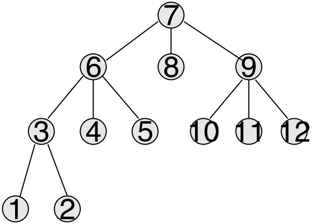
- El ***subárbol con raíz en*** v es el subárbol inducido por los descendientes de dicho vértice.
- Supongamos que la última arista del (único) camino entre la raíz y un nodo v es (w, v). En ese caso, decimos que w es el ***padre*** de v, y que v es ***hijo*** de w.
- Dos nodos que tienen el mismo padre son ***hermanos***.
- Un nodo sin hijos es una ***hoja*** o ***nodo externo***; en caso contrario, es un ***nodo interno***.

Conceptos en árboles enraizados (3)

- El número de hijos de un nodo es su ***grado***; obsérvese que, en este contexto, el grado de un nodo es una unidad inferior a lo definido anteriormente.
- Si todos los nodos de un árbol tienen grado a lo sumo m, el árbol es ***m-ario***. Así, en un árbol ternario cada nodo tiene, a lo sumo, tres hijos; posiblemente, menos.
- Definimos la ***profundidad*** de un nodo v como la longitud del camino de la raíz a v.
- La ***altura*** de un árbol es el máximo de las profundidades de sus nodos.

Ejemplo de árbol enraizado

- El árbol de la figura tiene altura 3, puesto que los nodos 1 y 2 tienen ambos dicha profundidad. El subárbol con raíz en el nodo 9 tiene altura uno.



Definición de árbol binario

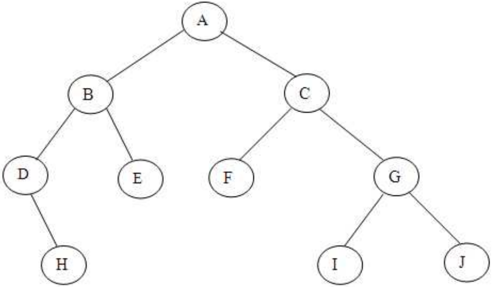
Definición

*Un **árbol binario** T es una estructura definida en un conjunto finito de nodos, que, o bien*

- *no contiene nodos, o bien*
- *contiene tres conjuntos distintos de nodos: un **nodo raíz**, un árbol binario llamado el **subárbol izquierdo** y otro llamado el **subárbol derecho**.*

Ejemplo de árbol binario

- Un ejemplo



Observaciones sobre árboles binarios

- Está permitido que un árbol binario sea vacío: se trata del ***árbol vacío*** o ***árbol nulo***.
- Dado un árbol binario de raíz r, si el subárbol izquierdo no es vacío, su raíz es el ***hijo izquierdo*** de r; el hijo derecho se define análogamente. Es posible, pues, que un hijo izquierdo o derecho estén ***ausentes***
- Un árbol binario no es simplemente un árbol ordenado en que cada nodo tiene a lo sumo dos hijos.
- Un nodo puede tener solamente un hijo izquierdo o solamente un hijo derecho.

Recorrido preorden

- Recorrido preorden de un árbol binario

```
PREORDEN(T)
if T = NIL
   then no hacer nada
   else VISITA(T)
        PREORDEN(T.iz)
        PREORDEN(T.de)
```

Recorrido inorden

- Recorrido inorden de un árbol binario

```
INORDEN(T)
if T = NIL
   then no hacer nada
   else INORDEN(T.iz)
        VISITA(T)
        INORDEN(T.de)
```

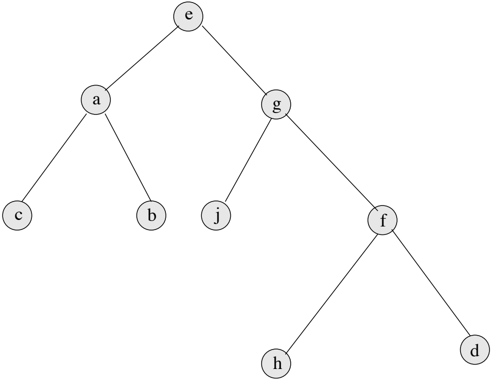
Recorrido postorden

- Recorrido postorden de un árbol binario

```
POSTORDEN(T)
  if T = NIL
     then no hacer nada
     else POSTORDEN(T.iz)
          POSTORDEN(T.de)
          VISITA(T)
```

Ejemplo de recorridos de un árbol binario

- Un ejemplo



Recorridos y expresiones

- Estos tres tipos de recorrido se relacionan con tres notaciones usuales para las expresiones algebraicas
- ***Notación infija***: La notación del álgebra corriente exige que los operadores vayan en medio de sus dos operandos. Por ejemplo, la expresión

  $$3 + 5 * (6 + 12)$$

  está en notación infija.

Recorridos y expresiones (2)

- ***Notación postfija***: Se obtiene colocando cada operador binario a continuación de sus operandos. Al contrario que la infija, no requiere paréntesis ni reglas de precedencia para resolución de la ambigüedad.

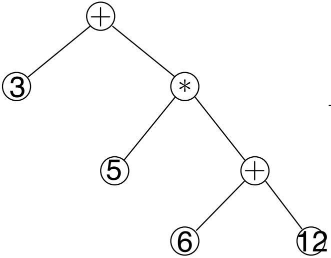
$$3\ 5\ 6\ 12 + * +$$

- ***Notación prefija***: Se obtiene colocando los operadores binarios como prefijos de los operandos.

$$+\ 3 * 5 + 6\ 12$$

Ejemplo de recorridos y expresiones

- Las tres notaciones resultan de recorrer en in-, pre- y postorden un ***árbol sintáctico*** de la expresión, como puede comprobarse en la figura.



(j)

Recorrido	**Expresión**
Inorden	$3 + 5 * 6 + 12$
Postorden	$3\ 5\ 6\ 12 + * +$
Preorden	$+3 * 5 + 6\ 12$

(k)

Figura: a) Árbol sintáctico y b) notaciones infija, prefija y postfija para la expresión $3 + 5 * (6 + 12)$

Parte VII

Planaridad y coloramiento

¿Qué tienen en común estos problemas?

- Resolver un Sudoku

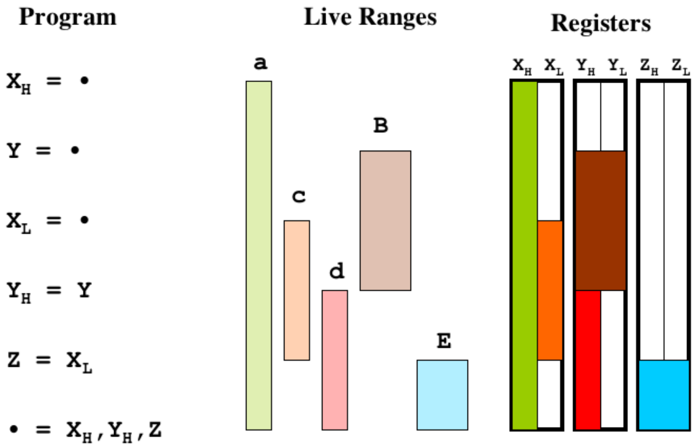
		1						
		2		3				4
			5			6		7
5			1	4				
	7						2	
				7	8			9
8		7			9			
4				6		3		
						5		

¿Qué tienen en común estos problemas?

- Asignar los siguientes recursos
  - Frecuencias de emisión a estaciones de radio cercanas
  - Aulas a exámenes de una Escuela Universitaria
  - Pistas de salida a aviones en un aeropuerto
  - ...

¿Qué tienen en común estos problemas?

- Decidir, en tiempo de compilación, qué variables se colocan en los registros del procesador



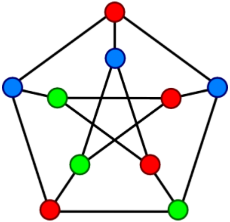
¿Qué tienen en común estos problemas?

- Colorear un mapa sin que países adyacentes tengan el mismo color

Coloramiento de grafos

Definición

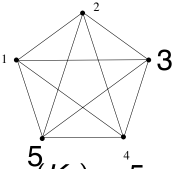
Se dice que un grafo $G = (V, E)$ (simple, no dirigido y sin bucles) es ***coloreable con*** *n* ***colores****, o simplemente n-****coloreable****, si existe una función $f : V \to \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que si u y v son vértices adyacentes, $f(u) \neq f(v)$.*



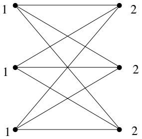
Número cromático

Definición

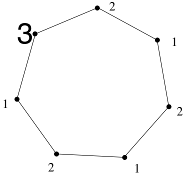
El menor número n de colores que resulta suficiente para colorear un grafo G se denomina su ***número cromático****, y se denota por* $\chi(G)$.



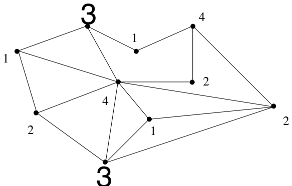
$\chi(K_5) = 5$

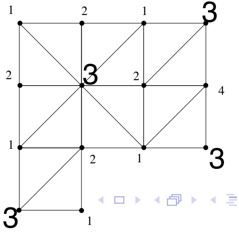


$\chi(K_{3,3}) = 2$



$\chi(C_7) = 3$





Algunos resultados

Teorema

Dado un grafo G, las siguientes afirmaciones son equivalentes: a) G es 2-coloreable, b) G es bipartito, y c) G carece de ciclos de longitud impar.

Teorema

Si

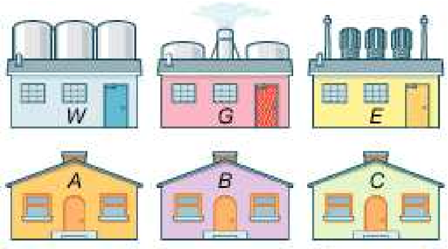
$$\Delta(G) = \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}$$

es el mayor de los grados de los vértices de G, entonces

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

El problema de las tres casas

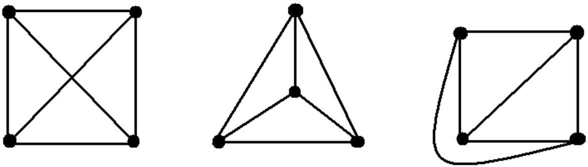
- ¿Es posible abastecer con gas, agua y electricidad a las tres casas de la figura sin que los cables y tuberías se crucen?



Grafos planos

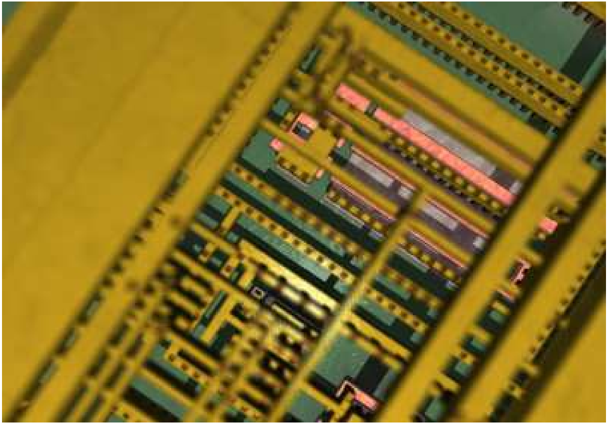
Definición

Definimos un grafo ***plano*** *como aquel que es factible representar en el plano de forma que sus aristas no tengan intersecciones*



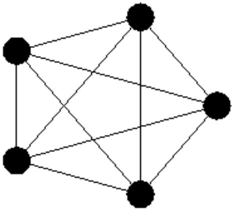
Aplicaciones de los grafos planos

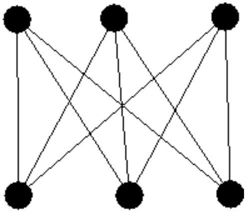
- Diseño de circuitos integrados
- Planificación de rutas (enrutamiento de vehículos sin cruces)
- Telecomunicaciones (árboles abarcadores mínimos)



Grafos no planos mínimos

- Ni el grafo completo K_5 ni el grafo bipartito completo $K_{3,3}$ son planos





- De hecho, son los grafos mínimos con esa propiedad (cualquier otro grafo no plano “contiene” a alguno de ellos)

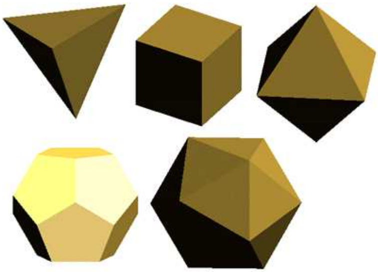
La fórmula de Euler

Teorema

Si G es un grafo plano, el número C de regiones conexas en que su representación divide al plano satisface la relación

$$C - A + V = 2$$

siendo A y V los números de aristas y vértices, respectivamente.



El Teorema de los Cuatro Colores

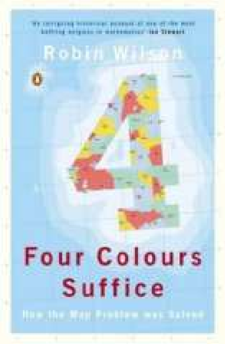
- ¿Cuántos colores se necesitan para pintar un mapa?
- En términos de grafos: ¿cuál es el máximo número cromático de un grafo plano?
- Empíricamente, parece que *cuatro colores bastan*
- Planteado originalmente en 1852: Guthrie $\rightarrow$ De Morgan $\rightarrow$ Cayley
- Demostraciones (incorrectas) de Kempe (1879) y Tait (1880)
- Heawood (1890): Teorema de los cinco colores

El Teorema de los Cuatro Colores

- Demostrado en 1976 por Appel y Hakken con la ayuda del ordenador

Teorema de los cuatro colores

Todo grafo plano es 4-coloreable



El Teorema de los Cuatro Colores

La conjetura de Heawood

El número máximo de colores necesario para colorear los grafos representables en una superficie orientable con característica de Euler χ es

$$\gamma(\chi) = \lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \rfloor$$

- Probada en 1968 (Ringel y Youngs) salvo para el plano