A Poisson-egyenlet megoldása háromszögtartományon a végeselem-módszer segítségével különböző peremfeltételekkel

Bene Richárd

Témavezető:

Dr. Horváth Róbert

egyetemi docens

BME Matematika Intézet

Analízis Tanszék

Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Ebben a dolgozatban a Poisson-egyenlet végeselem-módszerrel történő numerikus megoldását ismertetem. A módszer előnye, hogy az eddig tanultakkal szemben már nemcsak téglalap alakú, hanem tetszőleges folytonos görbével határolt értelmezési tartományt is választhatunk az egyenletnek. A célom az volt, hogy megismerjem a végeselem-módszert, és hogy háromszögtartományokra felírt feladatok esetén eljussak a probléma felírásától egészen a számítógépes megvalósításig. Az alapképzésben nem szereplő módszert [1] segítségével sajátítottam el.

Először bevezetem a szükséges fogalmakat, az általános végeselem-módszert, a variációs- és minimalizációs feladatokat. Megmutatom ezek ekvivalenciáját, a gyenge megoldás létezését és egyértelműségét a Lax–Milgram-tétel segítségével, továbbá a numerikus közelítés hibájának becslését és a variációs feladatból következő lineáris egyenletrendszer merevségi mátrixának és terhelési vektorának felépítését. Egy parciális differenciálegyenletnél a kezdeti állapoton túl meg kell határoznunk a peremfelételeket is. Először Dirichlet, majd Neumann peremfeltételekkel számolunk. Mindkettőnél bemutatom az egyenlethez tartozó variációs formulát, melynél lineáris elemeket használok a közelítéshez. Ezután kitérek a feladatot implementáló Python-kód összefoglalására, az értelmezési tartományt adó háromszögrács generálására, a pontos és a numerikus megoldás összevetésére, majd a megoldás ábrázolására is.

2. Poisson-egyenlet

2.1. Az egyenlet

Vegyük az alábbi parciális differenciálegyenletet:

$$-\Delta u = f \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{1}$$

ahol f adott kétváltozós függvény és $u(x, y)$-t keressük. Egy Γ-val határolt Ω korlátos, nyílt $\mathbb{R}^2$-beli tartományon vizsgálódunk. Feltesszük, hogy Γ folytonos, szakaszonként lineáris görbe.

Két különböző peremfeltétellel adott probléma kerül megoldásra.
A Dirichlet-feltétel

$$u = 0 \qquad (x, y) \in \Gamma \tag{2}$$

és a Neumann-feltétel

$$\partial_n u = g \qquad (x, y) \in \Gamma_N, \tag{3}$$

ahol g adott $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, ∂_n a kifelé mutató normális szerinti deriválás és $\Gamma_N \subset \Gamma$.

2.2. Analitikus megoldás

A később tárgyalásra kerülő hibabecslések szemléltetéséhez szükségünk lesz egy analitikus megoldásra is mindkét peremfeltétel esetén.

Ω legyen a $(0, 0), (0, 1), (2, 0) \in \mathbb{R}^2$ pontok által határolt háromszög. A háromszög oldalegyenletei legyenek $a(x, y) = 0, b(x, y) = 0, c(x, y) = 0$. Ezek a következőek erre a háromszögre:

$$\begin{aligned} a(x,y) &= y, \\ b(x,y) &= x, \\ c(x,y) &= 1 - \frac{x}{2} - y. \end{aligned}$$

A Dirichlet-feladat megoldásának az $u(x,y) = a(x,y)b(x,y)c(x,y)$ függvényt választjuk, mivel ez a tartomány határán $0-t$ ad a definíciójából következően. Vagyis

$$u(x,y) = xy - \frac{x^2y}{2} - xy^2. \tag{4}$$

megoldja a Dirichlet-problémát. Vegyük $-\Delta u$-t, hogy megkapjuk a megoldáshoz tartozó f forrásfüggvényt. Azaz

$$f = -\Delta u = (\partial_{xx} + \partial_{yy})u = 2x + y. \tag{5}$$

A Neumann-feladathoz is ugyanezt a háromszöget válasszuk, viszont az előbb $a(x,y) = y = 0$-val felírt oldalegyenesén u-t ne fixáljuk 0-ra, hanem Neumann-peremfeltételt írjunk elő, de a másik két oldalt hagyjuk meg Dirichlet-peremfeltétellel. Ekkor $u(x,y) = b(x,y)c(x,y)$ kielégíti a Dirichlet-feltételeket, vagyis

$$u(x,y) = x - \frac{x^2}{2} - xy \tag{6}$$

megoldása a feladatnak. Számoljuk ki f-et!

$$f = -\Delta u = -(\partial_{xx} + \partial_{yy})u = 1.$$

Most határozzuk meg, hogy a feladathoz milyen peremfeltétel tartozik az $a(x,y) = 0$ által meghatározott oldalon.

$$\partial_n u = Du \cdot n = (\partial_x u, \partial_y u)(0,-1)^T = -\partial_y u = x.$$

2.3. Példák

A fizika és a mechanika számos problémáját modellezhetjük a Poisson-egyenlettel. A keresett függvény értelmezhető hőmérsékletként, elektromágneses potenciálként vagy egy elasztikus membrán kitéréseként [1].

Elasztikus rúd

Hooke törvényéből következik az alábbi egyenlet, ami leírja, hogy hogyan viselkedik egy tömör, elasztikus rúd terhelés alatt. Keressük az u tangenciális elmozdulást. Ekkor igaz, hogy

$$-\Delta u = \frac{f}{E},$$

ahol f a rúdra ható tangenciális terhelés intenzitása és E a rúdra jellemző elaszticitási modulus.

Hővezetés

A Fourier-törvény segítségével leírhatjuk a hővezetés jelenségét az alábbi egyenlet szerint:

$$-\Delta q = \frac{f}{k}.$$

Itt a q hőmérsékletre oldjuk meg az egyenletet, feltéve, hogy ismerjük f-et, a hőforrás sűrűségét és k-t, az vezető anyag hővezetési tényezőjét.

Elektrosztatika

A Gauss-törvényből és Faraday indukciós törvényéből adódik az

$$-\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

egyenelet. Keressük a ϕ elektromos potenciált ϵ elektromos permittivitás és ρ töltéssűrűség ismeretében.

3. Szükséges fogalmak áttekintése

3.1. Jelölések

Vezessünk be egy jelölést a parciális deriváltakra:

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}},$$

ahol $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, az α_i-k nemnegatív egész számok és $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$. Ezzel könnyen tudunk hivatkozni az összes α-d rendű parciális deriváltra.

3.2. Megoldások tere

Először definiáljuk a k-szor folytonosan differenciálható függvények terét. Legyen

$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \text{f k-szoros deriváltjai folytonosak}\}. \tag{7}$$

Ezen vezessünk be egy skaláris szorzást. $u, v \in C^k(\Omega)$ esetén

$$(u, v) = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha u \cdot D^\alpha v. \tag{8}$$

Ha ezt a teret teljessé tesszük (azaz hozzávesszük az összes torlódási pontját), akkor megkapjuk $H^k(\Omega)$-t.

Mindezt megtehetjük olyan függvények terével is, amelyekben a függvények Ω határán vagy ennek részhalmazán 0-t vesznek fel. Előbbire a Dirichlet-feladathoz, utóbbira a Neumann-feladathoz lesz szükségünk. Legyen

$$\begin{aligned} C_0^k(\Omega) = \{\ f : \Omega \to \mathbb{R} :& \text{f } k\text{-szoros deriváltjai folytonosak és} \\ & \text{0-t vesznek fel } \Omega \text{ határán}\}, \end{aligned}$$

$$C_N^k(\Omega) = \{\ f : \Omega \to \mathbb{R} : \text{f } k\text{-szoros deriváltjai folytonosak és}$$
$$\text{0-t vesznek fel } \Omega \text{ határának egy } \Gamma_N \text{ részhalmazán}\}.$$

Ezekből teljessé tétel után megkapjuk a $H_0^k(\Omega)$ és $H_N^k(\Omega)$ tereket.

Legyen L_2 az a tér, amely a négyzetesen integrálható függvényeket tartalmazza.

Megjegyzés. Az előbb definiált függvényterekben olyan L_2-beli függvények vannak, amelyeknek a k-adrendű általánosított deriváltjai is L_2-beliek.

4. Végeselem-módszer

4.1. A folytonos probléma

Legyen V Hilbert-tér $(\cdot,\cdot)_V$ skaláris szorzással és az ebből származó $||\cdot||_V$ normával, továbbá legyen $a(\cdot,\cdot) : V^2 \to \mathbb{R}$ bilineáris funkcionál és $L : V \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, melyekre az alábbiak teljesülnek:

- $a(\cdot,\cdot)$ szimmetrikus, folytonos és V-elliptikus, azaz:

$$a(x,y) = a(y,x), \tag{9}$$

$$\exists \gamma > 0 : \forall v, w \in V : |a(v,w)| \le \gamma ||v||_V ||w||_V, \tag{10}$$

$$\exists \alpha > 0 : \forall v \in V : a(v,v) \ge \alpha ||v||_V^2, \tag{11}$$

- L folytonos:

$$\exists \Lambda > 0 : \forall v \in V : |L(v)| \le \Lambda ||v||_V. \tag{12}$$

4.1.1. Definíció. *Minimalizációs feladat*

Találjunk egy $u \in V$-t elemet, amelyre

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v) \tag{13}$$

teljesül, ahol $F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - L(v)$.

4.1.2. Definíció. *Variációs feladat*

Találjunk egy $u \in V$ elemet, hogy $\forall v \in V$-re

$$a(u,v) = L(v) \tag{14}$$

teljesüljön.

4.1.1. Állítás. *Az $u \in V$ elem akkor és csak akkor megoldása a (14) variációs feladatnak, ha megoldása a (13) minimalizációs feladatnak.*

Bizonyítás. (13) $\Rightarrow$ (14):

Legyen $0 \neq v \in V$ és $\epsilon \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $u + \epsilon v \in V$. Mivel u minimuma $F - nek$, ezért

$$F(u) \leq F(u + \epsilon v).$$

Használjuk a $g(\epsilon) = F(u + \epsilon v)$ elnevezést. Ekkor az adódik, hogy

$$g(0) \leq g(\epsilon),$$

azaz g minimuma 0-ban van. Bontsuk fel $g(\epsilon)$-t:

$$g(\epsilon) = \frac{1}{2}a(u + \epsilon v, u + \epsilon v) - L(u + \epsilon v) =$$

$$= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{\epsilon}{2}a(u, v) + \frac{\epsilon}{2}a(v, u) + \frac{\epsilon^2}{2}a(v, v) - L(u) - \epsilon L(v),$$

mivel a szimmetrikus teljesül, hogy

$$= \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + \epsilon a(u, v) - \epsilon L(v) + \frac{\epsilon^2}{2}a(v, v).$$

Ekkor már adódik (14):

$$g'(0) = \Big[a(u, v) - L(v) + \epsilon a(v, v)\Big]_{\epsilon=0} = a(u, v) - L(v) = 0.$$

(13) $\Leftarrow$ (14):

Tegyük fel, hogy u megoldja a (14) variációs feladatot. Legyen $v \in V$ és $w = v - u$, ekkor $(\cdot, \cdot)_a$ (9) szimmetriáját és (11) V-elliptikusságát felhasználva kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
F(v) = F(u+w) &= \frac{1}{2}(u+w, u+w)_a - L(u+w) = \\
&= \frac{1}{2}(u,u)_a - L(u) + (u,w)_a - L(w) + \frac{1}{2}(w,w)_a \\
&= F(u) + \frac{1}{2}(w,w)_a \geq F(u),
\end{aligned}
$$

mert (14) formula miatt $(u,w)_a - L(w) = 0$.

Az egyenlőtlenséglánc elejét és végét összeolvasva azt kapjuk, hogy $F(u) \leq F(v)$ tetszőleges $v \in V$-re, azaz megkaptuk a minimalizációs formulát. ■

Megjegyzés. Az előző állításokhoz nem kell a Hilbert-tér tulajdonság, egyszerű vektortérben is működnek.

4.2. Energia norma

Vezessünk be egy új $\|\cdot\|_a$ normát a V Hilbert-téren és a hozzá tartozó skaláris szorzatot. $v, w \in V$-re a fenti $a(\cdot,\cdot)$ bilineáris funkcionállal:

$$
\|v\|_a^2 = a(v,v),
$$
$$
(v,w)_a = a(v,w).
$$

4.2.1. Állítás. *$\|\cdot\|_a$ és $\|\cdot\|_V$ ekvivalens normák.*

Bizonyítás. $a(\cdot,\cdot)$ (10) folytonosságából és (11) V-elliptikusságából következik, hogy $\exists \alpha > 0,\ \gamma > 0$ amire

$$
\sqrt{\alpha}||v||_V \leq ||v||_a \leq \sqrt{\gamma}||v||_V.
$$

Ez éppen a két norma definíció szerinti ekvivalenciáját jelenti. ■

4.2.1. Lax–Milgram-tétel

4.2.1. Tétel. ***(Lax–Milgram)*** *Legyen V Hilbert-tér $||.||_V$ normával és $(\cdot,\cdot)_V$ skaláris szorzással. Továbbá tegyük fel, hogy $a(\cdot,\cdot)$ teljesíti a fenti (9) szimmetria, (11) V-elliptikus, (10) folytonos és L a (12) folytonos feltételeket. Ekkor egyértelműen létezik egy $u \in V$ függvény, amely megoldja a (14) variációs feladatot és*

$$||u||_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha} \tag{15}$$

is teljesül.

Bizonyítás. A cél az, hogy konstruáljunk egy $u \in V$ függvényt, ami megoldja az $F(u) \leq F(v)$ minimalizációs feladatot minden $v \in V$-re, ami az előző állítás szerint ekvivalens a variációs feladattal. Legyen

$$\beta = \inf_{v \in V} F(v). \tag{16}$$

Ekkor L (12) folytonosságát és $a(\cdot,\cdot)$ V-elliptikusságát az energia normára kihasználva adódik, hogy

$$F(v) = \frac{1}{2}(v,v)_a^2 - L(v) \geq \alpha \left\|v\right\|_a^2 - \Lambda \left\|v\right\|_a > -\infty.$$

Vegyünk egy $F(v_i)$ sorozatot, amire

$$F(v_i) \to \beta \tag{17}$$

teljesül. Lássuk be, hogy ekkor v_i konvergens sorozat. A paralelogramma-szabály (39) miatt

$$\left\|\frac{v_i - v_j}{2}\right\|_a^2 = \frac{1}{2}\left\|v_i\right\|_a^2 + \frac{1}{2}\left\|v_j\right\|_a^2 - \left\|\frac{v_i + v_j}{2}\right\|_a^2,$$

ezután írjuk bele $-L(v_i)$-t és $-L(v_j)$, de vonjuk is ki őket a kifejezésből

$$= \frac{1}{2}\|v_i\|_a^2 - L(v_i) + \frac{1}{2}\|v_j\|_a^2 - L(v_j) - \left(\left\|\frac{v_i+v_j}{2}\right\|_a^2 - 2L\Big(\frac{v_i+v_j}{2}\Big)\right).$$

$F(v)$ definícióját és (16)-t használva adódik

$$= F(v_i) + F(v_j) - 2F\Big(\frac{v_i+v_j}{2}\Big) \le F(v_i) + F(v_j) - 2\beta.$$

(17) miatt az előző kifejezés nullához tart, azaz megkaptuk, hogy $\{v_i\}$ Cauchy-sorozat a V Hilbert-térben, ezáltal konvergens. $F(u) = \beta$ teljesül a határértékre, mert

$$\begin{aligned}|F(v_i) - F(u)| &= \left|\frac{1}{2}(\|v_i\|_a^2 - \|u\|_a^2) - L(v_i - u)\right| = \\ &= \left|\frac{1}{2}(v_i - u, v_i + u)_a - L(v_i - u)\right| \le \\ &\le \left(\frac{\gamma}{2}\|v_i + u\|_V + \Lambda\right)\|v_i - u\|_V \to 0.\end{aligned}$$

A becslésnél $(\cdot,\cdot)_a$ (10) folytonosságát és L (12) folytonosságát használtuk.

Stabilitás: Éljünk a $v = u$ választással (14) variációs feladatban. Először használjuk, hogy a V-elliptikus, majd azt, hogy L folytonos.

$$\alpha\|u\|_V^2 \le a(u,u) = L(u) \le \Lambda\|u\|_V.$$

Osszunk le $\|u\|_V \neq 0$-val és megkapjuk, hogy

$$\|u\|_V \le \frac{\Lambda}{\alpha}.$$

Belátjuk, hogy a megoldás egyértelmű. Tegyük fel, hogy u_1 és u_2 is megoldása a (14) variációs feladatnak. Azaz ha $v \in V, i = 1,2$ tetszőleges, akkor

$$a(u_i, v) = L(v).$$

A két egyenletet egymásból kivonva adódik, hogy

$$a(u_1 - u_2, v) = 0.$$

Mivel $\forall v \in V$-re igaz a fenti képlet, éljünk a $v = u_1 - u_2$ választással energia normában, azaz

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = \|u_1 - u_2\|_a^2 = 0,$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$u_1 = u_2. \qquad \blacksquare$$

4.3. Diszkretizálás és annak hibája

Legyen V_h egy véges M dimenziós altere V-nek, ennek bázisa $\{\phi_1, ...\phi_M\}$, ekkor minden $v \in V_h$ egyértelműen felírható

$$v = \sum_{i=1}^{M} \eta_i \phi_i \tag{18}$$

alakban, ahol $\eta_i \in \mathbb{R}$.

Az előző fejezetben bevezetett folytonos problémák diszkrét alakjai következnek.

A diszkrét minimalizációs feladatban keressük azt az $u_h \in V_h$ függvényt, amelyre:

$$F(u_h) \leq F(v) \qquad \forall v \in V_h, \tag{19}$$

a diszkrét variációs feladatban keressük azt az $u_h \in V_h$ függvényt, hogy

$$a(u_h, v) = L(v) \qquad \forall v \in V_h \tag{20}$$

teljesüljön.

Mivel minden $v \in V_h$-ra teljesül (20), válasszuk $v = \phi_j$-t $(j = 1, ..., M)$ és írjuk fel u_h-t (18) segítségével:

$$a\Big(\sum_{i=1}^{M} \xi_i \phi_i, \phi_j\Big) = L(\phi_j).$$

Használjuk fel a linearitását, hogy megkapjuk az alábbi

$$\sum_{i=1}^{M} a(\phi_i, \phi_j)\xi_i = L(\phi_j) \tag{21}$$

lineáris egyenletrendszert. Ami mátrixos alakban

$$A\xi = b, \tag{22}$$

lesz, ahol $\xi = (\xi_i) \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{M}}$, $b = (b_i) = (L(\phi_i)) \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{M}}$ és $A = (a_{ij}) = a(\phi_i, \phi_j) \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{M\times M}}$.

4.3.1. Állítás. *A szimmetrikus, pozitív definit mátrix.*

Bizonyítás. Az állítás bizonyításához számoljuk ki $a(v, v)$-t a (18) reprezentáció behelyettesítésével.

$$a(v, v) = a(\sum_{i=1}^{M} \eta_i \phi_i, \sum_{j=1}^{M} \eta_j \phi_j) = \sum_{i,j=1}^{M} \eta_i a(\phi_i, \phi_j)\eta_j = \eta \cdot A\eta.$$

Használjuk fel a (11) V-elliptikus tulajdonságot az egyenlőséglánc elejéből és végéből kapott egyenlőségen és megkapjuk, hogy A pozitív definit, mert $\forall \eta \neq 0$-ra:

$$\eta \cdot A\eta = a(v, v) \geq \alpha \left\| v \right\|_V^2 > 0$$

áll fenn és a szimmetria a (9) szimmetriájából adódik. ■

4.3.1. Tétel. *A (22) egyenletrendszernek egyértelműen létezik egy $\xi \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{M}}$ megoldása, amelyre*

$$\left\| u_h \right\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha} \tag{23}$$

teljesül.

Bizonyítás. Mivel az A együtthatómátrix szimmetrikus és pozitív definit, ezért reguláris. Ekkor egyértelműen létezik megoldása (22) egyenletrendszernek. A (22) egyenletrendszerben éljünk a $v = u_h$ választással. Emellett használjuk fel, hogy a V-elliptikus (11) és L folytonos (12).

$$\alpha \|u_h\|_V^2 \leq a(u_h, u_h) = L(u_h) \leq \Lambda \|u_h\|_V ,$$

ebből következik (23) $\|u_h\| \neq 0$ leosztással. ■

A következő tétel a diszkretizálás hibájára fog felső korlátot adni, miközben megmutatja, hogy ez a megoldás a lehető legjobb V_h elemei közül.

4.3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $V_h \subset V$, u megoldja a* (14) *folytonos és u_h megoldja a* (20) *diszkrét variációs feladatot. Ekkor $\forall v \in V_h$-ra érvényes az alábbi*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\|_V \tag{24}$$

becslés.

Bizonyítás. Mivel $V_h \subset V$, ezért u megoldja a (20) diszkrét feladatot is. $\forall w \in V_h$-ra

$$a(u, w) = L(w)$$

teljesül. Ebből vonjuk ki a diszkrét feladatot az eredeti u_h megoldással.

$$a(u - u_h, w) = 0.$$

Tetszőleges $v \in V_h$-ra válasszuk meg w-t úgy, hogy $w = u_h - v$, ekkor $\forall w \in V_h$-ra $v = u_h - w$ adódik. Az előző egyenlőségből és a (11) V-elliptikusságából azt kapjuk, hogy

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - u_h) + a(u - u_h, w) =$$

$$= a(u - u_h, u - u_h + w) = a(u - u_h, u - v) \le \gamma \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V .$$

Ha az egyenlőséglánc elejét és végét elosztjuk $\|u - u_h\|_V$-vel, akkor megkapjuk a bizonyítandó becslést. ■

4.4. Hibabecslés

Az előző (24) hibabecslés alapján a diszkretizálási hiba a következőképpen alakul:

$$||u - u_h||_V \le \frac{\gamma}{\alpha}||u - v||_V \qquad \forall v \in V_h.$$

Legyen $V = H^1(\Omega)$ és

$$V_h = \{v \in V : v|_K \in P_1(K), K \in T_h\},$$

ahol $T_h = \{K\}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ háromszögelése. Válasszunk egy $v = \pi_h u \in V_h$ u interpolánst és $||u - \pi_h u||_V$ interpolálási hibával fogjuk közelíteni az eredeti hibát. Ha $\pi_h u$-t úgy választjuk, hogy a szabadsági foka és a V_h-ban szereplő függvények szabadsági foka megegyezik, akkor elég $||u - \pi_h||$-t egyenként minden háromszög alakú végeselemen kiszámolni.

Minden $K \in T_h$-ra definiáljuk az alábbiakat:

$$\begin{aligned} h_K &= K \text{ átmérője} = K \text{ leghosszabb oldala}, \\ \rho_k &= \text{K-ba írt kör átmérője}, \\ h &= \max h_K. \end{aligned}$$

Hogy elkerüljük azokat az eseteket, amikor a háromszögek valamely szöge tetszőlegesen kicsi, tegyük fel, hogy egy pozitív, háromszögeléstől független β-ra

$$\frac{\rho_K}{h_K} \ge \beta \qquad \forall K \in T_h \tag{25}$$

teljesül.

Legyenek T_h csúcsai $N_i,\ i = 1, ..., M$, adott $u \in C^0(\Omega)$ függvényre definiáljuk a $\pi_h u \in V_h$ interpolánst úgy, hogy az megegyezzen u-val minden N_i-n, azaz

$$\pi_h u(N_i) = u(N_i). \tag{26}$$

Vezessük be a

$$|v|_{H^r(\Omega)} = (\sum_{|\alpha|=r} \int_\Omega |D^\alpha v|^2)^{1/2} \tag{27}$$

félnormát.

Az alábbi tétel az interpolációs hibáról szól.

4.4.1. Tétel. *Legyen $K \in T_h$ háromszög $a^i,\ i = 1, 2, 3$ csúcsokkal, $v \in C^0(K)$, ennek interpolánsa $\pi v \in P^1(K)$, melyre teljesül, hogy*

$$\pi v(a^i) = v(a^i), i = 1, 2, 3. \tag{28}$$

Ekkor létezik egy C konstans, amivel

$$||v - \pi v||_{L_2(K)} \leq C h_K^2 |v|_{H^2(K)}, \tag{29}$$

$$|v - \pi v|_{H^1(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{H^2(K)} \tag{30}$$

teljesül.

A tétel bizonyítása [4] cikkben megtalálható.

Használjuk ezt a tételt, hogy megkapjuk a globális interpolációs hibát $L_2(\Omega)$-ban és $H^1(\Omega)$-ban.

$$\|u-\pi_h u\|^2_{L_2\Omega} = \sum_{K\in T_h} \|u-\pi_h u\|^2_{L_2\Omega} \leq \sum_{K\in T_h} C^2 h_K^4 |u|^2_{H^2(K)} \leq$$
$$\leq C^2 h^4 \sum_{K\in T_h} |u|^2_{H^2(K)} = C^2 h^4 |u|^2_{H^2(\Omega)}.$$

A $H^1(\Omega)$-s becslésnél felhasználjuk, hogy a háromszögekben nincs túl kicsi szög (25), emiatt megkapjuk, hogy

$$|u-\pi_h u|^2_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{K\in T_h} C^2 \frac{h_K^4}{\rho_K^2} |u|^2_{H^2(K)} \leq \sum_{K\in T_h} \frac{C^2 h_K^2}{\beta^2} |u|^2_{H^2(\Omega)}.$$

Vagyis a hibák a következőképpen alakulnak:

$$|u-\pi_h u|_{H^1(\Omega)} \leq C' h |u|_{H^2(\Omega)}, \tag{31}$$

$$\|u-\pi_h u\|_{L_2\Omega} \leq C'' h^2 |u|_{H^2(\Omega)}. \tag{32}$$

4.5. A merevségi mátrix felépítése

A fenti A mátrix elemei a következő alakúak:

$$a_{ij} = (\phi_i, \phi_j) = \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j.$$

Ahelyett, hogy az egész téren vennénk az integrált, vegyük őket a $K \in T_h$ háromszögeken és adjuk össze ezeket, azaz

$$\int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j = \sum_{K\in T_h} \int_K \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j.$$

A kis háromszögeken vett integrál csak abban az esetben nem nulla, ha N_i és N_j ugyanazon háromszög csúcsai.

Vegyünk egy ilyen K háromszöget N_i, N_j, N_k csúcsokkal. Ekkor elkészíthetjük az alábbi B "elemi merevségi mátrixát" K-nak.

$$\begin{bmatrix} \int_K \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_i & \int_K \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j & \int_K \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_k \\ & \int_K \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_j & \int_K \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_k \\ szimm. & & \int_K \nabla\phi_k \cdot \nabla\phi_k \end{bmatrix} \tag{33}$$

Számoljunk ki egy $\int_K \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_i$ alakú mátrixelemet. A ϕ_i függvény lineáris K kis háromszögön, ezért $\phi_i(x, y) = ax + by + c$ alakú. Itt a és b pont a keresett $\nabla\phi_i$ vektorok komponensei lesznek. Az együtthatókat a K háromszög három csúcsa segítségével határozzuk meg. Ezek a csúcsok legyenek $(x_i, y_i)^T$
$i = 1, 2, 3$.

Definiáljuk az alábbi M mátrixot:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor az

$$M(a, b, c)^T = (1, 0, 0)^T \tag{34}$$

egyenletrendszer megoldása megadja a $(x_1, y_1)^T$ pontban 1-t felvevő bázisfüggvényt, az (a, b) vektor pedig a keresett $\nabla\phi_i$ gradiensvektort.

A $\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j = (a_i, b_i)(a_j, b_j)^T$ skalárszorzat csak abban az esetben különbözik a nullától, ha a bázisfüggvényekhez tartozó N_i, N_j csúcsok egy háromszögön - most K - fekszenek. Emellett az integrandus konstans, mivel lineáris függvények deriváltjának skalárszorzata szerepel benne. Így a keresett integrál értéke:

$$\int_K \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j = t_K(a_i, b_i)(a_j, b_j)^T, \tag{35}$$

ahol t_K a K háromszög területe. A fenti képlet és az elemi merevségi mátrixok segítségével már összeállítható a teljes merevségi mátrix.

4.6. Terhelési vektor meghatározása

A (f, ϕ_j) alakú terhelési vektort komponensenként T_h-beli kis háromszögeken vett integrállal fogjuk kiszámolni. Az előző gondolatmenetet alkalmazva csak azon a kis háromszögeken kell vennünk egy szummát, ami az adott ϕ_j-t tartalmazza, vagyis

$$(f, \phi_j) = \int_\Omega f\phi_j = \sum_{\substack{K \in T_h \\ N_j \in K}} \int_K f\phi_j.$$

Egy K háromszögön az integrál egyszerűen közelíthető, hiszen itt a bázisfüggvények lineárisak és csak egyetlen csúcsban vesznek fel nullától különböző értéket. Geometriailag egy gúlát alkotnak. Az $f\phi_j$ szorzat az adott ϕ_j bázisfüggvényhez tartozó N_j csúcsbeli $f(N_j)$ érték. Ha t_K a kis háromszög területe, akkor az integrál közelítő értéke

$$\int_K f\phi_j = \frac{1}{3} f(N_j) t_K \tag{36}$$

a trapéz formula segítségével.

5. Poisson-egyenlet megoldása végeselem-módszerrel

Ebben a fejezetben az általánosan bemutatott módszert fogjuk alkalmazni a Poisson-egyenletre Dirichlet- és Neumann-peremfeltételek mellett. Megnézzük, hogy hogy alakulnak a variációs- illetve a minimalizációs feladatok.

5.1. Dirichlet-peremfeltétel

Legyen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad && (x,y) \in \Omega, \\ u &= 0 \qquad && (x,y) \in \Gamma, \end{aligned} \tag{37}$$

ahol Ω egy korlátos tartomány Γ folytonos, szakaszonként lineáris határoló görbével.

Az egyenlethez tartozó variációs probléma az alábbi módon adódik. Legyen $V = H_0^1(\Omega)$, $v \in V$-t. A (37) egyenlet és (40) Green-formula miatt

$$(f,v) = \int_\Omega (-\Delta u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Gamma v(\partial_n u).$$

Ebből a peremfeltételt használva megkapjuk, hogy

$$(f,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

Legyen $(u,v)_a = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$, ekkor megkapjuk a

$$(u,v)_a = (f,v)$$

variációs formulát, ahol $L(v) = (f,v)$.

5.1.1. Állítás. *Az előbb definiált $(\cdot,\cdot)_a$ bilineáris funkcionál szimmetrikus, folytonos és V-elliptikus, L folytonos, emiatt alkalmazható rá a Lax-Milgram-tétel, azaz a feladatnak létezik egyértelmű megoldása.*

Ezt a megoldást nevezzük a (5.1.1) feladat gyenge megoldásának.
Az állítás bizonyítása [1] könyv példái között megtalálható.

5.2. Neumann-peremfeltétel

Legyenek adottak az $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények. Keressük azt az u függvényt, amire

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad && (x,y) \in \Omega, \\ \partial_n u &= g && (x,y) \in \Gamma_N, \\ u &= 0 && (x,y) \in \Gamma_D, \end{aligned} \tag{38}$$

ahol Ω egy korlátos tartomány Γ határral, amelyre $\Gamma_N, \Gamma_D \subset \Gamma$, Γ_D a Dirichlet-feltétellel, Γ_N a Neumann-feltétellel ellátott oldal. Ezenkívül a korábbiakhoz hasonlóan ∂_n jelöli a kifelé mutató normális szerinti deriváltat.

Vezessük le a variációs problémát. Legyen $V = H^1_N(\Omega)$, $v \in V$. A (38) egyenlet és a (40) Green-formula miatt

$$(f,v) = \int_\Omega (-\Delta u)v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Gamma v(\partial_n u).$$

A peremfeltételt használva adódik, hogy

$$(f,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_\Gamma vg.$$

Legyen $(u,v)_a = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ és $\langle v,g \rangle = \int_\Gamma vg$, ekkor megkapjuk a

$$(u,v)_a = (f,v) - \langle g,v \rangle$$

variációs formulát, ahol $L(v) = (f,v) - \langle g,v \rangle$.

5.2.1. Állítás. *Az előbb definiált $(\cdot,\cdot)_a$ bilineáris funkcionál szimmetrikus, folytonos és V-elliptikus, L folytonos, emiatt alkalmazható rá a Lax-Milgram-tétel, azaz a feladatnak létezik egyértelmű megoldása.*

Ezt a megoldást nevezzük a (5.2.1) feladat gyenge megoldásának.

Az állítás bizonyítása [1] könyv példái között megtalálható.

6. Implementáció Python-ban

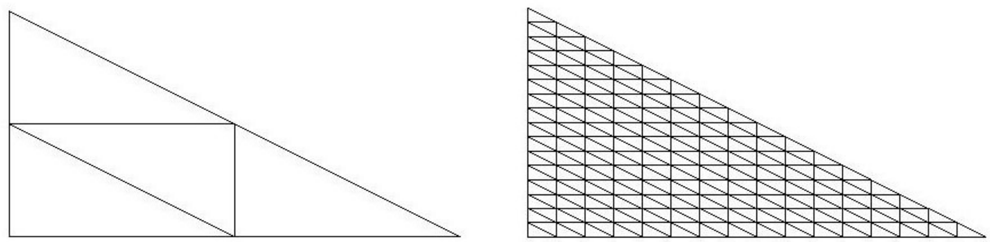
Egészen idáig az volt a célunk, hogy a végeselem-módszer elméletét felhasználva eljussunk a megfelelő variációs feladat kitűzésétől a számítógépes megoldásig. Most a számítógépes megvalósítás bemutatása következik.

6.1. A numerikus eljárás lépései

Az egyenletek értelmezési tartományának általános háromszöget adok meg, de sokszögek esetén is hasonlóan járhatunk el. Adott egy háromszög, amit fel fogunk osztani kisebb, egymást nem fedő háromszögekre úgy, hogy egy háromszög csúcsa ne legyen egy másik háromszög oldalán. Ezzel úgy diszkretizáltuk a teret, hogy a végeselem-módszer alkalmazható legyen rajta.
Mindezt egy rekurzív algoritmus valósítja meg beépített Python-függvényekkel segítségével [2]. Veszi az összes háromszöget és egy háromszög minden oldalára kiszámolja a felezőpontokat és ezeket összekötve négy kisebbet ad vissza. Ezzel az eredeti háromszög egy finomítását kapjuk.
A finomítás során számon kell tartanunk, hogy az új csúcsok határ- vagy belsőpontok-e. Határpont úgy keletkezik, hogy két határon lévő pont felezőpontját tekintjük úgy, hogy azok azonos oldalon fekszenek. Minden más esetben a felezőpont belső pont.

Ω-nak a $(0,0),(0,1),(2,0) \in \mathbb{R}^2$ pontok által határolt háromszöget választottam, amit az előbb leírt algoritmussal $h = 0.035$ paraméterű ráccsá finomítottam.

Ezután a kis háromszögek (33) elemi merevségi mátrixából a (34) egyenletrendszer segítségével felépítem a teljes merevségi mátrixot, majd a terhelési



(a) egyszeres finomítással

(b) négyszeres finomítással

1. ábra. A generált rácsok

vektort a (36) képlettel és megoldottam a (21) egyenletrendszert a Python NumPy [3] csomagjával.

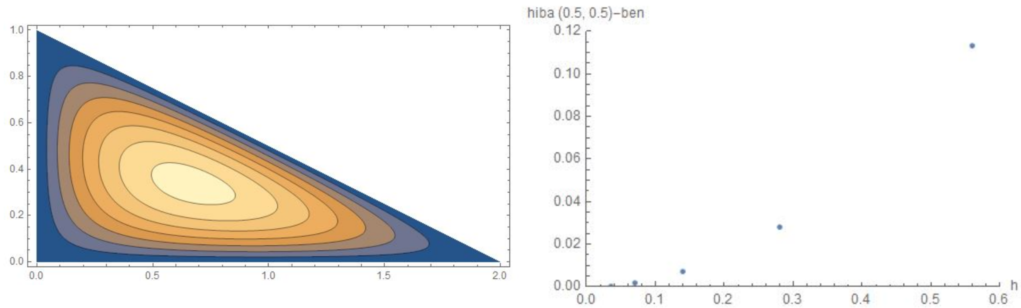
6.2. Numerikus példa

6.2.1. Dirichlet-peremfeltétel

Forrásfüggvénynek az $f(x, y) = 2x + y$ függvényt definiáltam. A határon nullán tartott u esetén az egyenlet analitikus megoldása (4) szerint $u(x, y) = xy - \frac{x^2 y}{2} - xy^2$. A pontos és numerikus megoldás eltérését egy pontban abszolút értékben vizsgáltam és ezt összevetettem a (31) szerinti hibabecsléssel. A hibára vonatkozó képletben a jobb oldalon h^2 áll, azaz a módszer másodrendben konvergens. Ezt az 1. ábráról is leolvashatjuk, hiszen a lépéstávolság felezésével a hiba a negyedére csökken.

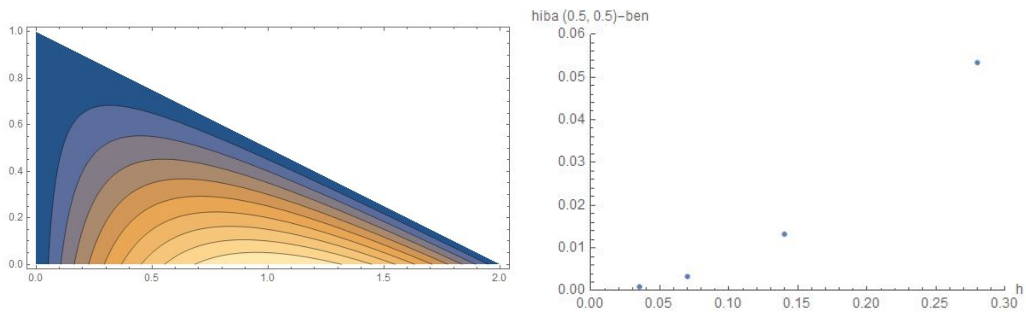
6.2.2. Neumann-peremfeltétel

Ebben az esetben a háromszög $a(x, y) = y = 0$ egyenlettel felírt oldalát Neumann-féle peremfeltétellel vettem, itt a feltétel $\partial_n u = -1 + x + y$, forrás



2. ábra. Megoldás és hiba

függvény $f = 1$. (6) szerint az analitikus megoldás pedig $u(x, y) = x - \frac{x^2}{2} - xy$. Ismét az abszolút eltéréseket láthatjuk a megoldás mellett a 2. ábrán.



3. ábra. Megoldás és hiba

7. Függelék

7.1. Paralelogramma-szabály

V Hilbert-térben $< \cdot, \cdot >$ skaláris szorzattal és a hozzá tartozó $\|\cdot\|$ normával teljesül az úgynevezett paralelogramma-szabály, miszerint

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 . \tag{39}$$

7.2. Green formulája

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő tartomány Γ folytonos határral, w kétszer, v egyszer folytonosan differenciálható. Ekkor teljesül az alábbi azonosság:

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w = \int_\Gamma v \; \partial_n w - \int_\Omega v \Delta w, \tag{40}$$

ahol ∂_n a tartományból kifelé mutató normális szerinti deriváltat jelöli.

Hivatkozások

[1] Claes Johnson: *Numerical solution of partial differential equations by the finite element menthod, Cambridge University Press, Studentlitteratur, Lund, Sweden (1987), 1-92*

[2] *Python dokumentáció*
`https://docs.python.org/2/`

[3] *Numpy dokumentáció*
`http://docs.scipy.org/doc/`

[4] Dupont és Scott: *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces, Math. Comp. 34 (1980), 441-463*