Algjebër dhe gjeometri

(Seminar)

Kapitulli 7

Ushtrim

Jepet matrica:

a) $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}5&0&-3\\-2&2&2\\4&0&-2\end{bmatrix}$ Dsh c) $A=\begin{bmatrix}0&-3&5\\-4&4&-1\\0&0&4\end{bmatrix}$

Dsh d) $A=\begin{bmatrix}-5&0&0\\3&7&0\\4&-2&3\end{bmatrix}$ Dsh e) $A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&1&2\\2&2&2\end{bmatrix}$ Dsh f) $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$

Të gjenden:

a) Autovlerat, autohapësirat dhe autovektorët.

b) A është e diagonalizueshme matrica A? Nëse po, të gjendet një matricë diagonalizuese e saj.

c) Të gjendet trajta diagonale e matricës A.

Zgjidhje:

a) $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}$ $I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $A-\lambda I_3=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&2\\0&2&0\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}3-\lambda&2&1\\0&-\lambda&2\\0&2&-\lambda\end{bmatrix}$$

-Gjejmë autovlerat:

$$|A-\lambda I_3|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&1\\0&-\lambda&2\\0&2&-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&2\\2&-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(\lambda^2-4)=0 \Rightarrow$$

$\lambda_1=3$; $\lambda^2-4=0 \Rightarrow \lambda^2=4$

$\lambda_2=-2$; $\lambda_3=2$

Autovlerat e matricës A janë:

$\lambda_1=3$; $\lambda_2=-2$; $\lambda_3=2$

$m_3=1$; $m_{-2}=1$; $m_2=1$

shumëfishiteti algjebrik.

-Gjejmë autohapësirat:

Për $\lambda=3$

$(A-\lambda I_3)x=0 \Leftrightarrow (A-3I_3)x=0$

$$\begin{array}{c}3\\2\\ \\\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&1&0\\0&-3&2&0\\0&2&-3&0\end{array}\right]\underset{R_3-R_1\to R_3}{\overset{3R_1+2R_2\to R_2}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&1&0\\0&0&7&0\\0&0&-4&0\end{array}\right]$$

$$\underset{-\frac{1}{4}R_3\to R_3}{\overset{\frac{1}{7}R_2\to R_2}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\overset{R_3-R_2\to R_3}{\sim}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&y&z\end{array}\\\left[\begin{array}{ccc|c}0&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\end{array}$$

$$\begin{cases}2y+z=0\\z=0\\x\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=0\\z=0\\x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$H_3 = \{(x,0,0) \mid x \in R\} = \{\underbrace{(1,0,0)}_{v_1} \mid x \in R\}$

↓ autohapësira për autovlerën 3.

$v_1 = (1,0,0) \Rightarrow$ autovektori përkatës për autovlerën 3.

$\dim H_3 = 1$

$d_3 = \dim H_3 = 1$

↓ shumëfishmëria gjeometrik.

Për $\lambda = -2$

$(A - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow (A + 2I_3)X = 0$; $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3 - R_2 \to R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\overset{\frac{1}{2}R_2 \to R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ z \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}z \\ y = -z \\ z \in R \end{cases}$

$H_{-2} = \{(\frac{1}{5}z; -z; z) \mid z \in R\} = \{z\underbrace{(\frac{1}{5}, -1, 1)}_{v_2} \mid z \in R\}$ $\quad \dim H_{-2} = 1$ $\quad \boxed{d_{-2} = 1}$

↓ autohapësira

$v_2 = (\frac{1}{5}, -1, 1) \Rightarrow$ autovektori për autovlerën -2.

Për $\lambda = 2$

$(A - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0$ $\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{2}R_2 \to R_2}{\overset{R_2 + R_3 \to R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ z \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = z \\ z \in R \end{cases}$

$H_2 = \{(-3z; z; z) \mid z \in R\} = \{z\underbrace{(-3; 1; 1)}_{v_3} \mid z \in R\}$ $\quad \dim H_2 = 1$ $\quad \boxed{d_2 = 1}$

↓ autohapësira

$v_3 = (-3; 1; 1) \Rightarrow$ autovektori përkatës për autovlerën 2

b) Teorema 1: Nëse autovlerat e një matrice kanë shumëfishmëritë algjebrik 1, atëherë matrica është e diagonalizueshme.

Teorema 2: Një matricë katrore A është e diagonalizueshme nëse shumëfishmëria algjebrik është i barabartë me shumëfishmërinë gjeometrik

Për çdo autovlerë të saj.

- Në rastin tonë, autovlerat kanë shumëfishitet algjebrik 1 $\Rightarrow$ matrica është e diagonalizueshme.

Një matricë diagonalizuese është matrica:

$$P = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Trejta diagonale e matricës A:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

---

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Gjejmë autovlerat:

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & -3 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ 4 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -3 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ 4 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(5-\lambda)(-2-\lambda)+12\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[-10 - 3\lambda + \lambda^2 + 12\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$\lambda_1 = 2$ $\qquad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad D = 9 - 8 = 1$

$\lambda_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\lambda_3 = \frac{4}{2} = 2$

Autovlerat e matricës A janë:

$\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$

$\boxed{m_2 = 2}$; $\boxed{m_1 = 1}$

Gjejmë autohapësirat:

Për $\lambda = 2$

$(A - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{4}R_3 \to R_3}{\overset{\frac{1}{3}R_1 \to R_1}{\underset{-\frac{1}{2}R_2 \to R_2}{\sim}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_3 - R_1 \to R_3}{\overset{R_2 - R_1 \to R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ y \in R \\ z \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y \in R \\ z \in R \end{cases}$$

$H_2 = \{(z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \{(z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} + \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$H_2 = \{ z\underbrace{(1,0,1)}_{v_1} \mid z \in \mathbb{R}\} + \{ y\underbrace{(0,1,0)}_{v_2} \mid y \in \mathbb{R}\}$

autohapësira

$v_1 = (1,0,1)$; $v_2 = (0,1,0)$ autovektorët përkatës për $\lambda = 2$.

$\dim H_2 = 2 \Rightarrow d_2 = \dim H_2 = 2$

$\boxed{d_2 = 2}$

Për $\underline{\lambda = 1}$

$(A - \lambda I_3)X = 0 \iff (A - I_3)X = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \underset{R_3 - R_1 \to R_3}{\overset{R_1 + 2R_2 \to R_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 4x - 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4}z \\ y = -\frac{1}{2}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$H_1 = \{(\frac{3}{4}z ; -\frac{1}{2}z ; z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{ z\underbrace{(\frac{3}{4} ; -\frac{1}{2} ; 1)}_{v_3} \mid z \in \mathbb{R}\}$

$v_3 = (\frac{3}{4} ; -\frac{1}{2} ; 1)$ - autovektori përkatës për $\lambda = 1$.

$\dim H_1 = 1$

$\boxed{d_1 = 1}$

b) Kemi $\left.\begin{array}{l} m_2 = d_2 = 2 \\ m_1 = d_1 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow$ matrica A është e diagonalizueshme.

Një matricë diagonalizuese e saj është matrica:

$$P = [v_1 \; v_2 \; v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Trajta diagonale e matricës A:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ushtrimi 6 fq. 114

Le të jenë A dhe B matrica ortogonale të rendit $m \times m$. Tregoni se matricat prodhim AB, BA janë gjithashtu ortogonale.

Zgjidhje:

A matricë ortogonale $\Rightarrow A^{-1} = A^T$

B matricë ortogonale $\Rightarrow B^{-1} = B^T$

$A^{-1} \cdot B^{-1} = A^T \cdot B^T \Leftrightarrow (B \cdot A)^{-1} = (BA)^T \Rightarrow B \cdot A$ është matricë ortogonale.

$B^{-1} \cdot A^{-1} = B^T \cdot A^T \Leftrightarrow (A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B)^T \Rightarrow A \cdot B$ është matricë ortogonale.

Ushtrimi 8 fq. 114

Le të jetë A një matricë ortogonale. Tregoni se A^T dhe A^{-1} janë ortogonale.

Zgjidhje:

A - matricë ortogonale $\Rightarrow A^{-1} = A^T \Leftrightarrow (A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} \Leftrightarrow$

$(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^T \Rightarrow A^{-1}$ - matricë ortogonale.

$A^{-1} = A^T \Leftrightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^T \Leftrightarrow (A^T)^{-1} = (A^T)^T \Rightarrow A^T$ - matricë ortogonale.

Format Katrore

Ushtrimi 1

Jepet forma katrore e përcaktuar nga:

$F(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2, \quad \forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

1) Të gjendet matrica shoqëruese kanonike.
2) Të gjendet trajta kanonike.
3) Të studiohet përcaktueshmëria e formës katrore.

Zgjidhje:

1) Plotësojmë formën katrore:

$\cancel{F(x) = 1x_1^2 + 0x_1x_2 + 0x_1x_3 + 0x_2x_1 + 3x_2^2 + 1x_2x_3 + 0x_3x_1}$

$$F(x) = x_1^2 + 0x_1x_2 + 0x_1x_3$$
$$+ 0x_2x_1 + 3x_2^2 + x_2x_3$$
$$+ 0x_3x_1 + x_3x_2 + 3x_3^2$$

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$ - matrica shoqëruese kanonike e $F(x)$.

2) $F(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ - trajta kanonike ku $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ janë autovlerat e matricës A.

Gjejmë autovlerat e A:

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1]$$
$$= (1-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$$
$$\lambda_1 = 1 \; ; \; \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$
$$D = 36 - 32 = 4$$
$$\lambda_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \; ; \; \lambda_3 = \frac{8}{2} = 4$$

$F(x) = 1 \cdot y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2$ - trajta kanonike

3) <u>Teoremë 1</u>: Një formë katrore $F: V \to R$ është pozitivisht (negativisht) e përcaktuar atëherë dhe vetëm atëherë kur autovlerat e matricës shoqëruese kanonike të saj në lidhje me një bazë të V janë pozitive (negative).

<u>Teoremë 2</u>:

Le të jetë $F: V \to R$ një formë katrore me matricë shoqëruese kanonike $A = (a_{ij})$ $\forall i,j = 1,2,\dots,n$

Konsiderohen përcaktorët kryesorë:

$$A_1 = a_{11}, \; A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, A_n = \det(A).$$

Atëherë:

1) $F(x)$ është pozitivisht e përcaktuar atëherë dhe vetëm atëherë kur $A_i > 0$ $\forall i = 1,2,\dots,n$.

2) Për të parë nëse $F(x)$ është negativisht e përcaktuar, studiohet $-F(x)$. Nëse $-F(x)$ është pozitivisht e përcaktuar, atëherë $F(x)$ është negativisht e përcaktuar.

Forma katrore që nuk është as pozitivisht e përcaktuar dhe as negativisht e përcaktuar, është e papërcaktuar.

$\lambda_1 = 1 > 0 \qquad \lambda_3 = 4 > 0$

$\lambda_2 = 2 > 0$

Pra, sipas teoremës 1, forma katrore $F(x)$ është pozitivisht e përcaktuar.

<u>Ushtrimi 2</u>

Të studiohet përcaktueshmëria e formës katrore.

1) $F(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

2) $F(x) = 4x_2x_3 - 3x_1^2 - 4x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_1x_2$

<u>Zgjidhje:</u>

1) $$\begin{aligned} F(x) = x_1^2 &- 2x_1x_2 + 0x_1x_3 \\ &- 2x_2x_1 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 \\ &+ 0x_3x_1 - 2x_3x_2 + 3x_3^2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$ – matrica shoqëruese kanonike.

$|1| = 1 > 0$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 4 = -2 < 0 \Rightarrow F(x)$ nuk është pozitivisht e përcaktuar.

Studiojmë $-F(x)$, e cila ka matricë shoqëruese kanonike $-A$.

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$-1 < 0 \Rightarrow -F(x)$ nuk është pozitivisht e përcaktuar $\Rightarrow F(x)$ nuk është negativisht e përcaktuar.

Pra, $F(x)$ është e papërcaktuar.

2) $$\begin{aligned} F(x) = -3x_1^2 &- 2x_1x_2 + 0x_1x_3 \\ &- 2x_2x_1 - 4x_2^2 + 2x_2x_3 \\ &+ 0x_3x_1 + 2x_3x_2 - 5x_3^2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$ – matrica shoqëruese kanonike.

$-3<0 \Rightarrow F(x)$ nuk është pozitivisht e përcaktuar.

Studiojmë $-F(x)$, e cila ka matricë shoqëruese kanonike $-A$.

$$-A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

$3>0$

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12-4=8>0$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 5\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 5\end{vmatrix}$$

$$=3(20-4)-2(10-0)$$

$$=48-20=28>0$$

Pra, $-F(x)$ është pozitivisht e përcaktuar $\Rightarrow$

$F(x)$ është negativisht e përcaktuar.