

Q3: Riddhiman Roy: royriidd1

Monday, December 21, 2020

4:57 PM

$$a) \quad y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$y''(t) = -4y'(t) - 3y(t)$$

$$\begin{bmatrix} y'' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad \Delta t = 0.5$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t A y_n$$

$$\begin{bmatrix} y'(1) \\ y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\begin{matrix} y'(1) = -1.5 \\ y(1) = 1 \end{matrix}}$$

$$c) \quad y_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(4 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{array}{l} y'(1) = 3 \\ y(1) = -\frac{1}{2} \end{array}$$