Pour $n+1$ points de collocations, on aura

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad i = 0, \ldots, n$$

Et la **formule de Lagrange**

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Formule pour 2 points:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

Formule pour 3 points:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2))} \qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \qquad L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

Méthode de Newton

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= b_0 \\
p_1(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) = p_0(x) + b_1(x - x_0) \\
p_2(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) = p_1(x) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
p_n(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots b_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1} \\
&= p_{n-1}(x) + \ldots b_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Comment déterminer les b_n?

$$p_0(x_0) = y_0 = f(x_0) \qquad\qquad b_0 = f(x_0)$$

$$p_1(x_1) = p_0(x_1) + b_1(x_1 - x_0) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \qquad\qquad b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$p_2(x_2) = p_1(x_2) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$$

$$b_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)$$

Et par récurrence, on peut déterminer tous les coefficients

Différences divisées

On introduit la notation $f[x_i] = f(x_i) = y_i$

On appellera **première différence divisée**, notée $f[x_i, x_{i+1}]$ le rapport

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

On appellera **deuxième différence divisée**, notée $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$ le rapport

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

Et plus généralement la **p$^{\text{ième}}$ différence divisée**, notée $f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p}]$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+p}] - f[x_i, \ldots, x_{i+p-1}]}{x_{i+p} - x_i}$$

Revenant aux coefficients du polynôme on a

$$b_0 = f[x_0],\ b_1 = f[x_0, x_1], \ldots, b_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Pour *(x0,y0), (x1,y1)*

$$p_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Pour 3 points:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= p_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}$$

Et en général, pour n points:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

Comment calculer de manière efficace les différences divisées?

Tableau des différences divisées

On exploite la structure particulière des diff. divisées. Soit $(x_i, f(x_i))\ i = 0, \ldots, n$, on forme une table dont chaque colonne correspond à toutes les différences divisées d'un même ordre. En augmentant l'ordre de la gauche vers la droite, chaque colonne se construit en fonction de la colonne précédente. Pour 4 points,

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
x_0	$\boxed{f(x_0)}$			
		$\boxed{\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}}$		
x_1	$f(x_1)$		$\boxed{\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}}$	
		$\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$\boxed{\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}}$
x_2	$f(x_2)$		$\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		
x_3	$f(x_3)$			

$$p_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_2)$$

$$p_3(x) = f[x_3] + f[x_2, x_3](x - x_3) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_3)(x - x_2)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_2)$$

Remarques:
- Presque sous la forme Horner, donc facilement transformable pour ramener à Horner.
- On peut facilement enlever/ajouter des points de collocations.
- Dans le cas d'une fonction correspondant à un polynôme de degré n, alors les différences divisées d'ordre supérieur à n seront toutes nulles (unicité du polynôme).
- Si on n'utilise pas tous les points alors leur ordre d'apparition aura de l'importance: on n'aura pas le même polynôme de collocation puisqu'on ne prendra pas les mêmes points!

Erreur d'interpolation

Soit $(x_i, f(x_i))\ i = 0,\ldots,n$. On défini l'**erreur d'interpolation de f** par

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

Où $p_n(x)$ est l'interpolant de f aux nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

On s'intéresse à l'erreur « entre » les nœuds, on voudrait évaluer l'erreur pour $x \in [x_0, x_n]$.

Pour cela on utilisera Taylor et le théorème de Rolle.

Théorème (sur l'erreur d'interpolation)

Soit $x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n$, les abscisses des points d'interpolation. Si f est définie sur $[x_0,x_n]$ et n+1 fois dérivable sur $]x_0,x_n[$ alors pour tout $x \in [x_0, x_n]$, il existe $\xi \in]x_0, x_n[$ tel que

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Remarques

• Analogue au terme d'erreur de Lagrange, ξ est inconnu et dépend de x. Pour estimer l'erreur, on le fera disparaitre en faisant une majoration de la dérivée de f :

$$|E_n(x)| \leq \left(\max_{x_0 \leq \xi \leq x_n} |f^{(n+1)}(\xi)|\right) \frac{|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)|}{(n+1)!}$$

• $E_n(x_i) = 0$ $i=0,1,\ldots,n$: E_n est un polynôme de degré $n+1$ dont les racines sont $x_0,\ldots,x_n$.

• Plus il y aura de points de collocation plus l'erreur oscillera autour de l'axe des x. L'augmentation du nombre de points pouvant mener à une augmentation importante de l'erreur (effet de Runge)

• **Si on peut choisir les points de collocations**, en se basant sur l'erreur d'interpolation, il est **préférable de choisir les points le plus près des points d'intérêts**.

• Si on ne connait pas f, on ne peut pas en calculer la dérivée, cependant puisque

$$f[x_i, ..., x_{i+p}] = \frac{f^{(p)}(x_i)}{p!} + \mathcal{O}(h) \qquad p = 1, 2, ...$$

Alors dans le cas où $f^{(n+1)}(\xi)$ varie peu on aura

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \approx \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} \approx f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}]$$

Dans ce cas:

$$E_n(x) \approx f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) = p_{n+1}(x) - p_n(x)$$

Ce qui revient à **estimer l'erreur de** $p_n(x)$ **en prenant comme valeur de référence un polynôme de degré n+1**.

Attention, cet estimation n'est pas toujours très fiable.