Aturan Kelas ONLINE

Aturan kelas online:

- Sopan dan rapi
- Tidak mengenakan kaos oblong
- Login menggunakan email nim@std.umk.ac.id
- Menyiapkan buku, pensil dan penghapus

Aljabar Boolean

Kode Mata Kuliah: IFT-103

Semester: 1 (satu)

Program Studi Teknik Informatika
Universitas Muria Kudus

TRI LISTYORINI
Gedung J.Lt.II.11
Universitas Muria Kudus

Pengantar

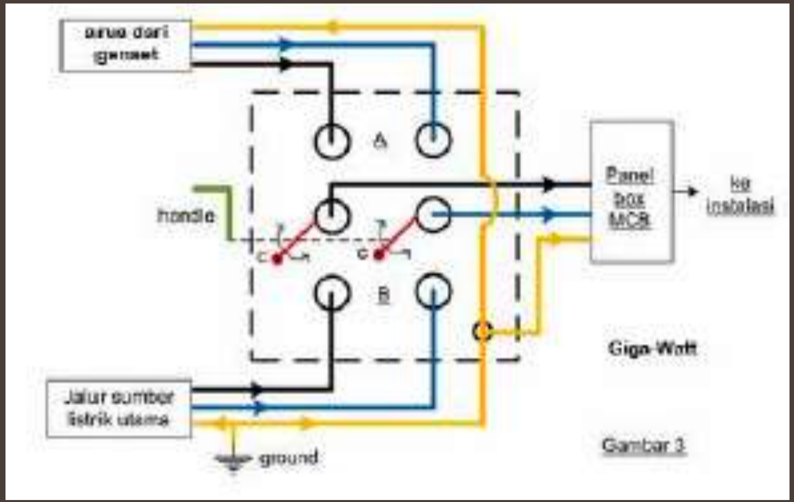
George Boole, 1854

- Aljabar Boolean ditemukan oleh George Boole, pada tahun 1854.
- Boole melihat bahwa himpunan dan logika proposisi mempunyai sifat-sifat yang serupa (perhatikan kemiripan hukum-hukum aljabar logika dan hukum-hokum aljabar himpunan).
- Dalam buku The Laws of Thought, Boole memaparkan aturan-aturan dasar logika.
- Aturan dasar logika ini membentuk struktur matematika yang disebut aljabar Boolean.
- Aplikasi: perancangan rangkaian pensaklaran, rangkaian digital, dan rangkaian IC (integrated circuit) komputer

Pengantar

Peraga digital

Integarted Circuit (IC)



Jaringan saklar

Definisi Aljabar Boolean

DEFINISI. Misalkan B adalah himpunan yang didefinisikan pada dua operator biner, $+$ dan $\cdot$, dan sebuah operator uner, ’. Misalkan 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari B. Maka, tupel

$$<B, +, \cdot, ', 0, 1>$$

disebut **aljabar Boolean** jika untuk setiap $a, b, c \in B$ berlaku aksioma berikut:

1. Identitas
   (i) $a + 0 = a$
   (ii) $a \cdot 1 = a$

2. Komutatif
   (i) $a + b = b + a$
   (ii) $a \cdot b = b \,.\, a$

3. Distributif
   (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
   (ii) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

4. Komplemen
   Untuk setiap $a \in B$ terdapat elemen unik $a' \in B$ sehingga
   (i) $a + a' = 1$
   (ii) $a \cdot a' = 0$

- Berhubung elemen-elemen B tidak didefinisikan nilainya (kita bebas menentukan anggota-anggota B), maka terdapat banyak sekali aljabar boolean.
- Untuk mempunyai sebuah aljabar Boolean, orang harus memperlihatkan:
    1. elemen-elemen himpunan B,
    2. kaidah/aturan operasi untuk dua operator biner dan operator uner,
    3. himpunan B, bersama-sama dengan dua operator tersebut, memenuhi keempat aksioma di atas

- Aljabar himpunan dan aljabar logika proposisi juga merupakan aljabar Boolean karena memenuhi empat aksioma di atas.
- Dengan kata lain, aljabar himpunan dan aljabar proposisi adalah himpunan bagian (subset) dari aljabar Boolean.
- Pada aljabar proposisi misalnya:
  - B berisi semua proposisi dengan n peubah.
  - dua elemen unik berbeda dari B adalah T (true) dan F (false),
  - operator biner: $\vee$ dan $\wedge$, operator uner: ~
  - semua aksioma pada definisi di atas dipenuhi

Dengan kata lain $\langle B, \vee, \wedge, \sim, F, T\rangle$ adalah aljabar Booelan

Aljabar Boolean 2-Nilai

- Merupakan aljabar Boolean yang paling popular, karena aplikasinya luas.
- Pada aljabar 2-nilai:

i. B = {0, 1},

ii. operator biner: + dan . , operator uner: ’

iii. Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	a'
0	1
1	0

i. Keempat aksioma di atas dipenuhi

Ekspresi Boolean

- Ekspresi Boolean dibentuk dari elemen-elemen B dan/atau peubah-peubah yang dapat dikombinasikan satu sama lain dengan operator +, . , dan ’ .
- Contoh 1:

  0

  1

  a

  b

  a + b

  a . b

  a’ . (b + c)

  a . b’ + a . b . c’ + b’, dan sebagainya

Hukum-hukum Aljabar Boolean

1. Hukum identitas: (i) $a + 0 = a$ (ii) $a \cdot 1 = a$	2. Hukum idempoten: (i) $a + a = a$ (ii) $a \cdot a = a$
3. Hukum komplemen: (i) $a + a' = 1$ (ii) $aa' = 0$	4. Hukum dominansi: (i) $a \cdot 0 = 0$ (ii) $a + 1 = 1$
5. Hukum involusi: (i) $(a')' = a$	6. Hukum penyerapan: (i) $a + ab = a$ (ii) $a(a + b) = a$
7. Hukum komutatif: (i) $a + b = b + a$ (ii) $ab = ba$	8. Hukum asosiatif: (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ii) $a\ (b\ c) = (a\ b)\ c$
9. Hukum distributif: (i) $a + (b\ c) = (a + b)\ (a + c)$ (ii) $a\ (b + c) = a\ b + a\ c$	10. Hukum De Morgan: (i) $(a + b)' = a'b'$ (ii) $(ab)' = a' + b'$
11. Hukum 0/1 (i) $0' = 1$ (ii) $1' = 0$	

Contoh 2: Buktikan bahwa untuk sembarang elemen a dan b dari aljabar Boolean maka kesamaaan berikut:

$$a + a'b = a + b \text{ dan } a(a' + b) = ab$$

adalah benar.

Penyelesaian:

i. $a + a'b = (a + ab) + a'b$ (Hukum Penyerapan)
$= a + (ab + a'b)$ (Hukum Asosiatif)
$= a + (a + a')b$ (Hukum Distributif)
$= a + 1 \cdot b$ (Hukum Komplemen)
$= a + b$ (Hukum Identitas)

ii. $a(a' + b) = a\,a' + ab$ (Hukum Distributif)
$= 0 + ab$ (Hukum Komplemen)
$= ab$ (Hukum Identitas)

Fungsi Boolean

Contoh-contoh fungsi Boolean:

$$f(x) = x$$

$$f(x, y) = x'y + xy' + y'$$

$$f(x, y) = x' y'$$

$$f(x, y) = (x + y)'$$

$$f(x, y, z) = xyz'$$

- Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplemennya, disebut **literal**.
- Fungsi $h(x, y, z) = xyz'$ terdiri dari 3 buah literal, yaitu x, y, dan z'.
- Jika diberikan $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, maka nilai fungsinya:

$$h(1, 1, 0) = 1 \cdot 1 \cdot 0' = (1 \cdot 1) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

Bentuk Kanonik

- Ekspresi Boolean yang menspesifikasikan suatu fungsi dapat disajikan dalam dua bentuk berbeda.
- Pertama, sebagai penjumlahan dari hasil kali dan kedua sebagai perkalian dari hasil jumlah.
- Contoh 3:
- $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$
- dan
- $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$
- adalah dua buah fungsi yang sama.

- **Minterm**: suku (term) di dalam ekspresi boolean mengandung literal yang lengkap dalam bentuk hasil kali
- **Maxterm**: suku (term) di dalam ekspresi boolean mengandung literal yang lengkap dalam bentuk hasil jumlah.
- Contoh 4:

$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz \rightarrow$ 3 buah minterm: $x'y'z$, $xy'z'$, xyz

$g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$

$\rightarrow$ **5 buah maxterm**: $(x + y + z)$, $(x + y' + z)$, $(x + y' + z')$, $(x' + y + z')$, dan $(x' + y' + z)$

- Misalkan peubah (variable) fungsi Boolean adalah x, y, dan z
- Maka:

$x'y$	$\rightarrow$ bukan minterm karena literal tidak lengkap
$y'z'$	$\rightarrow$ bukan minterm karena literal tidak lengkap
$xy'z$, xyz', $x'y'z$	$\rightarrow$ minterm karena literal lengkap
$(x + z)$	$\rightarrow$ bukan maxterm karena literal tidak lengkap
$(x' + y + z')$	$\rightarrow$ maxterm karena literal lengkap
$(xy' + y' + z)$	$\rightarrow$ bukan maxterm

- Ekspresi Boolean yang dinyatakan sebagai penjumlahan dari satu atau lebih *minterm* atau perkalian dari satu atau lebih *maxterm* disebut dalam **bentuk kanonik**.

- Jadi, ada dua macam bentuk kanonik:

1. Penjumlahan dari hasil kali (sum-of-product atau SOP)
2. Perkalian dari hasil jumlah (product-of-sum atau POS)

- Fungsi $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$ dikatakan dalam bentuk SOP
- Fungsi $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$ dikatakan dalam bentuk POS

Cara membentuk *minterm* dan *maxterm*:

- Untuk *minterm*, setiap peubah yang bernilai 0 dinyatakan dalam bentuk komplemen, sedangkan peubah yang bernilai 1 dinyatakan tanpa komplemen.
- Sebaliknya, untuk *maxterm*, setiap peubah yang bernilai 0 dinyatakan tanpa komplemen, sedangkan peubah yang bernilai 1 dinyatakan dalam bentuk komplemen.

- Cara membentuk minterm dan maxterm dari tabel kebenaran untuk dua peubah:

x	y	*Minterm*		*Maxterm*	
		Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	$x y$	m_3	$x' + y'$	M_3

- Cara membentuk minterm dan maxterm dari tabel kebenaran untuk tiga peubah:

			Minterm		*Maxterm*	
x	y	z	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'y\,z'$	m_2	$x + y' + z$	M_2
0	1	1	$x'y\,z$	m_3	$x + y' + z'$	M_3
1	0	0	$x\,y'z'$	m_4	$x' + y + z$	M_4
1	0	1	$x\,y'z$	m_5	$x' + y + z'$	M_5
1	1	0	$x\,y\,z'$	m_6	$x' + y' + z$	M_6
1	1	1	$x\,y\,z$	m_7	$x' + y' + z'$	M_7

- Jika diberikan sebuah tabel kebenaran, kita dapat membentuk fungsi Boolean dalam bentuk kanonik (SOP atau POS) dari tabel tersebut dengan

Cara:

- mengambil minterm dari setiap nilai fungsi yang bernilai 1 (untuk SOP)

  atau

- mengambil maxterm dari setiap nilai fungsi yang bernilai 0 (untuk POS).

- Contoh 5: Tinjau fungsi Boolean yang dinyatakan oleh Tabel di bawah ini. Nyatakan fungsi tersebut dalam bentuk kanonik SOP dan POS

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Penyelesaian:

- **SOP**

  Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah 001, 100, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah

  $$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$$

  atau (dengan menggunakan lambang *minterm*),

  $$f(x, y, z) = m1 + m4 + m7 = \Sigma\ (1, 4, 7)$$

- **POS**

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah 000, 010, 011, 101, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah

$$f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$$

atau dalam bentuk lain,

$$f(x, y, z) = M0\ M2\ M3\ M5\ M6 = \Pi(0, 2, 3, 5, 6)$$

- **Contoh 6**: Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x + y'z$ dalam bentuk kanonik SOP dan POS.

Penyelesaian:

a) **SOP**

Lengkapi terlebih dahulu literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama.

$$x = x(y + y')$$
$$= xy + xy'$$
$$= xy(z + z') + xy'(z + z')$$
$$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$$

dan

$$y'z = y'z(x + x') = xy'z + x'y'z$$

Jadi $f(x, y, z) = x + y'z$

$$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z$$
$$= x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz$$

atau $f(x, y, z) = m1 + m4 + m5 + m6 + m7 = \Sigma(1,4,5,6,7)$

b) **POS**

$f(x, y, z) = x + y'z$

$= (x + y')(x + z)$

Lengkapi terlebih dahulu literal pada setiap suku agar jumlahnya sama:

$x + y' = x + y' + zz'$

$= (x + y' + z)(x + y' + z')$

$x + z = x + z + yy'$

$= (x + y + z)(x + y' + z)$

Jadi, $f(x, y, z) = (x + y' + z)(x + y' + z')(x + y + z)(x + y' + z)$

$= (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')$

atau $f(x, y, z) = M_0M_2M_3 = \prod(0, 2, 3)$

Contoh 7: Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = xy + x'z$ dalam bentuk kanonik POS.

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z) &= xy + x'z \\
&= (xy + x')(xy + z) \\
&= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z) \\
&= (x' + y)(x + z)(y + z)
\end{aligned}
$$

Lengkapi literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama:

$x' + y = x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z')$

$x + z = x + z + yy' = (x + y + z)(x + y' + z)$

$y + z = y + z + xx' = (x + y + z)(x' + y + z)$

Jadi, $f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z')$

atau $f(x, y, z) = M_0 M_2 M_4 M_5 = \prod(0, 2, 4, 5)$

Konversi Antar Bentuk Kanonik

- Misalkan f adalah fungsi Boolean dalam bentuk SOP dengan tiga peubah:

$$f(x, y, z) = \Sigma\,(1, 4, 5, 6, 7)$$

dan f ’adalah fungsi komplemen dari f,

$$f'(x, y, z) = \Sigma\,(0, 2, 3) = m0 + m2 + m3$$

- Dengan menggunakan hukum De Morgan, kita dapat memperoleh fungsi f dalam bentuk POS:

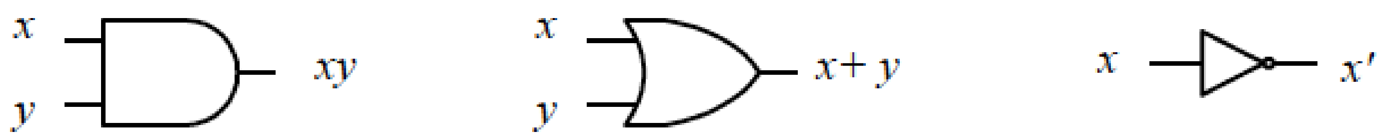
$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (f'(x, y, z))' = (m0 + m2 + m3)' = m0' \,.\, m2' \,.\, m3' \\ &= (x'y'z')' (x'y z')' (x'y z)' \\ &= (x + y + z) (x + y' + z) (x + y' + z') \\ &= M0\ M2\ M3 = \Pi(0,2,3) \end{aligned}$$

Jadi, $f(x, y, z) = \Sigma\,(1, 4, 5, 6, 7) = \Pi\,(0,2,3)$.

- Kesimpulan: $m_j' = M_j$

Rangkaian Logika

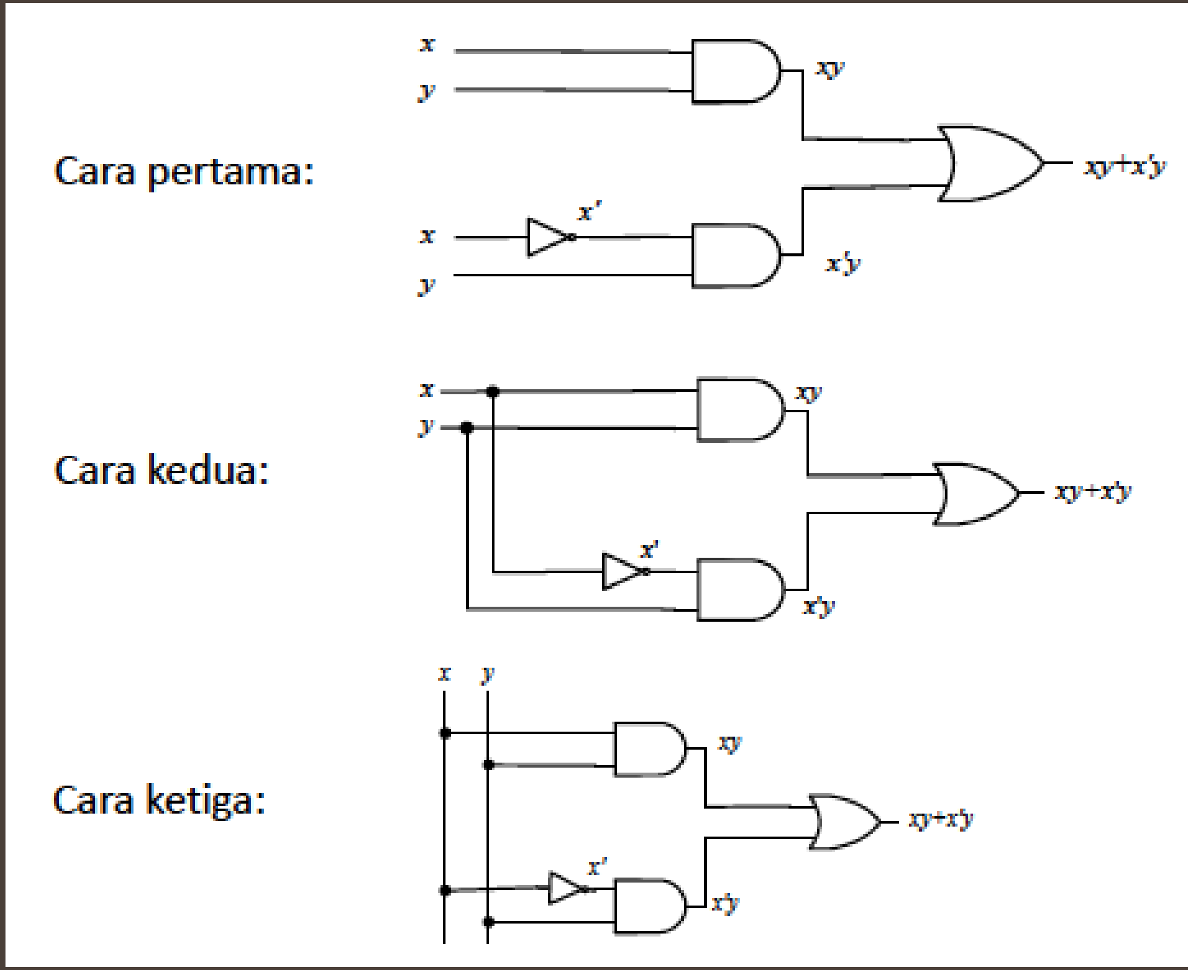
- Fungsi Boolean dapat juag direpresentasikan dalam bentuk rangkaian logika.
- Ada tiga gerbang logika dasar: gerbang AND, gerbang OR, dan gerbang NOT



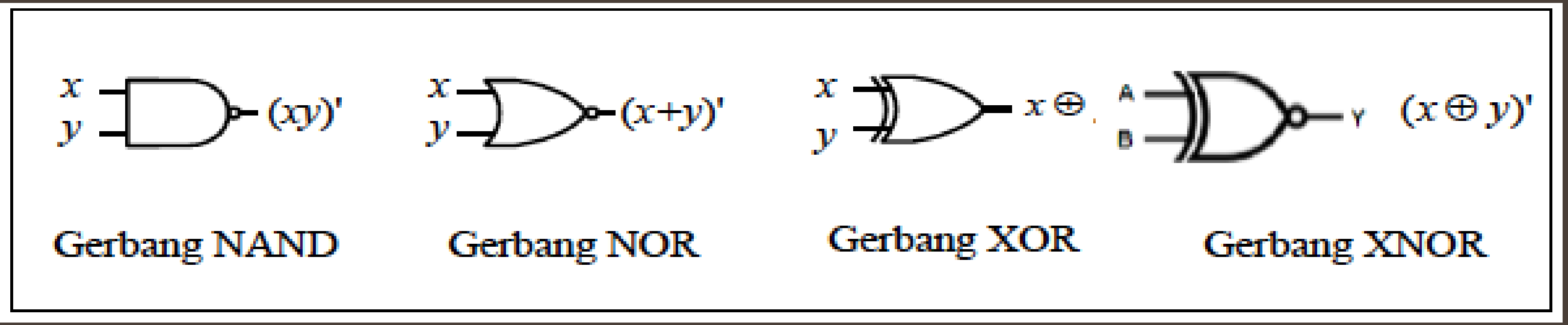
Gerbang AND dua-masukan Gerbang OR dua-masukan Gerbang NOT (*inverter*)

- Contoh 8: Nyatakan fungsi f(x, y, z) = xy + x'y ke dalam rangkaian logika.

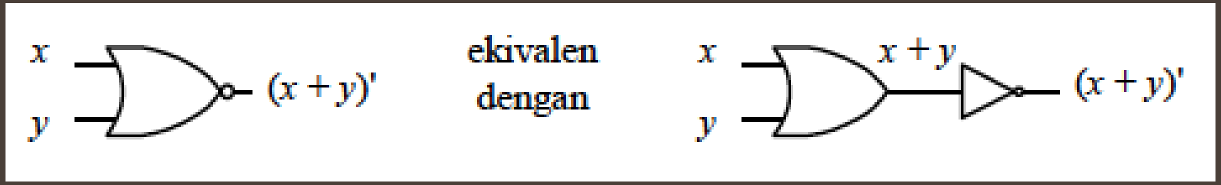
Penyelesaian: Ada beberapa cara penggambaran



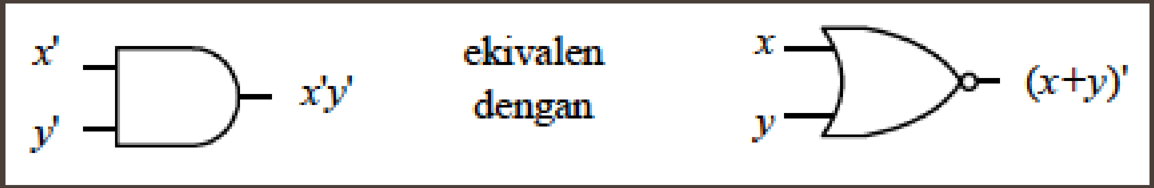
Gerbang logika turunan: NAND, NOR, XOR, dan XNOR



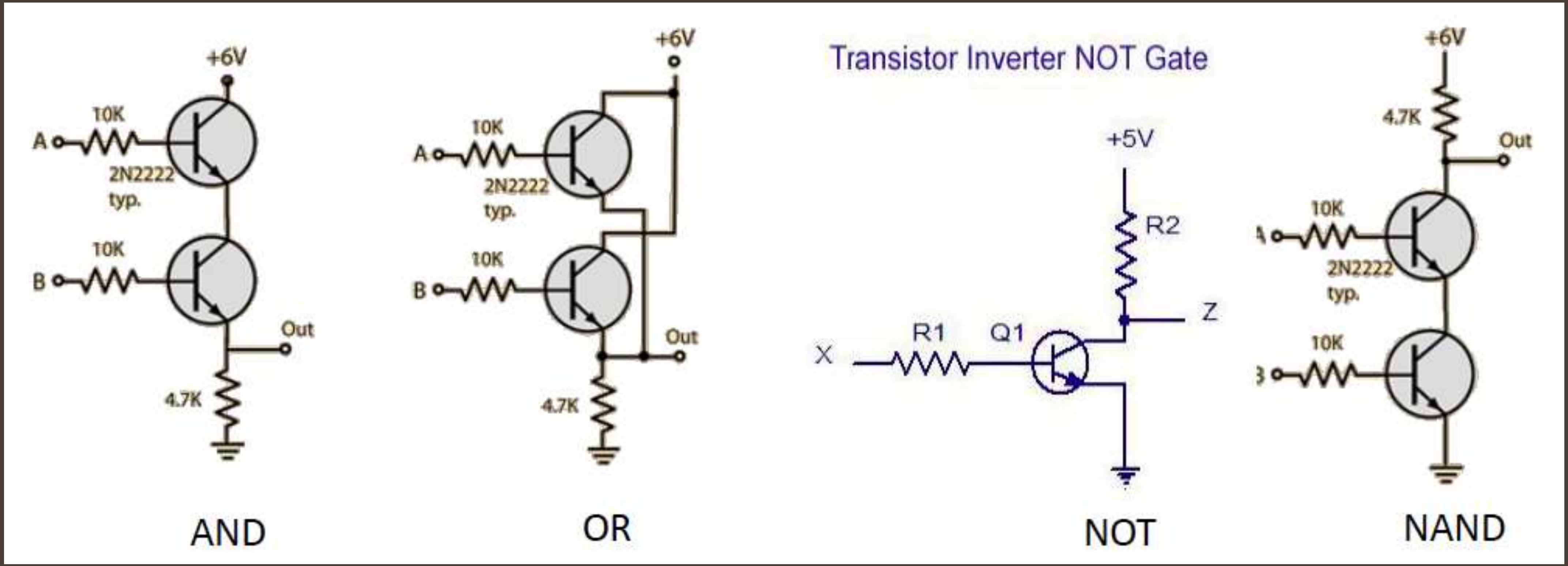
- Keempat gerbang di atas merupakan kombinasi dari gerbang-gerbang dasar, misalnya gerbang NOR disusun oleh kombinasi gerbang OR dan gerbang NOT:



- Selain itu, dengan menggunakan hukum De Morgan, kita juga dapat membuat gerbang logika yang ekivalen dengan gerbang NOR dan NAND di atas:



Transistor untuk gerbang logika



Sumber gambar: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electronic/trangate.html#c3

Penyederhanaan Fungsi Boolean

- Menyederhanakan fungsi Boolean artinya mencari bentuk fungsi lain yang ekivalen tetapi dengan jumlah literal atau operasi yang lebih sedikit.

Contoh: $f(x, y) = x'y + xy' + y'$ disederhanakan menjadi $f(x, y) = x' + y'$

- Dipandang dari segi aplikasi aljabar Boolean, fungsi Boolean yang lebih sederhana berarti rangkaian logikanya juga lebih sederhana (menggunakan jumlah gerbang logika lebih sedikit).

- Tiga metode yang dapat digunakan untuk menyederhanakan fungsi Boolean:

1. Secara aljabar, menggunakan hukum-hukum aljabar Boolean.
2. Metode Peta Karnaugh.
3. Metode Quine-McCluskey (metode tabulasi)

- Yang dibahas hanyalah **Metode Peta Karnaugh**

Peta Karnaugh

- Peta Karnaugh (atau K-map) merupakan metode grafis untuk menyederhanakan fungsi Boolean.
- Metode ini ditemukan oleh Maurice Karnaugh pada tahun 1953. Peta Karnaugh adalah sebuah diagram/peta yang terbentuk dari kotak-kotak (berbentuk bujursangkar) yang bersisian.
- Tiap kotak merepresentasikan sebuah minterm.
- Tiap kotak dikatakan bertetangga jika minterm-minterm yang merepresentasikannya berbeda hanya 1 buah literal.

Peta Karnaugh dengan dua peubah

m_0	m_1
m_2	m_3

Penyajian 1

		y	
		0	1
x	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

Penyajian 2

	y'	y
x'	$x'y'$	$x'y$
x	xy'	xy

Penyajian 3

Peta Karnaugh dengan tiga peubah

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

		yz 00	01	11	10
x	0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
	1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Peta Karnaugh dengan empat peubah

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

wx \ *yz*	00	01	11	10
00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

Cara mengisi peta Karnaugh

- Kotak yang menyatakan minterm diisi “1”
- Sisanya diisi “0”

Contoh: f(x, y, z) = x’yz’ + xyz’ + xyz

x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1

Contoh: $f(x, y, z) = xz' + y$

xz': Irisan antara:

$x \rightarrow$ semua kotak pada baris ke-2

$z' \rightarrow$ semua kotak pada kolom ke-1 dan kolom ke-4

y:

$y \rightarrow$ semua kotak pada kolom ke-3 dan kolom ke-4

x \ yz	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	0	1	1

$xz' + y$

- Pengisian peta Karnaugh dari tabel kebenaran

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tinjaun hanya nilai fungsi yang memberikan 1. Fungsi Boolean yang merepresentasikan tabel kebenaran adalah f(x, y) = x'y'z + xy'z' + xy'z+ xyz.

x \ yz	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Teknik Minimisasi Fungsi Boolean dengan Peta Karnaugh

- Penggunaan Peta Karnaugh dalam penyederhanaan fungsi Boolean dilakukan dengan cara menggabungkan kotak-kotak yang bernilai 1 dan saling bersisian.
- Kelompok kotak yang bernilai 1 dapat membentuk:

1. pasangan (dua),
2. kuad (empat),
3. oktet (delapan).

Pasangan

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

Bukti secara aljabar:

$$
\begin{aligned}
f(w, x, y, z) &= wxyz + wxyz' \\
&= wxy(z + z') \\
&= wxy(1) \\
&= wxy
\end{aligned}
$$

- Sebelum disederhanakan: f(w, x, y, z) = wxyz + wxyz’
- Sesudah disederhanakan: f(w, x, y, z) = wxy

Kuad (1)

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

Bukti secara aljabar (kuad = 2 buah pasangan):

$$
\begin{aligned}
f(w, x, y, z) &= wxy' + wxy \\
&= wx(z' + z) \\
&= wx(1) \\
&= wx
\end{aligned}
$$

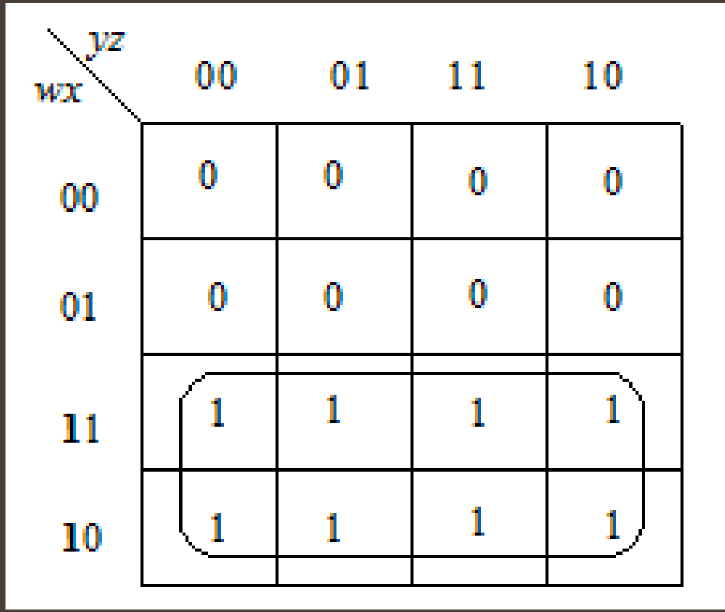
- Sebelum: f(w, x, y, z) = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz'
- Sesudah: f(w, x, y, z) = wx

- **Kuad (2)**

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

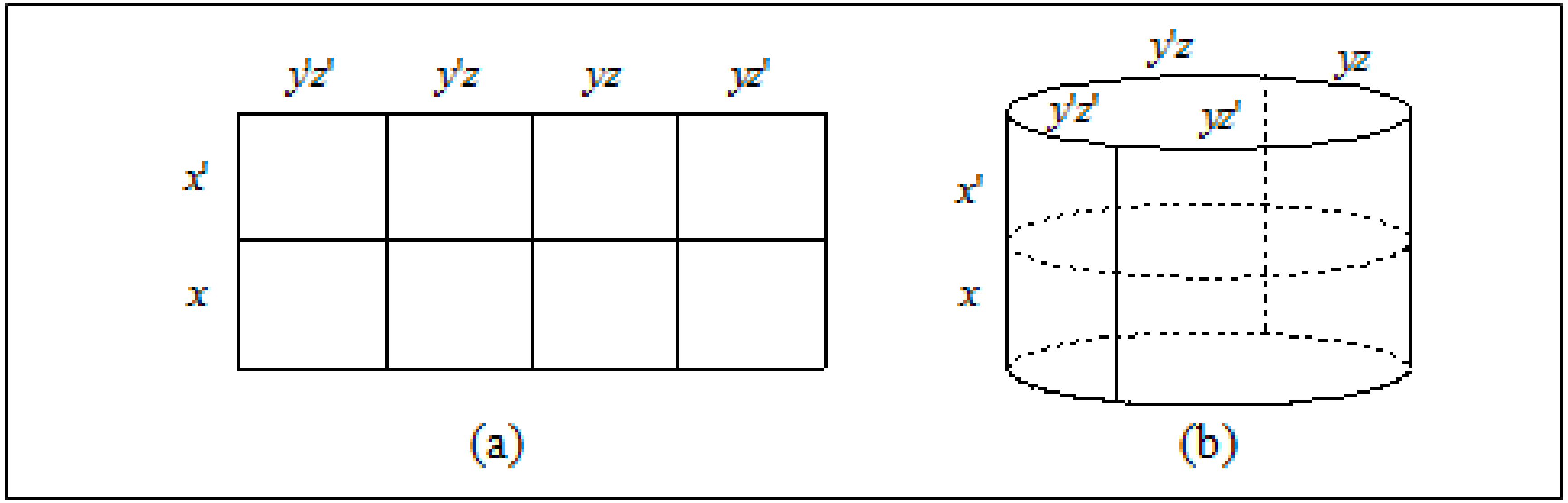
- Sebelum: f(w, x, y, z) = wxy’z’ + wxy’z + wx’y’z’ + wx’y’z
- Sesudah: f(w, x, y, z) = wy’

- **Oktet**



- Sebelum: f(w, x, y, z) = wxy’z’ + wxy’z + wxyz’ + wxy’z + wx’y’z’ + wx’y’z + wx’yz + wx’yz’
- Sesudah: f(w, x, y, z) = w

- **Penggulungan (1)**

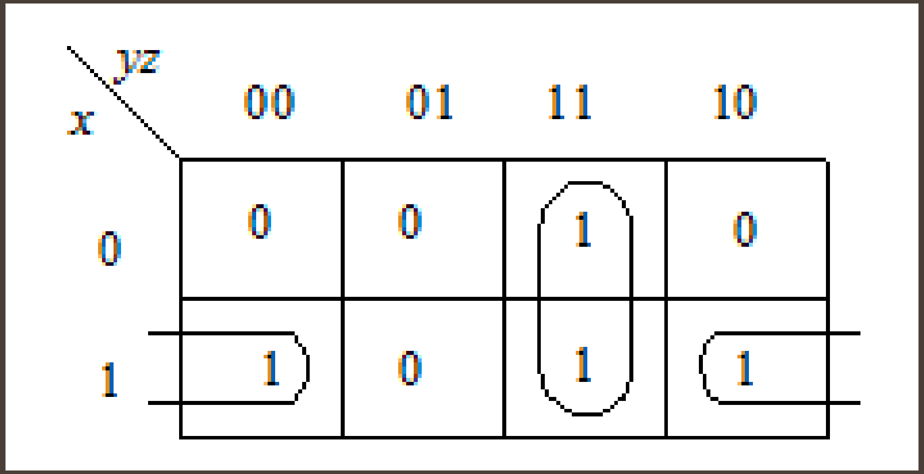


Gambar (a) Peta Karnaugh "normal" dengan 3 peubah

(b) Peta Karnaugh dengan sisi kiri dan sisi kanan ditautkan (seperti digulung).

- **Penggulungan (2)**

Contoh: Sederhanakan $f(x, y, z) = x'yz + xy'z' + xyz + xyz'$.

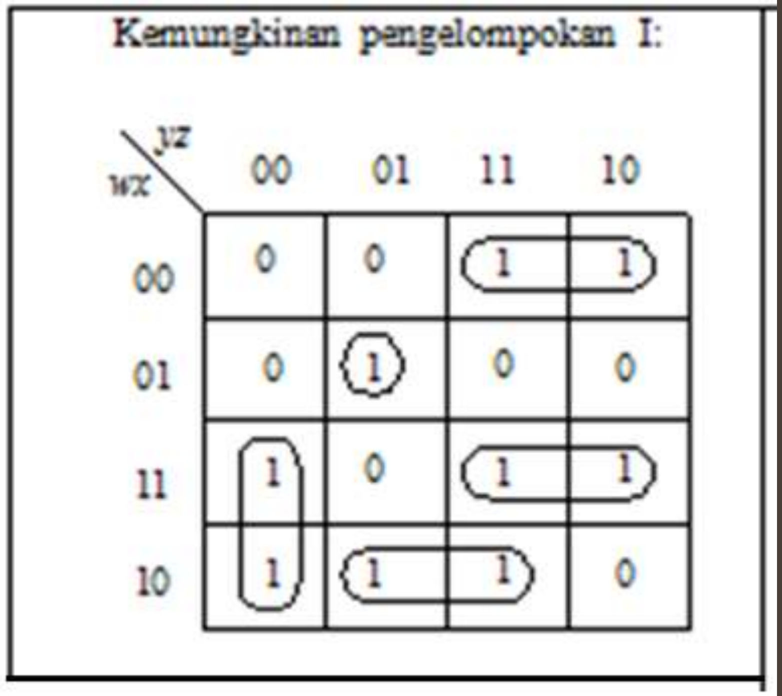


- Sebelum: $f(x, y, z) = x'yz + xy'z' + xyz + xyz'$
- Sesudah: $f(x, y, z) = yz + xz'$

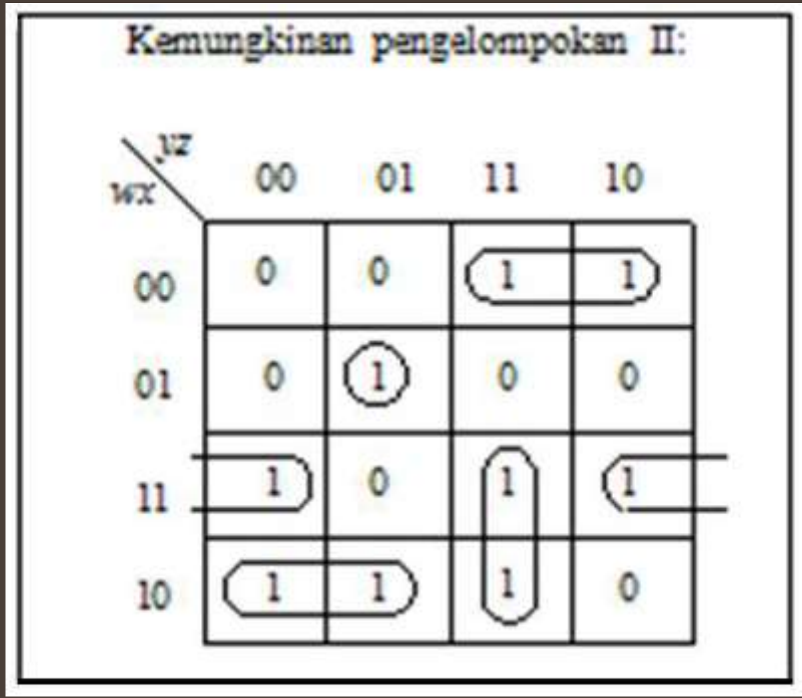
Ketidakunikan Hasil Penyederhanaan

Hasil penyederhanaan dengan peta Karnaugh tidak selalu unik.

Artinya, mungkin terdapat beberapa bentuk fungsi minimasi yang berbeda meskipun jumlah literal dan jumlah term-nya sama



f(w,x,y,z) = w’x’y + w’xy’z + wxy + wy’z’ + wx’z



f(w,x,y,z) = w’x’y + w’xy’z + wxz’ + wyz + wx’y’

Tips menyederhanakan dengan Peta Karnaugh

- Kelompokkan 1 yang bertetangga sebanyak mungkin
- Dimulai dengan mencari oktet sebanyak-banyaknya terlebih dahulu, kemudian kuad, dan terakhir pasangan.

Contoh minimisasi 1:

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

- Hasil penyederhanaan:

$$f(w, x, y, z) = wy' + yz' + w'x'z$$

Contoh minimisasi 2:

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	1	1	1	0

- Hasil penyederhanaan:

$$f(w, x, y, z) = z + xy + wx'y'$$

Contoh minimisasi 3:

wx \ yz	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	0	1	1	1

- Hasil penyederhanaan:

$$f(w, x, y, z) = wx + wz + wy + xyz$$

Contoh minimisasi 4:

Tentukan bentuk sederhana dari fungsi Boolean yang merepresentasikan tabel kebenaran berikuit dalam bentuk baku SOP dan bentuk baku POS.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Penyelesaian:

(a) Bentuk baku SOP: kelompokkan 1

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Fungsi minimasi: $f(x, y, z) = x'z + xz'$

(b) Bentuk baku POS: kelompokkan 0

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Fungsi minimasi: $f(x, y, z) = (x' + z')(x + z)$

Contoh minimisasi 5:

- Minimisasi fungsi Boolean $f(x, y, z) = \Sigma\ (0, 2, 4, 5, 6)$

Penyelesaian:

Peta Karnaugh untuk fungsi tersebut adalah:

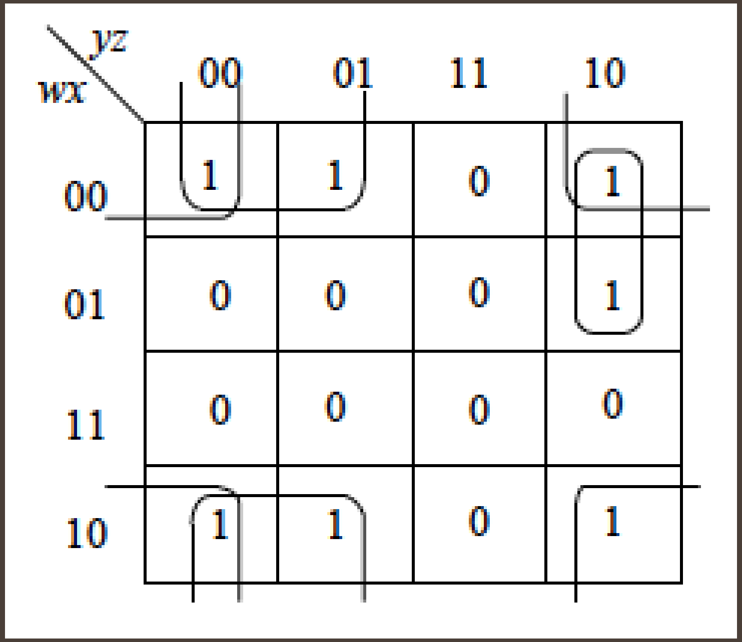
$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Hasil penyederhanaan: $f(x, y, z) = z' + xy'$

Contoh minimisasi 6

- Minimisasi f(w, x, y, z) = w'x'y' + x'yz' + w'xyz' + wx'y'

Penyelesaian:

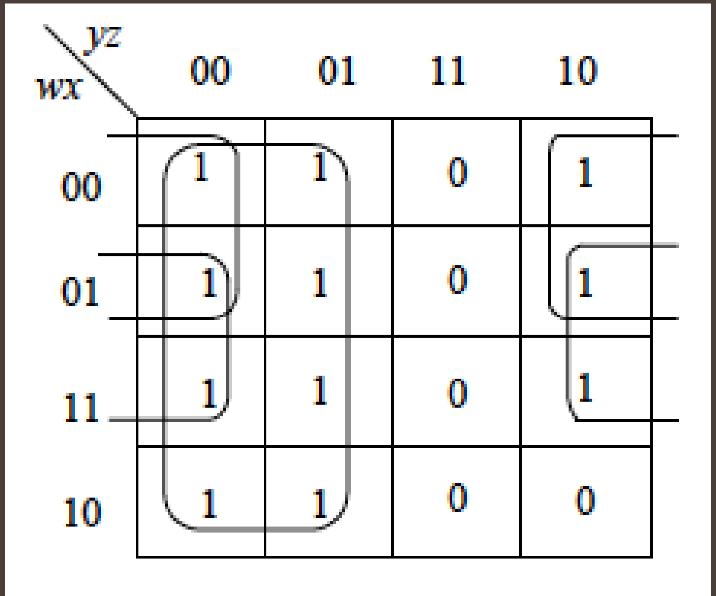


Hasil penyederhanaan: f(w, x, y, z) = x'y' + x'z' + w'yz'

Contoh minimisasi 7

- Minimisasi fungsi Boolean f(w, x, y, z) = Σ (0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14)

Penyelesaian:

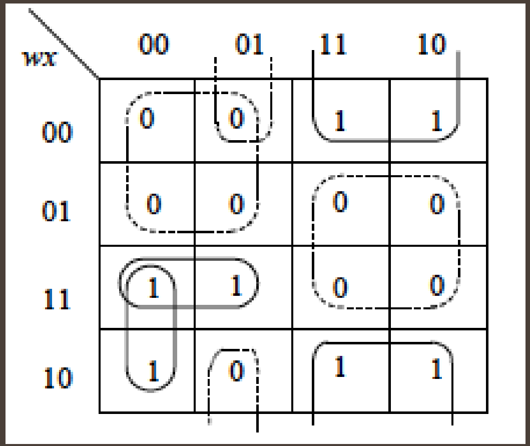


Hasil penyederhanaan: f(w, x, y, z) = y’ + w’z’ + xz’

Contoh minimisasi 8

- Sederhanakan fungsi $f(w,x,y,z) = (w + x')(w + x + y)(w' + x' + y')(w' + x + y + z')$.
- Hasil penyederhanaan dalam bentuk baku SOP dan POS.

Penyelesaian:

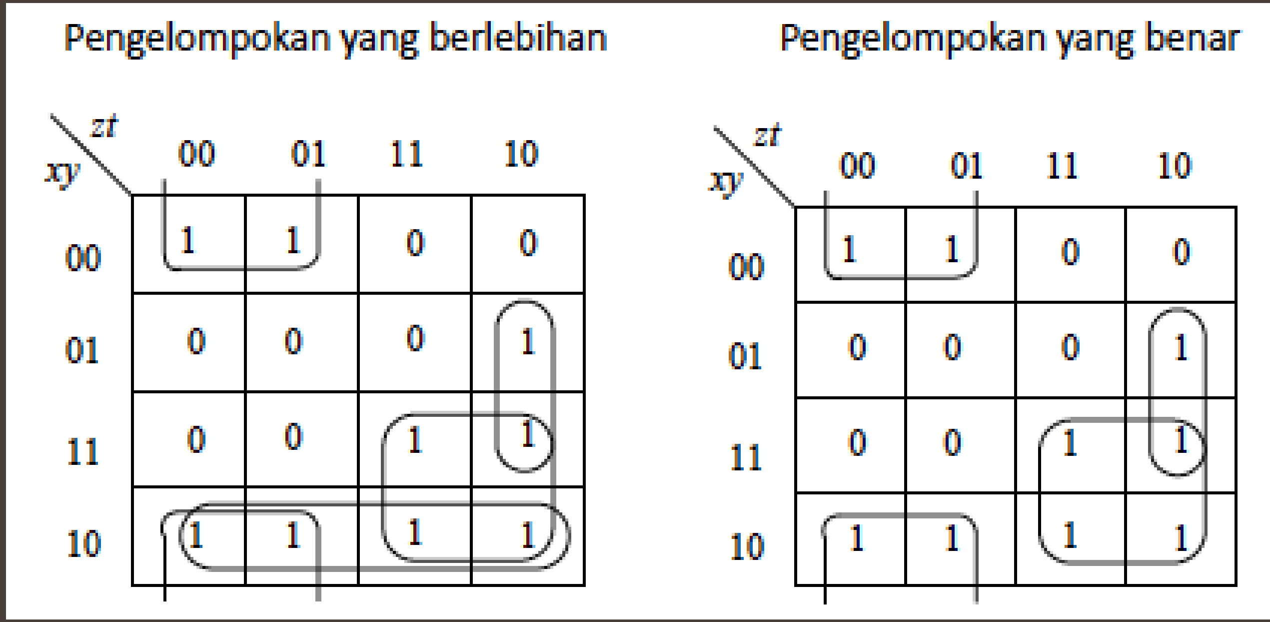


- Hasil penyederhanaan
- SOP: $f(w, x, y, z) = x'y + wxy' + wy'z'$ (garis penuh)
- POS: $f(w, x, y, z) = (x' + y')(w + y)(x + y + z')$ (garis putus-putus)

Contoh minimisasi 9

- Sederhanakan fungsi f(x, y, z, t) = xy′ + xyz + x′y′z′ + x′yzt′

Penyelesaian:

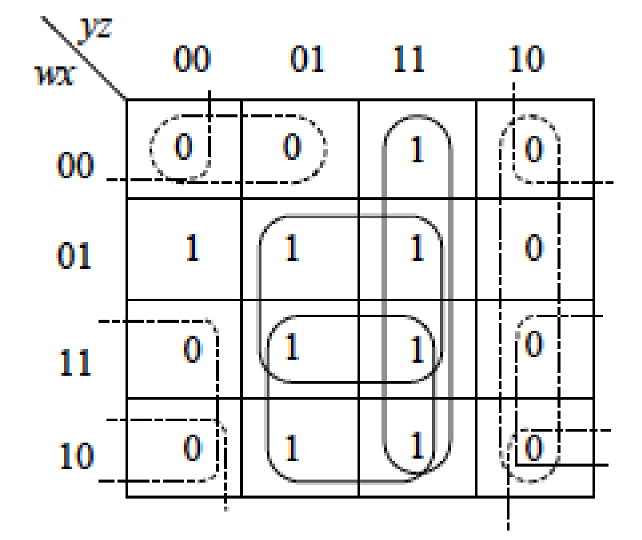


Fungsi minimasi: f(x, y, z, t) = y′z′ + xz + yzt′

Contoh minimisasi 10

- Minimasi fungsi yang telah dipetakan ke peta Karnaugh di bawah ini dalam bentuk baku SOP dan bentuk baku POS.

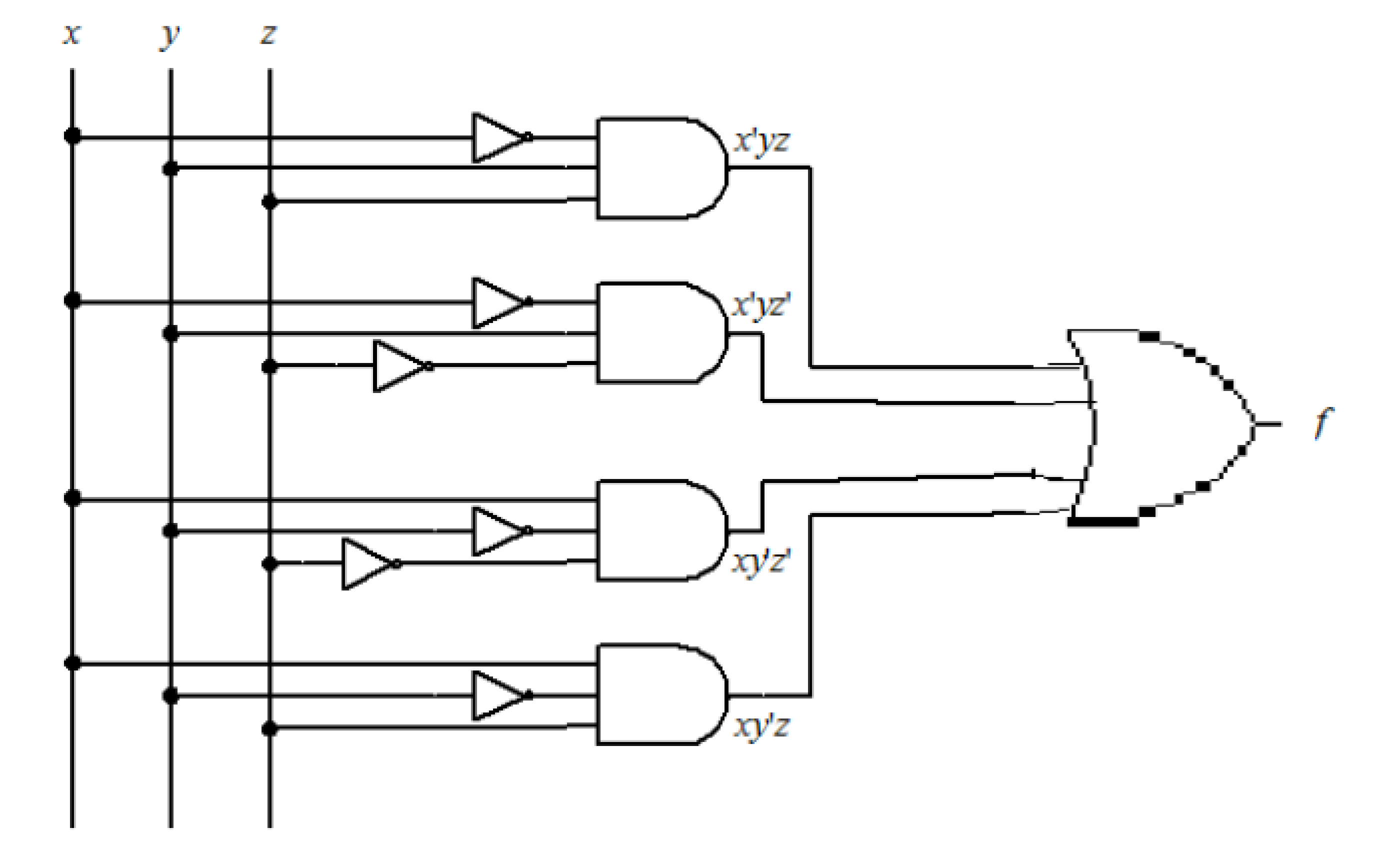
Penyelesaian:



- SOP : f(w, x, y, z) = yz + wz + xz + w’xy’ (garis penuh)
- POS: f(w, x, y, z) = (y’ + z)(w’ + z)(x + z)(w + x + y) (garis putus-putus)

Contoh minimisasi 11

- Sederhanakan rangkaian logika berikut:



- Penyelesaian: Fungsi yang berkoresponden dengan rangkaian logika tsb:

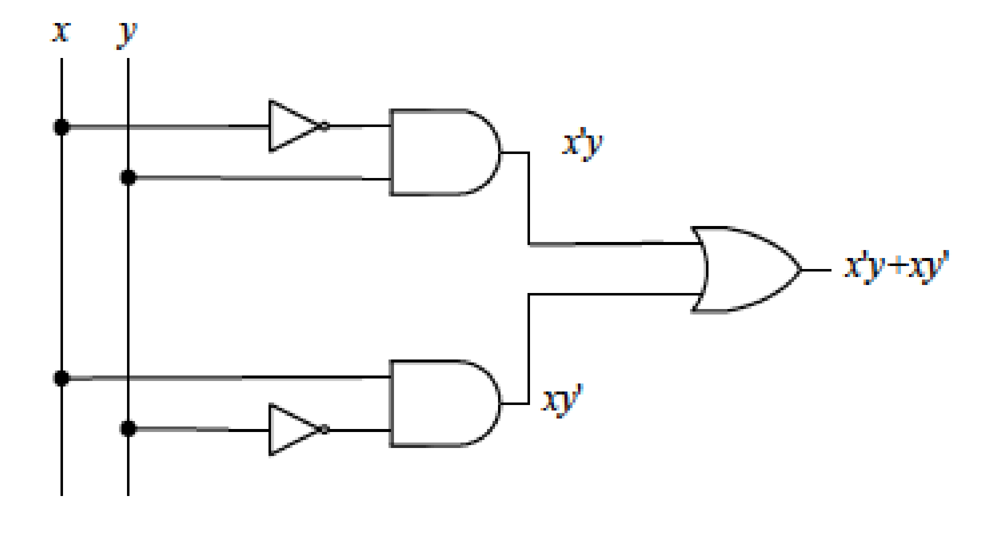
$f(x, y, z) = x'yz + x'yz' + xy'z' + xy'z$

x \ yz	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Fungsi Boolean hasil minimisasi:

$f(x, y, z) = x'y + xy'$

Rangkaian logika hasil penyederhanaan:



Peta Karnaugh untuk Lima Peubah

	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

Garis pencerminan

Dua kotak dianggap bertetangga jika secara fisik berdekatan
dan merupakan pencerminan terhadap garis ganda

Contoh: Carilah fungsi sederhana dari

$f(v, w, x, y, z) = \Sigma\,(0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 31)$

Peta Karnaugh dari fungsi tersebut adalah:

vw \ xyz	000	001	110	010	110	111	101	100
00	1	0	0	1	1	0	0	1
01	0	1	1	0	0	1	1	0
11	0	1	1	0	0	1	1	0
10	0	1	0	0	0	0	1	0

Fungsi minimasi: $f(v, w, x, y, z) = wz + v'w'z' + vy'z$

Keadaan don’t care

- Keadaan don’t care adalah kondisi nilai peubah yang tidak diperhitungkan oleh fungsinya.
- Artinya nilai 1 atau 0 dari peubah don’t care tidak berpengaruh pada hasil fungsi tersebut.

Contoh:

- peraga digital angka desimal 0 sampai 9.
- Jumlah bit yang diperlukan untuk merepresentasikan = 4 bit.
- Bit-bit untuk angka 10-15 tidak terpakai

Keadaan don’t care

w	x	y	z	Desimal
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5
0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

don't care

- Dalam menyederhanakan Peta Karnaugh yang mengandung keadaan don’t care, ada dua hal penting sebagai pegangan.
- Pertama, kita anggap semua nilai don’t care (X) sama dengan 1 dan kemudian membentuk kelompok sebesar mungkin yang melibatkan angka 1 termasuk tanda X tersebut.
- Kedua, semua nilai X yang tidak termasuk dalam kelompok tersebut kita anggap bernilai 0.
- Dengan cara ini, keadaan-keadaan X telah dimanfaatkan semaksimal mungkin, dan kita boleh melakukannya secara bebas.

Contoh: Sebuah fungsi Boolean, f, dinyatakan dengan tabel berikut. Minimisasi fungsi f sesederhana mungkin.

w	x	y	z	$f(w, x, y, z)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	X
1	0	0	1	X
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

Penyelesaian:

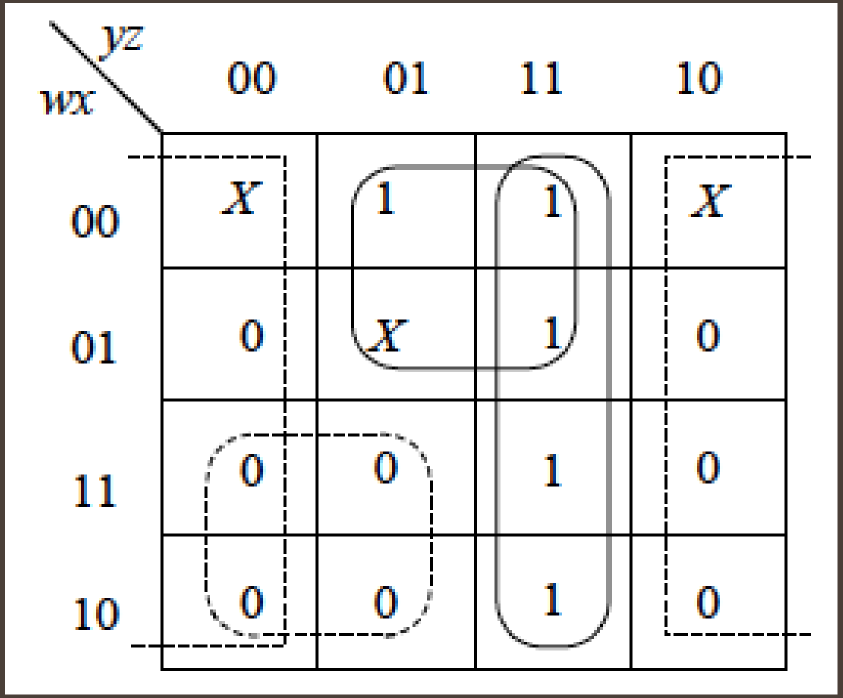
wx \ yz	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	1	1	0
11	X	X	X	X
10	X	0	X	X

Hasil penyederhanaan: f(w, x, y, z) = xz + y’z’ + yz

Contoh: Minimisasi fungsi Boolean berikut (dalam bentuk baku SOP dan bentuk baku POS): f(w, x, y, z) = Σ (1, 3, 7, 11, 15)

dengan kondisi don’t care adalah d(w, x, y, z) = Σ (0, 2, 5).

Penyelesaian:



Hasil penyederhanaan:

SOP: f(w, x, y, z) = yz + w’z (kelompok garis penuh)
POS: f(w, x, y, z) = z (w’ + y) (kelompok garis putus-putus)

Perancangan Rangkaian Logika

1. Majority gate merupakan sebuah rangkaian digital yang keluarannya sama dengan 1 jika mayoritas masukannya bernilai 1 (mayoritas = 50% + 1). Keluaran sama dengan 0 jika tidak memenuhi hal tersebut di atas. Dengan bantuan tabel kebenaran, carilah fungsi Boolean yang diimplementasikan dengan 3-input majority gate. Sederhanakan fungsinya, lalu gambarkan rangkaian logikanya.

Penyelesaian

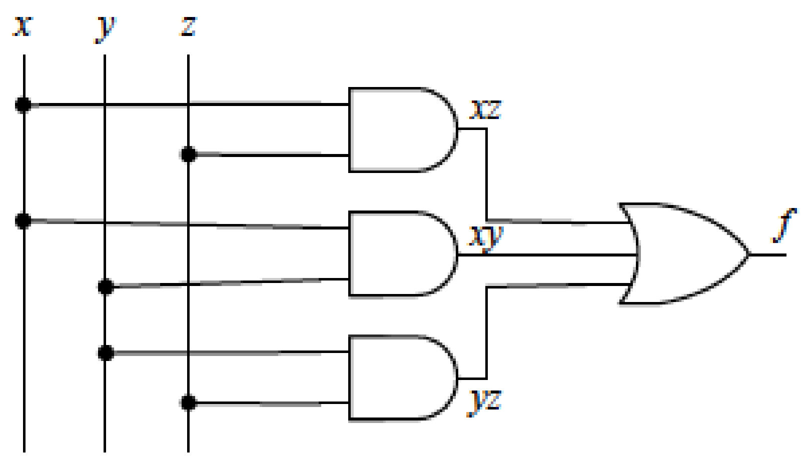
Tabel kebenaran:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$f(x, y, z) = xz + xy + yz$

Rangkaian logika:



2. Gunakan Peta Karnaugh untuk merancang rangkaian logika yang dapat menentukan apakah sebuah angka desimal yang direpresentasikan dalam bit biner merupakan bilangan genap atau bukan (yaitu, memberikan nilai 1 jika genap dan 0 jika tidak).

Penyelesaian:

Angka desimal: 0 .. 9 (direpresentasikan dalam 4 bit biner, misalkan $a_0a_1a_2a_3$).

Fungsi $f(a_0, a_1, a_2, a_3)$ bernilai 1 jika representasi desimal dari $a_0a_1a_2a_3$ menyatakan bilangan genap, dan bernilai 0 jika tidak genap

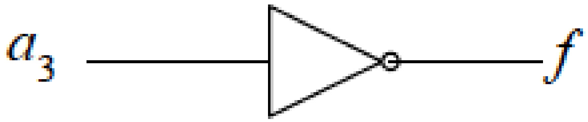
Tabel kebenaran:

a_0	a_1	a_2	a_3	*Desimal*	$f(a_0, a_1, a_2, a_3)$
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	2	1
0	0	1	1	3	0
0	1	0	0	4	1
0	1	0	1	5	0
0	1	1	0	6	1
0	1	1	1	7	0
1	0	0	0	8	1
1	0	0	1	9	0
1	0	1	0	10	**X**
1	0	1	1	11	*X*
1	1	0	0	12	*X*
1	1	0	1	13	*X*
1	1	1	0	14	*X*
1	1	1	1	15	*X*

a_2a_3	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	*X*	*X*	*X*	*X*
10	1	0	*X*	*X*

$$f(a_0, a_1, a_2, a_3) = a_3'$$

Rangkaian logika:



3. Di dalam unit aritmetika komputer (Arithmetic Logical Unit – ALU) terdapat rangkaian penjumlah (adder). Salah satu jenis rangkaian penjumlah adalah penjumlah-paruh (half adder). Rangkaian ini menjumlahkan 2 bit masukan dengan keluarannya adalah SUM (jumlah) dan CARRY (pindahan).

x	*y*	*SUM*	*CARRY*
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Peta Karnaugh untuk *SUM*:

$x \backslash y$	0	1
0	0	1
1	1	0

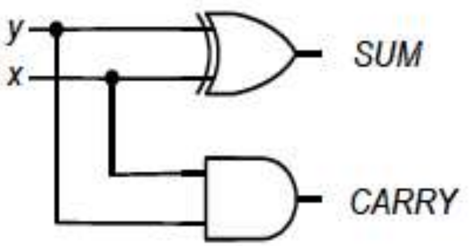
$SUM = x'y + xy' = x \oplus y$

Peta Karnaugh untuk *CARRY*:

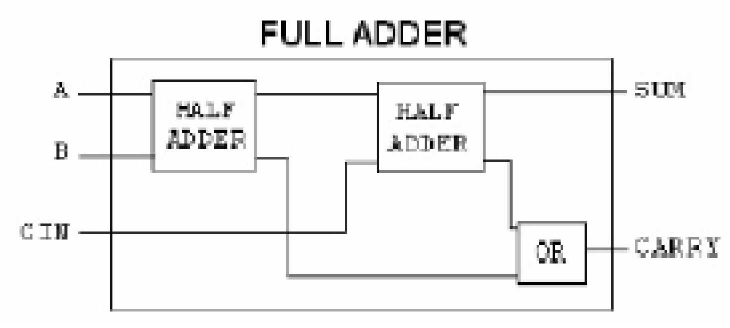
$x \backslash y$	0	1
0	0	0
1	0	1

$CARRY = xy$

Rangkaian logika:

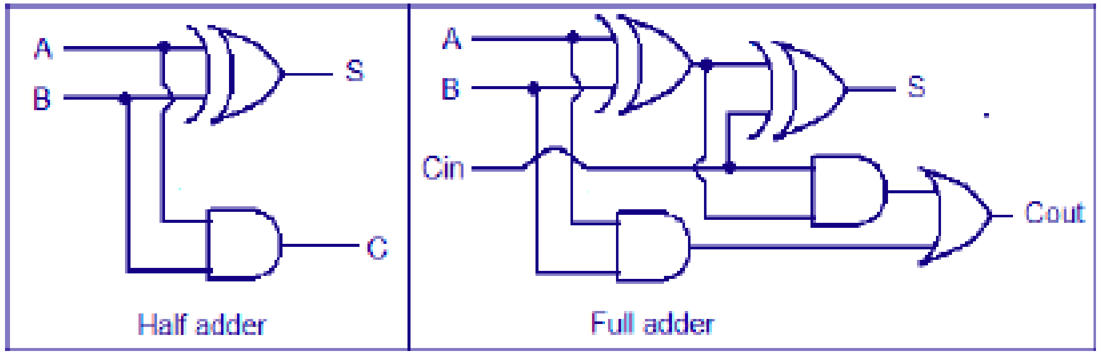


Sekedar pengetahuan, di bawah ini rangkaian untuk full adder



Full adder using 2-Half adder

Full Adder –Truth Table				
Input			Output	
A	B	Carry in	Sum	Carry
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



Sumber gambar: http://www.circuitstoday.com/ripple-carry-adder

4. Buatlah rangkaian logika yang menerima masukan dua-bit dan menghasilkan keluaran berupa kudrat dari masukan. Sebagai contoh, jika masukannya 11 (3 dalam sistem desimal), maka keluarannya adalah 1001 (9 dalam sistem desimal).

Penyelesaian:

Misalkan 2-bit masukan kita simbolkan dengan xy, dan kuadratnya (4-bit) kita simbolkan dengan abcd.

Tabel kebenaran:

Masukan		Keluaran			
w	*x*	*a*	*b*	*c*	*d*
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

x \ y	0	1
0	0	0
1	0	1

$a(x, y) = xy$

x \ y	0	1
0	0	0
1	1	0

$b(x, y) = xy'$

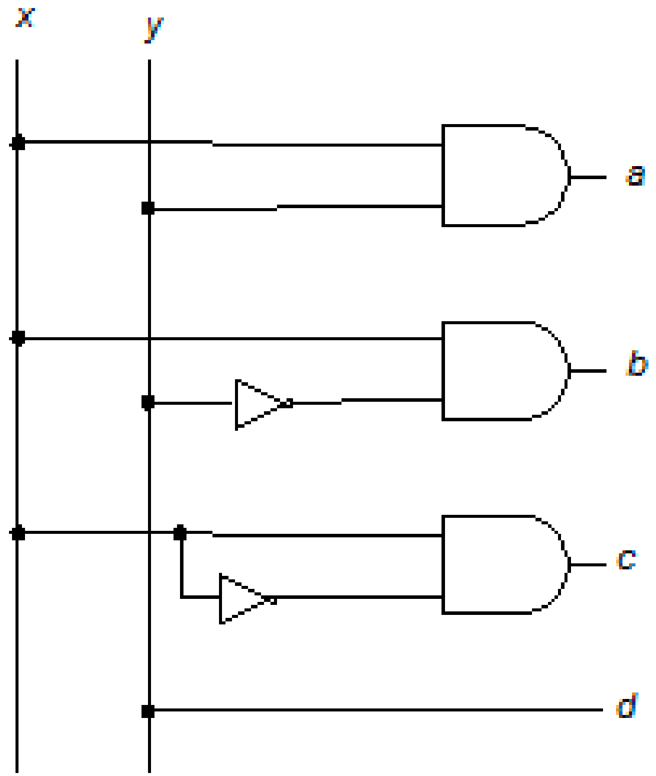
x \ y	0	1
0	0	0
1	0	0

$c(x, y) = 0 = xx'$

x \ y	0	1
0	0	1
1	0	1

$d(x, y) = y$

Rangkaian logikanya pengkuadrat 2-bit biner:



5. Sebuah instruksi dalam sebuah program adalah

```
if A > B then writeln(A) else writeln(B);
```

- Nilai A dan B yang dibandingkan masing-masing panjangnya dua bit (misalkan a_1a_2 dan b_1b_2).

a) Buatlah rangkaian logika (yang sudah disederhanakan tentunya)yang menghasilkan keluaran 1 jika A > B atau 0 jika tidak.

b) Gambarkan kembali rangkaian logikanya jika hanya menggunakan gerbang NAND saja (petunjuk: gunakan hukum de Morgan)

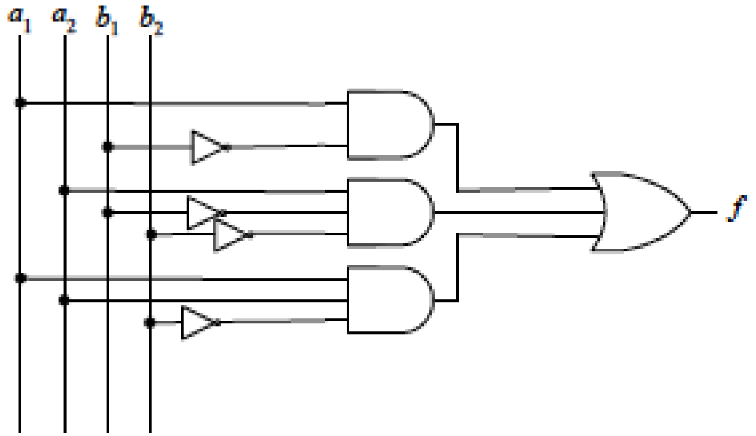
Penyelesaian:

(a)

Desimal		Biner				
A	B	a_1	a_2	b_1	b_2	$f(a_1, a_2, b_1, b_2)$
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	2	0	0	1	0	0
0	3	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0
1	2	0	1	1	0	0
1	3	0	1	1	1	0
2	0	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	1	1
2	2	1	0	1	0	0
2	3	1	0	1	1	0
3	0	1	1	0	0	1
3	1	1	1	0	1	1
3	2	1	1	1	0	1
3	3	1	1	1	1	0

b_1b_2	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	0	0	0
11	1	1	0	1
10	1	1	0	0

$$f(a_1, a_2, b_1, b_2) = a_1b_1' + a_2b_1'b_2' + a_1a_2b_2'$$



(b) f(a1, a2, b1, b2) = a1b1’ + a2b1‘b2’ + a1a2b2’

= ((a1b1’)’ (a2b1‘b2’)’ (a1a2b2’)’)’ (De Morgan)

Rangkaian logika: