Aturan Kelas ONLINE

Aturan kelas online:

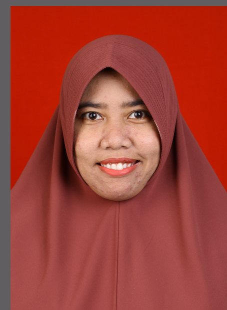
- Sopan dan rapi
- Tidak mengenakan kaos oblong
- Login menggunakan email nim@std.umk.ac.id
- Menyiapkan buku, pensil dan penghapus

HIMPUNAN

Kode Mata Kuliah: IFT-103

Semester: 1 (satu)

Program Studi Teknik Informatika
Universitas Muria Kudus



TRI LISTYORINI
Gedung J.Lt.II.11
Universitas Muria Kudus

Definisi

- Himpunan (set) adalah sekumpulan objek yang berbeda.
- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.
- HIMA TI adalah contoh sebuah himpunan, di dalamnya berisi anggota berupa mahasiswa. Tiap mahasiswa berbeda satu sama lain.
- Satu set komputer desktop terdiri dari CPU, monitor, dan keyboard

Ilustrasi

Himpunan Mahasiswa

Sumber: ITFest HIMA TI 2018

Satu set mainan huruf

- Perhatikan bedanya:

  {1, 2, 3, 4, 5, 6 } → Himpunan (set)

  {1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6} = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

  {1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6} → Himpunan-ganda (multi-set)

  → Ada elemen yang berulang (ganda)

- Urutan elemen di dalam himpunan tidak penting

  {a, b, c, d} = {d, b, a, c}

Cara Penyampaian Himpunan

1. Enumerasi

1. Enumerasi

- Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci.

Contoh 1.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: A = {1, 2, 3, 4}.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: B = {4, 6, 8, 10}.
- C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
- R = { a, b, {a, b, c}, {a, c} }
- C = {a, {a}, {{a}} }
- K = { {} }
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: {1, 2, ..., 100 }
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

- Contoh 2. Misalkan:

A = {1, 2, 3, 4}, R = { a, b, {a, b, c}, {a, c} }

K = {{}}

maka:

$3 \in A$

$\{a, b, c\} \in R$

$c \notin R$

$\{\} \in K$

$\{\} \notin R$

Contoh 3.

Jika $P_1 = \{a, b\}$,

$P_2 = \{ \{a, b\} \}$,

$P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$,

maka

$a \in P_1$

$a \notin P_2$

$P_1 \in P_2$

$P_1 \notin P_3$

$P_2 \in P_3$

Cara Penyampaian Himpunan

2. Simbol-simbol baku

2. Simbol-simbol baku

- **P** = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }
- **N** = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }
- **Z** = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }
- **Q** = himpunan bilangan rasional = $\{a/b \mid a, b \in Z$ dan $b \neq 0\}$

  = {..., -3/4, -4/5, 2/3, 1/2, ... } = {..., -0.6, -0.8, 0.666...}
- **R** = himpunan bilangan riil = {..., 7.8, -0.001, 0.4, 3.14, ..}
- **C** = himpunan bilangan kompleks = $\{a + bi \mid a, b \in R\}$

Himpunan yang universal: semesta, disimbolkan dengan U atau S.

- Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan A adalah himpunan bagian dari U, dengan A = {1, 3, 5}.

Cara Penyampaian Himpunan

3. Notasi Pembentuk Himpunan

3. Notasi Pembentuk Himpunan

- Notasi: { x | syarat yang harus dipenuhi oleh x }

Contoh 4.

- A adalah himpunan bilangan bulat positif kecil dari 5

  A = { x | x adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

  atau A = { x | x ∈ **P**, x < 5 } = {1, 2, 3, 4}

- M = { x | x adalah mahasiswa yang mengambil mata kuliah IFT103}

Cara Penyampaian Himpunan

4. Diagram Venn

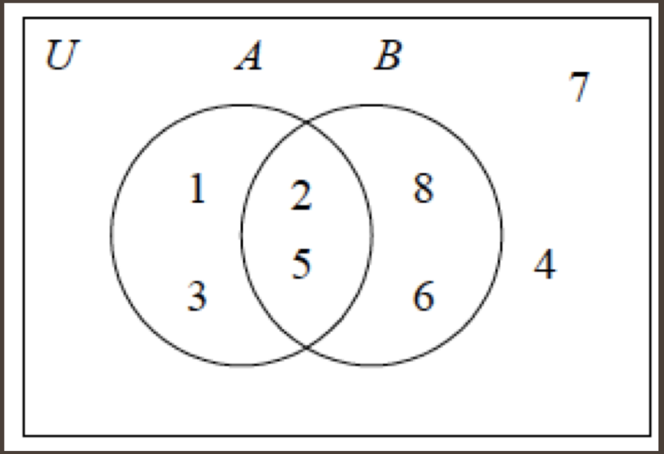
4. Diagram Venn

- Contoh 5.

  Misalkan **U** = {1, 2, …, 7, 8},

  A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.

  Diagram Venn:



Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut kardinal dari himpunan A.

Notasi: n(A) atau | A |

Contoh 6.

(i) B = { x | x merupakan bilangan prima lebih kecil dari 20 },

atau B = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} maka | B | = n(B) = 8

(ii) T = {kucing, a, Amir, 10, paku, laptop}, maka | T | = 6

(iii) A = {2, {2, 3}, {4}, 6, {{7}} }, maka | A | = 5

(iv) C = ∅, maka n(C) = 0

(v) D = { x ∈ **N** | x < 5000 }, maka n(D) = 4999

(vi) D = { x ∈ **N** | x ≥ 5000 }, maka n(D) tak berhingga

Himpunan kosong (null set)

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (null set).

  Notasi : Ø atau {}

Contoh 7.

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka n(**P**) = 0

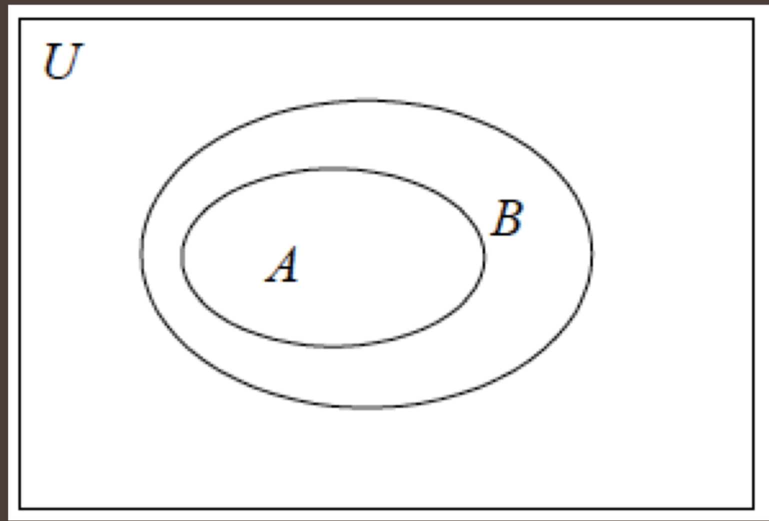
(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, n(**A**) = 0

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {Ø}
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {Ø, {Ø}}
- {Ø} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu Ø.

Himpunan Bagian (Subset)

- Notasi: $A \subseteq B$
- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.
- Secara formal: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\, (x \in A \rightarrow x \in B)$
- A adalah **subset** dari B.

Dalam hal ini, B dikatakan **superset** dari A.



Contoh 8.

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) **N** $\subseteq$ **Z** $\subseteq$ **R** $\subseteq$ **C**

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq 0, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

(v) $A = \{3, 9\}$, $B = \{5, 9, 1, 3\}$, $A \subseteq B$ .... Benar/ salah?

(vi) $A = \{3, 3, 3, 9\}$, $B = \{5, 9, 1, 3\}$, $A \subseteq B$ .... Benar/ salah?

(vii) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $A \subseteq B$ .... Benar/ salah?

- $\emptyset \subseteq A$ untuk sembarang himpunan A
- $A \subseteq A$ untuk sembarang himpunan A
- $\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\emptyset$ dan A disebut himpunan bagian tak

sebenarnya (**improper subset**) dari himpunan A.

Contoh: A = {1, 2, 3}, maka

- {1, 2, 3} dan $\emptyset$ adalah **improper subset** dari A.
- {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} adalah **proper subset** dari A

- Perhatikan bahwa $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

(i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

- A disebut himpunan bagian sebenarnya (**proper subset**) dari B.
- Contoh: {1} dan {2, 3} adalah **proper subset** dari {1, 2, 3}

  Jadi, $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$, $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$

(ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (**subset**) dari B yang memungkinkan $A = B$.

- Contoh: $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

- Latihan

  Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan semua kemungkinan himpunan C sedemikian sehingga $A \subset C$ dan $C \subset B$, yaitu A adalah **proper subset** dari C dan C adalah **proper subset** dari B.

Jawaban:

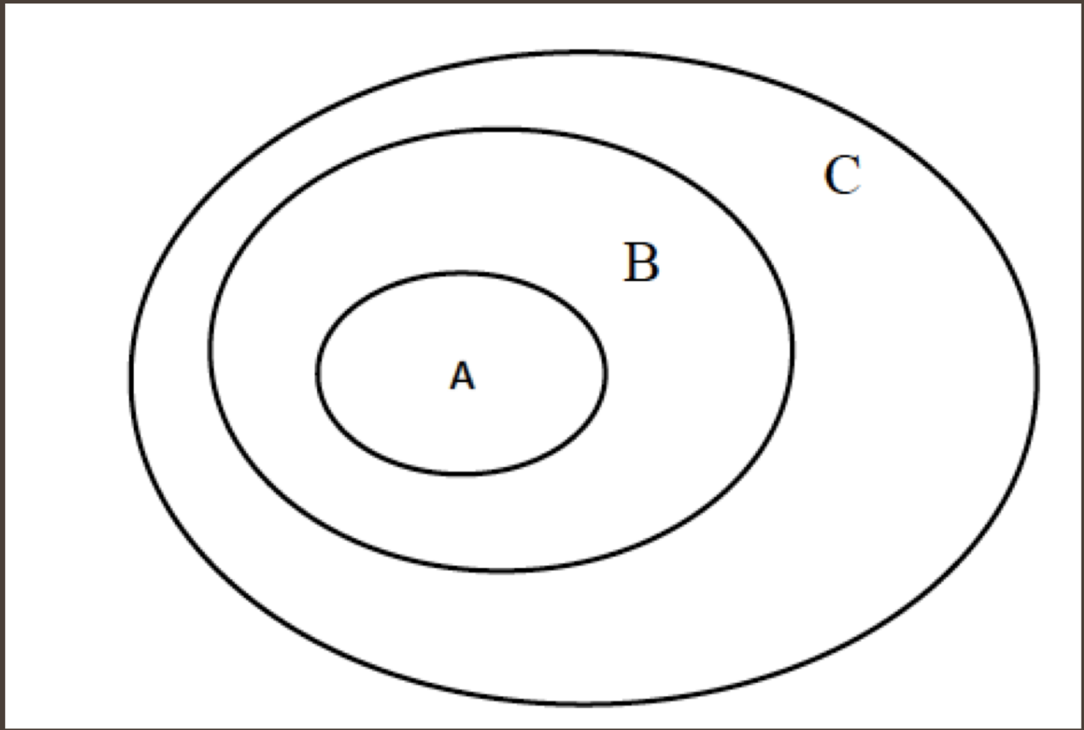
Data: $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, lalu $A \subset C$ dan $C \subset B$

C harus mengandung semua elemen $A = \{1, 2, 3\}$ dan sekurang kurangnya satu elemen dari B

Dengan demikian, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ atau $C = \{1, 2, 3, 5\}$.

C tidak boleh memuat 4 dan 5 sekaligus karena C adalah proper subset dari B.

- Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$



Himpunan yang Sama

- A = B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.
- A = B jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.
- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 9.

(i) Jika A = { 0, 1 } dan B = { x | x (x – 1) = 0 }, maka A = B

(ii) Jika A = { 3, 5, 8 } dan B = {5, 3, 8 }, maka A = B

(iii) Jika A = { 3, 5, 5, 5, 8, 8} dan B = {5, 3, 8 }, maka A = B

(iv) Jika A = { 3, 5, 8, 5 } dan B = {3, 8}, maka A $\neq$ B

(iv) A = {anjing, kucing, kuda}, B = {kucing, kuda, tupai, anjing}, maka A $\neq$ B

- Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:
  - (a) A = A, B = B, dan C = C
  - (b) jika A = B, maka B = A
  - (c) jika A = B dan B = C, maka A = C

Himpunan yang Ekivalen

- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh 10.

Misalkan A = { 1, 3, 5, 7 } dan B = { a, b, c, d }, maka $A \sim B$

sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (**disjoint**) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : **A // B**

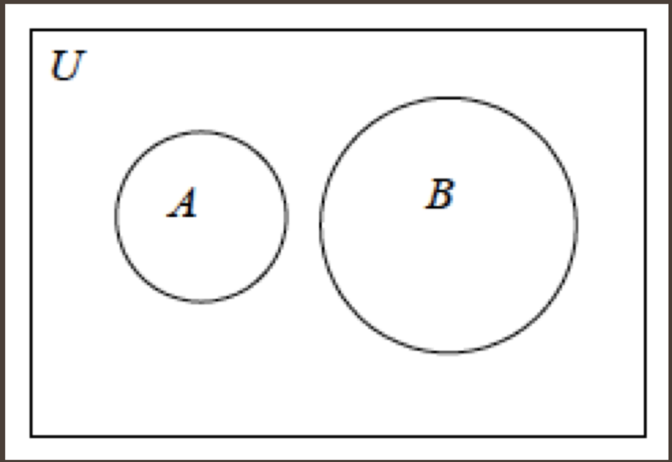


Diagram Venn

Contoh 11.

Jika A = { x | x ∈ **P**, x < 8 } dan B = { 10, 20, 30, ... }, maka A // B.

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (power set) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A.
- Notasi: P(A) atau 2^A
- Jika | A | = m, maka | P(A) | = 2^m.

Contoh 12.

Jika A = { 1, 2 }, maka P(A) = 2^A = { ∅, { 1 }, { 2 }, { 1, 2 }}, dan

| P(A) | = 4

Contoh 13.

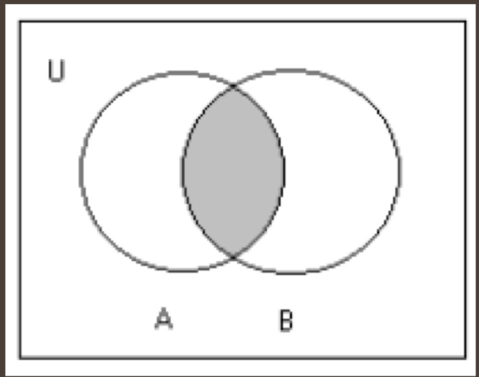
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah P(∅) ={∅}, dan himpunan kuasa dari himpunan {∅} adalah P({∅}) = {∅, {∅}}.

Operasi Terhadap Himpunan

1. Irisan *(Intersection)*

1. Irisan (intersection)

- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A$ dan $x \in B \}$



Contoh 14.

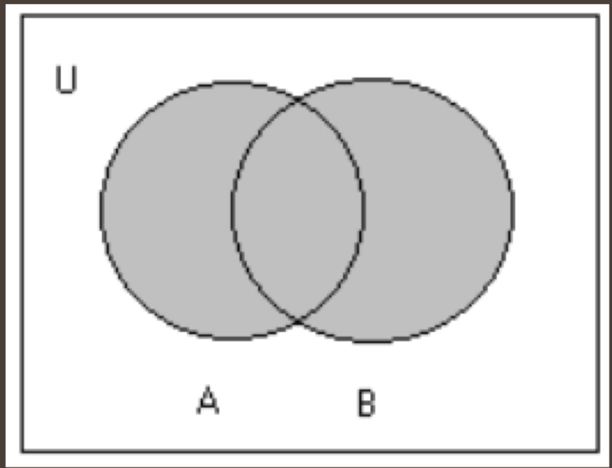
- (i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$, maka $A \cap B = \{4, 10\}$
- (ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \emptyset$. Artinya: A // B

Operasi Terhadap Himpunan

2. Gabungan *(union)*

2. Gabungan (union)

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ atau $x \in B \}$



Contoh 15.

- (i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$
- (ii) $A \cup \emptyset = A$

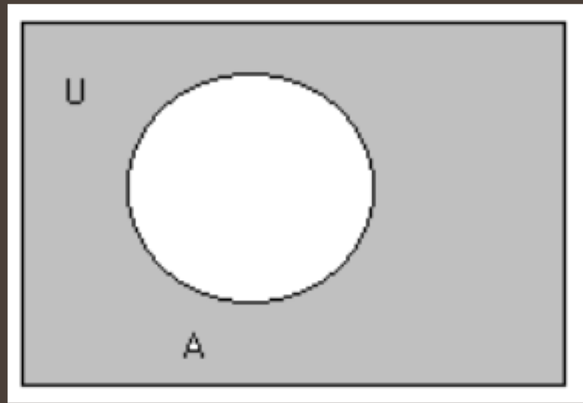
Operasi Terhadap Himpunan

3. Komplemen

(complement)

3. Komplemen (complement)

- Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in \mathbf{U}, x \notin A \}$



Contoh 16.

- Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },
- (i) jika A = {1, 3, 7, 9}, maka $\overline{A}$ = {2, 4, 6, 8}
- (ii) jika A = { x | x/2 ∈ **P**, x < 9 }, maka A= { 1, 3, 5, 7 }

Contoh 17. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" $\rightarrow (E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" $\rightarrow A \cap C \cap D$

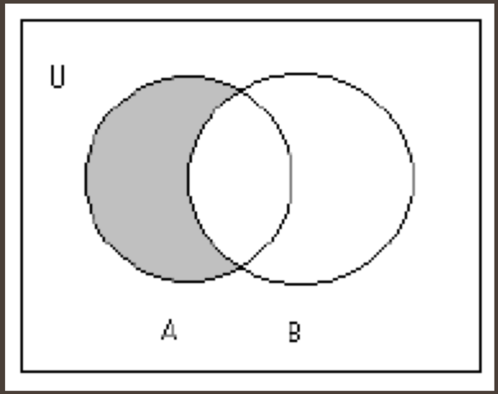
(iii) "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" $\rightarrow \overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

Operasi Terhadap Himpunan

4. Selisih
(difference)

4. Selisih (difference)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



Contoh 18.

- (i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$
- dan $B - A = \emptyset$
- (ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

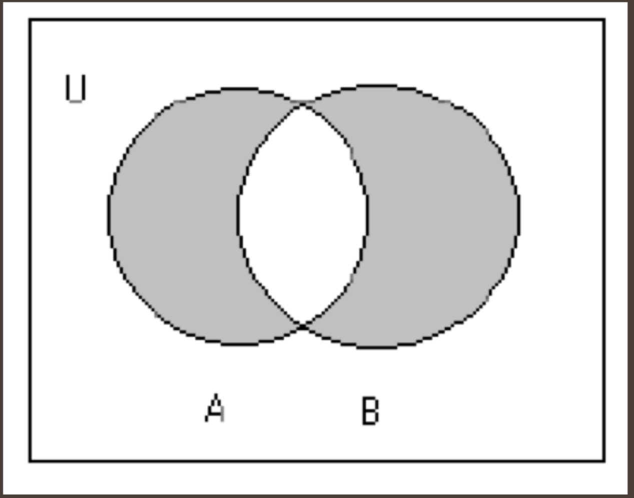
Operasi Terhadap Himpunan

5. Beda Setangkup

(Symmetric Difference)

5. Beda Setangkup (Symmetric Difference)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh 19.

- Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa

P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80

Q = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$
(ii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$
(iii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" : $U - (P \cup Q)$

TEOREMA 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

Operasi Terhadap Himpunan

6. Perkalian Kartesian
(cartesian product)

6. Perkalian Kartesian (cartesian product)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Contoh 20.

(i) Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka

$$C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka:

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:
   $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
2. $(a, b) \neq (b, a)$.
3. $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.

   Pada Contoh 20(i) di atas, $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$,

   $D \times C = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \}$

   $C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$

   $D \times C \neq C \times D$.

4. Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$
5. Perkalian kartesian dari dua himpunan atau lebih didefinisikan sebagai:
   $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ for } 1 < i < n\}$

Contoh 21. Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu:

{(s, c),(s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)}.

Contoh 21. Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) P(∅) (c) {∅} x P(∅)

(b) ∅ x P(∅) (d) P(P({3}))

Penyelesaian:

(a) P(∅) = {∅}

(b) ∅ x P(∅) = ∅ (ket: jika A = ∅ atau B = ∅ maka A x B = ∅)

(c) {∅} x P(∅) = {∅} x {∅} = {(∅, ∅))

(d) P(P({3})) = P({∅, {3} }) = {∅, {∅}, {{3}}, {∅, {3}} }

LATIHAN

Latihan

- Misalkan A adalah himpunan. Periksalah apakah setiap pernyataan di bawah ini benar atau salah dan jika salah, bagaimana seharusnya:

(a) $A \cap P(A) = P(A)$

(b) $\{A\} \cup P(A) = P(A)$

(c) $A - P(A) = A$

(d) $\{A\} \in P(A)$

(e) $A \subseteq P(A)$

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Contoh 22

Contoh 22.

(i) $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

(ii) Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka

$$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\}$$

(iii) Misalkan A = {a, b}, B = {5, 6}, C = {x, y, z}

maka, A × B × C = {(a, 5, x), (a, 5, y), (a, 5, z},
(a, 6, x), (a, 6, y), (a, 6, z),
(b, 5, x), (b, 5, y), (b, 5, z),
(b, 6, x), (b, 6, y), (b, 6, z)}

terima
kasih