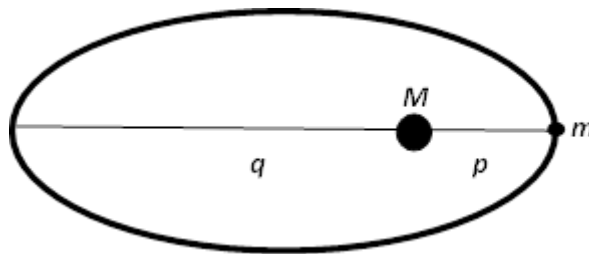




**KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN**  
**DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN MENENGAH**  
**DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS**

Nama	Provinsi	Tanggal Lahir
.....	.....	.....
Kelas & Sekolah	Kabupaten/Kota	Tanda Tangan
.....	.....	.....

Soal A.



Asteroid berjarak  $p$  dari Matahari saat di perihelium dan berjarak  $q$  saat di aphelium. Kecepatan Asteroid saat di perihelium adalah  $v_p$ , saat di aphelium adalah  $v_q$ .

- a) Jika  $v_q = \frac{p}{q} v_p$ , maka buktikan bahwa  $q = \frac{p}{\left(\left(\frac{v_{lepas}}{v_p}\right)^2 - 1\right)}$
- b) Gangguan yang timbul di struktur dalam Asteroid menyebabkan terlontarnya massa sebesar  $\Delta m$  dengan kecepatan lepas  $u = v_{lepas}$ , berlawanan arah gerak Asteroid, saat di perihelium. Berapa kecepatan dan jarak Asteroid saat berada di aphelium?
- c) Hitung kecepatan dan jarak Asteroid itu jika  $p = 1$  SA,  $q = 2$  SA! Berapa persentase  $\Delta m$  terhadap  $m$  agar Asteroid lepas meninggalkan Tata Surya?
- d) Tabel berikut dari IAU *Minor Planet Center* berisi lima Asteroid yang jarak periheliumnya diketahui,  $v_q$  dan  $v_{lepas}$  diberikan. Jarak Aphelium  $q$  dan persentase  $\Delta m/m$  harus ditentukan (Asteroid Anonim diberikan hanya untuk contoh). Manakah dari kelima Asteroid tersebut yang paling kecil massa pecahannya untuk lepas dari Tata Surya. Jelaskan jawabanmu!

Nama	$q$ (SA)	$p$ (SA)	$v_q$ (km/s)	$v_{lepas}$ (km/s)	$\Delta m/m$ (%)
2004XG		1,0	30	42	
1989VA		2,8	25	35	
2001RV17		4,5	15	20	
2004SW26		7,9	11	15	
2006WO3		9,7	10	14	
Anonim	1	1	30	42	0,23

**Selesaian:**

- a. Dari prinsip kekekalan energi total di Perihelium = energi total di Aphelium, diperoleh:

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - G\frac{mM}{p} = \frac{1}{2}mv_q^2 - G\frac{mM}{q} \dots\dots\dots(1)$$

Masukkan  $v_q = \frac{p}{q}v_p$  ke persamaan (1)

$$\frac{1}{2}\frac{p^2}{q^2}v_p^2 - G\frac{M}{q} + \left(G\frac{M}{p} - \frac{v_p^2}{2}\right) = 0$$

Diperoleh

$$\frac{1}{q} = G\frac{M}{p^2v_p^2} \pm \left(G\frac{M}{p^2v_p^2} - \frac{1}{p}\right)$$

$$q = \frac{p}{\left(2G\frac{M}{p^2v_p^2} - 1\right)}$$

Tetapi

$$v_{lepas}^2 = 2G\frac{M}{p}$$

Maka diperoleh

$$q = \frac{p}{\left(\left(\frac{v_{lepas}}{v_p}\right)^2 - 1\right)}$$

- b. Saat Asteroid melontarkan massa  $\Delta m$ , kecepatan Asteroid di aphelium bertambah sebesar  $\Delta v_p$ . Kekekalan momentum (kini menjadi persamaan fundamental pergerakan roket)

$$v_{lepas} \Delta m = (m - \Delta m)\Delta v_p$$

diperoleh harga

$$\Delta v_p = \frac{\Delta m}{(m - \Delta m)}v_{lepas}$$

Maka

$$v_p' = v_p + \Delta v_p$$

Karena

$$q = \frac{p}{\left(\left(\frac{v_{lepas}}{v_p}\right)^2 - 1\right)}$$

atau

$$\left[\left(\frac{v_{lepas}}{v_p}\right)^2 - 1\right] = \frac{p}{q}$$

$$v_p = v_{lepas} \sqrt{\frac{q}{p+q}}$$

$$v'_p = \left[ \frac{\Delta m}{m - \Delta m} + \sqrt{\frac{q}{p+q}} \right] v_{lepas}$$

Maka jarak baru  $q'$  di aphelium:

$$q' = \frac{p}{\left[\left(\frac{v_{lepas}}{v'_p}\right)^2 - 1\right]}$$

$$q' = \frac{p}{\left\{ \left[ \frac{v_{lepas}}{v_{lepas} \left( \frac{\Delta m}{m - \Delta m} + \sqrt{\frac{q}{p+q}} \right)} \right]^2 - 1 \right\}}$$

$$q' = \frac{p}{\left\{ \left[ \frac{\Delta m}{m - \Delta m} + \sqrt{\frac{q}{p+q}} \right]^2 - 1 \right\}}$$

Kecepatan baru Asteroid  $v'_{q'}$  di apohelium (dari soal a)

$$v'_{q'} = \frac{p}{q'} v'_p$$

Maka, Asteroid di aphelium:

$$v'_{q'} = \frac{p}{q'} v'_p = \frac{p}{q'} \left[ \frac{\Delta m}{m - \Delta m} + \sqrt{\frac{q}{p+q}} \right] v_{lepas}$$

$$v'_{q'} = \frac{p}{q'} \left[ \frac{\Delta m}{m - \Delta m} + \sqrt{\frac{q}{p+q}} \right] v_{lepas}$$

$$v'_{q'} = \left[ \frac{1}{\left( \frac{\Delta m}{m - \Delta m} + \sqrt{\frac{q}{p + q}} \right)^2} - 1 \right] \left[ \frac{\Delta m}{m - \Delta m} + \sqrt{\frac{q}{p + q}} \right] v_{lepas}$$

c. Jika  $p = 1$  SA,  $q = 2$  SA, dan  $\Delta m = 10\% m$ , maka

$$v'_{q'} = \left[ \frac{1}{\left( \frac{1}{9} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2} - 1 \right] \left[ \frac{1}{9} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right] v_{lepas} = 0,15 v_{lepas}$$

dan  $q' = 6,17$  SA

$$v_q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} v_{lepas} = 0,41 v_{lepas}$$

Sementara

$$v'_p = \left( \frac{1}{9} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) v_{lepas} = 0,92 v_{lepas}$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2}{3}} v_{lepas} = 0,82 v_{lepas}$$

dengan  $p = 1$  SA. Tetapi jika  $\Delta m = 20\% m$  di perihelium, massa yang terlepas 20%, Asteroid meninggalkan Tata Surya (orbit parabolik).

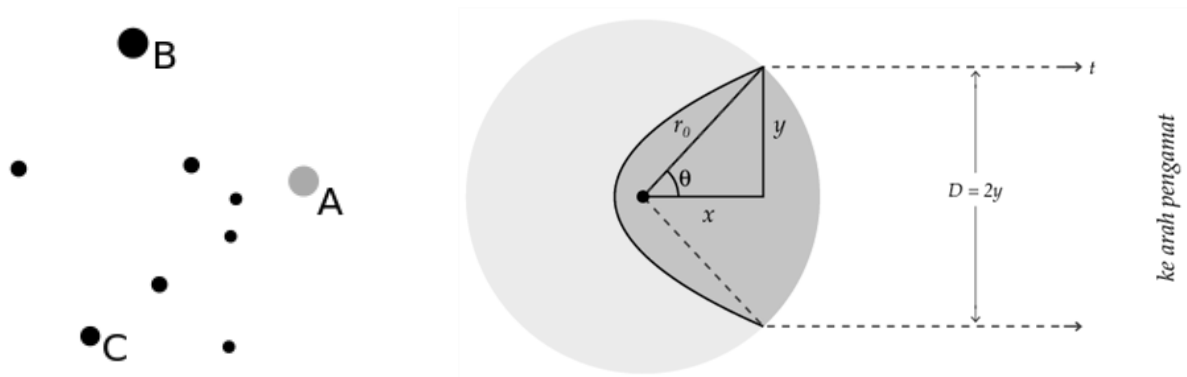
d.

Nama	$q$ (SA)	$p$ (SA)	$v_q$ (km/s)	$v_{lepas}$ (km/s)	$\Delta m/m$
2004XG	1,04	1,0	30	42	0,22
1989VA	2,92	2,8	25	35	0,22
2001RV17	5,79	4,5	15	20	0,20
2004SW26	9,19	7,9	11	15	0,21
2006WO3	10,10	9,7	10	14	0,22
Anonim	1,00	1,0	30	42	0,23

### Soal B.

Soal ini diberikan bersamaan dengan poster *Light Echo* V838 Monocerotis (V838 Mon). Citra tersebut diambil menggunakan *Hubble Space Telescope* (HST) dengan *Advanced Camera System* (ACS) dan *Wide Field Camera* (WFC).

Untuk memahami model kulit bola (*spherical shell*) dalam penentuan jarak bintang V838 Mon, perhatikan gambar di bawah ini:



**Gambar 1.** Kiri: posisi bintang V838 Mon (A) dan beberapa bintang di sekitarnya (utara ke atas). Jarak sudut bintang B dan C adalah  $0,8' = 48''$ . Kanan: selubung awan berukuran  $r_0$  memantulkan cahaya bintang V838 Mon yang meledak tiba-tiba. Parabola dengan titik fokus di pusat bintang menandai selubung awan dengan gema yang teramati pada waktu  $t$ . Gema tersebut memiliki diameter  $D = 2y$ .

Misalkan ledakan V838 Mon terjadi pada  $t_0 = 0$  dan gema cahaya terdeteksi pada  $t$ . Hal ini terjadi karena gema cahaya harus menempuh jarak yang lebih jauh dibandingkan cahaya dari bintang.

1. Bila  $r_0$  menyatakan radius selubung dan  $y$  menyatakan radius gema cahaya, tunjukkan bahwa

$$y^2 = 2r_0 ct - (ct)^2 \quad (1)$$

2. Tunjukkan pula bahwa diameter sudut gema cahaya memenuhi persamaan:

$$\delta(t) = \frac{2}{d} \sqrt{2r_0 ct - (ct)^2} \quad (2)$$

3. Anggap V838 Mon meledak pada tanggal 1 Februari 2002. Hitunglah waktu jeda ( $t$ ) untuk setiap citra gema cahaya yang ditunjukkan dalam poster. Nyatakan dalam hari dan tulis pada tabel yang diberikan.
4. Ukur diameter sudut gema cahaya ( $\delta$ ) untuk setiap citra. Nyatakan dalam satuan detik busur dan tulis pada tabel yang diberikan.
5. Pada Grafik 1, buatlah plot hubungan  $\delta$  terhadap  $t$ . Apakah hubungan tersebut sesuai dengan persamaan (2)?
6. Untuk memperkirakan jarak objek ( $d$ ), lakukan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Ketika  $t$  kecil, persamaan (2) dapat direduksi menjadi:

$$\delta^2 = \frac{8r_0 ct}{d^2}, \quad (3)$$

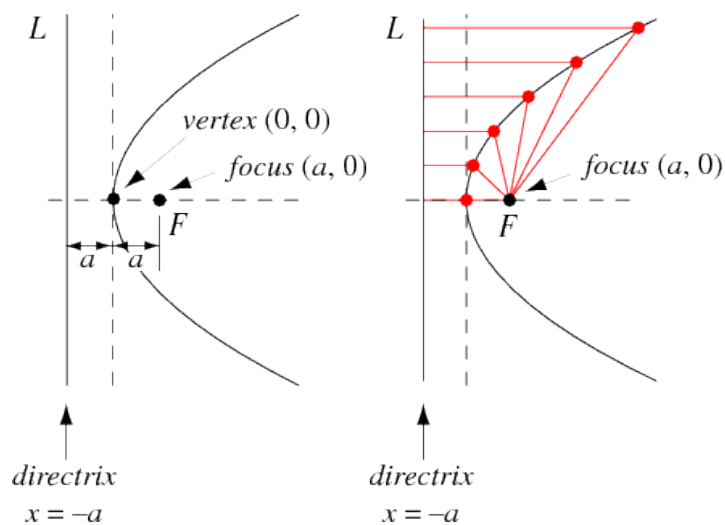
yang merupakan persamaan parabola.

Pada Grafik 1, gambarlah parabola yang berimpit dengan titik-titik data yang telah didapatkan. Tentukan letak titik fokus parabola tersebut.

- b. Berdasarkan letak titik fokus yang didapatkan serta berpedoman pada persamaan (3), perkirakan perbandingan  $r_0/d^2$ . Nyatakan dalam satuan  $\text{parsec}^{-1}$ .
- c. Bila seorang astronom mengatakan bahwa radius selubung  $r_0$  tidak melebihi 10 pc, perkirakan jarak maksimum objek tersebut.

**Tabel Matematika**

Parabola adalah salah satu bangun datar irisan kerucut dengan eksentrisitas  $e = 1$ . Bangun ini dibentuk oleh kumpulan titik ekuidistan antara sebuah garis  $L$  dan titik fokus  $F$  (lihat gambar).



Sebuah parabola dengan titik vertex di  $(0,0)$  dan titik fokus di  $(a,0)$  sebagaimana tampak pada gambar dapat dinyatakan dengan persamaan:

$$y^2 = 4ax.$$

Sedangkan parabola dengan vertex di  $(x_0, y_0)$  memenuhi persamaan:

$$(y - y_0)^2 = 4a(x - x_0),$$

di mana titik fokus berjarak  $a$  dari vertex.

**Selesaian:****Soal 1. (nilai max. 10)**

Gema cahaya menempuh jarak lebih jauh, yakni sebesar  $ct$ :

$$ct = r_0 - x$$

$$x = r_0 - ct$$

$x$  dapat dinyatakan dalam  $r_0$  dan  $y$  berdasarkan hubungan Pythagoras. Kemudian,

$$\begin{aligned}\sqrt{r_0^2 - y^2} &= r_0 - ct \\ r_0^2 - y^2 &= r_0^2 + c^2 t^2 - 2r_0 ct \\ y^2 &= 2r_0 ct - c^2 t^2\end{aligned}$$

**Soal 2. (nilai max. 10)**

Diameter sudut gema cahaya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\delta = \frac{2y}{d}$$
$$= \frac{2}{d} \sqrt{2r_0 ct - c^2 t^2}$$

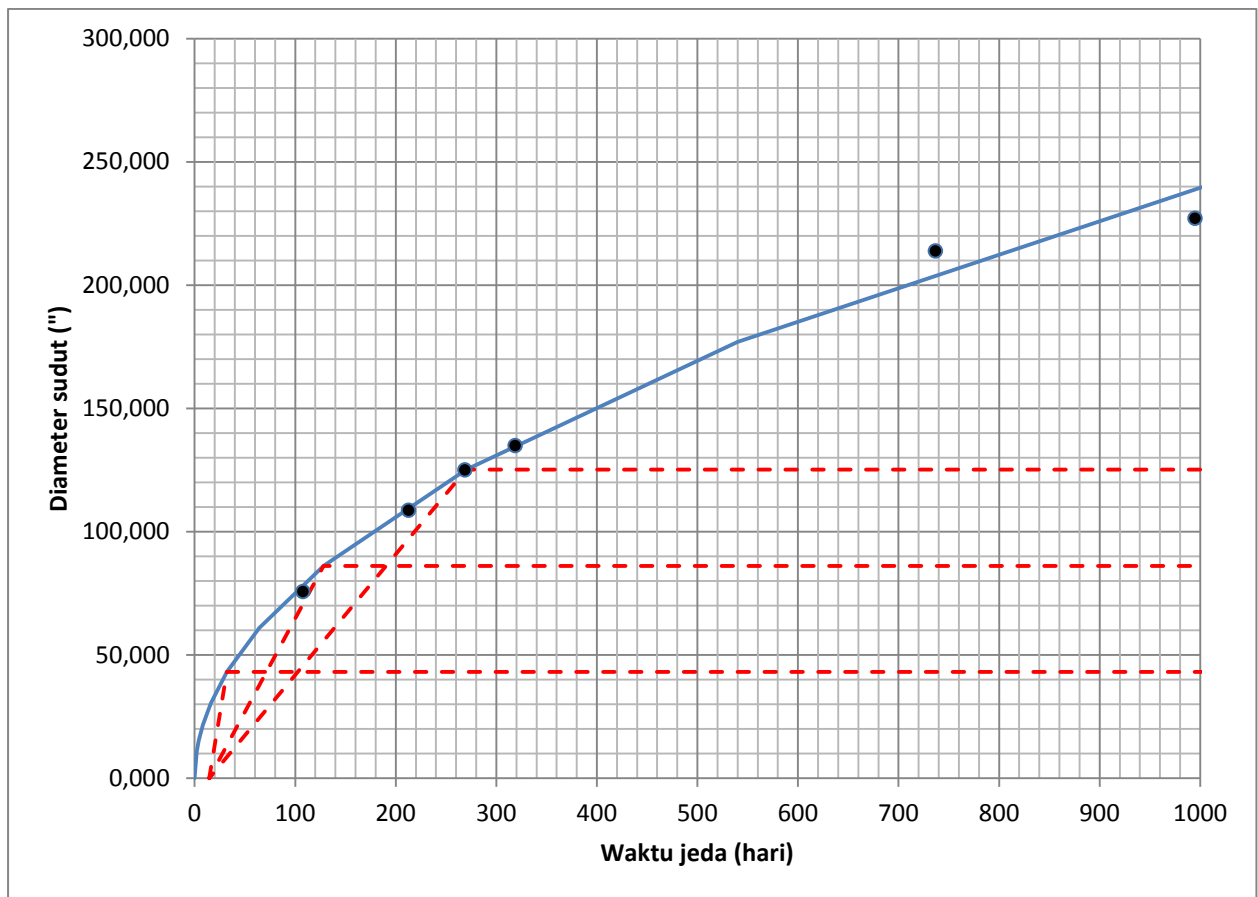
Keterangan:

**Soal 3 dan 4. (nilai max. 20)**

No	Tanggal	t (hari)	$\delta$ (detik busur)	Rentang $\delta$
1	20 Mei 2002	108	75.7	73-78
2	2 September 2002	213	108.6	105-110
3	28 Oktober 2002	269	125.0	122-128
4	17 Desember 2002	319	134.9	132-138
5	8 Februari 2004	737	213.8	210-220
6	24 Oktober 2004	995	227.0	220-230

Keterangan: bila jawaban beda/berada di luar rentang toleransi, nilai dikurangi 1.

**Soal 5 dan 6a.**



Letak titik fokus:  $a = 14.5$

**Soal 6b dan 6c.**

Mengacu pada persamaan (3), jarak titik fokus dan vertex parabola dapat dituliskan sebagai berikut:

$$4a = \frac{8r_0 c}{d^2} = 58$$

di mana satuan dari  $a$  adalah detik busur<sup>2</sup>/hari.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{d^2} &= \frac{14.5}{2c} \\ &= \frac{7.25}{8.38 \times 10^{-4} \frac{1}{206265^2}} \\ &= 2.034 \times 10^{-7} / pc \end{aligned}$$

Bila  $r_0 < 10$ , maka:

$$d < \sqrt{\frac{r_0}{2.034 \times 10^{-7}}} \approx 7 \text{ kpc}$$