Soal dan Pembahasan OSN Astronomi 2018

M.IKHSAN KUSRACHMANSYAH

KATA PENGANTAR

Halo pejuang OSN dimanapun kalian berada. Disini aku mau bagi soal dan solusi OSN astronomi 2018 **versiku**, jadi ngga ada jaminan kalau solusi ini 100% benar. Solusi ini sudah sekali di revisi, tapi tidak menutup kemungkinan ada revisi lagi. Misalkan kalian menemukan kesalahan di solusi ini silahkan hubungi aku dengan DM di ig (@muh.ikhsan.k).

1. Selama perjalanan hidupnya, bintang akan menghabiskan sebagian besar wakktunya pada fase evolusi yang disebut Deret Utama (DU). Untuk Matahari, usia selama di DU ini diperkirakan mencapai 10^{10} tahun. Selama proses evolusinya, bintang juga akan mengalami kehilangan massa. Jika diketahui sebuah bintang dengan massa, radius, dan temperatur efektif masing-masing sebesar $4{,}5\ M_{\odot}$, $2{,}25\ R_{\odot}$, dan $3\ T_{eff,\odot}$. Hitunglah berapa persen massa yang hilang selama bintang tersebut berada di DU terhadap massanya saat tersebut. Gunakan hubungan massa-luminositas bintang selama di DU di mana luminositas sebanding dengan massa pangkat 3,5.

Solusi :

- Umur bintang di DU memenuhi dua persamaan dibawah:

$$\Delta t = \frac{\Delta M c^2}{L} \qquad (1)$$

$$\Delta t \propto \frac{M}{L} \propto \frac{1}{M^{2.5}} \qquad (2)$$

- Bandingkan persamaan (2) dengan $\Delta t_{\odot}$

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_{\odot}} = \left(\frac{M_{\odot}}{M}\right)^{2.5} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \left(\frac{M_{\odot}}{M}\right)^{2.5} \Delta t_{\odot}$$

- Dari persamaan (1)

$$\Delta M = \frac{L\Delta t}{c^2} \qquad \text{dimana} \qquad L = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4 L_{\odot}$$

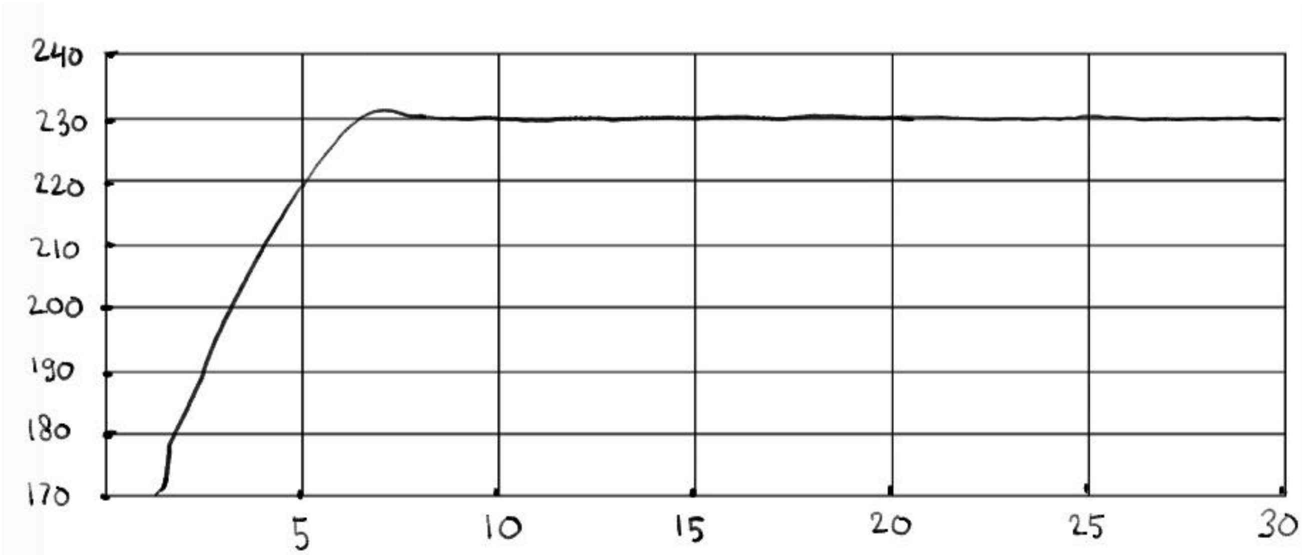
- Maka

$$\frac{\Delta M}{M} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4 \left(\frac{M_{\odot}}{M}\right)^{2.5} \frac{\Delta t_{\odot} L_{\odot}}{M c^2}$$

$\therefore \frac{\Delta M}{M} = 1{,}44 \times 10^{-3} = 0{,}144\ \%$

2. Matahari dan bintang-bintang lain di Galaksi Bima Sakti bergerak mengelilingi pusat galaksi dengan kurva rotasi seperti di Gambar 1.

Kecepatan Rotasi (km/s)



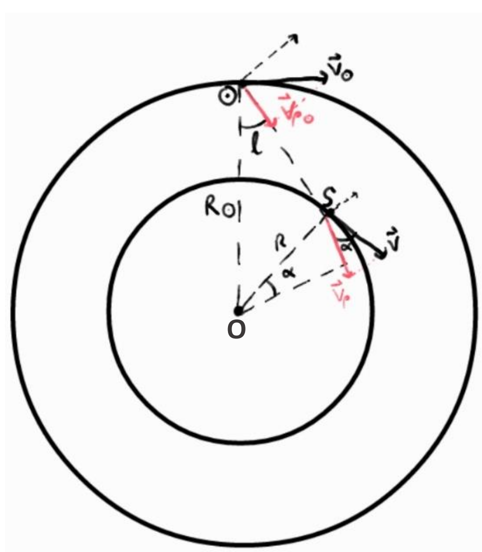
Radius galaktrosentrik (kpc)

Gambar 1: Kurva rotasi bintang-bintang di Galaksi Bima Sakti

Diketahui jarak dari Matahari ke pusat galaksi adalah 8,5 kpc dan Matahari berada di piringan galaksi. Sebuah bintang tetangga memiliki koordinat galaksi $(\ell, b) = (35°, 0{,}002°)$ dan kecepatan radial bintang (heliosentrik) adalah 8 km/detik.

a. Buatlah sketsa posisi Matahari, bintang, dan pusat galaksi. Gambarkan pula vektor kecepatan radial bintang tersebut.
   Solusi:

- karena lintang galaktik kecil, anggap bintang berada sebidang dengan matahari di dalam sketsa



ʘ = posisi matahari
S = posisi bintang
O = posisi pusat galaksi

Vektor kecepatan radial (**bergaris merah**)
$\vec{v}_r = \vec{v}_\rho - \vec{v}_{\rho\odot}$

b. Tentukan kecepatan sudut bintang mengelilingi pusat galaksi dalam satuan km/detik/kpc

solusi:

- Dari soal (a)

  $v_r = v_\rho - v_{\rho\odot} = v\cos\alpha - v_\odot \sin\ell$ (1)

- Dari $\Delta O\odot S$, didapat: $\cos\alpha = \frac{R_\odot}{R}\sin\ell$

- Persamaan (1) dapat ditulis kembali:

  $v_r = v\frac{R_\odot}{R}\sin\ell - v_\odot\sin\ell = \omega R_\odot \sin\ell - v_\odot \sin\ell$

  $\omega = \frac{v_r + v_\odot \sin\ell}{R_\odot \sin\ell}$; $v_\odot = 230\ km/s$

  $\therefore \omega = 28{,}7\frac{km}{s}/kpc$

c. Tentukan jarak dari Matahari ke bintang tersebut dalam satuan kpc. Tentukan pula jarak bintang tersebut dari bidang galaksi dalam satuan pc

Solusi:

- Dari sketsa di soal (a), jarak minimum bintang yang mungkin dari pusat galakasi adalah $R_{min} = R_\odot \sin\ell = 4{,}88\ kpc$

- Maka dapat kita simpulkan jarak bintang tersebut dari pusat galaksi dalam rentang $4{,}88\ kpc \le R \le 8{,}5\ kpc$. Tetapi, mengingat objek yang diamati adalah bintang maka seharusnya jaraknya dekat dengan matahari karena bintang yg jauh jaraknya tidak akan teramati karena banyaknya absorbsi oleh MAB di piringan galaksi.

- Dari gambar (1) dan dari rentang jarak kita bisa tahu bahwa kecepatan bintang $v = (225 \pm 5) km/s$, maka:

  $R = \frac{v}{\omega}$; dan ketidakpastiannya $\Delta R = \frac{\Delta v}{\omega}$

- Jarak bintang dari pusat galaksi :

  $R \pm \Delta R = (7.84 \pm 0.17) kpc$

- Jarak bintang ke matahari (ρ) adalah

  $R^2 = R_\odot^2 + \rho^2 - 2R_\odot \rho \cos\ell$

  Karena jaraknya dekat dengan matahari

  $$\rho = \frac{2R_\odot \cos\ell - \sqrt{(2R_\odot\cos\ell)^2 - 4(R_\odot^2 - R^2)}}{2}$$

  $$\rho = R_\odot \cos\ell - \sqrt{(R_\odot \cos\ell)^2 - (R_\odot^2 - R^2)}$$

  $\rho = 0{,}823\ kpc \approx 0{,}82\ kpc$

Turunkan parsial untuk mendapatkan errornya

$\Delta\rho = \frac{R\Delta R}{\sqrt{(R_{\odot}\cos\ell)^2 - (R_{\odot}^2 - R^2)}}$ =0,217$\approx$ $0{,}22\ kpc$

∴Jarak bintang ke matahari adalah $(0{,}82 \pm 0.22)\ kpc$

- Jarak bintang dari bidang galaksi h

  $h = \rho \tan b$

  h =0,029 pc

  errronya:

  $\Delta h = \Delta\rho \tan b$

  $\Delta h = 0{,}008\ pc$

  ∴jarak bintang dari bidang galaksi adalah$(0{,}029 \pm 0{,}008)\ pc$

3. Efisiensi kuantum suatu detektor astronomi ialah perbandingan antara jumlah foton yang dideteksi terhadap jumlah foton yang diterima. Diketahui diameter bukaan mata saat gelap, waktu integrasi, dan efisiensi kuantum mata manusia masing-masing adalah 7 mm, 100 milidetik, dan 10%. Dengan kemampuan ini, limit magnitudo untuk mata manusia adalah 6 magnitudo. Tentukanlah limit magnitudo hasil fotografi dengan waktu integrasi 1 jam, menggunakan teleskop dengan diameter 1 meter dilengkapi emulsi fotografi dengan efisiensi kuantum 2% sebagai detektor. Asumsikan derau (noise) pengamatan dapat diabaikan.

   Solusi:

   - Jika kita mendefinisikan flux density yang terdeteksi sebagai f, maka:

   $f \propto \frac{\eta}{A\,t}$; η =kuantum efisiensi ; A =area ;t =waktu integrasi

   $$m_{limit} - m_{limit\ mata} = -2.5\log\left(\frac{f_{fotografi}}{f_{mata}}\right) = -2.5\log\left(\left[\frac{D_{mata}}{D_{teleskop}}\right]^2 \frac{t_{mata}}{t_{fotografi}} \frac{\eta_{detektor}}{\eta_{mata}}\right)$$

   $\therefore m_{limit}$ = 29,9 mag

4. Dalam sistem magnitude UBV, rumus Pogson untuk masing-masing magnitudo mengandung titik nol. Jika diketahui titik nol filter V ($\lambda = 5500$ Å, lebar pita = 1000 Å) adalah $c_v = -38{,}53$, tentukan daya total yang dikumpulkan sebuah teleskop dengan diameter 10 cm dari bintang dengan magnitudo visual $V = 3{,}0$ mag.

   Solusi:

   - Persamaan pogson

     $V = -2.5 \log f + c_v$ (1)
   - Titik nol

     $0 = -2.5 \log E_0 - 38{,}53$ (2)

     $E_0 = 10^{\left(-\frac{38{,}53}{2.5}\right)}\, watt/(m^2 Å)$

     $f_0 = E_0 \times \Delta\lambda = 10^{\left(-\frac{38{,}53}{2.5}\right)}\, watt/(m^2 Å) \times 1000$ Å (3)
   - Dari persamaan (1),(2), dan (3)

     $V = -2.5 \log \frac{f}{f_0}$

     $f = f_0 \times 10^{-\frac{V}{2.5}}$
   - Daya total yang dikumpulkan teleskop

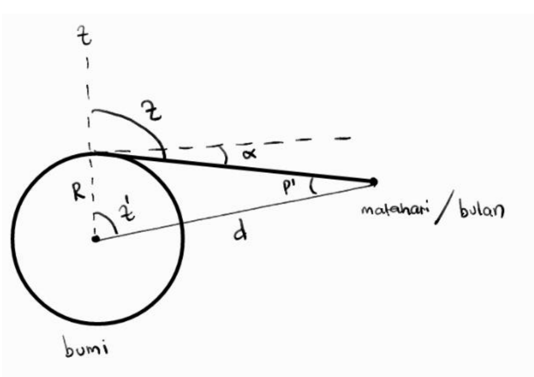
     $L = f \times Area = f \times \frac{\pi D^2}{4} = 1{,}91 \times 10^{-16}\, watt$

     $\therefore\ L = 1{,}91 \times 10^{-16}\, watt$

5. Diketahui rerata diameter sudut Bulan dan Matahari adalah 32’ dan sudut refraksi di atmosfer Bumi dekat horizon adalah 34’. Paralaks horizon untuk bulan adalah 57’ dan untuk matahari adalah 8”. Secara prinsip, jarak zenith untuk syarat terbenamnya Matahari, Bulan, dan bintang dapat ditentukan berdasarkan tiga besaran tersebut. Dengan merujuk pada kombinasi variasi posisi Bumi di perihelion dan aphelion serta variasi posisi Bulan di perigee dan apogee, hitunglah variasi nilai jarak zenith untuk syarat terbenamnya Matahari, Bulan, dan bintang.

   solusi:

   - variasi posisi Bumi di perihelion dan aphelion serta variasi posisi Bulan di perigee dan apogee berpengaruh besar terhadap diameter sudut keduanya, paralaks horizon juga terpengaruh tetapi kecil jadi kita dapat mengabaikannya
   - sketsa kombinasi ketiga efek:



- dari sketsa, dan jika p =paralaks horizon

$$\frac{\sin p'}{R} = \frac{\sin z}{d} \Rightarrow \sin p' = \frac{R \sin z}{d} = \sin p \sin z \qquad (1)$$
$$z = z' + p' \Rightarrow p' = z - z' = \Delta z$$
$$z = 90° + \propto \qquad ; \propto = \frac{\delta}{2} + \varphi \qquad ; \delta = diameter\ sudut \quad ; \varphi = sudut\ refraksi$$

- dari persamaan (1) bisa kita tuliskan variasi jarak zenith:
$$\sin \Delta z = \sin p \cos(\frac{\delta}{2} + \varphi)$$
$$\Delta z = \sin^{-1}\left[\sin p \cos(\frac{\delta}{2} + \varphi)\right]$$
- diameter sudut
$$\delta \propto \frac{1}{d} \Rightarrow \delta_p = \frac{\bar{d}}{d_p}\bar{\delta} \qquad ; \delta_a = \frac{\bar{d}}{d_a}\bar{\delta}$$
- variasi untuk kasus perihelion, $\delta_{perihelion} = \frac{\bar{d}}{d_{perihelion}}\bar{\delta} = \frac{1}{0.9832843}32'$
$$\therefore \Delta z_{perihelion} = (2.221984618 \times 10^{-3})°$$
- kasus aphelion dengan cara yang sama
$$\therefore \Delta z_{aphelion} = (2.221989646 \times 10^{-3})°$$
- kasus perigee
$$\therefore \Delta z_{perigee} = (0.9498946003)°$$
- kasus apogee
$$\therefore \Delta z_{apogee} = (0.9499029364)°$$
- kasus bintang, paralaks horizon bintang kecil sehingga
$$\therefore \Delta z_{bintang=}0$$

6. Sebuah elektron sinar kosmik bermassa m_e bergerak dengan kecepatan $v_e = 0{,}8\,c$ dan secara horizontal menumbuk partikel debu bermassa m_d di permukaan Bulan. Elektron kemudian melekat pada materi debu. Tentukan massa dan kecepatan debu setelah tumbukan. Apakah debu berpindah dari kedudukan semula? Asumsikan bahwa gesekan debu dengan permukaan Bulan diabaikan.
Solusi:
Karena elektron melekat pada partikel debu setelah tumbukan, maka energinya tidak kekal (ada yang terbuang). Jika $\eta = \frac{E_{akhir}}{E_{awal}}$

- persamaan energy
$$\gamma m_e c^2 + m_d c^2 = \eta\gamma'(m_d + m_e)c^2$$
$$\gamma m_e + m_d = \eta\gamma'(m_d + m_e)$$
$$m_d(\eta\gamma' - 1) = m_e(\gamma - \eta\gamma')$$
$$m_d = \frac{m_e(\gamma - \eta\gamma')}{(\eta\gamma' - 1)} \qquad (1)$$

- Kekekalan momentum
$$\gamma m_e v_e = \gamma'(m_e + m_d)v'$$
$$\frac{\gamma m_e v_e}{\gamma' v'} - m_e = m_d \qquad (2)$$

- Dari persamaan (1) dan (2) didapat:

$$\frac{\gamma v_e}{\gamma' v'} - 1 = \frac{(\gamma - \eta\gamma')}{(\eta\gamma' - 1)}$$

$$\frac{\frac{1}{\gamma'} v_e}{\frac{1}{\gamma} v'} - 1 = \frac{\left(\frac{1}{\gamma'} - \frac{\eta}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\eta}{\gamma} - \frac{1}{\gamma\gamma'}\right)}$$

$$\frac{\frac{1}{\gamma'} v_e}{v'} - \frac{1}{\gamma} = \frac{\left(\frac{1}{\gamma'} - \frac{\eta}{\gamma}\right)}{\left(\eta - \frac{1}{\gamma'}\right)}$$

$$\frac{\frac{\eta}{\gamma'} v_e}{v'} - \frac{\eta}{\gamma} - \frac{\frac{1}{\gamma'^2} v_e}{v'} + \frac{1}{\gamma\gamma'} = \left(\frac{1}{\gamma'} - \frac{\eta}{\gamma}\right)$$

$$\frac{\frac{\eta}{\gamma'} v_e}{v'} - \frac{\frac{1}{\gamma'^2} v_e}{v'} + \frac{1}{\gamma\gamma'} = \frac{1}{\gamma'}$$

$$\eta \frac{v_e}{v'} \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} - \frac{v_e}{v'}\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}$$

Sederhanakan menjadi:

$$\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}\left[\eta \frac{v_e}{v'} + \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}} - 1\right] + \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)\left[-\frac{v_e}{v'}\right] = 0 \qquad (3)$$

- Jika kita masukan $v_e = 0{,}8\ c$ dan kita nyatakan v' dalam c maka, persamaan (3) menjadi:

$$\sqrt{1 - v'^2}\left[\eta \frac{0{,}8}{v'} + 0{,}6 - 1\right] + (1 - v'^2)\left[-\frac{0{,}8}{v'}\right] = 0$$

- Kita iterasikan untuk mendapat nilai v', tetapi untuk mengiterasikan persamaan tersebut kita harus tau nilai dari η. Karena kita tidak tahu maka kita harus mengasumsikan nilai η sehingga jawaban v' akan bervariasi tergantung asumsi nilai η, maka saya tuliskan:

  $v' = x\ c$

  ∴kecepatan debu setelah tumbukan adalah $x\ c$

- Masukan kecepatan debu ke persamaan (1) didapat:

$$m_d = \frac{m_e(\gamma - \eta\gamma')}{(\eta\gamma' - 1)} = y\ kg$$

- Masukan kecepatan debu ke persamaan (2) didapat:

$$m_d = \frac{\gamma m_e v_e}{\gamma' v'} - m_e = y\ kg$$

(SOAL KURANG LENGKAP, MAKA JAWABAN AKHIR AKAN TERGANTUNG DARI ASUMSI BERAPA NILAI η)

7. Sebuah spektograf masa depan yang ditempatkan pada teleskop ruang angkasa memiliki resolusi spektral sebesar 10^8. Salah satu target ilmiah dari instrumen ini adalah pencarian eksoplanet yang seukuran dengan Bumi. Hitunglah berapa massa minimum bintang target, yang memiliki planet dengan massa, albedo, dan temperatur mirip Bumi pada daerah layak huni, yang dapat dideteksi oleh instrumen tersebut. Asumsikan hubungan massa dengan luminositas untuk bintang deret utama masa kecil adalah $L \sim M^4$.

Solusi:

- Temperatur planet (T_P) dapat dituliskan dalam persamaan:

  $$\frac{L}{4\pi d^2}\pi R_p^2 \times (1-A) = 4\pi R_p^2 \sigma T_P^4 \qquad (1)$$

- Karena temperatur dan albedo mirip bumi ($T_P = T_E\ dan\ A = A_E$), maka persamaan (1) dapat ditulis lagi :

  $$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{d}{d_E}\right)^2 = \left(\frac{m_s}{M_\odot}\right)^4 \qquad ; d_E = 1\ SA$$

  $$d = \left(\frac{m_s}{M_\odot}\right)^2 d_E \qquad (2)$$

- Resolusi spektral didefenisikan sebagai

  $$RS = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \qquad (3)$$

- Jika asumsi orbit bintang lingkaran, dengan $v_s = kecepatan\ bintang$, $v_p = kecepatan\ planet$,dan $d = d_p + d_s$ maka:

  $$m_p d_p = m_s d_s \qquad (4)$$

  $$v_s = \frac{2\pi d_s}{T} \qquad (5)$$

  $$\frac{d^3}{T^2} = \frac{G(m_p+m_s)}{4\pi^2} \qquad (6)$$

- Dari persamaan (4),(5),dan (6) didapat:

  $$v_s = \sqrt{\frac{Gm_p^2}{(m_s+m_p)d}} \qquad (7)$$

- Dari persamaan (3) dan (7), dimana $m_p = m_E$ =massa bumi

  $$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_s}{c} \Rightarrow v_s = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c = \sqrt{\frac{Gm_p^2}{(m_s+m_p)d}}$$

  $$d = \frac{Gm_p^2}{(m_s+m_p)}\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda c}\right)^2 = \frac{Gm_p^2}{(m_s+m_p)}\left(\frac{RS}{c}\right)^2 \qquad (8)$$

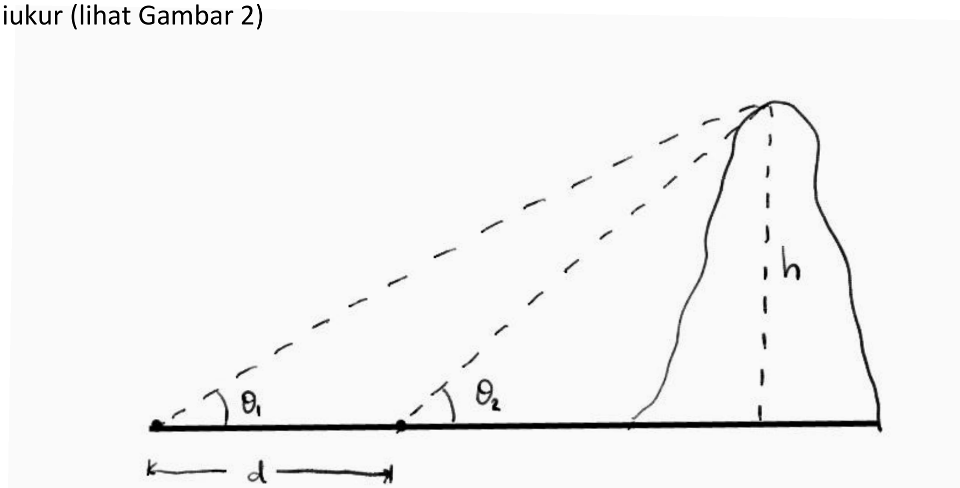
- Dari persamaan (2) dan (8) didapat :

  $$\left(\frac{m_s}{M_\odot}\right)^2 d_E = \frac{Gm_p^2}{(m_s+m_p)}\left(\frac{RS}{c}\right)^2 \approx \frac{Gm_p^2}{m_s}\left(\frac{RS}{c}\right)^2$$

  $$m_s = \left[\frac{Gm_p^2}{d_E}\ \left(\frac{RS}{c}\right)^2 M_\odot^2\right]^{\frac{1}{3}}$$

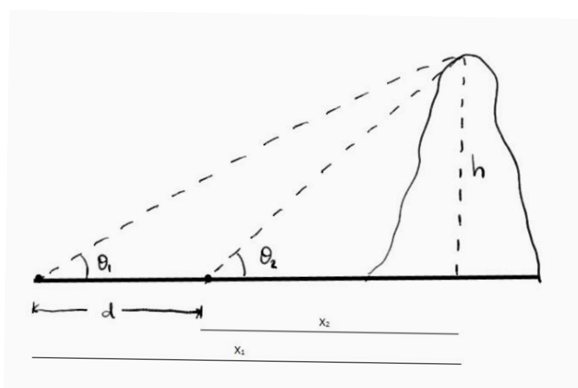
  $$\therefore m_s = 0.1\ M_\odot$$

8. Ilmuwan Persia yang bernama Abu Reyhan Al-Biruni (973-1048 CE) telah berhasil menghitung radius Bumi dengan cara yang berbeda dengan yang pernah dilakukan oleh matematikawan Yunani bernama Erastosthenes (276-194 BCE). Metode baru ini dinamakan sebagai metode Al-Biruni. Perhitungan radius Bumi dengan metode ini memerlukan puncak sebuah gunung dengan tinggi h, yang terisolir dan dikelilingi oleh bidang datar. Sudut θ_1 dan θ_2 pada titik-titik 1 dan 2 dari cakrawala ke puncak gunung diukur dengan alat kuadran. Jarak d antara titik 1 dan 2 juga diukur (lihat Gambar 2)



Gambar 2: Skema penentuan radius Bumi dengan metode Al-Biruni

a. Jelaskan cara menghitung tinggi gunung h dengan pengukuran menurut gambar di atas!
Solusi:



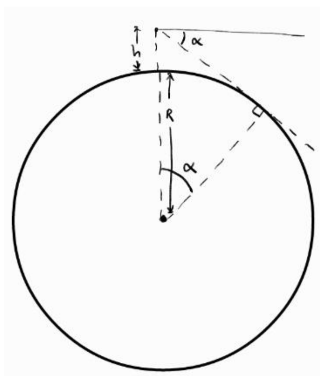
$$h = x_1 \tan\theta_1 \quad ; \quad h = x_2 \tan\theta_2$$

$$d = x_1 - x_2 = h\left(\frac{1}{\tan\theta_1} - \frac{1}{\tan\theta_2}\right)$$

$$\therefore h = \frac{d}{\left(\frac{1}{\tan\theta_1} - \frac{1}{\tan\theta_2}\right)}$$

b. Seorang pengamat memanjat puncak gunung dan mengukur sudut penurunan cakrawala α (besar sudut antara cakrawala pengamat di puncak gunung dengan cakrawala benar di permukaan Bumi). Saat dia berada di tepi pantai, arah cakrawala akan sama dengan arah pandangan mata lurus dengan dan badan tegak. Namun, bila dia berada di tempat tinggi, dia tidak hanya melihat lebih jauh, tapi juga arah cakrawala akan tampak turun dan berada di bawah arah pandangan mata tegak lurus badan. Semakin tinggi posisi pengamat, semakin turun arah cakrawala ini. Jelaskan metode Al Biruni dalam mengukur radius bumi setelah menghitung tinggi gunung h dan mengukur sudut penurunan cakrawala α. Buat sketsa geometri dari gunung, sudut penurunan cakrawala, dan radius Bumi.

Solusi :



- Dari sketsa di samping:

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h}$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = 1 + \frac{h}{R}$$

- Maka radius bumi adalah:

$$\therefore R = \frac{h}{\frac{1}{\cos\alpha} - 1}$$

c. Diketahui bahwa radius Bumi yang dihitung oleh Al-Biruni adalah 6336 km, yang hanya berbeda 35 km dari nilai modern. Faktor penting apa yang perlu diperhatikan agar didapat hasil pengukuran yang akurat?

Solusi:

Faktor penting yang perlu diperhatikan adalah koreksi refraksi atmosfer, besar kecilnya sudut cakrawala juga dipengaruhi oleh refraksi atmosfer selain oleh ketinggian pengamat.

9. Pada Gambar 3, elemen massa m berada pada jarak r dari pusat bintang berotasi, atau pada jarak $r \sin\theta$ dari sumbu rotasi. Total gaya yang bekerja pada m adalah

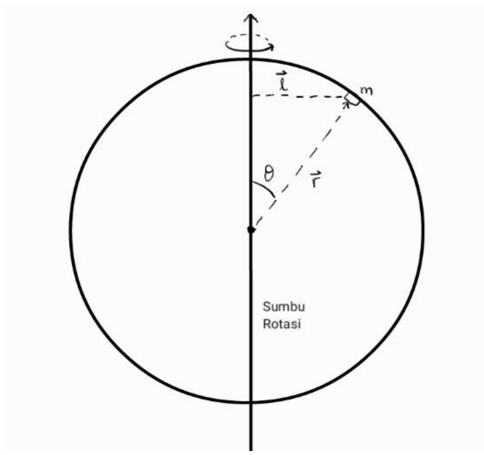
$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{F}_{Tekanan} + \boldsymbol{F}_{Gravitasi} = -m\omega^2\vec{\ell} \qquad (1)$$

Dengan ω dan $\vec{\ell}$ masing-masing adalah kecepatan sudut dan vektor jarak dari sumbu rotasi. Jika P adalah tekanan, komponen tekanan dapat dinyatakan

$$\boldsymbol{F}_{Tekanan} = -V\nabla P = -\frac{m}{\rho}\nabla P \qquad (2)$$

Dengan V dan ρ masing-masing adalah volume massa m dan rapat massa.



Gambar 3: Elemen massa m pada bintang berotasi

Untuk dua komponen gaya gerak,

$$\boldsymbol{F}_{Gravitasi} + m\omega^2\vec{\ell} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} + m\omega^2\vec{\ell} = -m\nabla\Psi \qquad (3)$$

Dengan Ψ adalah potensial gravitasi yang memenuhi

$$\Psi = -\frac{GM}{r_k} = konstan$$

Setelah integrasi, persamaan tersebut dapat dituliskan ringkas menjadi

$$-\frac{GM}{r_k} = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\theta$$

atau

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_k} - \frac{\omega^2 r^2 \sin^2\theta}{2GM} \qquad (4)$$

Persamaan (4) dapat dipandang ebagai persoalan akar dari persamaan fungsi

$$f(r) = \frac{r}{r_k} - \frac{\omega^2 r^3 \sin^2\theta}{2GM} - 1 = 0 \qquad (5)$$

Untuk wilayah ekuatorial ($\theta = 90°$), persamaan akar menjadi

$$f(r) = \frac{r}{r_k} - \frac{\omega^2 r^3}{2GM} - 1 = 0 \tag{6}$$

Atau

$$r = \frac{\omega^2 r^3 r_k}{2GM} + r_k \tag{7}$$

Secara komputasional, persamaan (7) dapat ditulis menjadi:

$$r_{i+1} = \frac{\omega^2 r_k}{2GM} r_i^3 + r_k \tag{8}$$

Berdasarkan persamaan-persamaan tersebut, solusi untuk r dapat diperoleh dengan mengerjakan perhitungan berulang (*iteratif*) dengan menggunakan algoritma sepuluh langkah di bawah ini hingga galat (*error,*∈) kurang dari nilai $\in_{stop}$ yang diberikan.(tanda← dibaca: "diisi dengan nilai")

a. Mulai
b. Galat pemberhentian (dalam persen): $\in_{stop} \leftarrow 0{,}2$
c. $i \leftarrow 0$
d. $r_i \leftarrow 0$
e. Hitung r_{i+1} dari persamaan (8)
f. Hitung galat (dalam persen): $\in \leftarrow 100 \times \left|\frac{r_{i+1} - r_i}{r_{i+1}}\right|$
g. $i \leftarrow i + 1$
h. $r_i \leftarrow r_{i+1}$
i. Bila $\in \geq \in_{stop}$ kembali ke (e)
j. selesai

kerjakanlah intruksi di algoritma tersebut dengan menggunakan nilai-nilai parameter berikut untuk bintang serupa matahari

$$T = 0{,}3\ hari = 25920\ detik$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 0{,}0002424068\ radian/detik$$
$$r_k = 695000\ km = 6{,}95 \times 10^8\ m$$

Solusi:

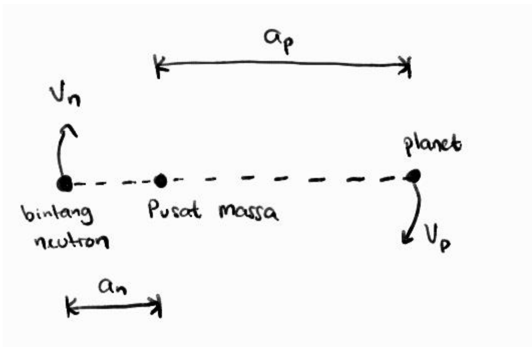
Dengan menggunakan persamaan (8), didapat data seperti di tabel:

i	r_i(meter)	r_{i+1}(meter)	∈(persen)
0	0	695000000	100
1	695000000	746614289.4	6.91
2	746614289.4	758988868.7	1.63
3	758988868.7	762223598.8	0.42
4	762223598.8	**763086766.7**	0.11

∴ nilai r menurut iterasi di atas adalah 763086766.7 meter

10. Pulsar PSR 1257+12 terdiri atas sebuah bintang neutron dan sebuah planet. Planet mengorbit lingkaran dekat bintang induk. Bintang neutron memancarkan pulsasi sinar-X setiap 0,062 detik, sedangkan planet mengorbit setiap 66,54 hari. Inklinasi orbit adalah 53°. Kecepatan orbital planet adalah 59 km/detik, dan untuk bintang neutron adalah $4{,}35 \times 10^{-4} km/detik$. Tentukan massa kedua objek tersebut.

Solusi :



- Dari gambar:

$v_n = \frac{2\pi a_n}{T}$; $v_p = \frac{2\pi a_p}{T}$ (1)

$(v_n + v_p) = \frac{2\pi(a_n + a_p)}{T} = \frac{2\pi a}{T}$ (2)

- Dari hukum keppler dan persamaan (2):

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_n+m_p)}{4\pi^2} = \frac{(v_n+v_p)^3 T}{8\pi^3}$$

$$(m_n + m_p) = \frac{(v_n+v_p)^3 T}{2\pi G} \quad (3)$$

Dengan mengingat $m_n a_n = m_p a_p$, maka dari persamaan (1) didapat $m_n v_n = m_p v_p$, sehingga:

$$m_n = \frac{v_p}{(v_p+v_n)}(m_p + m_n) = \frac{v_p}{(v_p+v_n)} \frac{(v_n+v_p)^3 T}{2\pi G}$$

$$m_n = \frac{v_p(v_n+v_p)^2 T}{2\pi G}$$

$$m_p = \frac{v_n(v_n+v_p)^2 T}{2\pi G}$$

Dengan memasukan $v_p = 59\ km/detik; v_n = 4{,}35 \times 10^{-4}\ km/detik;\ \ T = T_n = T_p =$66,54 hari, didapat:

$\therefore m_n = 2.82 \times 10^{30} kg$

$\therefore m_p = 2.08 \times 10^{25} kg$