Solusi Ronde Teori OSN Astronomi 2019

© Tim Olimpiade Astronomi Indonesia

20 Juli 2019

TOASTI

Tim Olimpiade Astronomi Indonesia

1. **[MIK]** Pada tahun 2018, pengamat di Observatorium Bosscha Lembang (koordinat $7^{\mathrm{j}}\ 10^{\mathrm{m}}$ Bujur Timur dan 6° 49' Lintang Selatan; 1300 m di atas permukaan laut) menyaksikan Bulan fase setengah dan bintang Alfa Centauri berada dekat ke meridian pengamat saat pagi hari sebelum Matahari terbit. Diketahui posisi bintang Alfa Centauri $\alpha(2000) = 14^{\mathrm{j}}\ 39^{\mathrm{m}}\ 36^{\mathrm{d}}{,}7$ dan $\delta(2000) = -60°\ 50'\ 02''$. Hitunglah berapa kali peristiwa semacam itu berlangsung pada abad 21 dan kapan (dalam tanggal, bulan, dan tahun) terjadinya peristiwa tersebut.

   Solusi:

   Siklus meton (19 tahun masehi) adalah siklus pengulangan posisi relatif bintang, Bulan, dan Matahari ke posisi yang sama. Kejadian pada soal akan terulang pada 19 tahun berikutnya, yaitu tahun 2037, 2056, 2075, dan 2094. Sehingga pada abad 21 kejadian tersebut terjadi 5 kali. Untuk menghitung nilai tepatnya, kita harus memperhitungkan ketinggian dan lintang pengamat. Tetapi dalam soal ini kita asumsikan dulu kejadian tersebut pada saat Matahari terbit atau $h_{sun} = 0$, sehingga

$$LST = HA_{sun} + RA_{sun} \tag{1}$$
$$\cos HA_{sun} = -\tan\delta_{sun}\tan\phi \tag{2}$$

   Dari transformasi koordinat ekuatorial dan ekliptika kita dapatkan

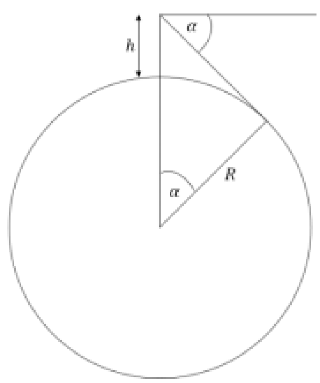
$$\tan\delta_{sun} = \tan 23{,}5°\sin RA_{sun} \tag{3}$$

   Dari 3 persamaan di atas dan mengingat Matahari di timur sehingga $HA_{sun} < 0$, maka

$$LST = -\cos^{-1}\left(-\tan 23{,}5°\sin RA_{sun}\tan\phi\right) + RA_{sun}$$
$$14^{\mathrm{j}}\ 39^{\mathrm{m}}\ 36^{\mathrm{d}}{,}7 = -\cos^{-1}\left(-\tan 23{,}5°\sin RA_{sun}\tan -6°\ 49'\right) + RA_{sun}$$

   Dengan iterasi didapat

$$RA_{sun} = 20^{\mathrm{j}}\ 48^{\mathrm{m}}\ 30^{\mathrm{d}}$$



   Jika pengamatan dilakukan sebelum Matahari terbit dan memperhitungkan refraksi juga ukuran Matahari maka, ketinggian Matahari harusnya

$$\begin{aligned} h_{sun} &\approx -\left|\alpha + 50'\right| \\ \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right) \\ &= 1°\ 9'\ 24'' \\ h_{sun} &\approx 2° \\ &\approx 8^{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

   Asensiorekta Matahari saat pengamatan adalah

$$RA_{sun} \approx 20^{\mathrm{j}}\ 56^{\mathrm{m}}$$

Untuk mencari tanggal yang bersesuaian dengan $RA_{sun} \approx 20^{\rm j}\ 56^{\rm m}$, ingatlah bahwa asensiorekta Matahari bertambah $\dfrac{\Delta RA_{sun}}{\Delta t} \approx 4^{\rm m}$/hari dan $RA_{sun} = 0$ pada tanggal 21 Maret. Maka waktu yang bersesuaian dengan $RA_{sun} \approx 20^{\rm j}\ 56^{\rm m}$ adalah Δt sebelum 21 Maret.

$$\Delta t = \frac{24^{\rm j} - 20^{\rm j}\ 56^{\rm m}}{4^{\rm m}/\text{hari}}$$
$$\boxed{\Delta t = 46 \text{ hari}}$$

Kejadian seperti disebutkan di soal terjadi pada 4 Februari 2018, 4 Februari 2037, 4 Februari 2056, 4 Februari 2075, dan 4 Februari 2094.

(Catatan: menurut referensi Stellarium kejadian tersebut terjadi pada 7 Februari 2018, 7 Februari 2037, 7 Februari 2056, 7 Februari 2075, dan 7 Februari 2094)

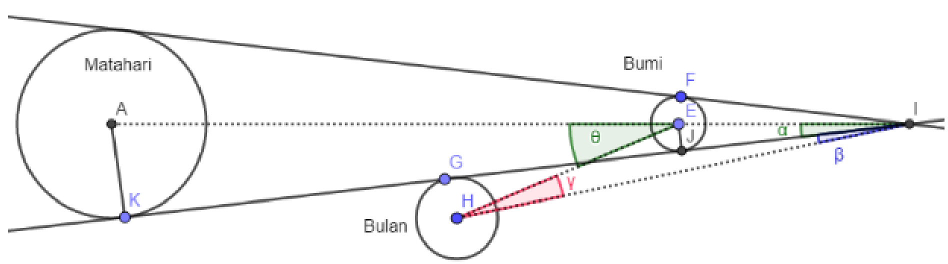
2. **[MAS]** Sepanjang tahun 2019, terdapat beberapa kali gerhana Matahari, misalnya gerhana Matahari total pada 2 Juli 2019 dan gerhana Matahari cincin pada 26 Desember 2019.

   a. Buktikan dengan perhitungan bahwa durasi total gerhana Matahari relatif singkat tidak melebihi 6 jam. Asumsikan orbit Bulan mengelilingi Bumi adalah berbentuk lingkaran dengan periode orbit sebesar 27 hari.

   b. Pada 26 Desember 2019, gerhana Matahari cincin akan dapat diamati di sebagian wilayah di Indonesia, misalnya di Tanjung Pinang. Jika pada saat puncak gerhana, pengamat di Tanjung Pinang dan pengamat lain di stasiun luar angkasa yang berada di lintang dan bujur yang sama sedang mengamati gerhana tersebut secara bersamaan di daerah umbra, hitunglah ukuran piringan Matahari yang tertutupi piringan Bulan (*coverage*) yang diamati oleh masing-masing pengamat. Diketahui pada saat gerhana tersebut jarak Bumi-Matahari dan jarak Bumi-Bulan masing-masing adalah 147128523 km dan 384241 km, dan ketinggian stasiun luar angkasa adalah 408 km di atas permukaan Bumi.

Solusi:

a. Asumsi yang dipakai Bulan mengitari Bumi berupa orbit lingkaran dengan periode orbit 27 hari. Durasi total gerhana matahari dimulai dari dimulainya gerhana parsial sampai selesainya gerhana parsial. Perhatikan skema berikut.



Jarak titik I ke Matahari bisa dicari dengan memanfaatkan kesebangunan segitiga AIK dan EIJ. Sebutlah jarak pusat Matahari ke titik I adalah r, jarak Bumi-Matahari d_M, radius Matahari R_M dan radius Bumi R, maka

$$\frac{r}{R_M} = \frac{r - d_M}{R}$$
$$r = \frac{R_M}{R_M - R} d_M$$
$$= 1{,}009 \text{ SA}$$

Sudut α dapat dicari dengan trigonometri sederhana

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{R_M}{r}\\ \alpha &= 15{,}847'\end{aligned}$$

Misalkan jarak HI adalah x dan radius Bulan R_B, maka hubungan sudut β

$$\sin\beta \approx \beta = \frac{R_B}{x}$$

Misalkan jarak Bumi-Bulan adalah d_B, perhatikan segitiga HEI, dengan hukum kosinus

$$d_B^2 = x^2 + (r - d_M)^2 - 2x\,(r - d_M)\cos(\alpha+\beta)$$

Dengan hubungan sebelumnya, maka

$$d_B^2 = \left(\frac{R_B}{\beta}\right)^2 + (r - d_M)^2 - \frac{2R_B}{\beta}(r - d_M)\cos(\alpha+\beta)$$

Persamaan di atas bisa diselesaikan secara numerik. Untuk pendekatan, karena $\alpha + \beta \ll 1$ rad, maka $\cos(\alpha+\beta) \approx 1$ sehingga

$$\begin{aligned}d_B^2 &= \frac{R_B^2}{\beta^2} + (r - d_M)^2 - \frac{2R_B}{\beta}(r - d_M)\\ 0 &= \left((r - d_M)^2 - d_B^2\right)\beta^2 - 2R_B\,(r - d_M)\,\beta + R_B^2\end{aligned}$$

Maka (ambil yang minus, ambil sudut yang lebih kecil, sudut yang besar jika segitanya lancip di E)

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{R_B\,(r - d_M) - \sqrt{R_B^2\,(r - d_M)^2 - R_B^2\left((r - d_M)^2 - d_B^2\right)}}{(r - d_M)^2 - d_B^2}\\ &= \frac{R_B\,(r - d_M - d_B)}{(r - d_M)^2 - d_B^2}\\ &= 3{,}379'\end{aligned}$$

Verifikasi nilai $\cos(\alpha+\beta) = 0{,}99998$, maka aproksimasi sangat valid.
Sudut γ bisa dicari menggunakan hukum sinus

$$\begin{aligned}\frac{\sin\gamma}{r - d_M} &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{d_B}\\ \gamma &= 1{,}153^\circ\end{aligned}$$

Dari hubungan segitiga, dengan mudah didapatkan

$$\begin{aligned}\theta &= \alpha + \beta + \gamma\\ &= 1{,}474^\circ\end{aligned}$$

Dengan merelatifkan gerak Bulan terhadap Matahari, maka kecepatan sudut Bulan menjadi

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{sid}} - \frac{2\pi}{T_{bumi}}$$

Sehingga total waktu gerhana Matahari

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{2\theta}{\omega}\\ &= \frac{1{,}474^\circ}{\dfrac{180^\circ}{27\text{ hari}} - \dfrac{180^\circ}{365{,}2422\text{ hari}}}\\ &\boxed{\Delta t = 5{,}7\text{ jam}}\end{aligned}$$

b. Radius sudut Matahari dilihat dari dua pengamat tidak akan signifikan berubah karena Matahari jauh lebih jauh dibandingkan selisih jarak dua pengamat. Maka diameter sudut Matahari

$$\begin{aligned}\theta_M &= \frac{R_M}{d_M} \\ &= 16{,}262'\end{aligned}$$

Sedangkan, radius sudut Bulan akan berubah cukup signifikan dilihat oleh dua pengamat tersebut. Misalkan pengamat di Bumi melihat Bulan dengan radius sudut θ_1 dan pengamat di satelit melihat Bulan dengan radius sudut θ_2, maka

$$\begin{aligned}\theta_1 &\approx \frac{R_B}{d_B - R} \\ &= 15{,}812' \\ \theta_2 &\approx \frac{R_B}{d_B - R - h} \\ &= 15{,}829'\end{aligned}$$

Maka fraksi piringan yang matahari yang tertutupi oleh bulan dari dua pengamat, $f_{1,2}$ adalah

$$\begin{aligned}f_1 &= \left(\frac{\theta_1}{\theta_M}\right)^2 \\ &\boxed{f_1 = 94{,}542\%} \\ f_2 &= \left(\frac{\theta_2}{\theta_M}\right)^2 \\ &\boxed{f_2 = 94{,}745\%}\end{aligned}$$

3. **[RAN]** Dalam suatu awan debu antarbintang yang seragam, terdapat dua bintang yang letaknya saling berdekatan namun memiliki jarak yang berbeda terhadap pengamat. Dari pengamatan diperoleh magnitudo bintang pertama dan kedua dalam pita B masing-masing adalah 13 dan 19, serta dalam pita V masing-masing adalah 11 dan 16. Kedua bintang dianggap memiliki parameter fisis yang sama. Pengamat dan kedua bintang tersebut juga dianggap berada pada awan debu antarbintang yang sama.

   a. Hitunglah perbandingan jarak kedua bintang terhadap pengamat. Dalam soal ini, kamu harus menggunakan hubungan ekstingsi dari debu antarbintang sebanding dengan $(\lambda)^{-1}$, λ adalah panjang gelombang. Sebagai petunjuk: ekstingsi total (dalam satuan magnitudo) dapat didekati dengan $2{,}5\,(\log e)\,\kappa_\lambda d$ jika dianggap opasitas konstan (κ_λ adalah koefisien absorpsi, d adalah jarak) serta panjang gelombang efektif pita B adalah 4400 Å dan pita V adalah 5500 Å.

   b. Hitung pula perbandingan jarak kedua bintang terhadap pengamat, jika ekstingsi diabaikan.

   Solusi:

   a. Di soal, diketahui bahwa ekstingsi berbanding terbalik dengan panjang gelombang.

$$\begin{aligned}A_\lambda &\propto \frac{1}{\lambda} \\ \frac{A_B}{A_V} &= \frac{\lambda_V}{\lambda_B} \\ &= \frac{5500\,\text{Å}}{4400\,\text{Å}} \\ A_B &= 1{,}25 A_V \qquad (4)\end{aligned}$$

Rumus Pogson untuk cahaya bintang terekstingsi adalah

$$V - M_V = -5 + 5\log d + A_V \tag{5}$$
$$B - M_B = -5 + 5\log d + A_B \tag{6}$$

Dari persamaan (5) dan (6), didapat

$$V_1 - V_2 = 5\log\frac{d_1}{d_2} + A_{V,1} - A_{V,2} \tag{7}$$
$$B_1 - B_2 = 5\log\frac{d_1}{d_2} + 1{,}25\,(A_{V,1} - A_{V,2}) \tag{8}$$

Dari persamaan (7) dan (8), didapat

$$1{,}25\,(V_1 - V_2) = 6{,}25\log\frac{d_1}{d_2} + 1{,}25\,(A_{V,1} - A_{V,2}) \tag{9}$$
$$B_1 - B_2 = 5\log\frac{d_1}{d_2} + 1{,}25\,(A_{V,1} - A_{V,2}) \tag{10}$$

Kurangkan (10) dari (9), didapat

$$\begin{aligned} 1{,}25\log\frac{d_1}{d_2} &= 1{,}25\,(V_1 - V_2) - (B_1 - B_2) \\ &= 1{,}25\,(11 - 16) - (13 - 19) \\ \boxed{\frac{d_1}{d_2} = 0{,}63} \end{aligned}$$

b. Jika ekstingsi diabaikan, rumus Pogson menjadi

$$V_1 - V_2 = 5\log\frac{d_1}{d_2}$$
$$B_1 - B_2 = 5\log\frac{d_1}{d_2}$$

Jika menggunakan magnitudo visual, didapat perbandingan jarak

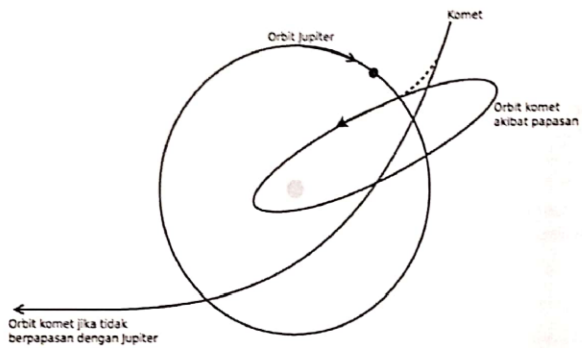
$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = 0{,}1}$$

Sementara itu, jika menggunakan magnitudo biru, didapat perbandingan jarak

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} = 0{,}063}$$

4. **[MIK]** Sebuah komet dari Sabuk Kuiper mendekat ke Matahari dengan orbit hiperbolik. Komet tertangkap akibat berpapasan dengan planet Jupiter, yang mengorbit Matahari searah jarum jam dengan orbit lingkaran (lihat Gambar 1). Komet yang tertangkap Matahari, selanjutnya mengorbit elips. Jupiter mengurangi energi total per satuan massa komet sebesar $\Delta E = 0{,}3950\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$ dari yang semula sebesar $E_{total} = 0{,}1690\,\mathrm{J\,kg^{-1}}$. Papasan ini juga mengurangi momentum sudut komet per massa sebesar $\Delta\Omega = 0{,}4370\,\mathrm{m^2/s/kg}$ dari yang semula sebesar $\Omega = 1{,}4610\,\mathrm{m^2/s/kg}$.

   a. Tentukan nilai energi total dan momentum sudut komet setelah papasan.
   b. Tentukan besar periode (P) dalam tahun, setengah sumbu panjang (a) dalam satuan astronomi (sa), dan eksentrisitas (e) komet, setelah tertangkap.
   c. Sebutkan klasifikasi komet ini dan alasannya.



Gambar 1: Ilustrasi papasan komet dengan Jupiter

Solusi:

a. Energi total per satuan massa komet setelah papasan adalah

$$\begin{aligned} E_{total,f} &= E_{total} - \Delta E \\ &= 0{,}1690\,\mathrm{J\,kg^{-1}} - 0{,}3950\,\mathrm{J\,kg^{-1}} \\ \boxed{E_{total,f} = -0{,}2260\,\mathrm{J\,kg^{-1}}} \end{aligned}$$

Momentum sudut per satuan massa komet setelah papasan adalah

$$\begin{aligned} \Omega_f &= \Omega - \Delta\Omega \\ &= 1{,}4610\,\mathrm{m^2/s/kg} - 0{,}4370\,\mathrm{m^2/s/kg} \\ \boxed{\Omega_f = 1{,}0240\,\mathrm{m^2/s/kg}} \end{aligned}$$

b. Energi total per satuan massa untuk orbit elips dinyatakan dengan

$$E_{total} = -\frac{GM_\odot}{2a}$$

Setengah sumbu panjang orbit komet dapat dicari dengan

$$\begin{aligned} a &= -\frac{GM_\odot}{2E_{total,f}} \\ &= -\frac{6{,}672\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}\times1{,}989\times10^{30}\,\mathrm{kg}}{2\times\left(-0{,}2260\,\mathrm{J\,kg^{-1}}\right)} \\ &= 2{,}936\times10^{20}\,\mathrm{m} \\ \boxed{a = 1{,}96\times10^{9}\ \mathrm{au}} \end{aligned}$$

Periode orbit komet dapat dicari dengan

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{a^3} \\ &= \sqrt{\left(1{,}96\times10^{9}\ \mathrm{au}\right)^3} \\ \boxed{P = 8{,}69\times10^{13}\ \mathrm{tahun}} \end{aligned}$$

Momentum sudut per satuan massa komet dapat dinyatakan dengan

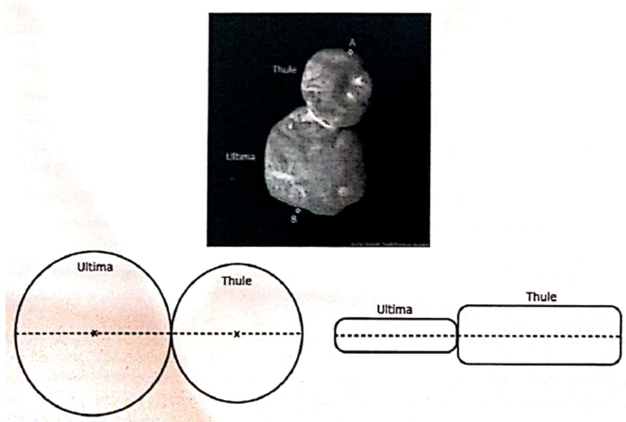
$$\Omega = \sqrt{GM_\odot a\left(1-e^2\right)}$$

Eksentrisitas orbit komet dapat dicari dengan

$$
\begin{aligned}
e &= \sqrt{1 - \frac{\Omega_f^2}{GM_\odot a}} \\
&= \sqrt{1 - \frac{\left(1{,}0240\,\mathrm{m^2/s/kg}\right)^2}{6{,}672 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2} \times 1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg} \times 2{,}936 \times 10^{20}\,\mathrm{m}}} \\
&\boxed{e \approx 1}
\end{aligned}
$$

c. **Komet ini adalah komet berekor panjang yang periodik. Berekor panjang karena periodenya yang sangat panjang sehingga komet ini akan melewati daerah gas dingin yang dapat membuat lapisan es.**

5. [**HAI**] Asteroid Ultima-Thule adalah anggota dari asteroid di sabuk Kuiper, yang terdiri atas objek-objek batuan dan es di bagian luar Tata Surya. Pada Januari 2019, wahana tanpa awak New Horizon milik NASA mengamati dari dekat objek ini dan mengirimkan berbagai citra yang diperoleh ke Bumi. Citra menunjukkan bahwa asteroid tersebut terdiri dari dua benda yang bergabung yaitu Ultima, dengan diameter 19,5 km, dan Thule, dengan diameter 14,2 km (lihat Gambar 2). Setelah diamati, ternyata keduanya berbentuk dua buah silinder pipih dengan ketebalan 5 km untuk Ultima dan 8 km untuk Thule. Anggaplah asteroid tidak berotasi dan kedua komponennya memiliki rapat massa sebanding dengan rapat massa air.



Gambar 2: Asteroid Ultima-Thule

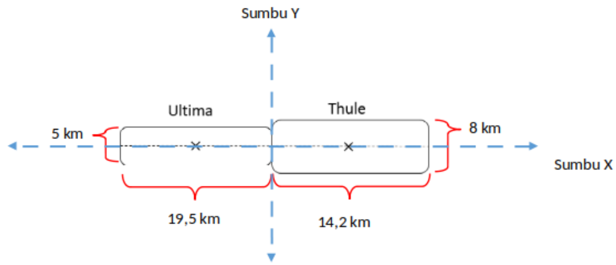
a. Hitunglah titik pusat massa asteroid Ultima-Thule.
b. Sebuah wahana bermassa 120 kg akan didaratkan di titik A. Hitunglah berat wahana tersebut di titik A. Hitung pula berat wahana di titik B.
c. Wahana tersebut diberikan roket untuk mendarat dan meninggalkan asteroid. Hitunglah kecepatan minimum agar roket dapat meninggalkan asteroid di pusat massanya.

Solusi:

a. Titik massa sebuah objek gabungan dapat dihitung menggunakan persamaan berikut.

$$x_{gabungan} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_i x_i}{m_1 + m_2 + \ldots m_i}$$

x_i adalah pusat massa objek i terhadap sumbu x dan m_i adalah massa objek i.
Persamaan tersebut berlaku untuk mencari pusat massa di masing-masing sumbu x, y, maupun z. Dalam peyelesaian soal ini, anggap titik (0,0) berada pada tempat bersinggungannya Ultima dan Thule.



Massa dari masing-masing asteroid dapat dihitung dengan cara mengalikan volume dengan densitas dari air. Apabila kita anggap densitas air sebesar $1000\,\mathrm{kg/m^3}$, maka
Massa Ultima:

$$\begin{aligned} m_1 &= \rho V_1 \\ &= \rho \frac{\pi}{4} d_1^2 h_1 \\ &= 1000\,\mathrm{kg/m^3} \times \frac{\pi}{4} \times \left(19{,}5 \times 10^3\,\mathrm{m}\right)^2 \times 5 \times 10^3\,\mathrm{m} \\ &= 1{,}4938 \times 10^{15}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Massa Thule:

$$\begin{aligned} m_2 &= \rho V_2 \\ &= \rho \frac{\pi}{4} d_2^2 h_2 \\ &= 1000\,\mathrm{kg/m^3} \times \frac{\pi}{4} \times \left(14{,}2 \times 10^3\,\mathrm{m}\right)^2 \times 8 \times 10^3\,\mathrm{m} \\ &= 1{,}2675 \times 10^{15}\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Kemudian titik pusat massa gabungan dihitung dengan
Sumbu x:

$$\begin{aligned} x_{gabungan} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{1{,}4938 \times 10^{15}\,\mathrm{kg} \times \left(\frac{-19{,}5\,\mathrm{km}}{2}\right) + 1{,}2675 \times 10^{15}\,\mathrm{kg} \times \frac{14{,}2\,\mathrm{km}}{2}}{1{,}4938 \times 10^{15}\,\mathrm{kg} + 1{,}2675 \times 10^{15}\,\mathrm{kg}} \\ \Aboxed{x_{gabungan} &= -2{,}0155\,\mathrm{km}} \end{aligned}$$

Sumbu y:

$$y_{gabungan} = 0\,\mathrm{km}$$

karena nilai y masing-masing asteroid adalah 0.
Sumbu z:

$$z_{gabungan} = 0\,\mathrm{km}$$

karena masing-masing asteroid sejajar pusat lingkaran.

b. **[Cara yang menggiurkan, namun salah secara teoritis]**
Titik A berada pada ujung Thule dan titik B berada pada ujung Ultima. Keduanya berada pada garis sumbu, maka gaya di tiap titik adalah

Titik A:

$$\begin{aligned}F_{g,A} &= \frac{GM_{asteroid}m_{wahana}}{(d_1+x)^2}\\ &= \frac{6{,}672\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}\times\left(1{,}4938\times10^{15}\,\mathrm{kg}+1{,}2675\times10^{15}\,\mathrm{kg}\right)\times120\,\mathrm{kg}}{\left(19{,}5\times10^3\,\mathrm{m}-2{,}0155\times10^3\,\mathrm{m}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{F_{g,A} = 0{,}0723\,\mathrm{N}}$$

Titik B:

$$\begin{aligned}F_{g,B} &= \frac{GM_{asteroid}m_{wahana}}{(d_2-x)^2}\\ &= \frac{6{,}672\times10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}\times\left(1{,}4938\times10^{15}\,\mathrm{kg}+1{,}2675\times10^{15}\,\mathrm{kg}\right)\times120\,\mathrm{kg}}{\left(14{,}2\times10^3\,\mathrm{m}+2{,}0155\times10^3\,\mathrm{m}\right)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{F_{g,B} = 0{,}0841\,\mathrm{N}}$$

[Cara yang benar, namun bukan kapasitas 'SMA']

Medan gravitasi pada arah x sebuah elemen massa dari objek berbentuk silinder di sumbu x diberikan oleh persamaan

$$dg_x = \frac{G}{x^2+r^2}\;dm\cos\phi$$

dengan r adalah posisi arah radial dari sumbu x elemen massa dan ϕ adalah sudut yang dibentuk sumbu x dengan vektor elemen massa ke titik acuan. Maka, medan gravitasi totalnya (medan gravitasi arah y dan z saling meniadakan karena objek simetri silinder)

$$\begin{aligned}g_x &= \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_{x_1}^{x_2}\frac{G}{x^2+r^2}\;\rho\;dx\;r\;d\theta\;dr\cos\phi\\ &= \int_0^R\int_{x_1}^{x_2}\frac{2\pi G}{x^2+r^2}\;\rho\;dx\;r\;dr\cos\phi\end{aligned}$$

Setelah berbagai substitusi (detilnya bisa cari sendiri, tinggal integralkan)

$$g_x = 2\pi\rho G\left(\left(x_2-\sqrt{x_2^2+R^2}\right)-\left(x_1-\sqrt{x_1^2+R^2}\right)\right)$$

Untuk titik A (U untuk ultima, T untuk Thule)

$$F_A = m\left(g_x^U+g_x^T\right)$$

$$g_x^U = 2\pi\rho G\times\left(\left(14\,200\,\mathrm{m}-\sqrt{(14\,200\,\mathrm{m})^2+(4000\,\mathrm{m})^2}\right)+4000\,\mathrm{m}\right)$$

$$g_x^T = 2\pi\rho G\times\left(\left(33\,700\,\mathrm{m}-\sqrt{(33\,700\,\mathrm{m})^2+(2500\,\mathrm{m})^2}\right)-\left(14\,200\,\mathrm{m}-\sqrt{(14\,200\,\mathrm{m})^2+(2500\,\mathrm{m})^2}\right)\right)$$

$$\boxed{F_A = 0{,}18\,\mathrm{N}}$$

Untuk titik B

$$F_B = m\left(g_x^U+g_x^T\right)$$

$$g_x^U = 2\pi\rho G\times\left(\left(19\,500\,\mathrm{m}-\sqrt{(19\,500\,\mathrm{m})^2+(2500\,\mathrm{m})^2}\right)+2500\,\mathrm{m}\right)$$

$$g_x^T = 2\pi\rho G\times\left(\left(33\,700\,\mathrm{m}-\sqrt{(33\,700\,\mathrm{m})^2+(4000\,\mathrm{m})^2}\right)-\left(19\,500\,\mathrm{m}-\sqrt{(19\,500\,\mathrm{m})^2+(4000\,\mathrm{m})^2}\right)\right)$$

$$\boxed{F_B = 0{,}13\,\mathrm{N}}$$

c. Kecepatan lepas ditiap-tiap titik dapat dihitung menggunakan persamaan kecepatan lepas
[Cara 1, seperti di atas]
Titik A:

$$v_{escape,A} = \sqrt{\frac{2GM_{asteroid}}{d_1 + x_{gabungan}}}$$

$$\boxed{v_{escape,A} = 4{,}59\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

Titik B:

$$v_{escape,B} = \sqrt{\frac{2GM_{asteroid}}{d_2 - x_{gabungan}}}$$

$$\boxed{v_{escape,B} = 4{,}7662\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

[Cara 2, yang benar]
Energi postensial gravitasi objek berbentuk silinder dapat dihitung dengan persamaan

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\ dx$$

Ambil di tak hingga energi potensialnya menuju nol, sehingga

$$\Delta E_g = W = \int_{x_1}^{\infty} F\ dx$$
$$E_g = -\int_{x_1}^{\infty} F\ dx$$

Maka

$$\begin{aligned} E_g &= -\int_{x_1}^{\infty} 2\pi\rho Gm\ \left(\left((L+x) - \sqrt{(L+x)^2 + R^2}\right) - \left(x - \sqrt{x^2+R^2}\right)\right)\ dx \\ &= -2\pi\rho Gm\ \lim_{a\to\infty}\int_{a}^{x_1}\left(L - \left(\sqrt{(L+x)^2+R^2} - \sqrt{x^2+R^2}\right)\right)\ dx \\ &= \pi\rho Gm\ \left(L^2 + 2Lx_1 - \left(x_2\sqrt{x_2^2+R^2} - x_1\sqrt{x_1^2+R^2} + R^2\ln\left(\frac{x_2+\sqrt{x_2^2+R^2}}{x_1+\sqrt{x_1^2+R^2}}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

dengan $L = x_2 - x_1$
Agar massa lepas, maka energi kinetiknya harus sama besar dengan energi potensialnya, sehingga

$$E_K + E_g = 0$$
$$\frac{1}{2}mv_{escape}^2 = -E_g$$
$$v_{escape} = \sqrt{\frac{-2E_g}{m}}$$
$$\boxed{v_{escape,A} = 4{,}34\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$
$$\boxed{v_{escape,B} = 3{,}49\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

6. **[VG]** Tabel di bawah ini menunjukkan data dua sistem bintang ganda ϵ_1 Lyr dan ϵ_2 Lyr. Kedua sistem tersebut terpisah dengan separasi sudut 208" dan membentuk satu sistem bintang majemuk, ϵ Lyr, yang berada pada koordinat $\alpha(2000) = 18^{\mathrm{j}}\ 44^{\mathrm{m}}\ 21^{\mathrm{d}}$ dan $\delta(2000) = +39°\ 38'\ 00"$, serta memiliki magnitudo visual sebesar 3,9.

	ϵ_1 Lyr	ϵ_2 Lyr
(α(2000), δ(2000))	($18^{\mathrm{j}}\ 44^{\mathrm{m}},3$, $+39°\ 40'$)	-
Magnitudo visual bintang ganda	+5,0 (primer)	+5,2 (primer)
	+6,1 (sekunder)	+5,5 (sekunder)
Kelas spektrum	A3	A5
Periode orbit bintang ganda (tahun)	1200	580
Separasi sudut bintang primer-sekunder (detik busur)	2,2	2,8

Sistem bintang ϵ Lyr diamati menggunakan teleskop dengan diameter 90 mm dan perbandingan fokus $f_0/D_0 = 5$, serta sejumlah lensa okuler (*eyepiece*) berukuran 25 mm, 15 mm, 9 mm, dan 4 mm. Medan pandang (*apparent Field of View*) dari *eyepiece* (tanpa teleskop) $FOV_e = 52°$.

a. Hitunglah magnitudo visual untuk ϵ_1 Lyr, ϵ_2 Lyr, dan ϵ Lyr.
b. Bila langit malam cerah, dengan *seeing* 1", dapatkah pengamat melihat empat buah bintang dalam satu medan pandang dengan menggunakan teleskop dan *eyepiece* 25 mm?
c. Bila dipergunakan perbesaran maksimum, apakah empat buah bintang tersebut masih terlihat dalam satu medan pandang teleskop? Buktikan.
d. Hitung panjang fokus *eyepiece* bila perbesaran mencapai maksimum.
e. Bila teleskop tersebut dipergunakan untuk mengamati asteroid, berapa magnitudo visual terlemah yang bisa diamati?
f. Bila teleskop dipergunakan untuk mengamati planet Jupiter, hitung perbandingan *surface brightness* untuk citra planet Jupiter pada kondisi perbesaran minimum dan maksimum.

Solusi:

a. Magnitudo total untuk bintang dapat diketahui dengan menjumlahkan fluks tiap bintang.
Magnitudo total untuk ϵ_1 Lyr: (Diketahui $m_{primer} = 5{,}0$ dan $m_{sekunder} = 6{,}1$)

$$\begin{aligned} m_{primer} - m_{sekunder} &= -2{,}5 \log \frac{E_{primer}}{E_{sekunder}} \\ 5{,}0 - 6{,}1 &= -2{,}5 \log \frac{E_{primer}}{E_{sekunder}} \\ \frac{E_{primer}}{E_{sekunder}} &= 10^{\frac{1,1}{2,5}} \\ &= 2{,}754 \end{aligned}$$

Jadi, nilai $E_{primer} = 2{,}754 E_{sekunder}$

$$\begin{aligned} m_{total} - m_{sekunder} &= -2{,}5 \log \frac{E_{primer} + Esekunder}{E_{sekunder}} \\ m_{total} &= m_{sekunder} - 2{,}5 \log \frac{2{,}754 E_{sekunder} + E_{sekunder}}{E_{sekunder}} \\ \boxed{m_{total} = m_{\epsilon_1} = 4{,}7} \end{aligned}$$

Cara yang sama digunakan untuk mendapatkan nilai magnitudo total untuk ϵ_2 Lyr dan ϵ Lyr sehingga nilai magnitudo ϵ_2 Lyr = **4,6** dari $m_{primer} = 5{,}2$ dan $m_{sekunder} = 5{,}5$. Yang terakhir didapatkan magnitudo ϵ Lyr = **3,9**.

b. Medan pandang teleskop:
Dengan angka *focal ratio* f_0/D_0 diketahui, bisa didapatkan panjang fokus objektif lalu didapat perbesaran dan akhirnya medan pandang teleskop dapat diketahui.

$$\begin{aligned} f_{ob} &= \frac{f_0}{D_0} \times D \\ &= 5 \times 90\,\mathrm{mm} \\ &= 450\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

Perbesaran:

$$\begin{aligned} M &= \frac{f_{ob}}{f_{ok}} \\ &= \frac{450\,\text{mm}}{25\,\text{mm}} \\ &= 18 \end{aligned}$$

FOV teleskop:

$$\begin{aligned} FOV &= \frac{FOV_e}{M} \\ &= \frac{52^\circ}{18} \\ &= 2{,}89^\circ = 10400\text{''} \end{aligned}$$

Separasi sudut bintang (208") < FOV teleskop (10400"). Maka **keempat bintang tersebut terlihat dalam medan pandang teleskop**.

c. Perbesaran maksimum dicapai saat panjang fokus lensa okuler paling pendek, yaitu 4 mm.

$$\begin{aligned} M &= \frac{f_{ob}}{f_{ok}} \\ &= \frac{450\,\text{mm}}{4\,\text{mm}} \\ &= 112{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FOV &= \frac{FOV_e}{M} \\ &= \frac{52^\circ}{112{,}5} \\ &= 0{,}46^\circ = 1664\text{''} \end{aligned}$$

Separasi sudut bintang (208") < FoV teleskop (1664"). Maka **keempat bintang tersebut masih terlihat dalam medan pandang teleskop**.

d. Jika panjang fokus okuler yang tersedia hanya ada pada soal, maka jawabannya seperti yang disebut pada soal nomor c, yaitu **4 mm**.

e. Dengan rumus *limiting magnitude*, asumsi m_{limit} mata = 6 dan diameter pupil = 7 mm. Diketahui diameter teleskop = 90 mm.

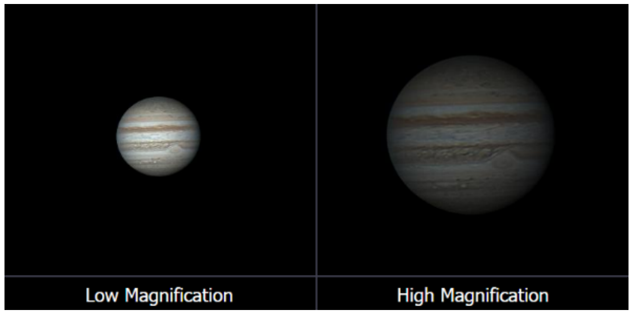
$$\begin{aligned} m_{limit} &= 6 + 5 \log \frac{D}{7\,\text{mm}} \\ &= 6 + 5 \log \frac{90\,\text{mm}}{7\,\text{mm}} \\ \end{aligned}$$

$$\boxed{m_{limit} = 11{,}55}$$

f. Sekadar penjelasan: semakin tinggi perbesaran teleskop, maka Jupiter semakin terlihat lebih besar di medan pandang. Artinya, luas relatif Jupiter terhadap medan pandang teleskop semakin besar namun magnitudonya tidak berubah. Ini ada perhitungannya juga.

Namun jika maksud soal adalah *surface brightness* dengan satuan mag/arcsec^2 maka tidak ada perubahan untuk perbesaran berapapun. Perbandingan *surface brightness* pada kondisi perbesaran minimum dan maksimum menjadi **1:1**.

7. **[RAN]** Akan ditinjau efek interaksi elektrostatis (atau interaksi Coulomb) antara berbagai ion dan elektron di dalam bintang. Unsur kimiawi gas E di dalam bintang dapat diberi notasi $_ZE^A$ dengan Z dan A masing-masing adalah nomor atom dan nomor massa. Kita bisa andaikan massa rata-rata partikel unsur E adalah $A\ m_u$ dan muatan rata-rata partikel unsur E adalah Ze. Anggaplah rapat massa gas adalah ρ dan rapat jumlah partikel adalah n.



a. Hitung jarak rata-rata antar partikel.
b. Formulasikan nisbah (rasio) energi Coulomb rata-rata per partikel terhadap energi kinetik rata-rata per partikel.
c. Dengan mengaitkan energi kinetik rata-rata partikel terhadap nilai total energi mekanik partikel, turunkan nilai pendekatan untuk temperatur rata-rata, lalu hitung contoh nilai nisbah di soal 7b untuk bintang.
d. Ambil kasus nilai nisbah yang jauh lebih besar dari 1. Berapakah contoh massa yang kamu ambil? Dalam kategori apakah objek tersebut?

Solusi:

a. Jika N adalah jumlah total partikel dalam suatu bola dengan radius r,

$$\begin{aligned} n &= \frac{N}{V} \\ &= \frac{3N}{4\pi r^3} \end{aligned}$$

Gunakan $N = 1$ untuk menentukan radius bola dengan 1 partikel di dalamnya, atau jarak rata-rata antar partikel.

$$n = \frac{3}{4\pi r^3}$$

$$\boxed{r = \sqrt[3]{4\pi n}}$$

b. Rumus untuk menghitung energi Coulomb adalah

$$E_C = \frac{K q_1 q_2}{r}$$

Memasukkan nilai muatan rata-rata partikel dari soal, dan nilai jarak rata-rata antar partikel dari poin a, didapat

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{K\left(Ze\right)^2}{r} \\ &= K\left(Ze\right)^2 \sqrt[3]{\frac{4\pi n}{3}} \end{aligned}$$

Rumus energi kinetik rata-rata per partikel adalah

$$E_K = \frac{3}{2} k_B T$$

Berdasarkan persamaan-persamaan di atas, rasio antara energi Coulomb dan energi kinetik rata-rata per partikel adalah

$$\boxed{\frac{E_C}{E_K} = \frac{2K\left(Ze\right)^2}{3k_B T} \sqrt[3]{\frac{4\pi n}{3}}}$$

c. Teorema virial menyatakan bahwa energi kinetik suatu objek sama dengan minus setengah kali energi potensial gravitasinya.

$$2E_K + E_P = 0$$

Energi kinetik total bintang sama dengan energi kinetik rata-rata per partikel dikalikan dengan jumlah total partikel.

$$E_K = \frac{3}{2} N_{total} k_B T$$

Untuk objek berbentuk bola dengan kerapatan seragam,

$$E_P = -\frac{3GM^2}{5R}$$

Tentukan persamaan untuk mencari temperatur bintang menggunakan ketiga persamaan di atas.

$$\begin{aligned} 2E_K + E_P = 2 \times \frac{3}{2} N_{total} k_B T + \left(-\frac{3GM^2}{5R}\right) &= 0 \\ N_{total} k_B T &= \frac{GM^2}{5R} \\ T &= \frac{GM^2}{5N_{total} k_B R} \end{aligned}$$

Jumlah total partikel sama dengan massa seluruh partikel dibagi dengan massa rata-rata partikel.

$$\begin{aligned} N_{total} &= \frac{M}{Am_u} \\ T &= \frac{GM^2 Am_u}{5Mk_B R} \\ &= \frac{GMAm_u}{5k_B R} \end{aligned}$$

Dari poin b,

$$\begin{aligned} \frac{E_C}{E_K} &= \frac{2K\left(Ze\right)^2}{3k_B T} \sqrt[3]{\frac{4\pi n}{3}} \\ &= \frac{2K\left(Ze\right)^2 5k_B R}{3k_B GMAm_u} \sqrt[3]{\frac{4\pi n}{3}} \end{aligned}$$

Untuk objek berbentuk bola sempurna,

$$\begin{aligned} M &= \rho V \\ &= \frac{4}{3}\pi \rho R^3 \\ R &= \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} \\ \frac{E_C}{E_K} &= \frac{10K\left(Ze\right)^2}{3GMAm_u} \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho} \times \frac{4\pi n}{3}} \\ &= \frac{10K\left(Ze\right)^2}{3GM^{2/3}Am_u} \sqrt[3]{\frac{n}{\rho}} \end{aligned}$$

Rapat massa gas sama dengan rapat jumlah partikel dikalikan dengan massa rata-rata partikel.

$$\begin{aligned} \rho &= nAm_u \\ \frac{E_C}{E_K} &= \frac{10K\left(Ze\right)^2}{3GM^{2/3}Am_u} \sqrt[3]{\frac{1}{Am_u}} \\ &= \frac{10K\left(Ze\right)^2}{3GM^{2/3}\left(Am_u\right)^{4/3}} \end{aligned}$$

Di solusi ini, bintang yang digunakan untuk perhitungan contoh rasio adalah sebuah bintang bermassa sama dengan Matahari yang sepenuhnya tersusun dari hidrogen.

$$\frac{E_C}{E_K} = \frac{10K \times \left(1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\right)^2}{3G \times \left(1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}\right)^{2/3} \times \left(1{,}6735 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\right)^{4/3}}$$

$$\boxed{\frac{E_C}{E_K} = 0{,}04}$$

d. Dari soal, diketahui rasio antara energi Coulomb dan energi kinetik jauh lebih besar dari 1.

$$\begin{aligned}
\frac{E_C}{E_K} &\gg 1 \\
\frac{10K\,(Ze)^2}{3GM^{2/3}\,(Am_u)^{4/3}} &\gg 1 \\
\frac{10K\,(Ze)^2}{3G\,(Am_u)^{4/3}} &\gg M^{2/3} \\
\left(\frac{10K}{3G}\right)^{3/2} \frac{(Ze)^3}{(Am_u)^2} &\gg M \\
1{,}42 \times 10^{28}\,\mathrm{kg} \times \frac{Z^3}{A^2} &\gg M \\
\frac{Z^3}{A^2} &\gg \frac{M}{1{,}42 \times 10^{28}\,\mathrm{kg}}
\end{aligned}$$

Di solusi ini, contoh massa yang digunakan adalah 0,1 massa Matahari.

$$\frac{Z^3}{A^2} \gg \frac{0{,}1 \times 1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}{1{,}42 \times 10^{28}\,\mathrm{kg}}$$

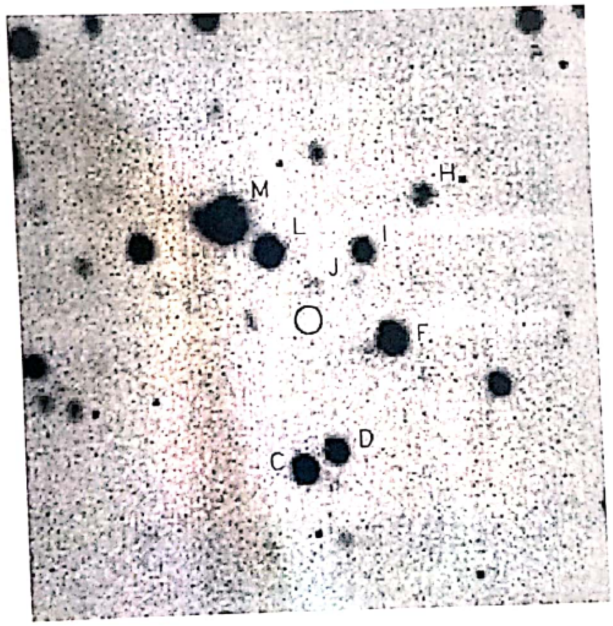
Untuk unsur-unsur yang lebih berat dari helium, A mendekati $2\,(Z+1)$.

$$\begin{aligned}
\frac{Z^3}{4\,(Z+1)^2} &\gg \frac{0{,}1 \times 1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}{1{,}42 \times 10^{28}\,\mathrm{kg}} \\
\frac{Z^3}{(Z+1)^2} &\gg 56{,}03 \\
Z^3 &\gg 56{,}03Z^2 + 112{,}06Z + 56{,}03 \\
&\boxed{Z \gg 58}
\end{aligned}$$

Objek ini adalah suatu objek bermassa rendah yang tersusun dari unsur yang sangat berat ($Z \gg 58$).

8. **[GS]** Pada tahun 1933, keberadaan bintang neutron diperkirakan oleh Walter Baade dan Frits Zwicky. Mereka berteori bahwa bintang neutron merupakan hasil dari supernova yang dipicu oleh keruntuhan gravitasi bintang bermassa besar. Lebih dari tiga dekade setelahnya, bintang neutron pertama yang menjadi jantung dari *Crab nebula* ditemukan dengan teleskop radio oleh Anthony Hewish dan Samuel Okoye. Penemuan terus dilakukan dan, hingga kini, sekitar 2000 bintang neutron telah ditemukan. Banyak di antaranya teramati sebagai pulsar (*pulsating radio source*) atau bagian dari bintang ganda.

   Pada tahun 1996, Frederick Walter dkk melaporkan penemuan bintang neutron tunggal tanpa pulsasi radio. Objek 'X' ini tampak terang pada jendela sinar-X, tetapi hampir tidak tampak pada jendela visual.



Gambar 3: Potret langit di sekitar bintang neutron (ditandai dengan lingkaran), diambil pada jendela visual dengan teleskop CTIO 0,9 m. Sumber: Nature **379**, 233 (1996).

a. Penemuan objek X tersebut didasari oleh pengamatan pada jendela sinar-X dengan *High Resolution Image* (HRI) dari ROSAT. Berdasarkan analisis fotometri yang telah dilakukan, diperoleh bahwa HRI menerima rata-rata 56 foton dalam 100 detik dari objek X. Energi rata-rata foton yang terdeteksi adalah sekitar 0,20 keV. Bila diketahui bahwa HRI memiliki bukaan dengan diameter 2,7 cm, hitung fluks sinar-X dari objek tersebut. Nyatakan dalam satuan erg cm^{-2} s^{-1}.
b. Menggunakan instrumen lain, yakni *Position Sensitive Proportional Counter* (PSPC), spektrum dari objek X dapat diketahui. Spektrum tersebut menyerupai spektrum benda hitam yang berpuncak pada energi 0,20 keV. Berapakah temperatur efektif dari objek X?
c. Bila objek X merupakan bintang neutron, maka fluks objek pada jendela visual (f_V) jauh lebih rendah dibandingkan fluks sinar-X (f_X). Berdasarkan Gambar 3, objek X tidak tampak pada jendela visual. Dengan kata lain, f_V tidak lebih dari fluks latar belakang. Diketahui bahwa langit latar belakang pada citra memiliki fluks yang setara dengan magnitudo visual $V = 23$ dan diketahui bahwa bintang Vega (magnitudo visual $V_0 = 0{,}2$) memiliki fluks 3×10^{-6} erg cm^{-2} s^{-1}.
d. Dari pengamatan pada jendela inframerah, terdapat indikasi bahwa objek X berada di depan awan molekul R CrA yang berjarak 120 pc dari Bumi. Berdasarkan fakta tersebut, serta hasil hitungan sebelumnya, perkirakan radius dari objek X. Nyatakan dalam satuan km.

Solusi:

a. Hitung terlebih dahulu berapa banyak energi yang diterima teleskop dengan cara mengkalikan energi rata-rata dengan jumlah foton. Kemudian bagi dengan luas teleskop dan waktu yang dibutuhkan. Sehingga didapatkan rumus sebagai berikut untuk menghitung fluks energi objek.

$$\begin{aligned} f &= \frac{E_{rata-rata} \times n_{foton}}{t \times A_{teleskop}} \\ &= \frac{0{,}2\,\text{keV} \times 56}{100\,\text{s} \times \pi \left(\dfrac{2{,}7\,\text{cm}}{2}\right)^2} \\ &= 0{,}019\,561\,\text{keV/cm}^2\text{/s} \end{aligned}$$

Ubah satuan agar sesuai dengan yang diminta di soal. Gunakan konversi berikut.

$$1\,\mathrm{keV} = 1{,}6 \times 10^{-9}\,\mathrm{erg}$$

Maka fluks dari objek tersebut adalah

$$\boxed{f = 3{,}13 \times 10^{-11}\,\mathrm{erg/cm^2/s}}$$

b. Gunakan rumus energi foton untuk mendapatkan panjang gelombang yang dipancarkan oleh objek. Diketahui energi puncaknya pada 0,2 keV.

$$\begin{aligned} E &= hf \\ &= h\frac{c}{\lambda} \\ \lambda &= h\frac{c}{E} \\ &= 6{,}6261 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \times \frac{2{,}99 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{0{,}2\,\mathrm{keV} \times 1{,}6 \times 10^{-16}\,\mathrm{J\,keV^{-1}}} \\ &= 6{,}21 \times 10^{-9}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Hubungkan dengan Hukum Wien untuk mendapatkan temperatur efektif dari objek.

$$\begin{aligned} T_{eff} &= \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}}{\lambda} \\ &= \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,K}}{6{,}21 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} \\ &\boxed{T_{eff} = 4{,}67 \times 10^{5}\,\mathrm{K}} \end{aligned}$$

c. Gunakan rumus Pogson untuk mendapatkan fluks pada jendela visual. Diasumsikan magnitudo visual objek sama dengan magnitudo langit latar belakang untuk mengapatkan batas bawah nilai fluks energi.

$$\begin{aligned} V_{0,Vega} - V_{0,x} &= -2{,}5 \log \frac{f_{V,0,Vega}}{f_V} \\ -0{,}2 - 23 &= -2{,}5 \log \frac{3 \times 10^{-6}\,\mathrm{erg/cm^2/s}}{f_V} \\ f_V &= 2{,}28 \times 10^{-15}\,\mathrm{erg/cm^2/s} \end{aligned}$$

Bandingkan fluks yang dihitung dengan fluks yang dihitung pada bagian a. Sehingga akan didapatkan hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{f_X}{f_V} &= \frac{3{,}13 \times 10^{-11}\,\mathrm{erg/cm^2/s}}{2{,}28 \times 10^{-15}\,\mathrm{erg/cm^2/s}} \\ &\boxed{\frac{f_X}{f_V} = 13728{,}07} \end{aligned}$$

d. Gunakan rumus fluks energi untuk mendapatkan jari-jari objek. Di sini kita mengasumsikan bahwa objek letaknya tidak jauh di depan awan molekul R CrA, sehingga jarak dari objek X ke pengamat di Bumi adalah 120 pc.

$$\begin{aligned} f_X &= \frac{\sigma A T_{eff}^4}{4\pi d^2} \\ 3{,}13 \times 10^{-14}\,\mathrm{J/m^2/s} &= \frac{\sigma \times 4\pi R^2 \times \left(4{,}67 \times 10^{5}\,\mathrm{K}\right)^4}{4\pi \times \left(120\,\mathrm{pc} \times 3{,}0857 \times 10^{16}\,\mathrm{m/pc}\right)^2} \\ &\boxed{R = 1{,}26 \times 10^{4}\,\mathrm{m}} \end{aligned}$$

9. **[MIK]** *Embedded Cluster* atau Gugus Terpendam adalah gugus bintang terbuka yang masih dikelilingi oleh awan molekul leluhurnya. Awan molekul yang rapat merupakan tempat pembentukan bintang. Bintang-bintang pada gugus tersebut lahir dari awan yang sama. Karena gas dan debu yang cukup rapat mengelilingi gugus tersebut, maka kita sulit sekali mengamati bintang-bintang anggota gugus dalam panjang gelombang visual. Untuk menembus lapisan debu yang menyerap cahaya visual kita memerlukan bagian lain dari spektrum elektromagnetik yaitu inframerah dekat dan sinar-X. Di Galaksi Bimasakti, Gugus Terpendam sebagian besar dapat ditemukan di bidang Galaksi tempat sebagian besar aktivitas pembentukan bintang sedang terjadi.

Gambar 4: *Embedded Cluster* atau Gugus Terpendam

Andaikan sebuah Gugus Terpendam dengan jejari 10 pc berada pada daerah pembentukan bintang yang aktif berjarak 1 kpc dari Matahari dan beranggotakan bintang-bintang serupa Matahari. Awan gas dan debu yang rapat mengelilingi gugus tersebut dengan pusat dan jejari yang sama dengan gugus dan tebal optis sepanjang diameter gugus bernilai 100. Gas dan debu terdistribusi secara seragam di dalam gugus. Bulir debu, yang memiliki kemampuan menyerap dan menghamburkan cahaya, memiliki jejari sekitar 1 mikron dan massa jenis bulir 1 gram/cm^3. Perbandingan massa debu adalah seperseratus dari massa gas, dan awan gas bersifat transparan atau tidak menimbulkan efek ekstingsi pada cahaya bintang.

Sebuah teleskop landas Bumi mengamati gugus tersebut dalam panjang gelombang visual dan hanya dapat mengamati sekitar 200 bintang anggota gugus yang lebih terang dari magnitudo 20. Dengan mengabaikan efek ekstingsi di luar gugus, jawablah pertanyaan tersebut:

a. Definisi tebal optis (τ) adalah negatif dari logaritma natural nisbah (rasio) fluks yang diterima dengan fluks asal. Buktikan bahwa

$$\tau = 0{,}92\ (m - m_0)$$

m_0 adalah magnitudo semu bintang jika tanpa ekstingsi.

b. Hitunglah tebal optis maksimum dari bintang yang teramati.

c. Bintang-bintang yang teramati secara visual hanyalah sebagian bintang dengan kedalaman l dari permukaan gugus yang tampak dari Bumi. Hitunglah l.

d. Andaikan volume bintang-bintang yang teramati di gugus tersebut berbentuk piringan setebal l dengan radius R, hitunglah jumlah total bintang yang ada pada gugus tersebut.

e. Jika tebal optis total pada gugus terpendam adalah jumlah total partikel debu sepanjang diameter gugus atau

$$\tau_{total} = n\ A\ D$$

dengan n adalah kerapatan rata-rata debu pada gugus, A adalah luas penampang debu, dan D adalah diameter gugus, hitunglah massa total debu pada gugus terpendam.

f. Tentukan nisbah (rasio) massa total bintang terhadap massa total gugus (gabungan massa bintang, debu, dan gas).

Solusi:

a. Dari definisi di soal, tebal optis diformulasikan

$$\tau = -\ln \frac{E}{E_0}$$

Dengan mengingat

$$\begin{aligned} m - m_0 &= -2{,}5 \log \frac{E}{E_0} \\ \frac{E}{E_0} &= 10^{-0{,}4(m-m_0)} \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \tau &= -\ln\left(10^{-0{,}4(m-m_0)}\right) \\ &= -0{,}4\,(m - m_0) \times (-\ln 10) \\ \Aboxed{\tau &= 0{,}92\,(m - m_0)} \end{aligned}$$

b. Diketahui bintang di gugus identik dengan Matahari. Kalau tidak ada ekstingsi, magnitudo semu matahari pada jarak 1 kpc adalah

$$\begin{aligned} m_0 &= M_V - 5 + 5\log d \\ &= 4{,}83 - 5 + 5\log 1000 \\ &= 14{,}79 \end{aligned}$$

Tebal optis maksimum terjadi saat $m \approx 20$, sehingga

$$\begin{aligned} \tau &= 0{,}92\,(20 - 14{,}79) \\ \Aboxed{\tau &\approx 4{,}8} \end{aligned}$$

c. Tebal optis sebanding dengan jarak ($\tau \propto d$)

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\tau_{total}} &= \frac{l}{D} \\ l &= \frac{\tau}{\tau_{total}} D \\ &= \frac{4{,}8}{100} \times 20\,\text{pc} \\ \Aboxed{l &= 0{,}96\,\text{pc}} \end{aligned}$$

d. Volume tabung dengan radius $R = 10\,\text{pc}$ dan tebal $l = 0{,}96\,\text{pc}$ adalah

$$V_{tabung} = \pi R^2 l$$

Jumlah total bintang (N_{total}) adalah

$$\begin{aligned} N_{total} &= \frac{V_{total}}{V_{tabung}} N_{teramati} \\ &= \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2 l} N_{teramati} \\ &= \frac{4R}{3l} N_{teramati} \\ \Aboxed{N_{total} &= 2778\,\text{bintang}} \end{aligned}$$

e. Rapat jumlah debu dalam gugus

$$\begin{aligned} n &= \frac{\tau_{total}}{\pi r_{debu}^2 D} \\ &= 5{,}158 \times 10^{-5} \text{ partikel/m}^3 \end{aligned}$$

Massa 1 partikel debu

$$m_p = \frac{4}{3}\pi r_{debu}^3 \rho_{debu}$$

Massa total debu dalam gugus

$$\begin{aligned} M_{debu,total} &= n m_p V_{total} \\ &= 2{,}659 \times 10^{34} \text{ kg} \\ \Aboxed{M_{debu,total} &= 13369 M_{sun}} \end{aligned}$$

f. Massa total gas

$$\begin{aligned} m_{gas} &= 100 M_{debu,total} \\ &= 1336900 M_{sun} \end{aligned}$$

Rasio massa total bintang terhadap massa total gugus

$$\frac{M_{total,bintang}}{M_{total,gugus}} = \frac{2778}{2778 + 13369 + 1336900}$$

$$\boxed{\frac{M_{total,bintang}}{M_{total,gugus}} = 0{,}02}$$

10. **[HN]** Pada tanggal 10 April 2019, ilmuwan mempublikasikan citra bayangan lubang hitam untuk pertama kalinya. Lubang hitam tersebut berada pada galaksi Messier 87 (M87) yang memiliki pergeseran merah (z) sebesar 0,0043. Lubang hitam supermasif tersebut diperkirakan memiliki massa sebesar 6 miliar kali massa Matahari.

a. Hitunglah jarak lubang hitam tersebut dari pengamat di Bumi. Berikan jawaban dalam satuan tahun cahaya.

b. Radius Schwarzschild merupakan batas tempat cahaya tidak dapat lepas dari lubang hitam. Hitunglah radius Schwarzschild untuk lubang hitam tersebut. Berikan jawaban dalam satuan meter.

c. Hitunglah diameter teleskop (dalam satuan km) yang dibutuhkan untuk dapat mengamati lubang hitam tersebut jika pengamatan dilakukan pada panjang gelombang radio sebesar 1 mm. Hitunglah perbandingan antara ukuran teleskop dengan diameter Bumi.

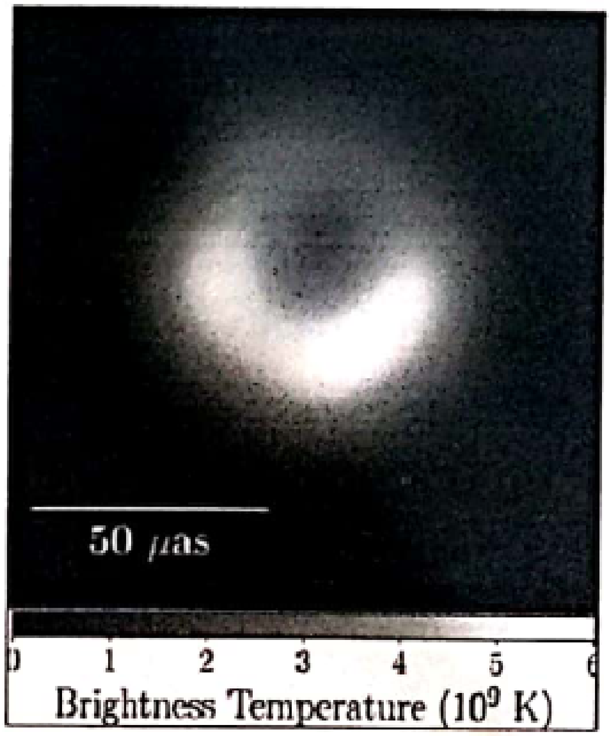
d. Pengamatan lubang hitam pada galaksi M87 dilakukan dengan *Event Horizon Telescope* (EHT) yang merupakan susunan teleskop radio. Gambar di bawah merupakan citra bayangan lubang hitam yang diperoleh. Lubang hitam tampak dikelilingi cincin terang akibat pelensaan gravitasi yang kuat yang disebut dengan *photon ring*. Hitunglah sudut ruang yang dibentuk cincin jika diameter sudut cincin adalah sebesar 50 μas atau 50 μ".

e. Jika kecerlangan temperatur (*brightness temperature*) cincin adalah 6×10^9 K, dengan menggunakan aproksimasi Rayleigh-Jeans, hitunglah kerapatan fluks dalam satuan Jansky atau Jy.

Solusi:

a. Menggunakan rumus efek Doppler, di mana

$$z = \frac{v}{c}$$



Gambar 5: Citra bayangan lubang hitam. Sumber Gambar: Kolaborasi EHT.

dan hukum Hubble, di mana

$$v = H_0 d$$

maka jarak lubang hitam tersebut adalah

$$d = \frac{cz}{H_0}$$

Perhatikan satuan dari konstanta Hubble, pastikan satuannya cocok dengan satuan kecepatan cahaya. Saya disini akan merubah satuan konstanta Hubble ke SI.

$$\begin{aligned} H_0 &= 69{,}3\,\mathrm{km/s/Mpc} \\ &= 2{,}246 \times 10^{-18}\,\mathrm{s^{-1}} \end{aligned}$$

Jarak lubang hitam tersebut adalah

$$\begin{aligned} d &= \frac{2{,}99 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \times 0{,}0043}{2{,}246 \times 10^{-18}\,\mathrm{s^{-1}}} \\ &= 5{,}73 \times 10^{23}\,\mathrm{m} \\ & \boxed{d = 60{,}67 \times 10^{6}\,\mathrm{tc}} \end{aligned}$$

b. Radius Schwarzschild

$$\begin{aligned} R_S &= \frac{2GM}{c^2} \\ &= \frac{2 \times 6{,}672 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2} \times 6 \times 10^{9} \times 1{,}989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}{\left(2{,}99 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)^2} \\ & \boxed{R_S = 2{,}954 \times 10^{12}\,\mathrm{m}} \end{aligned}$$

c. Diameter teleskop dapat dicari menggunakan rumus separasi maksimum.

$$\sin\alpha = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

Untuk $\alpha \ll 1$, dapat didekati dengan

$$\alpha = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$$

α sendiri dapat dicari dengan

$$\alpha = \frac{2R_S}{d}$$

maka

$$\begin{aligned} D &= \frac{1{,}22\lambda d}{2R_S} \\ &= \frac{1{,}22 \times 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \times 5{,}73 \times 10^{23}\,\mathrm{m}}{2 \times 2{,}954 \times 10^{12}\,\mathrm{m}} \\ \Aboxed{D &= 188\,324\,\mathrm{km}} \end{aligned}$$

Diameter teleskop jauh lebih besar dibanding diameter Bumi (12756 km).

d. Sudut ruang

$$\omega = \frac{A}{R^2}$$

di mana A adalah luas daerah dan R adalah jejari lingkaran
Sekarang tinjau sebuah lingkaran di permukaan bola yang memiliki radius r, karena lingkaran tersebut sangat kecil maka luasnya bisa didekati dengan persamaan lingkaran biasa

$$A = \pi r^2$$

di mana r adalah jejari lingkarannya, di mana

$$r = R\theta$$

dengan θ adalah jejari dalam satuan radian, maka

$$A = \pi R^2\theta^2$$

sehingga

$$\begin{aligned} \omega &= \pi\theta^2 \\ &= \pi \times \left(\frac{25 \times 10^{-6}\,''}{206\,265\,''/\mathrm{rad}}\right)^2 \\ \Aboxed{\omega &= 4{,}615 \times 10^{-20}\,\mathrm{sr}} \end{aligned}$$

e. Persamaan Rayleigh-Jeans bisa didapat dari persamaan benda hitam Planck, dengan mengambil panjang gelombang yang panjang.
Intensitas benda hitam

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Karena gelombang panjang, maka suku $\frac{hc}{\lambda kT} \ll 1$, sehingga berlaku pendekatan.

Untuk $x \ll 1$, maka $e^x \approx 1 + x$, sehingga

$$\begin{aligned}
B_\lambda(T) &= \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{1+\dfrac{hc}{\lambda kT}-1}\\
&= \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{\lambda kT}{hc}\\
&= \frac{2ckT}{\lambda^4}\\
&= \frac{2\times 2{,}99\times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}\times 1{,}3807\times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}\times 6\times 10^9\,\mathrm{K}}{\left(1\times 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^4}\\
&= 4{,}967\times 10^7\,\mathrm{W/m^2/Hz/sr}
\end{aligned}$$

Intensitas dari lubang hitam tersebut adalah

$$\begin{aligned}
I &= B_\lambda(T)\,\omega\\
&= 4{,}967\times 10^7\,\mathrm{W/m^2/Hz/sr}\times 4{,}615\times 10^{-20}\,\mathrm{sr}\times 1\times 10^{26}\,\mathrm{Jy/(W/m^2/Hz)}\\
&\boxed{I = 2{,}292\times 10^{14}\,\mathrm{Jy}}
\end{aligned}$$