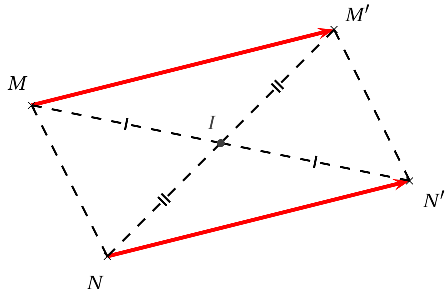
Chapitre 1 - Vecteurs 1

I. Notion de vecteur

A. Translations et vecteurs



Définition

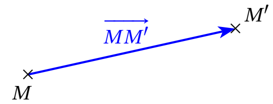
Soient M et M' deux points distincts du plan.
La **translation qui transforme** M **en** M' associe à tout point N du plan, l'unique point N' tel que $MM'N'N$ soit un parallélogramme.

Remarques :

- On dit que N' **est l'image de** N par la translation qui transforme M en M'.
- La translation qui transforme M en M' est un déplacement caractérisé par une direction (celle de la droite (MM')) ; un sens (celui de M vers M') ; une longueur (la longueur MM').

Définitions

La translation qui transforme M en M' est appelée la **translation de vecteur** $\overrightarrow{MM'}$.
Le point M est appelé **origine** du vecteur $\overrightarrow{MM'}$; le point M' est appelé **extrémité**.



Remarques :

- Lorsque les points M et M' sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est représenté par une flèche allant de M vers M'. Il est défini par sa direction, son sens et sa longueur (aussi appelée norme).
- Par convention, on appelle **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$, tout vecteur dont l'origine et l'extrémité sont confondues, par exemple $\overrightarrow{MM}$, ou encore $\overrightarrow{AA}$.

B. Égalité de deux vecteurs

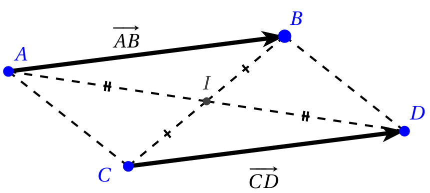
Définition

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.
On écrit alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

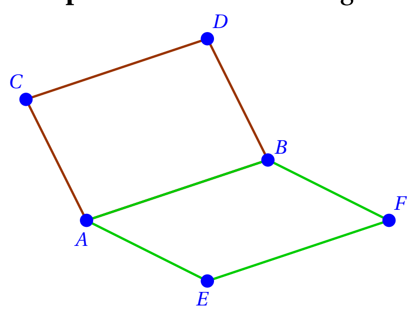
Remarque : Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux revient à dire que D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriété (admise)

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).



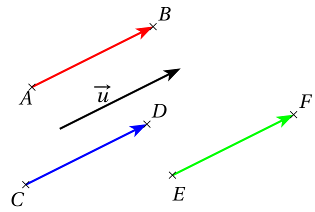
Exemple : On considère la figure donnée ci-dessous, $ABDC$ et $ABFE$ sont des parallélogrammes.



- $ABDC$ est un parallélogramme donc ....
  $ABFE$ est un parallélogramme donc ....
- On a $\overrightarrow{AB} =$ ....
- $ABFE$ est un parallélogramme, donc $AEFB$ est aussi un parallélogramme. Donc ....
- L'image du point B par la translation qui transforme A en E est le point ....

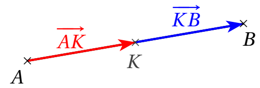
Remarque : La propriété précédente donne une méthode pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.
Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur.
À partir de n'importe quel point du plan, on peut construire un vecteur qui lui est égal, par exemple $\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{EF}$ sur la figure ci-contre.
Ce vecteur peut être noté avec une seule lettre, sans préciser d'origine et d'extrémité : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont **des représentants** du vecteur $\overrightarrow{u}$.



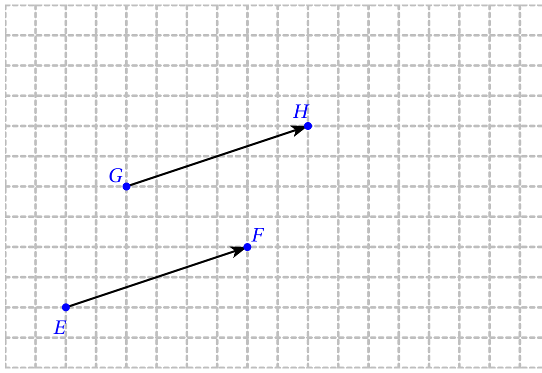
Propriété (admise)

Le point K est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$.



Exercice : on considère le parallélogramme $GHFE$ donné ci-contre.

1. Construire le point I, image de H, par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
2. Démontrer que le point H est le milieu du segment $[GI]$.

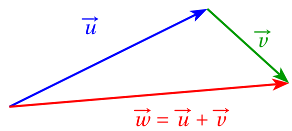


II. Opérations sur les vecteurs

A. Somme de deux vecteurs

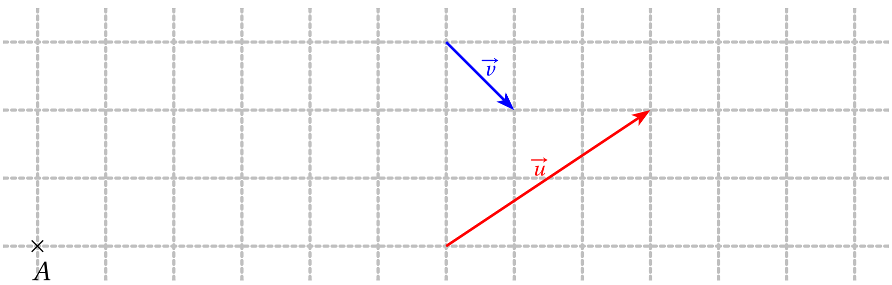
Définition

La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{w}$ associé à la translation qui résulte de l'enchainement des translations de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On écrit $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



Remarques : L'ordre n'a pas d'importance. Autrement dit, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
De plus, il est possible d'enchaîner trois translations ou plus.

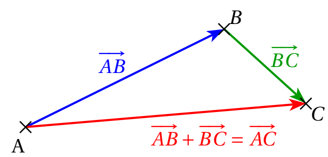
Exemple : Construire le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ puis placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



Propriété (admise) - Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan, on a

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



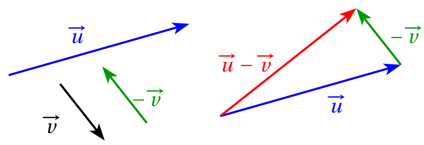
Exemple : simplifier les écritures suivantes :

1. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=$ ....
2. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}=$ ....
3. $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=$ ....

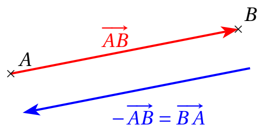
Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

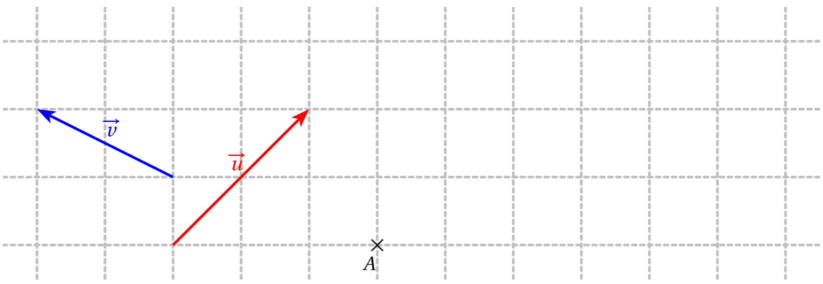
- L'**opposé du vecteur** $\overrightarrow{v}$, que l'on note $-\overrightarrow{v}$, est le vecteur qui vérifie la relation suivante : $\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{v})=\overrightarrow{0}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ est le vecteur défini par $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{v})$.



Remarque : Si A et B sont deux points, alors le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$.
On a alors : $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.



Exemple : sur la figure donnée ci-dessous, construire le vecteur $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, puis placer le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.



B. Produit d'un vecteur par un réel

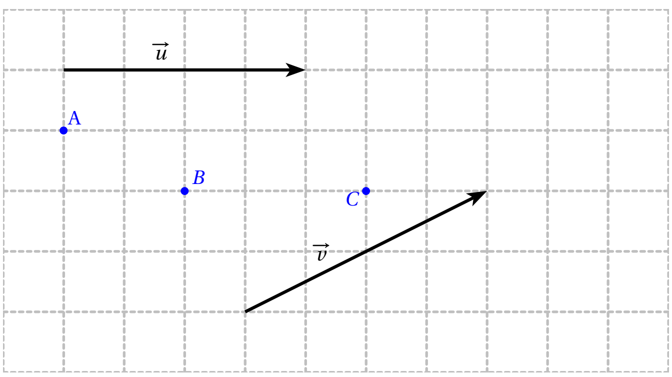
Définition

Soient $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul du plan et k un nombre réel non nul.
Le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ est le vecteur qui :

- a la même direction que $\overrightarrow{AB}$;
- si $k>0$, a le même sens que $\overrightarrow{AB}$ et a pour norme $k\times AB$;
- si $k<0$, a le sens opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et a pour norme $-k\times AB$.

De plus, pour tout réel k, on a : $k\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$; et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a : $0\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.

Exercice : on considère la figure ci-dessous :



1. Construire le point A' tel que $\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{u}$
2. Construire le point B' tel que $\overrightarrow{BB'}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{u}$.
3. Construire le point C' tel que $\overrightarrow{CC'}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$.