Calculer des dérivées

Tableau récapitulatif des dérivées

Fonction f définie par $f(x) =$	**Dérivée f' définie par $f'(x) =$**	**Domaine de dérivation**
k (nombre réel)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Somme de deux fonctions - Propriété

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u et v deux fonctions définies et dérivables sur I.

Propriété

Soit la fonction f définie sur I par : $f(x) = u(x) + v(x)$.
La fonction dérivée, notée $f'(x)$, est

$$f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Somme de deux fonctions - Exemple

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \cos(x)$.
Calculer sa dérivée $f'(x)$.

f est définie comme la somme de deux fonctions. Donc :

$$f(x) = \underbrace{x^2 + \cos(x)}_{u(x)+v(x)}$$

$$f'(x) = \overbrace{2x + (-\sin(x))}^{u'(x)+v'(x)}$$

$$f'(x) = 2x - \sin(x)$$

Donc $\boxed{f'(x) = 2x - \sin(x)}$.

Produit d'un réel par une fonction - Propriété

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, u une fonction définie et dérivable sur I et k un nombre réel.

Propriété

Soit la fonction f définie sur I par : $f(x) = k \times u(x)$.
La fonction dérivée, notée $f'(x)$, est

$$f'(x) = k \times u'(x).$$

Produit d'une réel par une fonction - Exemple

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3$.
Calculer sa dérivée $f'(x)$.

f est définie comme le produit d'un nombre réel par une fonction.
Donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{5x^3}_{k \times u(x)} \\ f'(x) &= \overbrace{5 \times 3x^2}^{k \times u'(x)} \\ f'(x) &= 15x^2 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f'(x) = 15x^2}$.

Produit de deux fonctions - Propriété

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions définies et dérivables sur I.

Propriété

Soit la fonction f définie sur I par : $f(x) = u(x) \times v(x)$.
La fonction dérivée, notée $f'(x)$, est

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x).$$

Produit de deux fonctions - Exemple

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+5)\sin(x)$.
Calculer sa dérivée $f'(x)$.

f est définie comme le produit de deux fonctions. Donc :

$f(x) = u(x) \times v(x)$, avec :

$$u(x) = 2x + 5\,; \qquad u'(x) = 2\,;$$
$$v(x) = \sin(x)\,; \qquad v'(x) = \cos(x).$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 2 \times \sin(x) + (2x+5) \times \cos(x) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f'(x) = 2\sin(x) + (2x+5)\cos(x)}$.

Quotient de deux fonctions - Propriété

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, u une fonction définie et dérivable sur I et v une fonction définie et dérivable sur I ne s'annulant pas sur I.

Propriété

Soit la fonction f définie sur I par : $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

La fonction dérivée, notée $f'(x)$, est

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2}.$$

Quotient de deux fonctions - Exemple

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sin(x)}$.

Calculer sa dérivée $f'(x)$.

f est définie comme le quotient de deux fonctions. Donc :

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$), avec :

$$u(x) = x^2 + 1\,; \qquad u'(x) = 2x + 1\,;$$
$$v(x) = \sin(x)\,; \qquad v'(x) = \cos(x).$$

Quotient de deux fonctions - Exemple - suite

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2} \\ f'(x) &= \frac{(2x+1) \times \sin(x) - (x^2+1) \times \cos(x)}{(5x-12)^2}. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{(2x+1)\sin(x) - (x^2+1)\cos(x)}{(5x-12)^2}}$.

Tableau récapitulatif des opérations

u **et** v **dérivables sur** I	**Fonction**	**Fonction dérivée**
Somme	$u+v$	$u'+v'$
Produit par un réel	ku	ku'
Produit de deux fonctions	uv	$u'v+uv'$
Inverse d'une fonction qui ne s'annule pas	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
Quotient avec dénominateur qui ne s'annule pas	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Comment calculer une dérivée ?

Lorsqu'on doit calculer la dérivée d'une fonction, la première chose à faire est d'analyser l'expression de la fonction.

On doit se demander si

- Est-ce une somme ?
- Est-ce le produit d'un nombre par un réel ?
- Est-ce un produit ?
- Est-ce un quotient ?
- Est-ce une somme de produits ?

Puis, on applique les méthodes vues dans cette fiche !