Chapitre 12 - Droites du plan

2GT4

Partie 2/4

Plan

II - Équation cartésienne d'une droite

- Introduction
- Équation cartésienne
- Exemple - Méthode - Important
- Propriété réciproque
- Un vecteur directeur

II - Équation cartésienne

Dans la partie précédente, nous avons vu la notion de « vecteur directeur » pour une droite.

Une droite peut être caractérisée par deux points ou un point et un vecteur directeur.

Dans cette partie, nous allons voir que les droites peuvent être caractérisées à l'aide d'une équation, appelée **équation cartésienne**.

Propriété

Propriété

Dans une repère du plan, les coordonnées $(x; y)$ de tous les points M d'une droite d vérifient une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

où a, b et c sont des nombres réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls.
On notera par la suite $(a; b) \neq (0; 0)$.
Une telle équation s'appelle une **équation cartésienne** de la droite d.

Remarques

Remarques :

- Une droite d peut être caractérisée par une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$. Nous verrons dans la suite comment déterminer une telle équation pour une droite.
- Cette équation n'est pas unique : une droite d admet une infinité d'équations cartésiennes. On constate alors que les coefficients sont deux à deux proportionnels.

Dans la suite :

- nous allons voir une démonstration de cette propriété ;
- nous allons voir comment déterminer une telle équation pour une droite.

Démonstration

Soit $A(x_A; y_A)$ un point de la droite d et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d.

Le point $M(x; y)$ appartient à la droite d si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_A\\ y - y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u}) = 0$.

Suite de la démonstration

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u}) = 0$.

$$\begin{aligned} M(x;y) \in d &\iff \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u}) = 0 \\ &\iff \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0 \\ &\iff \beta x - \beta x_A - \alpha y + \alpha y_A = 0 \\ &\iff \beta x - \alpha y + (-\beta x_A + \alpha y_A) = 0 \end{aligned}$$

On obtient bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = -\beta x_A + \alpha y_A$.
Le vecteur $\overrightarrow{u}$ étant non nul, on a bien : $(a; b) \neq (0; 0)$.

Exemple

Exemple : soit la droite d passant par $A(1;3)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

Réponse (et méthode pour les exercices) :

Soit $M(x;y)$ appartenant à la droite d.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur pour la droite d. D'après la définition, les points A et M appartenant à la droite d, on sait que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

Or : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires $\Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u}) = 0$.

$A(1;3)$ et $M(x;y)$ donc : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Puis : $\det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u}) = 5(x-1) - 2(y-3)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} &\iff \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u}) = 0\\ &\iff 5(x-1)-2(y-3)=0\\ &\iff 5x-5-2y+6=0\\ &\iff 5x-2y+1=0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de la droite } d \text{ est } 5x-2y+1=0.}$$

Résumé de la méthode précédente

Tout a été détaillé dans l'exemple précédente. Voici un résumé de la méthode à appliquer en exercice :

Comment déterminer une équation cartésienne d'une droite d en partant d'un point A et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$:

1. Soit $M(x;y)$ appartenant à la droite d. On donne les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y.
2. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de d : les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
3. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si le déterminant est nul : on calcule $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{u})$ et ce nombre doit être égal à 0.

Remarque

Remarque : la méthode précédente nous donne un moyen de déterminer une équation cartésienne pour une droite d connaissant un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Si on a deux points A et B d'une droite d, on se rappelle que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite d.
Cela nous permet d'obtenir un vecteur directeur pour ensuite appliquer la méthode précédente.

Propriété réciproque

Propriété

L'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont des réels et $(a; b) \neq (0; 0)$, est une droite.

Méthode

Pour montrer qu'un point $A(x_A; y_A)$ appartient (ou pas) une droite :

On considère la droite d dont une équation cartésienne est donné par $ax + by + c = 0$.

On sait que : le point $A(x_A; y_A)$ appartient à la droite d si, et seulement si, $ax_A + by_A + c = 0$.

Cela donne une méthode pour montrer qu'un point appartient ou n'appartient pas à la droite :

- Si $ax_A + by_A + c = 0$ alors le point A appartient à la droite d.
- Si $ax_A + by_A + c \neq 0$ alors le point A n'appartient pas à la droite d.

Exemple

Exemple : Soit la droite d dont une équation cartésienne est $-2x + 3y + 5 = 0$.

1. Le point $A(4;1)$ appartient-il à la droite d ?
2. Le point $B(-2;-2)$ appartient-il à la droite d ?

Corrigé de l'exemple

Exemple : Soit la droite d dont une équation cartésienne est $-2x+3y+5=0$.

1. Le point $A(4;1)$ appartient-il à la droite d ?

On a :

$$\begin{aligned} -2\times x_A+3\times y_A+5 &= -2\times 4+3\times 1+5 \\ &= -8+3+5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $-2\times x_A+3\times y_A+5=0$.

Le point A appartient à la droite d.

Corrigé de l'exemple

Exemple : Soit la droite d dont une équation cartésienne est $-2x+3y+5=0$.

2. Le point $B(-2;-2)$ appartient-il à la droite d ?

On a :

$$\begin{aligned}-2\times x_B+3\times y_B+5 &= -2\times(-2)+3\times(-2)+5\\ &= 4-6+5\\ &= 3\end{aligned}$$

Donc $-2\times x_B+3\times y_B+5\neq 0$.

Le point B n'appartient pas à la droite d.

Autre exemple

Exemple : On considère la droite d dont une équation cartésienne est $4x + 2y - 10 = 0$. Déterminer deux points distincts appartenant à la droite d.

Réponse : En utilisant l'équation cartésienne, il suffit de choisir x et d'en déduire la valeur de y.

Pour $x = 0$, on a : $4 \times 0 + 2y - 10 = 0$ donc $2y - 10 = 0$. Puis :
$2y - 10 = 0 \Longleftrightarrow 2y = 10 \Longleftrightarrow y = 5$.

- Le point $A(0; 5)$ appartient à la droite d.

Pour $x = 2$, on a : $4 \times 2 + 2y - 10 = 0$ donc $8 + 2y - 10 = 0$. Puis :
$8 + 2y - 10 = 0 \Longleftrightarrow 2y - 2 = 0 \Longleftrightarrow 2y = 2 \Longleftrightarrow y = 1$.

- Le point $B(2; 1)$ appartient à la droite d.

Remarque

L'exemple précédent est important car : à partir d'une équation cartésienne pour une droite, on détermine deux points appartenant à la droite.

Si on veut tracer la droite dont une équation cartésienne, il suffit de trouver de cette manière deux points distincts appartenant à la droite, de les placer dans un repère et on obtient notre droite en traçant la droite qui passe par ces deux points.

Propriété

On considère une droite d dont une équation cartésienne est donnée par : $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Remarque

Remarque : La propriété précédente permet, étant donnée une équation cartésienne d'une droite d, de déterminer rapidement un vecteur directeur de la droite d.

Exemple

Exemple : On considère la droite d dont une équation cartésienne est $2x - 3y - 12 = 0$.

Une équation cartésienne de d est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 2$ et $b = -3$.

D'après la propriété précédente, $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

$-b = -(-3) = 3$ et $a = 2$.

Donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Autre exemple

Exemple : Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(4;7)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix}$.

Réponse : d'après la propriété précédente, la droite d admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ ou le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.

Donc $-b=5$ et $a=11$. Ce qui donne $a=11$ et $b=-5$.

Une équation cartésienne de la droite d est $11x - 5y + c = 0$.

Pour trouver la valeur c, nous allons utiliser le point A

$$\begin{aligned} A(4;7) \in d &\iff 11 \times 4 + (-5) \times 7 + c = 0 \\ &\iff 44 - 35 + c = 0 \\ &\iff 9 + c = 0 \\ &\iff c = -9. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la droite d est $11x - 5y - 9 = 0$.

Fin de la partie 2

Feuille d'exercices 2 à traiter !