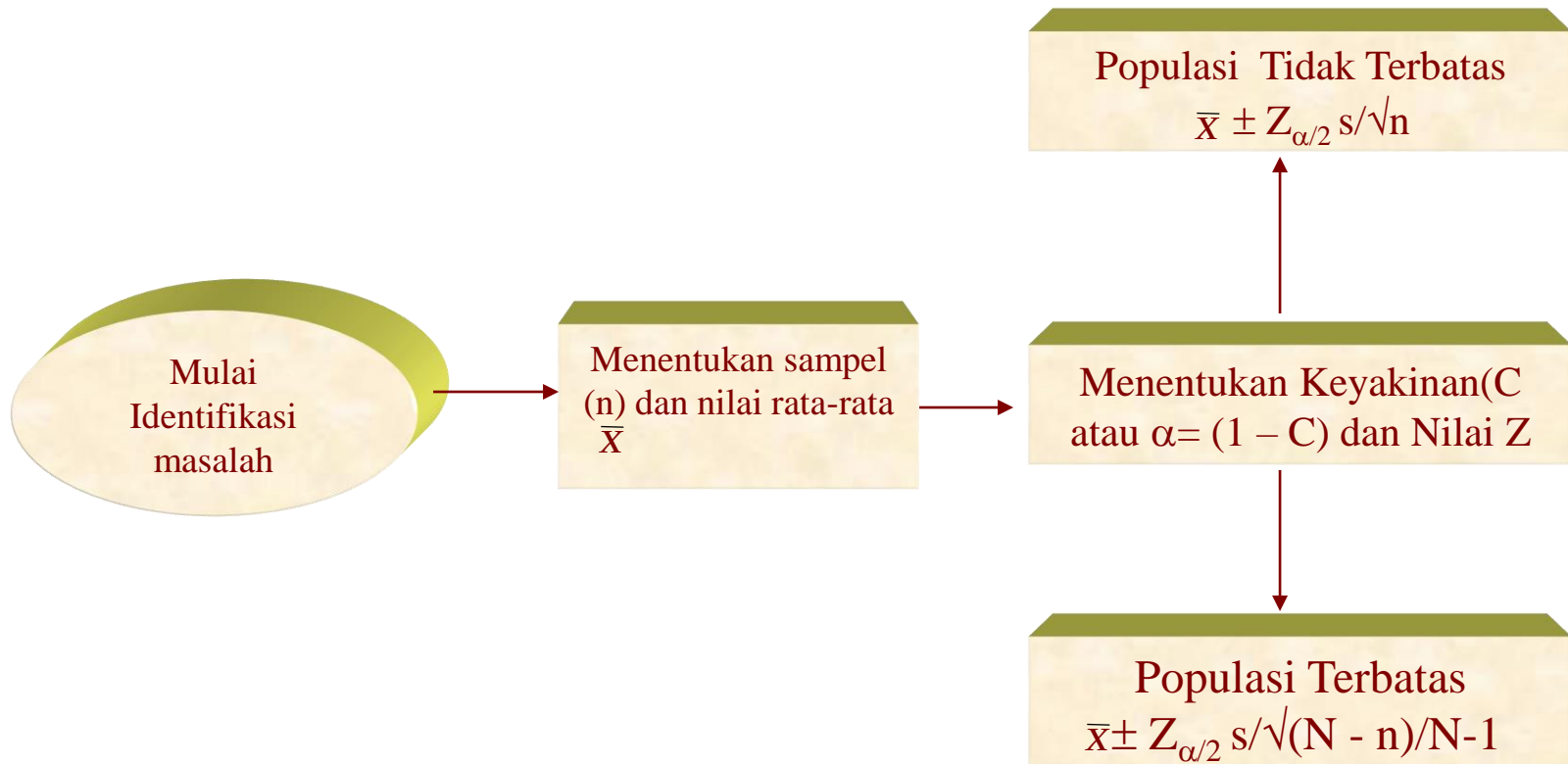


Pendugaan Parameter

by Dr. Tukiya, SE, M.Si

SKEMA PROSES INTERVAL KEYAKINAN



Pendugaan

- Suatu proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga/ menaksir hubungan parameter populasi yg tidak diketahui
- Penduga : suatu statistik yg digunakan untuk menduga suatu parameter
- Estimasi: Pengukuran terhadap nilai parameternya (populasi) dari data sampel yang diketahui

Ciri-ciri Penduga Yg Baik

1. Tidak Bias (Unbiased) : apabila nilai penduga sama dengan nilai yg diduganya
2. Efisien : apabila penduga memiliki varians yg kecil
3. Konsisten :
 - a. Jk ukuran sampel semakin bertambah mk penduga akan mendekati parameternya
 - b. Jk ukuran sampel bertambah tak berhingga mk distribusi sampling penduga akan mengecil mjd tegak lurus di atas parameter yg sebenarnya dgn probabilitas sama dgn satu

Jenis-jenis pendugaan berdasarkan cara penyajiannya

1. Pendugaan tunggal

Pendugaan yg hanya mempunyai atau menyebutkan satu nilai. Tidak memberikan selisih atau jarak antara nilai penduga dengan nilai sebenarnya (parameter)

$$E(\mu) = \bar{x}; \quad E(\sigma^2) = S^2; \quad E(p) = \hat{p}$$

2. Pendugaan interval

Pendugaan yg mempunyai dua nilai sebagai pembatasan/ daerah pembatasan

Digunakan tingkat keyakinan untuk menduga daerah yang nilai sebenarnya/ parameteranya akan berada.

- Nilai $(1-\alpha)$ disebut koefisien kepercayaan

• Selang kepercayaan : $(1-\alpha) \times 100\%$

➤ **PENDUGAAN INTERVAL**

Suatu interval yang menyatakan selang dimana suatu parameter populasi mungkin berada.

Bentuk umum interval keyakinan :

$$(S - ZS_x < P < S + ZS_x) = C$$

Dimana :

S : Statistik penduga parameter populasi

P : Parameter populasi yang tidak diketahui

S_x : Standar deviasi distribusi sampel statistik

Z : Suatu nilai yang ditentukan oleh probabilitas yang berhubungan dengan pendugaan interval, nilai Z diperoleh dari tabel luas di bawah kurva normal

C : Probabilitas atau tingkat keyakinan yang dalam praktek sudah ditentukan dahulu

S - ZS_x : Nilai batas bawah keyakinan

S + ZS_x : Nilai batas atas keyakinan

➤ CONTOH :

Buatlah rumus umum interval keyakinan sebesar 80% dan 90% apabila BPS merencanakan akan melakukan survei tingkat suku bunga bank di Indonesia setelah Bank Indonesia menaikkan suku bunga SBI sebanyak 25 basis poin dari 8,25 menjadi 8,50 pada bulan Mei 2016.

➤ JAWABAN :

Rumus umum interval $(S - ZS_x < P < S + ZS_x) = C$

Apabila $C = 0,8$ maka nilai Z dengan probabilitasnya adalah $0,8/2 = 0,40000$ yang mendekati yaitu 0,3997 dan 0,4015.

yang paling mendekati adalah 0,3997 maka nilai Z nya adalah 1,28.

Interval Keyakinan : $(S - 1,28S_x < P < S + 1,28S_x)$

Apabila $C = 0,9$ maka nilai Z dengan probabilitasnya adalah $0,9/2 = 0,4500$ yang mendekati yaitu 0,4495 dan 0,4505.

yang paling mendekati adalah 0,4495 maka nilai Z nya adalah 1,65.

Interval Keyakinan : $(S - 1,65S_x < P < S + 1,65S_x)$

➤ KESALAHAN STANDAR DARI RATA – RATA HITUNG SAMPEL

Kesalahan standar dari rata-rata hitung sampel adalah standar deviasi distribusi sampel dari rata-rata hitung sampel. Kesalahan standar dari rata-rata hitung dihitung dengan rumus sebagai berikut:

- Untuk populasi yang **tidak terbatas** $n/N < 0,05$:

$$S_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Untuk populasi yang **terbatas** dan $n/N > 0,05$:

$$S_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

σ Standar deviasi populasi

S_x : Standar error / kesalahan standar dari rata-rata hitung sampel

n : Jumlah atau ukuran sampel

N : Jumlah atau ukuran populasi

▶ **Contoh :**

Standar deviasi Laba dari 488 emiten Jan – Sept 2013 adalah 1.657 miliar. Apabila diambil sampel 20 perusahaan yang melaporkan kinerja keuangannya, berapa standar *error*-nya ?

▶ **Jawab :**

Jumlah Sampel (n) = 20

Sehingga $n/N = 20/488 = 0,04$

Jumlah populasi (N) = 488

$0,04 < 0,05$

$$S_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.657}{\sqrt{20}} = \text{Rp } 370,52 \text{ miliar}$$

▶ **Apabila sampel (n) = 40**
 $0,082 > 0,05$

Sehingga $n/N = 40/488 =$

Maka rumus yang digunakan adalah untuk populasi yang terbatas

$$S_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad \frac{1,657.00}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{488-40}}{488-1} \quad 370.52 \times 0.959 = 355.37$$

P		S
μ	R_{ata}^2	\bar{X}
σ	Standard	S
σ^2	Varians	S^2
N	Jumlah data	n



Rumus standar deviasi sampel (jika standar deviasi dari populasi tdk diketahui)

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n-1}}$$

Maka Standar errornya :

$$s_x = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

untuk populasi tidak terbatas $n/N < 0,05$

$$s_x = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

untuk populasi yang **terbatas** dan $n/N > 0,05$

▶ MENYUSUN INTERVAL KEYAKINAN

Rumus = $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$ untuk populasi tidak terbatas

untuk populasi yang terbatas faktor koreksi menjadi $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

\bar{X} merupakan rata – rata dari sampel. sedangkan nilai Z untuk beberapa nilai C dapat disajikan sebagai berikut :

Tingkat keyakinan	C/2	Nilai terdekat	Nilai Z
0,99	0,495	0,4951	2,58
0,98	0,490	0,4901	2,33
0,95	0,475	0,4750	1,96
0,90	0,450	0,4505	1,65
0,85	0,425	0,4251	1,44
0,80	0,400	0,3997	1,28

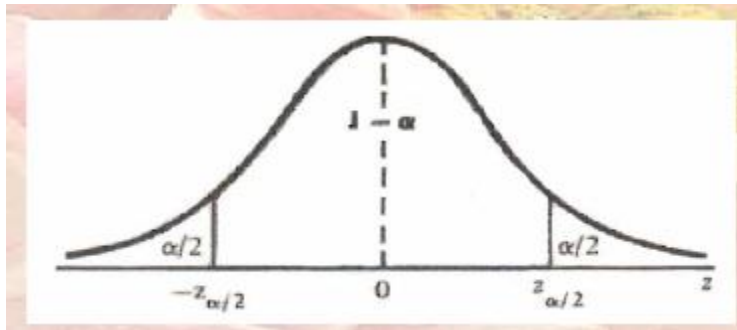
Berdasarkan pada nilai Z dan diasumsikan bahwa $n > 30$ maka dapat disusun interval beberapa keyakinan sebagai berikut:

1. Interval keyakinan 99%: $\pm 2,58 s/\sqrt{n}$
2. Interval keyakinan 98%: $\pm 2,33 s/\sqrt{n}$
3. Interval keyakinan 95%: $\pm 1,96 s/\sqrt{n}$
4. Interval keyakinan 90%: $\pm 1,65 s/\sqrt{n}$
5. Interval keyakinan 85%: $\pm 1,44 s/\sqrt{n}$

PENDUGAAN RATA-RATA

by Dr. Tukiya, SE, M.Si

PENDUGAAN RATA-RATA (TUNGGA)



Penduga titik bagi mean populasi μ adalah statistik \bar{X} . Bila \bar{x} adalah mean sampel acak berukuran n yang diambil dari suatu populasi dengan ragam σ^2 diketahui maka selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi μ adalah

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

CATATAN : Jika σ^2 tidak diketahui, tetapi sampel berukuran besar ($n \geq 30$), σ^2 dapat diganti dengan s^2 .

- Adapun penduga selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi μ untuk sampel kecil ($n < 30$); bila σ^2 tidak diketahui adalah

$$\bar{x} - t_{(n-1, \alpha/2)} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{(n-1, \alpha/2)} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

dengan $t_{(n-1, \alpha/2)}$ adalah nilai t yang luas daerah di sebelah kanan di bawah kurva seluas $\alpha/2$.

Soal Pendugaan Rata-Rata

- *Contoh:* Rata-rata IP sampel acak 36 mahasiswa tingkat S-1 adalah 2.6. Hitung selang kepercayaan 95% dan 99% untuk rata-rata IP semua mahasiswa S-1! Diketahui bahwa standar deviasi populasinya sebesar 0.3.

- *Solusi:*

Diketahui $\bar{x} = 2.6$; $\sigma = 0.3$; $z_{0.025} = 1.96$; $z_{0.005} = 2.575$

- Selang kepercayaan 95% untuk rata-rata IP semua mahasiswa S-1:

$$2.6 - (1.96)\left(\frac{0.3}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 2.6 + (1.96)\left(\frac{0.3}{\sqrt{36}}\right)$$

$$2.50 < \mu < 2.70$$

- Interpretasi: Dapat dipercaya sebesar 95% bahwa rata-rata IP semua mahasiswa S-1 antara 2.50 hingga 2.70

Soal Pendugaan Rata-Rata

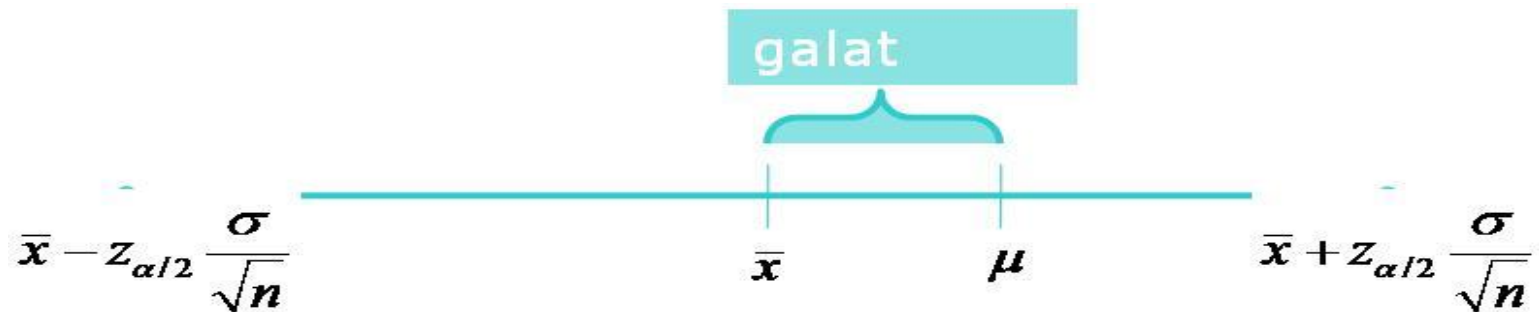
- Selang kepercayaan 99% untuk rata-rata IP semua mahasiswa S-I:

$$2.6 - (2.575) \left(\frac{0.3}{\sqrt{36}} \right) < \mu < 2.6 + (2.575) \left(\frac{0.3}{\sqrt{36}} \right)$$
$$2.47 < \mu < 2.73$$

- Interpretasi: Dengan tingkat kesalahan 1%, dapat dinyatakan bahwa rata-rata IP semua mahasiswa S-1 antara 2.47 hingga 2.73.

--00--

- Perhatikan:



► **Contoh :**

Selama pengamatan triwulan pertama tahun 2013, standar deviasi suku bunga deposito untuk jangka waktu 1 tahun adakah 2,25%.

Untuk melihat pergerakan suku bunga , diambil 10 sampel bank dari total 128 bank di Indonesia. Hasilnya, rata - rata suku bunga si 10 bank tersebut adalah 3,77%. Buatlah selang kepercayaan untuk rata - rata populasi dengan tingkat kepercayaan 95% !

► **Jawaban :**

$n/N = 10/128 = 0,078 > 0,05$ sehingga merupakan populasi terbatas

Diketahui : $\sigma = 2,25$ $n = 10$ $\bar{X} = 3,77$ $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$

Interval keyakinannya : $-Z_{\alpha/2} < \mu < +Z_{\alpha/2} S_x$

$Z_{\alpha/2} = 0,05/2 = 0,025$, ($Z|P = 0,5 - 0,025 = 0,47500 = 1,96$)

Nilai Standar eror :

$$S_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{2,25}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{128-10}{128-1}} = 0,712 \times 0,964 = 0,686$$

Intervalnya : $(3,77 - 1,96 \cdot 0,686 < \mu < 3,77 + 1,96 \cdot 0,686) = 2,43 < \mu < 5,11$

Jadi , interval suku bunga deposito pada triwulan I tahun 2008 dengan tingkat keyakinan 95% akan berkisar 2,43% sampai 5,11% per tahun.

► Contoh :

Sebuah survey dilakukan terhadap 9 perusahaan dari 59 perusahaan Reksadana ternyata mampu memberikan hasil investasi rata-rata 13,17% dengan standar deviasi 1,83%. Dengan tingkat kepercayaan 95%, buatlah interval keyakinan untuk rata-rata hasil investasi Reksadana tersebut !

► Jawaban :

Diketahui : $n = 9$ $N = 59$ Maka $n/N = 9/59 = 0,15 > 0,05$

Rumus :
$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Standar error :
$$\frac{1,83}{\sqrt{9}} \sqrt{\frac{59-9}{59-1}} = 0,57$$

Nilai tingkat keyakinan $\alpha = 1 - C = 1 - 0,95 = 0,05$

$t_{\alpha/2} = 2,3060$, diperoleh dari $df = 9-1 = 8$ dan sehingga $\alpha/2 = 0,025$

Interval keyakinan :

$$(\bar{X} - t_{\alpha/2} S_x < \mu < + t_{\alpha/2} S_x) = 13,17 - 2,3060(0,57) < \mu < 13,17 + 2,3060(0,57) \\ = 11,86 < \mu < 14,48$$

Jadi nilai rata-rata investasi di perusahaan Reksadana 95% akan berada pada interval 11,86% sampai 14,48 %

PENDUGAAN SELISIH DUA MEAN

- Bila kita mempunyai dua populasi saling bebas dengan mean μ_1 dan μ_2 dan ragam σ_1^2 dan σ_2^2 maka penduga titik bagi selisih antara μ_1 dan μ_2 diberikan oleh statistik $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$. Bila \bar{x}_1 dan \bar{x}_2 masing-masing adalah mean sampel acak bebas berukuran n_1 dan n_2 yang diambil dari populasi dengan ragam σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui, maka selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi $\mu_1 - \mu_2$ adalah

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- dengan $z_{\alpha/2}$ adalah nilai z yang luas daerah di sebelah kanan di bawah kurva normal standard adalah $\alpha/2$.
- CATATAN : Jika σ_1^2 dan σ_2^2 tidak diketahui, tetapi n_1 dan n_2 lebih besar dari 30, maka σ_1^2 dan σ_2^2 dapat diganti dengan s_1^2 dan s_2^2 .

- Adapun penduga selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi $\mu_1 - \mu_2$ untuk sampel kecil; bila $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ tapi nilainya tidak diketahui adalah

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

- dengan derajat bebas untuk distribusi t $= v = n_1 + n_2 - 2$ dan

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- Selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi $\mu_1 - \mu_2$ untuk sampel kecil; bila $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ tapi nilainya tidak diketahui

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

- dengan derajat bebas untuk distribusi t adalah

$$v = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{[(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1)] + [(s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)]}$$

- Bila kita mempunyai dua populasi yang tidak saling bebas (berpasangan), selang kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ bagi $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ untuk pengamatan berpasangan tersebut adalah

$$\bar{d} - t_{(n-1, \alpha/2)} \frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_D < \bar{d} + t_{(n-1, \alpha/2)} \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

Contoh Soal

Diketahui nilai ujian statistik yang diberikan pada 50 siswa putri dan 75 siswa putra mempunyai rata-rata secara berurutan adalah 76 dan 86. Cari selang kepercayaan 96% untuk selisih $\mu_1 - \mu_2$. ! Anggap standar deviasi populasi untuk masing-masing putra dan putri adalah 8 dan 6.

- Jawaban:

$\bar{x}_1 = 86$ adl rata-rata nilai siswa putra, $n_1 = 75$ dan $\sigma_1 = 8$.

$\bar{x}_2 = 76$ adl rata-rata nilai siswa putri, $n_2 = 50$ dan $\sigma_2 = 6$.

$\alpha = 0.04 \rightarrow z_{0.02} = 2.05$

Selang kepercayaan 96% bagi selisih rata-rata nilai siswa putra dengan siswa putri adalah

$$\begin{aligned} (86 - 76) - (2.05) \sqrt{\left(\frac{8^2}{75}\right) + \left(\frac{6^2}{50}\right)} < \mu_1 - \mu_2 < \\ (86 - 76) + (2.05) \sqrt{\left(\frac{8^2}{75}\right) + \left(\frac{6^2}{50}\right)} \\ 3.43 < \mu_1 - \mu_2 < 8.57 \end{aligned}$$

- Interpretasi:

1. Dapat dipercaya 96% bahwa selisih rata-rata nilai ujian statistik semua siswa putra dengan siswa putri berkisar antara 3.43 hingga 8.57.
2. Dengan tingkat signifikansi 4%, rata-rata nilai ujian statistik semua siswa putra lebih tinggi antara 3.43 hingga 8.57 dari nilai ujian statistik semua siswa putri.

TERIMA KASIH

by Dr. Tukiya, SE, M.Si