# OPTIMISASI DAN ANALISIS SENSITIVITAS PEMROGRAMAN NONLINIER

Yugowati Praharsi
Fakultas Teknologi Informasi
Universitas Kristen Satya Wacana
e-mail: yougo_281@yahoo.com

***Abstract***

*Pemrograman nonlinier merupakan suatu pendekatan pemecahan masalah optimisasi yang dikembangkan dalam pengambilan keputusan. Kemungkinan yang ada dalam program nonlinier yaitu: (1) fungsi tujuan dan kendala nonlinier, (2) fungsi tujuan nonlinier dan kendala linier, dan (3) fungsi tujuan linier dan kendala nonlinier. Dalam penelitian ini digunakan spreadsheet Excel untuk membahas ketiga kemungkinan diatas. Hasil penelitian menunjukkan bahwa beberapa karakteristik optimisasi dan analisis sensitivitas pemrograman nonlinier pada ketiga kemungkinan diatas yaitu: (1) matematikanya lebih kacau, (2) optimisasi global sulit dicapai, dan (3) pemahaman yang tidak elegan dan estetika yang tidak indah.*

## 1. PENDAHULUAN

Pemrograman nonlinier merupakan suatu pendekatan pemecahan masalah optimisasi yang dikembangkan dalam pengambilan keputusan. Beberapa aplikasi optimisasi nonlinier di dunia nyata antara lain: (1) bidang keuangan dan penanaman modal: manajemen modal kerja yang melibatkan pengalokasian modal untuk tujuan yang berbeda, budget modal, dan optimisasi portofolio; (2) bidang manufaktur: penjadwalan produksi, pencampuran produk yang melibatkan pengalokasian dan pengkombinasikan material kasar pada jenis dan tingkat yang berbeda, dan pemotongan bahan; (3) bidang distribusi dan jaringan: penetapan trayek, pemuatan barang dan penjadwalan pekerja [1]. Pemrograman disini mempunyai arti memilih serangkaian tindakan. Kemungkinan yang ada dalam program nonlinier yaitu: (1) fungsi tujuan dan kendala nonlinier, (2) fungsi tujuan nonlinier dan kendala linier, dan (3) fungsi tujuan linier dan kendala nonlinier. Beberapa metode penyelesaiannya secara analitik antara lain: pengali Lagrange, Kuhn-Tucker, kuadratik, separable programming, gradient search method, dan feasible direction.

Pemrograman nonlinier termasuk kategori "sulit", sehingga pada umumnya pembahasannya dibatasi dengan fungsi-fungsi dalam kendala linier. Suatu pemahaman yang benar dari optimisasi dapat diperoleh hanya melalui studi algoritma optimisasi dan menggabungkan dengan teori matematika. Akan tetapi bagi mahasiswa yang tidak mendapatkan matematika secara mendalam, mereka dapat memperoleh pemahaman secara konseptual melalui bagaimana software optimisasi bekerja. Beberapa program komputer yang tersedia untuk menyelesaikannya antara lain: Winplot, Maple, Matlab dan Excel. Dalam penelitian ini digunakan spreadsheet Excel untuk membahas ketiga kemungkinan diatas. Kegunaan spreadsheet sebagai *cognitive tool* antara lain: (1) meningkatkan pemahaman pembelajar akan algoritma atau model matematika yang digunakan, karena mereka dapat mengidentifikasi nilai-nilai dan membangun rumus untuk menghubungkan nilai-nilai dalam spreadsheet, (2) meningkatkan pemahaman pembelajar akan penghitungan/ kalkulasi (sebab-akibat), karena mereka secara aktif terlibat dalam mengidentifikasi hubungan antar komponen penghitungan, dan (3) meningkatkan pemahaman pembelajar akan alasan-alasan yang abstrak yang diperlukan dalam mengidentifikasi hubungan dan pola dalam data [2].

Implementasi pada optimisasi dan analisis sensitivitas digunakan untuk menganalisis karakteristik tiap kemungkinan dari ketiga kemungkinan yang ada dalam progam nonlinier.

## 2. MODEL MATEMATIKA

Bentuk umum model matematika program nonlinier yaitu [3]:

Max (atau Min) $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Kendala:

$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ (\leq, =, \geq)\ b_1$

$g_2(x_1, x_2, ..., x_n)\ (\leq, =, \geq)\ b_2$

.

.

.

$g_m(x_1, x_2, ..., x_n)\ (\leq, =, \geq)\ b_m$

dimana $f(x_j)$ dan $g_i\ (x_j)$ untuk $i=1, 2, ..., m$ dan $j=1,2, ..., n$ bernilai riil dan salah satu atau keduanya merupakan fungsi nonlinier dengan n variabel.

## 3. OPTIMISASI DAN ANALISIS SENSITIVITAS

### 3.1. Optimisasi

Pada program nonlinier, optimisasi terjadi pada saat garis fungsi tujuan menyentuh garis batas (kendala), dan ini berarti bahwa hasil optimal dapat diperoleh disebarang garis batas. Jenis–jenis optimisasi yaitu global dan lokal. Penyelesaian global terjadi pada saat tidak ada penyelesaian fisibel yang lain yang lebih baik dari nilai fungsi tujuan. Penyelesaian lokal terjadi pada saat tidak ada penyelesaian fisibel yang lain pada area tertentu/khusus yang lebih baik dari nilai fungsi tujuan. Dalam masalah optimisasi konvek, sebuah penyelesaian lokal juga merupakan penyelesaian global. Ini termasuk masalah-masalah program nonlinier yang fungsi tujuannya konvek (jika minimalisasi; konkaf jika maksimalisasi) dan kendala-kendalanya membentuk sebuah himpunan konvek.

### 3.2. Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas merupakan studi tentang pengaruh perubahan data terhadap solusi optimal. Perubahan data dikaitkan dengan perubahan pada koefisien-koefisien fungsi tujuan dan nilai pada ruas kanan kendala dalam model program nonlinier setelah solusi optimal tercapai. Karena itu analisis sensitivitas sering disebut sebagai analisis pasca optimisasi. Dengan menggunakan analisis sensitivitas, kita dapat menjawab pertanyaan berikut: (1) bagaimana perubahan koefisien dalam fungsi tujuan mempengaruhi solusi optimal, dan (2) bagaimana perubahan dalam sisi kanan kendala mempengaruhi solusi optimal. Alasan utama mengapa analisis sensitivitas penting bagi para pengambil keputusan adalah karena masalah dunia nyata merupakan lingkungan yang dinamis.

## 4. PEMBAHASAN

Kemungkinan I: Fungsi tujuan dan kendala nonlinier.
Contoh:

Maksimumkan $Z = 2x_1^2+5x_2^2+x_1x_2+x_2x_3+10x_3+1($

Kendala:

$x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 1000$

$2x_1 + 8x_2^2 + 9x_3 \leq 3000$

$3x_1 + 10x_3 \leq 400$

dan $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

*Tabel 1. Optimisasi*

| Z = 5006,346391 | | |
|---|---|---|
| Peubah | Nilai | Reduced Gradient |
| $X_1$ | 30,8384747 | 0 |
| $X_2$ | 18,24002101 | 0 |
| $X_3$ | 30,74845759 | 0 |

Dari Tabel 1, nilai fungsi tujuan (Z) yang diperoleh adalah 5006,346391. Nilai tersebut merupakan nilai optimal global. Hal ini dapat dibuktikan dengan fungsi tujuannya konvek dan kendala-kendalanya membentuk sebuah himpunan konvek. Secara matematik, fungsi $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ dikatakan konvek jika $f''(x)$ kontinu pada $[x', x'']$ dan $f''(x) \geq 0$ untuk $x' \leq x \leq x''$ atau dalam pengertian lain untuk sebarang $x' \in S$ dan $x'' \in S$, maka $f[cx'+(1-c)x''] \leq cf(x')+(1-c)f(x'')$ untuk $0 \leq c \leq 1$ [3].

Melalui Excel report, dapat diketahui reduced gradient untuk tiap-tiap peubah adalah nol. Hal ini menyatakan bahwa jika kita mencoba menambah 1 unit produk pada satu atau beberapa peubah, maka hal ini tidak akan mempengaruhi nilai fungsi tujuan dan nilai peubah. Nilai fungsi tujuan tersebut sudah merupakan yang paling maksimal/nilai maksimal global.

*Tabel 2. Analisis Sensitivitas Awal untuk Seluruh Kendala*

| Kendala | Lagrange Multiplier |
|---|---|
| 1 | 2,178373232 |
| 2 | 0,828565151 |
| 3 | 1,860456116 |

*Tabel 3. Analisis Sensitivitas untuk Perubahan Kendala 1*

| Kendala | Lagrange Multiplier | Peubah | Penambahan RHS kendala 1 sebesar 100 unit |
|---|---|---|---|
| | | | Z = 5223,738051 |
| 1 | 2,169679191 | $x_1$ | 32,42659631 |
| 2 | 0,8323608 79 | $x_2$ | 18,24382984 |
| 3 | 1,858290262 | $x_3$ | 30,27202111 |

*Tabel 4. Analisis Sensitivitas untuk Perubahan Kendala 2*

| Kendala | Lagrange Multiplier | Peubah | Penambahan RHS kendala 2 sebesar 100 unit |
|---|---|---|---|
| | | | Z = 5306,781793 |
| 1 | 2,173346678 | $x_1$ | 32,42133803 |
| 2 | 0,828548906 | $x_2$ | 18,58324156 |
| 3 | 1,895295559 | $x_3$ | 30,27359859 |

*Tabel 5. Analisis Sensitivitas untuk Perubahan Kendala 3*

| Kendala | Lagrange Multiplier | Peubah | Penambahan RHS kendala 3 sebesar 100 unit |
|---|---|---|---|
| | | | Z= 5493,131987 |
| 1 | 2,171235293 | $x_1$ | 32,27078481 |
| 2 | 0,865793203 | $x_2$ | 18,27768294 |
| 3 | 1,831430914 | $x_3$ | 40,31876456 |

Pada Tabel 3 dapat dilihat penambahan RHS (*Right Hand Side*)/sisi kanan kendala 1 sebesar 100 unit akan menambah nilai fungsi tujuan sebesar 217,39166. Pada Tabel 4 dapat dilihat penambahan sisi kanan kendala 2 sebesar 100 unit akan menambah nilai fungsi tujuan sebesar 83,043742 . Pada Tabel 5 dapat dilihat penambahan sisi kanan kendala 3 sebesar 100 unit akan menambah nilai fungsi tujuan sebesar 186,350194. Perubahan RHS tersebut dilakukan secara kontinu. Artinya dari perubahan RHS kendala 1 dilanjutkan ke perubahan kendala 2 dst, tanpa mengubah terlebih dulu RHS kendala 1 ke nilai awal.

Lagrange multiplier menunjukkan perubahan (yang mungkin) pada nilai fungsi tujuan $f(x_j)$ bila ada perubahan pada RHS, dimana semua variabel lain tetap. Jika lagrange multiplier positip, berarti ada kenaikan pada nilai fungsi tujuan. Jika lagrange multiplier negatip, berlaku sebaliknya [4]. Pada kasus di atas, jika setiap terjadi perubahan RHS pada setiap kendala, maka nilai lagrange multipliernya juga berubah.

Kemungkinan II: Fungsi tujuan nonlinier dan kendala linier

Contoh:

Minimumkan $Z = 60 - x_1 - 1.2x_2 + 0.05x_1^2 + 0.1x_1x_2 + 0.07x_2^2$

Kendala:
$$x_1 + x_2 \geq 25$$
$$x_1 - x_2 \geq 6$$
dan $x_1, x_2 \geq 0$

Dari Tabel 6, nilai fungsi tujuan (Z) yang diperoleh adalah 65,75. Nilai tersebut merupakan nilai yang paling minimum/ minimum global. Secara matematik, pembahasannya analog dengan kemungkinan I. Melalui Excel report, dapat diketahui reduced gradient untuk tiap-tiap peubah adalah nol. Hal ini menyatakan bahwa jika dicoba untuk menambah/mengurangi 1 unit produk pada satu atau beberapa peubah, maka hal ini tidak akan mempengaruhi nilai fungsi tujuan dan nilai peubah.

*Tabel 6. Optimisasi*

| Z= 65,75 | | |
|---|---|---|
| Peubah | Nilai | Reduced Gradient |
| $x_1$ | 20 | 0 |
| $x_2$ | 5 | 0 |

*Tabel 7. Analisis Sensitivitas Awal Seluruh Kendala*

| Kendala | Lagrange Multiplier |
|---|---|
| 1 | 1,500000954 |
| 2 | 0 |

*Tabel 8. Analisis Sensitivitas untuk Perubahan Kendala 1*

| Kendala | Lagrange Multiplier | Peubah | Penambahan RHS kendala 1 sebesar 10 unit |
|---|---|---|---|
| | | | Z = 85,75 |
| 1 | 2,500001431 | $x_1$ | 29,99999927 |
| 2 | 0 | $x_2$ | 5,000000728 |

*Tabel 9. Analisis Sensitivitas untuk Perubahan Kendala 2*

| Kendala | Lagrange Multiplier | Peubah | Penambahan RHS kendala 2 sebesar 1 unit |
|---|---|---|---|
| | | | Z = 65,75 |
| 1 | 1,500000954 | $x_1$ | 20 |
| 2 | 0 | $x_2$ | 5 |

Pada Tabel 8 dapat dilihat penambahan RHS (right hand side)/sisi kanan kendala 1 sebesar 10 unit akan menambah nilai fungsi tujuan sebesar 20. Pada Tabel 9 dapat dilihat bahwa penambahan RHS kendala dua sebesar 1 unit tidak mempengaruhi nilai fungsi tujuan dan nilai peubah. Jika dilakukan pengurangan RHS-pun juga tidak akan mempengaruhi keduanya. Hal ini dikarenakan nilai lagrange multiplier pada kendala dua adalah nol. Perubahan RHS tersebut dilakukan secara diskontinu. Artinya dari perubahan RHS kendala 1 dilanjutkan ke perubahan kendala 2, dengan mengubah terlebih dulu RHS kendala 1 ke nilai awal.

Kemungkinan III: Fungsi tujuan linier dan kendala nonlinier

Contoh: Maksimumkan $z = x_1 + x_2$

Kendala:
$$x_2x_1 - 2x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$
dan $x_1, x_2 \geq 0.$

Dari Tabel 10, nilai fungsi tujuan (Z) yang diperoleh adalah 12. Nilai tersebut merupakan nilai yang paling maksimum. Secara matematik, pembahasannya analog dengan kemungkinan I.

*Tabel 10. Optimisasi*

| Z = 12 | | |
|---|---|---|
| Peubah | Nilai | Reduced Gradient |
| $x_1$ | 0 | -0,5 |
| $x_2$ | 12 | 0 |

*Tabel 11. Analisis Sensitivitas Awal Seluruh Kendala*

| Kendala | Lagrange Multiplier |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0,5 |

*Tabel 12. Analisis Sensitivitas untuk Perubahan Kendala 1*

| Kendala | Lagrange Multiplier | Peubah | Penambahan RHS kendala 1 sebesar 3 unit |
|---|---|---|---|
| | | | Z = 12 |
| 1 | 0 | $x_1$ | 0 |
| 2 | 0,5 | $x_2$ | 12 |

*Tabel 13. Analisis Sensitivitas untuk Perubahan Kendala 2*

| Kendala | Lagrange Multiplier | Peubah | Penambahan RHS kendala 2 sebesar 10 unit |
|---|---|---|---|
| | | | Z = 17 |
| 1 | 0 | $x_1$ | 0 |
| 2 | 0,5 | $x_2$ | 17 |

Pada Tabel 12 dapat dilihat penambahan RHS (*right hand side*)/sisi kanan kendala 1 sebesar 3 unit tidak akan menambah nilai fungsi tujuan. Hal ini diperoleh dari nilai lagrange multiplier/pengali lagrange pada kendala 1 adalah nol (Tabel 11).

Pada Tabel 13 dapat dilihat bahwa penambahan RHS kendala dua sebesar 10 unit mempengaruhi nilai fungsi tujuan sebesar 5. Perubahan RHS tersebut dilakukan secara diskontinu. Artinya dari perubahan RHS kendala 1 dilanjutkan ke perubahan kendala 2, dengan mengubah terlebih dulu RHS kendala 1 ke nilai awal.

## 5. PENUTUP

Beberapa karakteristik optimisasi dan analisis sensitivitas pemrograman nonlinier pada ketiga kemungkinan diatas yaitu: (1) Matematikanya lebih kacau, (2) Optimisasi global sulit dicapai, dan (3) Pemahaman yang tidak elegan dan estetika yang tidak indah.

Berdasarkan pengalaman penulis, tradisi pengajaran yang telah ada memfokuskan pada optimisasi linier dan mengajarkan optimisasi nonlinier sebagai generalisasi yang tidak menyenangkan dari kasus linier. Hal ini dapat juga dilihat melalui buku-buku teks yang menyajikan bab optimisasi linier dahulu dan kemudian diikuti dengan optimisasi nonlinier. Urutan ini akan tepat untuk perspektif mahasiswa teknik. Akan tetapi, bagi mahasiswa bisnis (misal: sistem informasi) optimisasi linier sebagai sebuah kasus khusus tingkat lanjut dari optimisasi nonlinier. Hal ini dikarenakan optimalitas dan analisis sensitivitas optimisasi linier lebih kompleks. Dari perspektif pengguna akhir, keuntungan optimisasi nonlinier yaitu: (1) secara konseptual lebih sederhana dan lebih mudah dimengerti, (2) sebagai batu loncatan ke teknik optimisasi linier yang lebih kompleks, (3) memberikan peluang akan perpaduan yang kuat dengan matakuliah lain di bidang bisnis, dan (4) merupakan alat yang multi fungsi sehingga cocok bagi orang bisnis yang mempelajari hal-hal yang umum.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] Anonim, *Solver Tutorial for Optimization Users*, 2005, www.solver.com/tutorial.htm
[2] Jonassen, D & Carr, C., *Mindtools: Computers as tools for learning*, 2005, www.ed.psu.edu/insys/400/Mindtools.htm -13k.
[3] Winston, W.L., *Operation Research: Application and Algorithms*, California: International Thomson Publishing, 1994.
[4] Kusnanto, B.A., *Diktat Kuliah Program NonLinier*, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Kristen Satya Wacana, 2002.