

Sistem Linier

Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linier

Definisi

- Persamaan linear adalah kalimat matematika terbuka yang variabel-variabelnya berpangkat tertinggi 1 dan ruas-ruasnya dihubungkan dengan tanda “=” (sama dengan).
- Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari beberapa variabel.

Contohnya adalah :

$$3x + 2y - z = 1$$

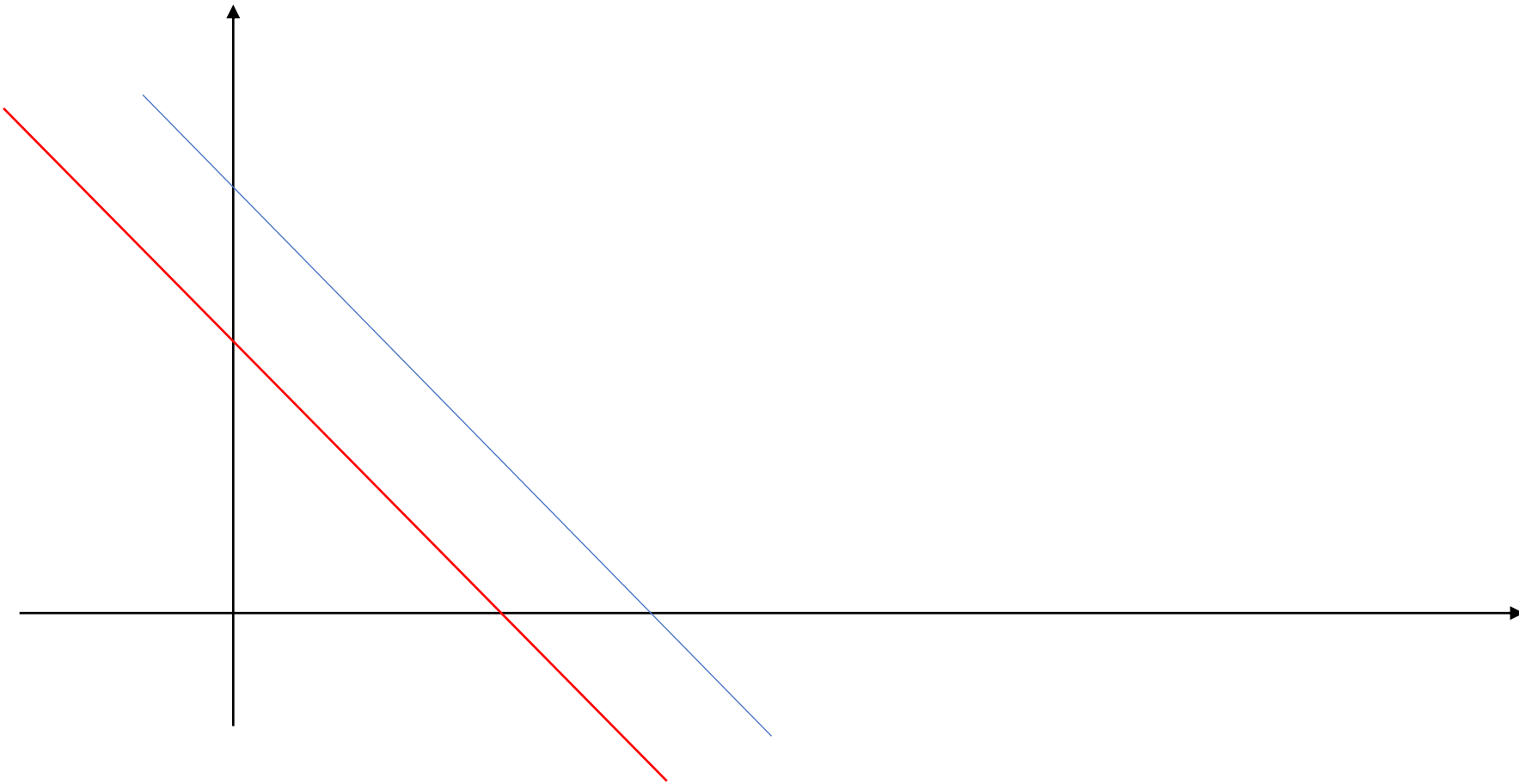
$$2x - 2y + 4z = -2$$

$$-x + 4y - z = 0$$

- Tidak semua sistem persamaan linear memiliki penyelesaian, sistem persamaan linear yang memiliki penyelesaian memiliki dua kemungkinan, yaitu penyelesaian tunggal dan penyelesaian banyak. Jika sistem penyelesaian linear tidak mempunyai penyelesaian maka grafiknya berupa dua garis yang saling sejajar.

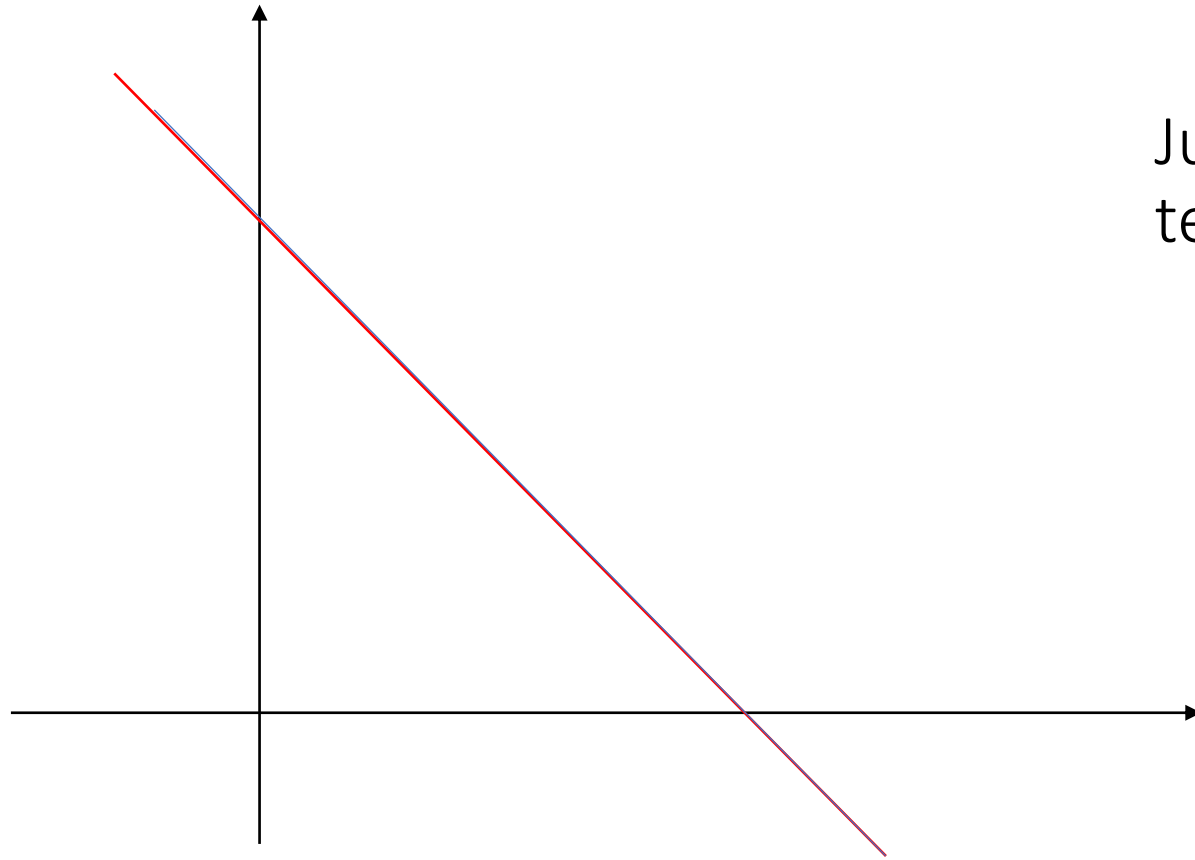
Persamaan linier yang tidak memiliki penyelesaian (Garis sejajar)

$$x + y = 2 \text{ dan } 2x + 2y = 6$$



Persamaan linier yang tidak memiliki penyelesaian banyak (Garis berimpit)

$$x + y = 4 \text{ dan } 2x + 2y = 8$$



Jumlah Penyelesaian tak
terbatas

Penyelesaian sistem persamaan linier

Dalam penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel terdapat berbagai metode, yaitu :

- eliminasi
- substitusi
- eliminasi dan substitusi
- grafik
- eliminasi Gaus-Jordan
- determinan.

Metode Eliminasi

Contoh : Carilah penyelesaian persamaan $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$

- Eliminasi variabel x dari persamaan (1) dan (2)
- $x + y = 2 \mid \times 4 \rightarrow 4x + 4y = 8$
- $4x + 2y = 7 \mid \times 1 \rightarrow 4x + 2y = 7$
- Dan selanjutnya
- Diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\{(3/2, 1/2)\}$

Metode Substitusi

Substitusi artinya mengganti atau menempatkan. Cara substitusi dalam menyelesaikan sistem persamaan linear berarti mengganti variabel yang satu dengan variabel lain sesuai dengan persamaan yang diberikan

Contoh : Carilah penyelesaian persamaan $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ dengan substitusi

- Dari persamaan 1 $\rightarrow y = 2 - x$
- Substitusikan ke persamaan 2 $\rightarrow 4x + 2(2 - x) = 7$
- Dan seterusnya

Metode eliminasi dan substitusi

Cara menyelesaikan dengan metode eliminasi substitusi adalah dengan menghilangkan atau membuang suatu persamaan kemudian mengganti variabel yang satu dengan yang lain.

Contoh : Carilah penyelesaian persamaan $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ dengan eliminasi dan substitusi

- Eliminasi variabel x dari persamaan (1) dan (2)
- $x + y = 2 \mid \times 4 \rightarrow 4x + 4y = 8$
- $4x + 2y = 7 \mid \times 1 \rightarrow 4x + 2y = 7$
- Dan selanjutnya

Metode Grafik

Grafik dari persamaan linear dua variabel berbentuk garis lurus.

Contoh : Carilah penyelesaian persamaan $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ dengan metode grafik

Untuk menyelesaikan soal diatas maka gambar kedua garis lurus tersebut dan dicari titik potong antara kedua garis tersebut

- Gambar garis $x + y = 2$ pada koordinat kartesius
- Gambar garis $4x + 2y = 7$ pada koordinat kartesius
- Temukan titik potong kedua garis tersebut

Metode eliminasi Gaus-Jordan

Hal yang dapat digunakan untuk menyederhanakan permasalahan adalah dengan mengubah sistem persamaan linear ke dalam bentuk matriks. Setelah diubah ke bentuk matriks, maka matriks tersebut diubah ke dalam bentuk eselon baris untuk mendapatkan penyelesaian dari sistem persamaan linear. Untuk mendapatkan matriks eselon baris disebut sebagai eliminasi Gauss-Jordan. Pada proses eliminasi tersebut, operasi yang digunakan disebut operasi baris elementer.

Contoh : Carilah penyelesaian persamaan $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$

$$\left\{ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{array} \right\} \quad // \text{ matrik sistem linear dibuat menjadi matrik identitas}$$

$$b_2 - 4b_1 \left\{ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \right\} \quad // \text{ baris 2 diubah sehingga baris 2 kolom 1 = 0 menggunakan } b_2 - 4b_1$$

$$b_1 + 1/2 b_2 \left\{ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \right\} \quad // \text{ baris 1 diubah sehingga baris 1 kolom 2 = 0 menggunakan } b_1 + 1/2 b_2$$

$$b_2 / -2 \left\{ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right\} \rightarrow x = 3/2 \text{ dan } y = 1/2 \quad // \text{ baris 2 diubah sehingga baris 2 kolom 1 = 1 menggunakan } b_2 / -2$$

Metode Gauss Jordan 3 variabel

Cari penyelesaian persamaan berikut:

$$x + 2y - z = 3$$

$$2x + y + z = 12 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 12 \\ 3 & -1 & 1 & 11 \end{array} \right\}$$

$$3x - y + z = 11$$

Metode Determinan

Bentuk umum persamaan linier 2 variable:

$$\begin{array}{l} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$D_x = \begin{bmatrix} p & b \\ q & d \end{bmatrix} = pd - bq$$

$$D_y = \begin{bmatrix} a & p \\ c & q \end{bmatrix} = aq - pc$$

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$