

**PENYELESAIAN PROGRAM LINEAR DENGAN  
MENGUNAKAN ALGORITMA TITIK INTERIOR  
DAN METODE SIMPLEKS**



oleh  
**SUPARNO**  
**M0101047**

**SKRIPSI**

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan  
memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS SEBELAS MARET  
SURAKARTA**

**2009**

SKRIPSI  
PENYELESAIAN PROGRAM LINEAR  
DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA TITIK INTERIOR  
DAN METODE SIMPLEKS

yang disiapkan dan disusun oleh

SUPARNO

M0101047

dibimbing oleh

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dra. Diari Indriati, M.Si  
NIP 131 805 431

Titin Sri Martini, S.Si, M.Kom

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji  
pada hari Selasa, tanggal 2 Juni 2009  
dan dinyatakan telah memenuhi syarat.

Anggota Tim Penguji

1. Dr. Sutanto, S.Si, DEA  
NIP 132 149 079
2. Drs. Siswanto, M.Si  
NIP 132 000 805
3. Winita Sulandari, M.Si  
NIP 132 313 063

Tanda Tangan

1. ....
2. ....
3. ....

Surakarta, 2 Juni 2009

Disahkan oleh

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,

Ketua Jurusan Matematika,

Prof. Drs. Sutarno, M.Sc., Ph.D  
NIP 131 649 948

Drs. Kartiko, M.Si  
NIP 131 569 203

## ABSTRAK

Suparno, 2009. **PENYELESAIAN PROGRAM LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN ALGORITMA TITIK INTERIOR DAN METODE SIMPLEKS**, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret

Program linear adalah suatu model yang melibatkan fungsi-fungsi linear dan dapat digunakan dalam pemecahan masalah pengalokasian sumber-sumber terbatas secara optimal. Pokok pikiran menggunakan program linear adalah merumuskan masalah dari informasi yang tersedia, kemudian menerjemahkannya dalam bentuk model matematika. Metode simpleks merupakan algoritma yang efisien untuk menyelesaikan permasalahan program linear. Algoritma titik *interior* merupakan alat baru yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah yang sangat besar.

Tujuan dari penulisan ini adalah menyelesaikan permasalahan program linear yang memuat  $n$  jumlah variabel dan  $m$  jumlah kendala dengan menggunakan kedua metode tersebut. Selanjutnya, ditunjukkan keefisienan algoritma titik *interior* dibandingkan metode simpleks, ditinjau dari banyaknya iterasi untuk menyelesaikan suatu permasalahan.

Berdasarkan hasil penelitian, algoritma titik *interior* lebih efisien jika digunakan setidaknya 93 variabel dan tidak kurang dari 10 kendala untuk kasus maksimisasi dengan semua kendala bertanda kurang dari atau sama dengan ( $\leq$ ).

## ABSTRACT

Suparno, 2009. **THE LINEAR PROGRAM SETTLEMENT USING INTERIOR POINT ALGORITHM AND SIMPLEX METHOD**, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University

Linear program is a program which involves linear functions and can be used in solving problem of limited source allocation optimally. The main ideas used in linear program is defining problem of information provided, and transforming it into mathematical model. Simplex method is one of efficient algorithm for solving problem of linear programming. Interior point algorithm is a new means which can be used to solve these great problems.

The objective of this paper is solving linear programming problem which contain  $n$  variables and  $m$  constraints using those two methods, then, comparing how efficient methods are, by counting the number of iterations for each methods.

Based on the result of research, the interior point algorithm is more efficient if used at least 93 variables and not less than 10 constraints for the maximization case with the constraints has less than or equal sign ( $\leq$ ).

## MOTTO

*“Ketika anak kecil berlatih jalan, ia terjatuh lalu bangun, kemudian terjatuh lagi,  
bangun lagi sampai kemudian ia bisa berjalan dengan sempurna,  
ia tidak kenal menyerah”*

*“Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”*

## PERSEMBAHAN



Karya sederhana ini kupersembahkan untuk :

**Kedua orang tuaku dan orang-orang yang telah  
menanti kelulusanku**

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat ALLAH SWT, karena dengan rahmat dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Skripsi ini tidak akan dapat tersusun tanpa adanya bantuan dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan skripsi ini, terutama kepada :

1. Ibu Dra. Diari Indriati, M.Si, selaku Pembimbing I.
2. Ibu Titin Sri Martini, S.Si, M.Kom, selaku Pembimbing II.

Semua pihak yang telah membantu penulisan skripsi ini, yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Terlepas dari kekurangan yang ada dalam skripsi ini, semoga memberikan manfaat bagi para pembaca.

Surakarta, Mei 2009

Penulis

## DAFTAR ISI

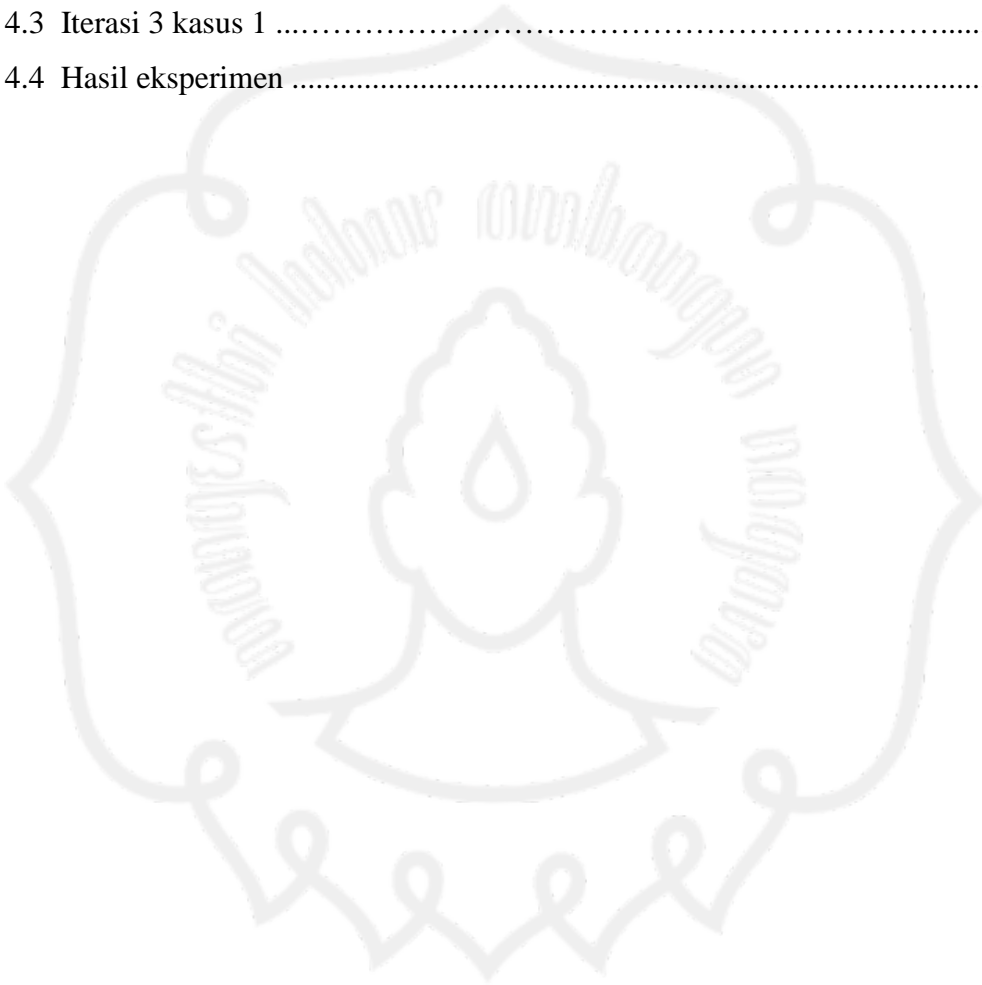
JUDUL .....	i
PENGESAHAN .....	ii
ABSTRAK .....	iii
<i>ABSTRACT</i> .....	iv
MOTTO .....	v
PERSEMBAHAN .....	vi
KATA PENGANTAR .....	vii
DAFTAR ISI .....	viii
DAFTAR TABEL .....	x
DAFTAR LAMPIRAN .....	xi
 <b>I. PENDAHULUAN</b>	 <b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah .....	1
1.2 Perumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan .....	3
1.5 Manfaat .....	3
 <b>II. LANDASAN TEORI</b>	 <b>4</b>
2.1 Tinjauan Pustaka .....	4
2.1.1 Program Linear .....	4
2.1.2 Metode Simpleks .....	6
2.2 Kerangka Pemikiran .....	9
 <b>III. METODE PENELITIAN</b>	 <b>10</b>



<b>IV. PEMBAHASAN</b>	<b>11</b>
4.1 Algoritma Titik Interior .....	11
4.2 Beberapa Contoh Aplikasi Program Linear .....	13
4.3 Hasil Eksperimen .....	31
<b>V. PENUTUP</b>	<b>32</b>
5.1 Kesimpulan .....	32
5.2 Saran .....	32
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	<b>33</b>
<b>LAMPIRAN</b> .....	<b>34</b>

## DAFTAR TABEL

4.1 Iterasi 1 kasus 1 .....	14
4.2 Iterasi 2 kasus 1 .....	14
4.3 Iterasi 3 kasus 1 .....	15
4.4 Hasil eksperimen .....	31



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Penyelesaian Kasus 2 dengan Metode Simpleks .....	34
Lampiran 2. Tabel Nilai Variabel dan Nilai Z pada Tiap Iterasi Kasus 2 dengan Algoritma Titik Interior .....	38
Lampiran 3. Tabel Nilai Variabel dan Nilai Z pada Tiap Iterasi Kasus 3 dengan Metode Simpleks dan Tabel Optimal di Iterasi ke-28 .....	41
Lampiran 4. Tabel Nilai Variabel dan Nilai Z pada Tiap Iterasi Kasus 3 dengan Algoritma Titik Interior .....	43

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Perkembangan yang pesat di bidang ilmu dan teknologi dewasa ini menuntut adanya kemampuan manusia dalam mempertimbangkan segala kemungkinan sebelum mengambil keputusan atau tindakan. Pertimbangan-pertimbangan naluriah atau dengan perkiraan-perkiraan kualitatif yang sederhana pada dasarnya hanya dapat dipertanggungjawabkan untuk keputusan-keputusan sederhana pula. Keputusan-keputusan, terutama di dunia usaha yang mengandung resiko besar tentunya perlu didukung oleh perhitungan-perhitungan yang matang agar resiko kerugian dapat dihindari. Tentu saja pada keadaan tersebut pertimbangan-pertimbangan naluriah saja tidak cukup, sehingga diperlukan peralatan-peralatan, teknik-teknik atau metode-metode kuantitatif yang lebih lengkap untuk memecahkannya.

Dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai permasalahan yang menginginkan suatu penyelesaian secara optimal, hal ini dapat dilihat dari usaha memaksimalkan atau meminimalkan sumber-sumber yang terbatas. Sumber-sumber tersebut antara lain mesin, tenaga kerja, bahan baku, peralatan, dan lain sebagainya. Dengan alasan itulah diperkenalkan riset operasi (*operation research*) yang pada prinsipnya berisi teknik kuantitatif yang banyak dipakai dalam pengambilan keputusan.

Riset operasi berusaha menetapkan arah tindakan terbaik (optimal) dari sebuah masalah keputusan dengan pembatasan sumber daya yang terbatas. Istilah riset operasi sering kali diasosiasikan secara eksklusif dengan penggunaan teknik-teknik matematika untuk membuat model dan menganalisis masalah keputusan. Sebagai teknik pemecahan masalah, riset operasi harus dipandang sebagai ilmu dan seni. Aspek ilmu terletak dalam penyediaan teknik-teknik matematika dan algoritma untuk memecahkan masalah keputusan dengan tepat. Riset operasi

merupakan sebuah seni karena keberhasilan dalam semua tahap sebelum dan sesudah pemecahan dari sebuah model matematika bergantung besar pada kreativitas dan kemampuan pribadi yang menganalisis pengambilan keputusan. Sebuah model keputusan semata-mata merupakan alat untuk meringkaskan sebuah masalah keputusan dengan cara yang memungkinkan identifikasi dan evaluasi yang sistematis terhadap semua alternatif keputusan dari sebuah masalah. Sebuah keputusan dicapai dengan memilih alternatif yang dinilai terbaik diantara semua pilihan yang tersedia.

Menurut Bustani (2005) riset operasi merupakan metode untuk menformulasikan dan merumuskan permasalahan sehari-hari ke dalam pemodelan matematika untuk mendapatkan solusi yang optimal. Salah satu alat riset operasi yang efektif untuk menyelesaikan masalah optimasi adalah pemrograman linear. Program linear banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi di bidang industri, perbankan, pendidikan, dan masalah-masalah lain yang dapat dinyatakan dalam bentuk linear. Bentuk linear berarti bahwa seluruh fungsi dalam model ini merupakan fungsi linear. Pokok pikiran dalam menggunakan program linear adalah dengan merumuskan masalah dari informasi yang tersedia, kemudian menerjemahkannya dalam bentuk model matematika.

Pada penulisan ini, dikaji tentang penyelesaian program linear dengan menggunakan algoritma titik *interior* (*interior point*) dan metode simpleks dari contoh kasus. Selanjutnya, akan dibandingkan keefisienan kedua metode tersebut ditinjau dari banyaknya iterasi untuk menyelesaikan suatu masalah.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, permasalahan yang akan dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah

1. Bagaimana membuat model matematika dari kasus program linear?
2. Bagaimana menentukan penyelesaian dari model matematika tersebut dengan menggunakan algoritma titik *interior* dan metode simpleks?
3. Bagaimana membandingkan keefisienan kedua metode tersebut?

### 1.3 Batasan Masalah

Pembahasan masalah dalam skripsi ini dibatasi oleh hal-hal sebagai berikut

1. Data yang digunakan berupa bilangan bulat.
2. Variabel yang diteliti tidak lebih dari 100.
3. Keefisienan ditinjau dari banyaknya iterasi.
4. Kasus maksimisasi untuk contoh aplikasi.

### 1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. dapat membangun model matematika dari kasus program linear.
2. dapat menentukan penyelesaian dari model matematika dengan menggunakan algoritma titik *interior* dan metode simpleks.
3. dapat membandingkan keefisienan kedua metode tersebut.

### 1.5 Manfaat

Dari penulisan skripsi ini diharapkan dapat meningkatkan pemahaman tentang algoritma titik *interior* dan metode simpleks untuk menyelesaikan suatu permasalahan program linear. Selain itu, hasil kajian ini diharapkan dapat digunakan sebagai salah satu alat bantu dalam studi mengenai persoalan pengalokasian sumber-sumber secara optimal.

## BAB II

### LANDASAN TEORI

#### 2.1 Tinjauan Pustaka

##### 2.1.1 Program Linear

Menurut Subagyo (2000) program linear adalah suatu model umum yang dapat digunakan dalam pemecahan masalah pengalokasian sumber-sumber yang terbatas secara optimal. Program linear mencakup perencanaan kegiatan-kegiatan untuk mencapai hasil yang optimal yaitu suatu hasil yang mencerminkan tercapainya sasaran tertentu yang paling baik (menurut model matematika) diantara alternatif-alternatif yang mungkin dengan menggunakan fungsi linear.

Menurut Bustani (2005) dalam program linear terdapat dua macam fungsi linear sebagai berikut

- a. Fungsi tujuan (*objective function*) yaitu fungsi yang mengarahkan analisis untuk mendeteksi tujuan perumusan masalah.
- b. Fungsi kendala/ batasan (*constraint*) yaitu fungsi yang mengarahkan analisis untuk mengetahui sumber daya yang tersedia dan permintaan atas sumber daya tersebut.

Menurut Bronson (1996) program matematika adalah model optimasi dimana tujuan dan kendala-kendalanya diberikan dalam bentuk fungsi-fungsi matematika dan hubungan fungsional.

Bentuk umum program linear yang memiliki  $n$  variabel dan  $m$  kendala adalah

Optimalkan :  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Kendala :

$$\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ \\ \\ \geq \end{array} \right. \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Permasalahan pemrograman linear dalam bentuk matriks diberikan sebagai berikut

Optimalkan :  $Z = C^T X$

$$\text{Kendala : } AX \left( \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right) B$$

$$X \geq 0$$

$Z$  : fungsi tujuan

$C^T$  : vektor baris dari koefisien fungsi tujuan

$X$  : vektor kolom variabel yang tidak diketahui

$A$  : matriks koefisien kendala

$B$  : vektor kolom ruas kanan kendala

Bentuk umum program linear tersebut harus berada pada bentuk standar.

Perubahan ke bentuk standar dengan cara sebagai berikut

1. Menambahkan variabel *slack* pada setiap persamaan kendala yang mengandung hubungan fungsional ( $\leq$ ).
2. Mengurangkan variabel *surplus* pada setiap persamaan kendala yang mengandung hubungan fungsional ( $\geq$ ).
3. Menambahkan variabel buatan pada setiap persamaan yang mengandung hubungan fungsional ( $\geq$  atau  $=$ ).



Dari bentuk standar, diperoleh tambahan variabel yaitu  $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ .  
Dapat didefinisikan suatu variabel baru yaitu

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

permasalahan program linear berubah menjadi

optimalkan  $Z = C^T \tilde{X}$

harus memenuhi kendala

$$A \tilde{X} = B$$

$$\tilde{X} \geq 0$$

### 2.1.2 Metode Simpleks

Program linear adalah suatu alat yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi suatu model linear dengan keterbatasan-keterbatasan sumber daya yang tersedia. Masalah program linear berkembang pesat setelah ditemukan suatu metode penyelesaian program linear yaitu metode simpleks yang dikemukakan oleh George Dantzig pada tahun 1947. Selanjutnya berbagai alat dan metode dikembangkan untuk menyelesaikan masalah program linear bahkan sampai pada masalah riset operasi seperti pemrograman dinamik, teori antrian, dan teori persediaan hingga tahun 1950an.

Masalah program linear dengan dua variabel dapat diselesaikan dengan menggunakan metode grafik, tetapi untuk model-model dengan tiga variabel atau lebih metode grafik tidak praktis untuk digunakan. Dalam metode grafik diperlihatkan bahwa program linear yang optimal selalu berkaitan dengan titik ekstrim atau titik sudut dari ruang pemecahan, gagasan ini dengan tepat mengatur

pengembangan metode simpleks. Bagaimana metode simpleks mengidentifikasi titik ekstrim (titik sudut) secara aljabar? Sebagai langkah pertama, metode simpleks mengharuskan setiap batasan/ kendala ditempatkan dalam bentuk standar yang khusus dimana semua kendala diekspresikan sebagai persamaan dengan menambahkan variabel *slack* atau variabel *surplus* sebagaimana diperlukan.

Dengan tidak adanya ruang pemecahan grafik untuk menuntun kearah titik optimal, maka diperlukan sebuah prosedur yang mengidentifikasi pemecahan-pemecahan dasar yang menjanjikan secara cerdas. Apa yang dilakukan oleh metode simpleks adalah mengidentifikasi satu pemecahan dasar awal lalu bergerak secara sistematis ke pemecahan dasar lainnya yang memiliki potensi untuk memperbaiki nilai fungsi tujuan. Pada akhirnya, pemecahan dasar yang bersesuaian dengan nilai optimal akan diidentifikasi dan proses akan berhenti. Pada gilirannya, metode simpleks merupakan prosedur perhitungan yang berulang (iteratif) dimana setiap pengulangan (iterasi) berkaitan dengan satu pemecahan dasar.

Berikut diberikan definisi-definisi yang dikutip dari buku Taha (1996)

**Definisi 2.1.1** *Ruang pemecahan adalah daerah pemecahan/ penyelesaian yang memenuhi semua kendala.*

**Definisi 2.1.2** *Pemecahan dasar adalah titik sudut atau titik ekstrim dari ruang pemecahan.*

**Definisi 2.1.3** *Titik optimal adalah titik sudut dari ruang pemecahan yang menyebabkan nilai fungsi tujuan menjadi optimal.*

**Definisi 2.1.4** *Variabel dasar adalah variabel yang nilainya tidak nol dalam tabel simpleks, sebaliknya variabel tidak dasar adalah variabel yang bernilai nol dalam tabel simpleks.*

**Definisi 2.1.5** *Entering variable (ev) adalah variabel tidak dasar yang akan menjadi variabel dasar pada iterasi berikutnya.*

**Definisi 2.1.6** *Leaving variable (lv) adalah variabel dasar yang akan keluar menjadi variabel tidak dasar pada iterasi berikutnya.*

**Definisi 2.1.7** *Elemen pivot adalah elemen yang merupakan irisan antara kolom masuk dan persamaan pivot.*

**Definisi 2.1.8** *Kondisi optimalitas : variabel masuk dalam maksimisasi (minimisasi) adalah variabel nondasar dengan koefisien negatif terkecil (positif terbesar) dalam persamaan tujuan Z.*

**Definisi 2.1.9** *Kondisi kelayakan : untuk masalah maksimisasi maupun minimisasi, variabel keluar adalah variabel dasar yang memiliki titik potong terkecil (rasio minimal dengan penyebut yang positif secara ketat) dalam variabel masuk.*

Langkah-langkah dalam metode simpleks sebagai berikut

**Langkah 0 :**

Dengan menggunakan bentuk standar, ditentukan pemecahan dasar awal yang fisibel.

**Langkah 1 :**

Dipilih  $ev$  diantara variabel nondasar dengan menggunakan kondisi optimalitas.

**Langkah 2 :**

Dipilih  $lv$  dari variabel dasar dengan menggunakan kondisi kelayakan.

**Langkah 3 :**

Ditentukan nilai variabel dasar yang baru dengan membuat  $ev$  tersebut sebagai variabel dasar sedangkan  $lv$  sebagai variabel nondasar. Kembali ke langkah 1.

Setelah  $ev$  dan  $lv$  ditemukan, iterasi berikutnya ditentukan dengan metode Gauss-Jordan. Metode ini menyebabkan adanya perubahan dalam variabel dasar dengan menggunakan dua jenis perhitungan :

Tipe I (persamaan pivot)

Persamaan pivot baru = persamaan pivot lama dibagi elemen pivot

Tipe II (untuk semua persamaan)

Persamaan baru = persamaan lama dikurangi (koefisien kolom masuk dikalikan persamaan pivot baru)

Menurut Bronson (1996) apabila terdapat fungsi kendala yang mempunyai hubungan fungsional ( $\geq$  atau  $=$ ) maka dikerjakan dengan menggunakan metode M besar (teknik penalti), adapun aturannya sebagai berikut

Setelah semua kendala linear ditransformasikan menjadi persamaan dengan memperkenalkan variabel-variabel *slack* dan *surplus* sebagaimana diperlukan, perlu ditambahkan lagi sebuah variabel baru, yang disebut variabel buatan (*artificial variable*) pada ruas kiri dari setiap persamaan kendala yang tidak mengandung variabel *slack*. Dengan demikian, tiap persamaan kendala akan mengandung variabel *slack* atau variabel buatan. Dalam pemecahan permasalahan optimasi, variabel-variabel buatan disertakan dalam fungsi tujuan, yaitu dengan koefisien-koefisien negatif yang sangat besar untuk kasus maksimisasi atau dengan koefisien-koefisien positif yang sangat besar untuk kasus minimisasi. Koefisien-koefisien ini dinyatakan oleh  $+M$  atau  $-M$ , dimana  $M$  dipandang sebagai sebuah bilangan positif yang sangat besar, menyatakan hukuman (yang berat) yang dikenakan dalam membuat suatu penetapan satuan pada variabel-variabel buatan. Dalam hal perhitungannya dilakukan secara manual, maka nilai-nilai hukuman tersebut dibiarkan saja sebagai  $\pm M$ , tetapi untuk perhitungan dengan komputer, maka harus ditentukan sebuah nilai bagi  $M$ , biasanya sebuah bilangan yang tiga atau empat kali lebih besar daripada semua bilangan yang terdapat dalam program tersebut.

## 2.2 Kerangka Pemikiran

Suatu permasalahan program linear tentang pengalokasian sumber-sumber yang terbatas secara optimal dapat diturunkan dalam bentuk model matematika dengan terlebih dahulu mendefinisikan variabel-variabel dan tujuannya. Selanjutnya, model matematika tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode simpleks dan algoritma titik *interior*. Selain itu, akan dibandingkan keefisienan kedua metode tersebut ditinjau dari banyaknya iterasi.

### **BAB III**

## **METODE PENELITIAN**

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur dan eksperimen. Langkah-langkah yang dilakukan adalah

1. Mengkaji program linear, algoritma titik *interior* dan metode simpleks.
2. Memberikan beberapa contoh aplikasi program linear.
3. Membuat model matematika, selanjutnya menyelesaikan model tersebut dengan algoritma titik *interior* dan metode simpleks.
4. Aplikasi dengan software TORA sebagai pembanding.
5. Melakukan eksperimen untuk jumlah variabel dan jumlah kendala yang bervariasi.
6. Melakukan analisis hasil penyelesaian.
7. Menarik kesimpulan.

## BAB IV

### PEMBAHASAN

Pada bab ini dikaji mengenai pembuatan model matematika dari contoh aplikasi program linear, penyelesaian model matematika dengan metode simpleks dan algoritma titik *interior*. Selanjutnya, dibandingkan keefisienan metode simpleks dan algoritma titik *interior*.

#### 4.1 Algoritma Titik Interior

Menurut Utama (2005) algoritma titik *interior* yang pertama kali diperkenalkan oleh N. Karmarkar merupakan metode untuk menyelesaikan masalah pemrograman linear. Kemudian metode ini dikembangkan oleh James A. Momoh dengan berdasarkan pada perbaikan kondisi awal sehingga dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dengan pemrograman linear maupun kuadratik.

Para peneliti mengembangkan masalah-masalah program linear dengan  $n$  variabel dimana semua titik ekstrim yaitu  $2^n$  ditemukan sebelum pemecahan optimal ditemukan. Usaha-usaha untuk memperoleh prosedur yang efisien dalam perhitungan dan melintasi bagian *interior* dari ruang pemecahan daripada bergerak secara hati-hati di sepanjang tepi-tepinya seperti yang dilakukan oleh metode simpleks, ketika N. Karmarkar membuat algoritma polinomial waktu, tidak berhasil sampai tahun 1984. Algoritma titik *interior* menawarkan sebuah pandangan baru terhadap pemecahan program linear dimana iterasi dikembangkan untuk menembus *interior* dari ruang pemecahan.

Gagasan dasar dari algoritma titik *interior* adalah memulai dengan mengambil titik *interior* (tidak ekstrim) dalam daerah fisibel, algoritma proses optimasi menghasilkan nilai-nilai *interior* fisibel. Langkah paling penting dalam algoritma ini adalah titik awal dapat ditentukan dahulu, kemudian mencari solusi

optimal dalam *interior* daerah fisibel yang didefinisikan oleh kendala-kendala sampai dicapai titik optimal.

Algoritma ini memiliki konsep atau pemikiran dasar sebagai berikut

Konsep 1 : bergerak melalui daerah fisibel menuju suatu penyelesaian optimal.

Konsep 2 : bergerak dalam arah yang meningkatkan nilai fungsi tujuan dengan tingkat kecepatan yang paling tinggi.

Konsep 3 : mengubah daerah layak tersebut untuk menempatkan penyelesaian percobaan yang sekarang sedekat mungkin pada titik pusatnya dan dengan demikian memungkinkan peningkatan yang besar bilamana melaksanakan konsep 2.

Iterasi dimulai dengan suatu nilai awal ( $\tilde{X}^k$ ) yang memungkinkan, sedemikian sehingga  $A\tilde{X}^k = B$  dengan  $\tilde{X}_j^k > 0$  untuk  $j = 1, 2, \dots, n+m$ . Algoritma proses optimasi menghasilkan nilai-nilai *interior* fisibel yang berurutan yaitu

$$\tilde{X}^1, \tilde{X}^2, \dots, \tilde{X}^k, \tilde{X}^{k+1}, \dots$$

Langkah-langkah algoritma titik *interior* adalah

$$D_{k+1} := \text{diag}(\tilde{X}_j^k)$$

$$A_{k+1} := A D_{k+1}$$

$$C_{k+1} := D_{k+1} C$$

$$P_{k+1} := I - A_{k+1}^T (A_{k+1} A_{k+1}^T)^{-1} A_{k+1}$$

$$Cp_{k+1} := P_{k+1} C_{k+1}$$

$$V_{k+1} := \text{abs}(\min(Cp_{k+1}))$$

$$M_{k+1} := \begin{bmatrix} 1_1 \\ 1_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1_{n+m} \end{bmatrix} + \left( \frac{\alpha}{V_{k+1}} \right) Cp_{k+1}$$

$$\tilde{X}^{k+1} := D_{k+1} M_{k+1}$$

$k$  : jumlah iterasi

$I$  : matriks identitas

Proses iterasi akan berhenti apabila kriteria berhenti (*stopping criterion*) terpenuhi yaitu

Masalah maksimisasi, nilai  $Z_{k+1} = C^T \tilde{X}^{k+1} \leq Z_k = C^T \tilde{X}^k$ . Adapun untuk masalah minimisasi dapat juga diselesaikan dengan algoritma ini, dengan cara membawa masalah minimisasi ke masalah maksimisasi, yaitu dengan menegatifkan fungsi tujuan masalah minimisasi.

## 4.2 Beberapa Contoh Aplikasi Program Linear

### Kasus 1

Ani dan Ima membuat kerajinan berupa tas anyaman dari rotan dan bambu. Satu tas anyaman rotan dapat diselesaikan Ani dalam waktu 2 jam, sedangkan Ima selama 1 jam. Satu tas anyaman dari bambu dapat Ani selesaikan dalam waktu 1 jam, sedangkan Ima dalam waktu 3 jam. Ani bekerja maksimal selama 10 jam/hari dan Ima bekerja maksimal selama 15 jam/hari. Apabila tas-tas tersebut dijual Rp.50.000,00 untuk tas anyaman dari rotan dan Rp.40.000,00 untuk tas anyaman dari bambu. Tentukan jumlah tas dan jenisnya sehingga didapatkan keuntungan maksimal? Anggaplah bahwa semua tas yang dibuat dapat dijual.

Tujuannya adalah memaksimalkan keuntungan (dalam rupiah).

Dengan memisalkan

$x_1$  : jumlah tas anyaman dari rotan yang diproduksi dalam satu hari

$x_2$  : jumlah tas anyaman dari bambu yang diproduksi dalam satu hari

Tas anyaman dari rotan diproduksi sebanyak ( $x_1$ ) mendatangkan keuntungan  $50000x_1$ ; tas anyaman dari bambu diproduksi sebanyak ( $x_2$ ) mendatangkan keuntungan  $40000x_2$ .

Dapat dibentuk formulasi fungsi tujuan sebagai berikut

$$\text{Maksimalkan: } Z = 50000x_1 + 40000x_2$$

Terdapat kendala-kendala pada jumlah waktu yang tersedia untuk pembuatan tas, yang dimodelkan dengan



$$2x_1 + x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 15 \quad (2)$$

Semua variabel tak negatif

Dengan menambahkan variabel kurang ( $x_3, x_4$ ) pada persamaan (1) dan (2) kendala berubah menjadi

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 15$$

Semua variabel tak negatif

fungsi tujuan berubah menjadi

$$\text{Maksimalkan: } Z = 50000x_1 + 40000x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

#### A. Penyelesaian menggunakan metode simpleks

Berdasarkan formulasi pada kasus 1, dibentuk tabel simpleks sebagai berikut

Tabel 4.1 Iterasi 1 kasus 1

Variabel dasar	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Solusi optimal
Z	-50000	-40000	0	0	0
$x_3$	2	1	1	0	10
$x_4$	1	3	0	1	15

Tabel di atas memperlihatkan bahwa nilai negatif terkecil pada baris Z terletak pada kolom  $x_1$  maka  $x_1$  sebagai  $ev$  dan kolom  $x_1$  sebagai kolom masuk. Rasio pembagian nilai kanan dengan kolom masuk terkecil adalah 5 bersesuaian dengan baris  $x_3$ , maka  $x_3$  sebagai  $lv$  dan baris  $x_3$  sebagai persamaan pivot. Elemen pivot adalah 2.

Dengan menggunakan metode Gauss-Jordan diperoleh hasil

Tabel 4.2 Iterasi 2 kasus 1

Variabel dasar	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Solusi optimal
Z	0	-15000	25000	0	250000
$x_1$	1	1/2	1/2	0	5
$x_4$	0	5/2	-1/2	1	10

Berdasarkan tabel di atas maka  $ev$  adalah  $x_2$  dan  $lv$  adalah  $x_4$ . Hasil perhitungan iterasi selanjutnya sebagai berikut

Tabel 4.3 Iterasi 3 kasus 1

Variabel dasar	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Solusi optimal
Z	0	0	22000	6000	310000
$x_1$	1	0	$3/5$	$-1/5$	3
$x_2$	0	1	$-1/5$	$2/5$	4

Karena semua koefisien fungsi tujuan (nilai pada baris Z) tidak ada yang bernilai negatif maka iterasi berhenti (tabel sudah optimal). Diperoleh hasil  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = 4$ ; dengan nilai  $Z = 310000$

Untuk mendapatkan keuntungan maksimal maka jumlah tas anyaman dari rotan yang diproduksi dalam satu hari adalah 3 dan jumlah tas anyaman dari bambu yang diproduksi dalam satu hari adalah 4 dengan keuntungan sebesar Rp.310.000,00

#### B. Penyelesaian menggunakan algoritma titik *interior*

Berdasarkan formulasi pada kasus 1, diperoleh matriks

$$C = \begin{bmatrix} 50000 \\ 40000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}; \alpha = 0.95$$

Proses berhenti jika nilai  $Z(\tilde{X}^{k+1}) \leq Z(\tilde{X}^k)$

Diambil titik awal pemecahan yaitu

$$\tilde{X}^0 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 3, 1, 3)$$

$$Z(\tilde{X}^0) = 270000$$

#### Iterasi 1

$$D_1 = \text{diag}(\tilde{X}^0) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = A D_1$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = D_1 C$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50000 \\ 40000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150000 \\ 120000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = I - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 9 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 9 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19/281 & -21/281 & -51/281 & 44/281 \\ -21/281 & 38/281 & 12/281 & -93/281 \\ -51/281 & 12/281 & 270/281 & 15/281 \\ 44/281 & -93/281 & 15/281 & 235/281 \end{bmatrix}$$

$$Cp_1 = P_1 C_1$$

$$= \begin{bmatrix} 19/281 & -21/281 & -51/281 & 44/281 \\ -21/281 & 38/281 & 12/281 & -93/281 \\ -51/281 & 12/281 & 270/281 & 15/281 \\ 44/281 & -93/281 & 15/281 & 235/281 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150000 \\ 120000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 62242/53 \\ 145516/29 \\ -309395/14 \\ -64911/4 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \text{abs}(\min(Cp_1)) = 309395/14$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{V_1} Cp_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0,95}{309395/14} \begin{bmatrix} 62243/53 \\ 145516/29 \\ -309395/14 \\ -64911/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 978/931 \\ 1657/1363 \\ 1/20 \\ 313/1035 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}^1 = D_1 M_1$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 978/931 \\ 1657/1363 \\ 1/20 \\ 313/1035 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1415/449 \\ 5033/1380 \\ 1/20 \\ 313/345 \end{bmatrix}$$

$$Z(\tilde{X}^1) = 606913/2$$

Karena nilai  $Z(\tilde{X}^1) \geq Z(\tilde{X}^0)$  maka dilakukan iterasi selanjutnya

### Iterasi 2

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1415/449 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5033/1380 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 313/345 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = A D_2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1415/449 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5033/1380 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 313/345 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1519/241 & 5033/1380 & 1/20 & 0 \\ 1415/449 & 5033/460 & 0 & 313/345 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = D_2 C$$

$$= \begin{bmatrix} 1415/449 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5033/1380 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 313/345 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50000 \\ 40000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 315145/2 \\ 145884 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = I - A_2^T (A_2 A_2^T)^{-1} A_2$$

$$= \begin{bmatrix} 60/17849 & -183/32221 & -191/20165 & 1598/28125 \\ -183/32221 & 65/6647 & 39/14656 & -317/3228 \\ -191/20165 & 39/14656 & 10259/10260 & 25/30859 \\ 1598/28125 & -317/3228 & 25/30859 & 227/230 \end{bmatrix}$$

$$Cp_2 = P_2 C_2 = \begin{bmatrix} -33772/113 \\ 13291/25 \\ -36442/33 \\ -42987/8 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \text{abs}(\min(Cp_2)) = 42987/8$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{V_2} Cp_2 = \begin{bmatrix} 1201/1268 \\ 1548/1415 \\ 169/210 \\ 1/20 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}^2 = D_2 M_2 = \begin{bmatrix} 2773/929 \\ 395/99 \\ 169/4200 \\ 313/6900 \end{bmatrix}$$

$$Z(\tilde{X}^2) = 617685/2$$

Karena nilai  $Z(\tilde{X}^2) \geq Z(\tilde{X}^1)$  maka dilakukan iterasi selanjutnya

### Iterasi 3

$$D_3 = \begin{bmatrix} 2773/929 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 395/99 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 169/4200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 313/6900 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3367/564 & 395/99 & 169/4200 & 0 \\ 2773/929 & 395/33 & 0 & 313/6900 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 298493/2 \\ 159596 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 5/66978 & -5/165929 & -82/10139 & 61/20072 \\ -5/165929 & 5/202033 & 78/38677 & -151/33205 \\ 61/20072 & 78/38677 & 14391/14392 & 1/29627 \\ 61/20072 & -151/33205 & 1/29627 & 33424/33425 \end{bmatrix}$$

$$Cp_3 = \begin{bmatrix} 2001/316 \\ -737/1346 \\ -23900/27 \\ -12521/46 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = 23900/27$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1037/1030 \\ 1701/1702 \\ 1/20 \\ 899/1270 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{X}^3 = \begin{bmatrix} 2305/767 \\ 2564/643 \\ 24/11929 \\ 211/6571 \end{bmatrix}$$

$$Z(\tilde{X}^3) = 309763$$

Karena nilai  $Z(\tilde{X}^3) \geq Z(\tilde{X}^2)$  maka dilakukan iterasi selanjutnya

**Iterasi 4** menghasilkan

$$\tilde{X}^4 = \begin{bmatrix} 4817/1606 \\ 12207/3052 \\ 47/29883 \\ 32/19931 \end{bmatrix}$$

$$Z(\tilde{X}^4) = 309956$$

Karena nilai  $Z(\tilde{X}^4) \geq Z(\tilde{X}^3)$  maka dilakukan iterasi selanjutnya

**Iterasi 5** menghasilkan

$$\tilde{X}^5 = \begin{bmatrix} 15874/5291 \\ 8759/2190 \\ 6/76297 \\ 16/13549 \end{bmatrix}$$

$$Z(\tilde{X}^5) = 309991$$

karena nilai  $Z(\tilde{X}^5) \geq Z(\tilde{X}^4)$  maka dilakukan iterasi selanjutnya

**Iterasi 6** menghasilkan

$$\tilde{X}^6 = \begin{bmatrix} 122798/40933 \\ 346667/86667 \\ 5/82784 \\ 4/67745 \end{bmatrix}$$

$$Z(\tilde{X}^6) = 929995/3$$

karena nilai  $Z(\tilde{X}^6) \geq Z(\tilde{X}^5)$  maka dilakukan iterasi selanjutnya

**Iterasi 7** menghasilkan

$$\tilde{X}^7 = \begin{bmatrix} 428203/142734 \\ 234851/58713 \\ 1/331136 \\ 38/861879 \end{bmatrix}$$

$$Z(\tilde{X}^7) = 929999/3$$

karena nilai  $Z(\tilde{X}^7) \geq Z(\tilde{X}^6)$  maka dilakukan iterasi selanjutnya

**Iterasi 8** menghasilkan

$$\tilde{X}^8 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1/434898 \\ 2/907241 \end{bmatrix}$$

$$Z(\tilde{X}^8) = 310000$$

karena nilai  $Z(\tilde{X}^8) \geq Z(\tilde{X}^7)$  maka dilakukan iterasi selanjutnya

**Iterasi 9** menghasilkan

$$\tilde{X}^9 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1/8697961 \\ 1/603538 \end{bmatrix}$$

$$Z(\tilde{X}^9) = 310000$$

Ternyata nilai  $Z(\tilde{X}^9) \leq Z(\tilde{X}^8)$  dan kriteria pemberhentian terpenuhi maka iterasi berhenti. Diperoleh hasil  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = 4$ ; dengan nilai  $Z = 310000$

Untuk mendapatkan keuntungan maksimal maka jumlah tas anyaman dari rotan yang diproduksi dalam satu hari adalah 3 dan jumlah tas anyaman dari bambu yang diproduksi dalam satu hari adalah 4 dengan keuntungan sebesar Rp.310.000,00

## Kasus 2

Sebuah perusahaan penyulingan minyak Aztec Refining Company memproduksi dua jenis minyak bensin, biasa dan premium yang tidak mengandung timah hitam. Kedua jenis minyak bensin ini dijual ke stasiun-stasiun servisnya dengan harga masing-masing \$12/barel dan \$14/barel. Keduanya dicampurkan dengan minyak sulingan dalam negeri dan luar negeri dan harus memenuhi spesifikasi-spesifikasi sebagai berikut

	Tekanan Uap Maksimal	Kadar Oktan Minimal	Permintaan Maksimal (barel/ minggu)	Penawaran Minimal (barel/ minggu)
Biasa	23	88	100000	50000
Premium	23	93	20000	5000

Ciri-ciri dari berbagai minyak sulingan dalam persediaan sebagai berikut

	Tekanan Uap	Kadar Oktan	Investasi (barel)	Biaya \$/bbl
Dalam negeri	25	87	40000	8
Luar negeri	15	98	60000	15

Berapakah banyaknya jumlah dari kedua minyak sulingan di atas yang harus dicampurkan oleh perusahaan Aztec ke dalam kedua jenis bensin di atas agar keuntungan mingguannya maksimal?

Misalkan

$x_1$  : jumlah minyak dalam negeri yang dicampurkan ke dalam bensin biasa

$x_2$  : jumlah minyak luar negeri yang dicampurkan ke dalam bensin biasa



$x_3$  : jumlah minyak dalam negeri yang dicampurkan ke dalam bensin premium

$x_4$  : jumlah minyak luar negeri yang dicampurkan ke dalam bensin premium

Bensin biasa akan diproduksi sebanyak  $(x_1 + x_2)$  yang akan mendatangkan pendapatan sebesar  $12(x_1 + x_2)$ ; bensin premium akan diproduksi sebanyak  $(x_3 + x_4)$  yang akan mendatangkan pendapatan sebesar  $14(x_3 + x_4)$ .

Minyak dalam negeri akan digunakan  $(x_1 + x_3)$  yang menghabiskan biaya sebesar  $8(x_1 + x_3)$ ; minyak luar negeri akan digunakan  $(x_2 + x_4)$  yang menghabiskan biaya sebesar  $15(x_2 + x_4)$ .

Keuntungan total  $Z$  adalah pendapatan dikurangi biaya pengeluaran.

Jadi fungsi tujuannya adalah

$$\begin{aligned}\text{Maksimalkan: } Z &= 12(x_1 + x_2) + 14(x_3 + x_4) - 8(x_1 + x_3) - 15(x_2 + x_4) \\ &= 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4\end{aligned}\quad (1)$$

Terhadap produksi ini dikenakan pembatasan-pembatasan karena permintaan, tersedianya suplai dan rincian-rincian campuran.

Pembatasan yang ditinjau dari segi permintaan (dalam ribuan) adalah

$$x_1 + x_2 \leq 100 \quad (\text{permintaan maksimal untuk bensin biasa}) \quad (2)$$

$$x_3 + x_4 \leq 20 \quad (\text{permintaan maksimal untuk bensin premium}) \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 \geq 50 \quad (\text{jumlah minimal bensin biasa yang disyaratkan}) \quad (4)$$

$$x_3 + x_4 \geq 5 \quad (\text{jumlah minimal bensin premium yang disyaratkan}) \quad (5)$$

Pembatasan yang ditinjau dari segi persediaan (dalam ribuan) adalah

$$x_1 + x_3 \leq 40 \quad (\text{minyak dalam negeri}) \quad (6)$$

$$x_2 + x_4 \leq 60 \quad (\text{minyak luar negeri}) \quad (7)$$

Unsur-unsur pokok dari suatu campuran menyumbang pada keseluruhan kadar oktan sesuai dengan unsur persentase beratnya masing-masing, demikian pula untuk tekanan uap.

Kadar oktan dari bensin biasa adalah

$$87 \frac{x_1}{x_1 + x_2} + 98 \frac{x_2}{x_1 + x_2}$$

Persyaratan kadar ini harus sekurang-kurangnya 88, maka memberikan hasil

$$87 \frac{x_1}{x_1 + x_2} + 98 \frac{x_2}{x_1 + x_2} \geq 88$$

atau

$$x_1 - 10x_2 \leq 0 \quad (8)$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$6x_3 - 5x_4 \leq 0 \quad (\text{kendala oktan bensin premium}) \quad (9)$$

$$2x_1 - 8x_2 \leq 0 \quad (\text{kendala tekanan uap bensin biasa}) \quad (10)$$

$$2x_3 - 8x_4 \leq 0 \quad (\text{kendala tekanan uap bensin premium}) \quad (11)$$

Dengan menggabungkan (1) hingga (11), maka diperoleh program matematika sebagai berikut

Maksimalkan :  $Z = 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4$

dengan kendala :

$$x_1 + x_2 \leq 100 \quad (12)$$

$$x_3 + x_4 \leq 20 \quad (13)$$

$$x_1 + x_3 \leq 40 \quad (14)$$

$$x_2 + x_4 \leq 60 \quad (15)$$

$$x_1 - 10x_2 \leq 0 \quad (16)$$

$$6x_3 - 5x_4 \leq 0 \quad (17)$$

$$2x_1 - 8x_2 \leq 0 \quad (18)$$

$$2x_3 - 8x_4 \leq 0 \quad (19)$$

$$x_1 + x_2 \geq 50 \quad (20)$$

$$x_3 + x_4 \geq 5 \quad (21)$$

Semua variabel tak negatif

Dengan mengurangi variabel *surplus* ( $x_5, x_6$ ) pada persamaan kendala (20), (21) dan menambahkan variabel *slack* ( $x_7, x_8, \dots, x_{14}$ ) pada persamaan kendala (12), (13), ..., (19) dan menambahkan variabel buatan ( $x_{15}, x_{16}$ ) pada persamaan kendala (20), (21)

fungsi kendala berubah menjadi

$$x_1 + x_2 + x_7 = 100$$

$$x_3 + x_4 + x_8 = 20$$

$$x_1 + x_3 + x_9 = 40$$

$$x_2 + x_4 + x_{10} = 60$$

$$x_1 - 10x_2 + x_{11} = 0$$

$$6x_3 - 5x_4 + x_{12} = 0$$

$$2x_1 - 8x_2 + x_{13} = 0$$

$$2x_3 - 8x_4 + x_{14} = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_5 + x_{15} = 50$$

$$x_3 + x_4 - x_6 + x_{16} = 5$$

Fungsi tujuannya menjadi

$$\begin{aligned} \text{Maksimalkan } Z = & 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} \\ & + 0x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} - Mx_{15} - Mx_{16} \end{aligned}$$

Setelah mengembangkan pemecahan yang fisibel, harus mengkondisikan masalah tersebut sehingga ketika menempatkannya dalam bentuk tabel, kolom sisi kanan akan memberikan pemecahan awal secara langsung. Ini dilakukan dengan menggunakan persamaan batasan untuk mensubstitusikan keluar  $x_{15}$  dan  $x_{16}$  dalam fungsi tujuan

$$x_{15} = 50 - x_1 - x_2 + x_5$$

$$x_{16} = 5 - x_3 - x_4 + x_6$$

Fungsi tujuan berubah menjadi

$$\begin{aligned} Z = & 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + \\ & 0x_{12} + 0x_{13} + 0x_{14} - M(50 - x_1 - x_2 + x_5) - M(5 - x_3 - x_4 + x_6) \\ = & (4+M)x_1 - (-3+M)x_2 + (6+M)x_3 - (-1+M)x_4 - Mx_5 - Mx_6 - 55M \end{aligned}$$

A. Diselesaikan dengan metode simpleks

Berdasarkan formulasi pada kasus 2, langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode simpleks (ada sebanyak 7 iterasi) diberikan pada Lampiran 1.

Karena baris  $Z$  pada iterasi 7 tidak mengandung nilai negatif maka iterasi berhenti. Diperoleh hasil  $x_1 = 37727,3$ ;  $x_2 = 12272,7$ ;  $x_3 = 2272,7$ ;  $x_4 = 2727,3$ ; dengan nilai  $Z = 125000$

Perusahaan Aztec akan menghasilkan  $x_1^* + x_2^* = 50000$  barel minyak bensin biasa yang memiliki tekanan uap 22,5 dengan kadar oktan 89,7. Perusahaan akan menghasilkan  $x_3^* + x_4^* = 5000$  barel minyak bensin premium yang memiliki tekanan uap 19,5 dan kadar oktan sebesar 93,0.

Untuk melakukan usahanya, perusahaan Aztec tersebut akan menggunakan  $x_1^* + x_3^* = 40000$  barel dari investasi dalam negeri dan  $x_2^* + x_4^* = 15000$  barel dari investasi luar negeri.

B. Diselesaikan dengan algoritma titik *interior*

Fungsi tujuan pada kasus 2 adalah

$$Z = (4+M)X_1 - (-3+M)X_2 + (6+M)X_3 - (-1+M)X_4 - MX_5 - MX_6 - 55M$$

Nilai M adalah suatu konstanta yang sangat besar, diambil nilai  $M = 1000$

Berdasarkan model di atas didapatkan matriks

$$C = \begin{bmatrix} 1004 \\ 997 \\ 1006 \\ 999 \\ -1000 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diambil titik awal yaitu

$$\tilde{X}^0 = \begin{bmatrix} 30 \\ 50 \\ 5 \\ 7 \\ 40 \\ 10 \\ 20 \\ 8 \\ 5 \\ 3 \\ 470 \\ 5 \\ 340 \\ 46 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Z(\tilde{X}^0) = -55989$$

Iterasi berhenti jika nilai  $Z(\tilde{X}^{k+1}) \leq Z(\tilde{X}^k)$

Langkah-langkah penyelesaian menggunakan algoritma titik *interior* (ada sebanyak 15 iterasi) diberikan pada Lampiran 2.

Karena pada iterasi 15 nilai  $Z(\tilde{X}^{15}) \leq Z(\tilde{X}^{14})$  maka kriteria pemberhentian terpenuhi. Diperoleh hasil  $x_1 = 38123$ ;  $x_2 = 11877,6$ ;  $x_3 = 1876,7$ ;  $x_4 = 3124,6$ ; dengan nilai  $Z = 125005,9$

Perusahaan Aztec akan menghasilkan  $x_1^* + x_2^* = 50000,6$  barel minyak bensin biasa yang memiliki tekanan uap 22,6 dengan kadar oktan 89,6. perusahaan akan menghasilkan  $x_3^* + x_4^* = 5001,3$  barel minyak bensin premium yang memiliki tekanan uap 18,8 dan kadar oktan sebesar 93,9.

Untuk melakukan usahanyanya, perusahaan Aztec akan menggunakan  $x_1^* + x_3^* = 39999,7$  barel dari investasi dalam negeri dan  $x_2^* + x_4^* = 15002,2$  barel dari investasi luar negeri.

### Kasus 3

Diberikan suatu permasalahan program linear yang memuat 93 variabel dan 10 kendala untuk kasus maksimisasi dengan semua kendala bertanda kurang dari atau sama dengan, sebagai berikut

$$\begin{aligned} \text{Maksimalkan : } Z = & 15x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 16x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 20x_8 + 7x_9 - 3x_{10} \\ & + x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 5x_{15} + 6x_{16} + 7x_{17} + 8x_{18} + 26x_{19} - 6x_{20} + x_{21} \\ & + 2x_{22} + 3x_{23} + 4x_{24} + 5x_{25} + 6x_{26} + 7x_{27} + 8x_{28} + 9x_{29} - 9x_{30} + x_{31} + 2x_{32} \\ & + 3x_{33} + 4x_{34} + 5x_{35} + 6x_{36} + 7x_{37} + 8x_{38} + 9x_{39} - 12x_{40} + x_{41} + 2x_{42} + 3x_{43} \\ & + 4x_{44} + 75x_{45} + 20x_{46} + 7x_{47} + 8x_{48} + 9x_{49} - 3x_{50} + x_{51} + 2x_{52} + 3x_{53} + 4x_{54} \\ & + 5x_{55} + 6x_{56} + 7x_{57} + 8x_{58} + 9x_{59} - 6x_{60} + 55x_{61} + 2x_{62} + 20x_{63} + 4x_{64} + 5x_{65} \\ & + 6x_{66} + 7x_{67} + 8x_{68} + 9x_{69} - 9x_{70} + x_{71} + 2x_{72} + 3x_{73} + 30x_{74} + 12x_{75} + 6x_{76} \\ & + 7x_{77} + 8x_{78} + 9x_{79} - 6x_{80} + x_{81} + 2x_{82} + 3x_{83} + 4x_{84} + 5x_{85} + 6x_{86} + 2x_{87} \\ & + 8x_{88} + 9x_{89} - 3x_{90} + x_{91} + 2x_{92} + 3x_{93} \end{aligned}$$

dengan kendala:

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 6x_9 + 4x_{10} + 2x_{14} + 25x_{16} + 25x_{24} \\ & + x_{25} + 26x_{26} + 20x_{35} + 5x_{43} + 3x_{44} + 2x_{46} + 2x_{47} + 5x_{48} + 20x_{49} + 3x_{50} + 20x_{54} \\ & + 25x_{74} + 4x_{90} + 5x_{91} + 2x_{92} \leq 500 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & 2x_4 + 3x_6 - x_7 + 2x_{10} + x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 6x_{14} + 2x_{15} + 3x_{16} + 4x_{17} + 6x_{18} + 5x_{19} \\ & - 2x_{20} + 6x_{45} + 3x_{57} + 3x_{59} + 3x_{61} + 3x_{75} + 2x_{92} \leq 160 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& 2x_1 + 2x_7 + 2x_9 + 3x_{11} + 2x_{13} + 2x_{15} + 3x_{18} + x_{20} + 2x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} - 3x_{24} + x_{25} \\
& - 2x_{26} + 3x_{27} + 4x_{28} + 2x_{29} + x_{30} + 6x_{42} - 3x_{45} + 6x_{58} + 5x_{60} + 5x_{62} + 7x_{64} + 6x_{76} \\
& - 6x_{77} + 5x_{86} \leq 170
\end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
& 2x_2 + 2x_5 + 4x_8 + 5x_{19} + 2x_{29} + x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} - 3x_{34} - 2x_{35} - x_{36} + 4x_{37} + 2x_{38} \\
& + 3x_{39} - 2x_{40} + 6x_{45} - 6x_{57} + 2x_{61} + 4x_{63} + 3x_{75} + 5x_{77} + 3x_{79} + 2x_{86} \leq 150 \quad (4) \\
& x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 3x_8 + 2x_{11} + x_{12} + 2x_{19} - 2x_{24} + 2x_{26} + x_{40} + 2x_{41} + 3x_{42} - 2x_{43} \\
& + 3x_{44} + 2x_{45} + x_{46} - 2x_{47} + 3x_{48} + 2x_{49} + 3x_{50} + 3x_{57} + 4x_{58} + 6x_{62} + 6x_{64} + 5x_{75} \\
& + 6x_{76} + 4x_{77} + 5x_{78} - 5x_{79} + 4x_{87} \leq 260 \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3x_1 - 2x_4 + x_5 + 3x_7 + 2x_9 + 2x_{10} + 3x_{12} + x_{17} + 2x_{27} + x_{30} + 2x_{32} + 2x_{34} + 6x_{45} \\
& - 2x_{49} + 4x_{51} + x_{52} + 2x_{53} - x_{54} + 3x_{55} + 2x_{56} + 4x_{57} + 5x_{58} - 3x_{59} + 2x_{60} + 3x_{61} \\
& + 4x_{75} + 3x_{77} + 4x_{78} - 6x_{79} - 2x_{87} \leq 280 \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x_1 + 2x_3 + 1x_6 + 3x_7 + 5x_8 + 3x_{10} + 3x_{19} + 3x_{24} + 3x_{28} - 2x_{35} + 3x_{36} + 3x_{37} + 8x_{38} \\
& + 5x_{42} - 2x_{45} + x_{59} + 3x_{60} + 2x_{61} - x_{62} - 3x_{63} + 2x_{64} + 2x_{65} + 1x_{66} + 3x_{67} + 4x_{68} - x_{69} \\
& + 2x_{70} + 5x_{76} \leq 295 \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_8 + 5x_{17} + 5x_{23} + 6x_{25} - 3x_{26} + 3x_{29} + 2x_{31} + 2x_{37} + 5x_{38} + 3x_{41} \\
& + 5x_{45} + 5x_{69} + 2x_{71} + x_{72} + 3x_{73} - 2x_{74} + x_{75} + 3x_{76} + 5x_{77} + x_{78} - 2x_{79} + 3x_{80} \\
& + 2x_{87} \leq 265 \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 1x_5 + 4x_8 - 2x_{16} + 5x_{19} - 4x_{21} + 5x_{22} + 2x_{34} + 3x_{35} + 6x_{40} + 2x_{42} \\
& + 5x_{45} + 3x_{57} + 3x_{58} + 3x_{60} + 6x_{62} + 5x_{78} + 6x_{79} - 2x_{80} + 2x_{81} + 6x_{82} + x_{83} + 3x_{84} \\
& + 4x_{85} + 2x_{86} + 1x_{87} + 3x_{88} + 2x_{89} + 3x_{90} \leq 1000 \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2x_1 + 3x_3 + 5x_5 - 4x_7 + 7x_{41} + 2x_{45} + 4x_{59} + 6x_{60} + 4x_{61} + x_{63} + 6x_{64} + 3x_{75} - 6x_{76} \\
& - 2x_{89} + 3x_{90} + x_{91} + 5x_{92} + 2x_{93} \leq 990 \quad (10)
\end{aligned}$$

Semua variabel tak negatif

Dengan menambahkan variabel *slack* ( $x_{94}, x_{95}, x_{96}, \dots, x_{103}$ ) pada persamaan (1), (2), (3), ..., (10)

kendala berubah menjadi

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 6x_9 + 4x_{10} + 2x_{14} + 25x_{16} + 25x_{24} \\ + x_{25} + 26x_{26} + 20x_{35} + 5x_{43} + 3x_{44} + 2x_{46} + 2x_{47} + 5x_{48} + 20x_{49} + 3x_{50} + 20x_{54} \\ + 25x_{74} + 4x_{90} + 5x_{91} + 2x_{92} + x_{94} = 500$$

$$2x_4 + 3x_6 - x_7 + 2x_{10} + x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 6x_{14} + 2x_{15} + 3x_{16} + 4x_{17} + 6x_{18} + 5x_{19} \\ - 2x_{20} + 6x_{45} + 3x_{57} + 3x_{59} + 3x_{61} + 3x_{75} + 2x_{92} + x_{95} = 160$$

$$2x_1 + 2x_7 + 2x_9 + 3x_{11} + 2x_{13} + 2x_{15} + 3x_{18} + x_{20} + 2x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} - 3x_{24} + x_{25} \\ - 2x_{26} + 3x_{27} + 4x_{28} + 2x_{29} + x_{30} + 6x_{42} - 3x_{45} + 6x_{58} + 5x_{60} + 5x_{62} + 7x_{64} + 6x_{76} \\ - 6x_{77} + 5x_{86} + x_{96} = 170$$

$$2x_2 + 2x_5 + 4x_8 + 5x_{19} + 2x_{29} + x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} - 3x_{34} - 2x_{35} - x_{36} + 4x_{37} + 2x_{38} \\ + 3x_{39} - 2x_{40} + 6x_{45} - 6x_{57} + 2x_{61} + 4x_{63} + 3x_{75} + 5x_{77} + 3x_{79} + 2x_{86} + x_{97} = 150$$

$$x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 3x_8 + 2x_{11} + x_{12} + 2x_{19} - 2x_{24} + 2x_{26} + x_{40} + 2x_{41} + 3x_{42} - 2x_{43} \\ + 3x_{44} + 2x_{45} + x_{46} - 2x_{47} + 3x_{48} + 2x_{49} + 3x_{50} + 3x_{57} + 4x_{58} + 6x_{62} + 6x_{64} + 5x_{75} \\ + 6x_{76} + 4x_{77} + 5x_{78} - 5x_{79} + 4x_{87} + x_{98} = 260$$

$$3x_1 - 2x_4 + x_5 + 3x_7 + 2x_9 + 2x_{10} + 3x_{12} + x_{17} + 2x_{27} + x_{30} + 2x_{32} + 2x_{34} + 6x_{45} \\ - 2x_{49} + 4x_{51} + x_{52} + 2x_{53} - x_{54} + 3x_{55} + 2x_{56} + 4x_{57} + 5x_{58} - 3x_{59} + 2x_{60} + 3x_{61} \\ + 4x_{75} + 3x_{77} + 4x_{78} - 6x_{79} - 2x_{87} + x_{99} = 280$$

$$-x_1 + 2x_3 + x_6 + 3x_7 + 5x_8 + 3x_{10} + 3x_{19} + 3x_{24} + 3x_{28} - 2x_{35} + 3x_{36} + 3x_{37} + 8x_{38} \\ + 5x_{42} - 2x_{45} + x_{59} + 3x_{60} + 2x_{61} - x_{62} - 3x_{63} + 2x_{64} + 2x_{65} + x_{66} + 3x_{67} + 4x_{68} - x_{69} \\ + 2x_{70} + 5x_{76} + x_{100} = 295$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_8 + 5x_{17} + 5x_{23} + 6x_{25} - 3x_{26} + 3x_{29} + 2x_{31} + 2x_{37} + 5x_{38} + 3x_{41} \\ + 5x_{45} + 5x_{69} + 2x_{71} + x_{72} + 3x_{73} - 2x_{74} + x_{75} + 3x_{76} + 5x_{77} + x_{78} - 2x_{79} + 3x_{80} \\ + 2x_{87} + x_{101} = 265$$

$$2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 + 4x_8 - 2x_{16} + 5x_{19} - 4x_{21} + 5x_{22} + 2x_{34} + 3x_{35} + 6x_{40} + 2x_{42} \\ + 5x_{45} + 3x_{57} + 3x_{58} + 3x_{60} + 6x_{62} + 5x_{78} + 6x_{79} - 2x_{80} + 2x_{81} + 6x_{82} + x_{83} + 3x_{84} \\ + 4x_{85} + 2x_{86} + x_{87} + 3x_{88} + 2x_{89} + 3x_{90} + x_{102} = 1000$$



$$2x_1 + 3x_3 + 5x_5 - 4x_7 + 7x_{41} + 2x_{45} + 4x_{59} + 6x_{60} + 4x_{61} + x_{63} + 6x_{64} + 3x_{75} - 6x_{76} \\ - 2x_{89} + 3x_{90} + x_{91} + 5x_{92} + 2x_{93} + x_{103} = 990$$

Semua variabel tak negatif

Fungsi tujuan berubah menjadi

$$Z = 15x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 16x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 20x_8 + 7x_9 - 3x_{10} + x_{11} + 2x_{12} \\ + 3x_{13} + 4x_{14} + 5x_{15} + 6x_{16} + 7x_{17} + 8x_{18} + 26x_{19} - 6x_{20} + x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} \\ + 4x_{24} + 5x_{25} + 6x_{26} + 7x_{27} + 8x_{28} + 9x_{29} - 9x_{30} + x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 4x_{34} \\ + 5x_{35} + 6x_{36} + 7x_{37} + 8x_{38} + 9x_{39} - 12x_{40} + x_{41} + 2x_{42} + 3x_{43} + 4x_{44} + 75x_{45} \\ + 20x_{46} + 7x_{47} + 8x_{48} + 9x_{49} - 3x_{50} + x_{51} + 2x_{52} + 3x_{53} + 4x_{54} + 5x_{55} + 6x_{56} \\ + 7x_{57} + 8x_{58} + 9x_{59} - 6x_{60} + 55x_{61} + 2x_{62} + 20x_{63} + 4x_{64} + 5x_{65} + 6x_{66} \\ + 7x_{67} + 8x_{68} + 9x_{69} - 9x_{70} + x_{71} + 2x_{72} + 3x_{73} + 30x_{74} + 12x_{75} + 6x_{76} + 7x_{77} \\ + 8x_{78} + 9x_{79} - 6x_{80} + x_{81} + 2x_{82} + 3x_{83} + 4x_{84} + 5x_{85} + 6x_{86} + 2x_{87} + 8x_{88} \\ + 9x_{89} - 3x_{90} + x_{91} + 2x_{92} + 3x_{93} + 0x_{94} + 0x_{95} + 0x_{96} + 0x_{97} + 0x_{98} + 0x_{99} \\ + 0x_{100} + 0x_{101} + 0x_{102} + 0x_{103}$$

#### A. Diselesaikan dengan metode simpleks

Berdasarkan formulasi permasalahan di atas, langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode simpleks (ada sebanyak 28 iterasi) diberikan pada Lampiran 3.

Karena baris Z pada iterasi 28 tidak mengandung nilai negatif maka iterasi berhenti. Diperoleh hasil  $x_5 = 204,05$ ;  $x_{21} = 603,36$ ;  $x_{34} = 757,19$ ;  $x_{46} = 454,05$ ;  $x_{59} = 53,33$ ;  $x_{63} = 62,79$ ;  $x_{66} = 430,03$ ;  $x_{77} = 172,79$ ;  $x_{79} = 299,46$ ;  $x_{89} = 153,17$ ; untuk variabel lainnya bernilai nol; dengan nilai  $Z = 25576,83$

#### B. Diselesaikan dengan algoritma titik *interior*

Proses berhenti jika nilai  $Z(\tilde{X}^{k+1}) \leq Z(\tilde{X}^k)$

Berdasarkan formulasi pada kasus 3, langkah-langkah penyelesaian dengan menggunakan algoritma titik *interior* (ada sebanyak 24 iterasi) diberikan pada Lampiran 4.

Karena pada iterasi 24 nilai  $Z(\bar{X}^{24}) \leq Z(\bar{X}^{23})$  maka kriteria pemberhentian terpenuhi. Diperoleh hasil  $x_5 = 115,9$ ;  $x_{21} = 854$ ;  $x_{34} = 432,8$ ;  $x_{46} = 365,3$ ;  $x_{59} = 50,6$ ;  $x_{63} = 236,7$ ;  $x_{66} = 1042,2$ ;  $x_{69} = 89$ ;  $x_{79} = 92,7$ ;  $x_{89} = 14,6$ ; untuk variabel lainnya bernilai nol; dengan nilai  $Z = 24216$ .

### 4.3 Hasil Eksperimen

Untuk menunjukkan keefisienan algoritma titik *interior*, dilakukan 13 percobaan tentang hubungan jumlah variabel dan jumlah kendala dikaitkan dengan jumlah iterasi, diperoleh hasil sebagai berikut

Tabel 4.4 Hasil eksperimen

Jumlah Variabel	Jumlah Kendala	Jumlah Iterasi	
		Simpleks	Titik Interior
100	10	28	25
99	10	28	25
98	10	28	25
95	10	28	25
94	10	28	25
<b>93</b>	<b>10</b>	<b>28</b>	<b>24</b>
92	10	28	38
90	10	28	39
93	9	23	35
93	11	31	25
93	12	31	25
2	2	3	9
4	10	7	15

Berdasarkan tabel di atas, algoritma titik *interior* akan efisien dibandingkan metode simpleks jika digunakan variabel setidaknya 93 dan kendala tidak kurang dari 10 untuk kasus maksimisasi dan semua kendala bertanda  $\leq$ .

## **BAB V**

### **PENUTUP**

#### **5.1 Kesimpulan**

Berdasarkan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut

1. Algoritma titik *interior* dan metode simpleks dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan program linear.
2. Algoritma titik *interior* lebih efisien dibandingkan metode simpleks jika suatu permasalahan program linear memuat setidaknya 93 variabel dengan kendala tidak kurang dari 10 untuk kasus maksimisasi dan semua kendala bertanda  $\leq$ .

#### **5.2 Saran**

Dalam penulisan skripsi ini, telah dilakukan 13 percobaan untuk menunjukkan keefisienan algoritma titik *interior*. Untuk pembahasan lebih lanjut, perlu dilakukan lebih banyak percobaan supaya diperoleh kesimpulan umum tentang keefisienan algoritma titik *interior*.

## DAFTAR PUSTAKA

- Bronson, R. Alih Bahasa : Hans J. Waspakrik. (1996). *Teori dan Soal-Soal Operations Research*. Erlangga. Jakarta.
- Bustani, H. (2005). *Fundamental Operation Research*. PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- Hiller, F.S, and Lieberman, G.J (1990). *Introduction to Operation Research*. McGraw-Hill, Inc. Singapore.
- Subagyo, P. (2000). *Dasar-Dasar Operation Research*. BPFE-Yogyakarta.
- Taha, H.A. (1996). *Riset Operasi : Suatu Pengantar*. Binapura Aksara. Jakarta.
- Utama, S. (2005). *Aplikasi Metode Ekstended Quadratic Interior Point (EQIP) untuk economic Dispatch Pembangkit Termal Bali*. Universitas Udayana. Bali.

## LAMPIRAN 1

### Penyelesaian Kasus 2 dengan Metode Simpleks

#### Iterasi 1

Variabel dasar	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	
Z	-4-M	3-M	-6-M	1-M	M	M	0	0	0	0	0	
$x_7$	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
$x_8$	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	
$x_9$	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
$x_{10}$	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
$x_{11}$	1	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
$x_{12}$	0	0	6	-5	0	0	0	0	0	0	0	
$x_{13}$	2	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$x_{14}$	0	0	2	-8	0	0	0	0	0	0	0	
$x_{15}$	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	
$x_{16}$	0	0	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	

#### Iterasi 2

Variabel dasar	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	
Z	-4-M	3-M	0	-4 - 11/6M	M	M	0	0	0	0	0	
$x_7$	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
$x_8$	0	0	0	11/6	0	0	0	1	0	0	0	
$x_9$	1	0	0	5/6	0	0	0	0	1	0	0	
$x_{10}$	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
$x_{11}$	1	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
$x_3$	0	0	1	-5/6	0	0	0	0	0	0	0	
$x_{13}$	2	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$x_{14}$	0	0	0	-19/3	0	0	0	0	0	0	0	
$x_{15}$	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	
$x_{16}$	0	0	0	11/6	0	-1	0	0	0	0	0	

#### Iterasi 3

Variabel dasar	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
Z	-4-M	3-M	0	0	M	-24/11	0	0	0	0	0	7/11	0
$x_7$	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$x_8$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
$x_9$	1	0	0	0	0	5/11	0	0	1	0	0	-1/11	0
$x_{10}$	0	1	0	0	0	6/11	0	0	0	1	0	1/11	0
$x_{11}$	1	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$x_3$	0	0	1	0	0	-5/11	0	0	0	0	0	1/11	0
$x_{13}$	2	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$x_{14}$	0	0	0	0	0	-38/11	0	0	0	0	0	-10/11	0
$x_{15}$	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$x_4$	0	0	0	1	0	-6/11	0	0	0	0	0	-1/11	0

## Iterasi 4

Variabel dasar	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	
Z	0	-37 -11M	0	0	M	-24/11	0	0	0	0	4+M	7/11	
$x_7$	0	11	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	
$x_8$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	
$x_9$	0	10	0	0	0	5/11	0	0	1	0	-1	-1/11	
$x_{10}$	0	1	0	0	0	6/11	0	0	0	1	0	1/11	
$x_1$	1	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
$x_3$	0	0	1	0	0	-5/11	0	0	0	0	0	1/11	
$x_{13}$	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	
$x_{14}$	0	0	0	0	0	-38/11	0	0	0	0	0	-10/11	
$x_{15}$	0	11	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	
$x_4$	0	0	0	1	0	-6/11	0	0	0	0	0	-1/11	

## Iterasi 5

Variabel dasar	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
Z	0	0	0	0	M	-24/11	0	0	0	0	-13/6 - 5/6M	7/11	37/12+11/1
$x_7$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	5/6	0	-11/12
$x_8$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
$x_9$	0	0	0	0	0	5/11	0	0	1	0	2/3	-1/11	-5/6
$x_{10}$	0	0	0	0	0	6/11	0	0	0	1	1/6	1/11	-1/12
$x_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2/3	0	5/6
$x_3$	0	0	1	0	0	-5/11	0	0	0	0	0	1/11	0
$x_2$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1/6	0	1/12
$x_{14}$	0	0	0	0	0	-38/11	0	0	0	0	0	-10/11	0
$x_{15}$	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	5/6	0	-11/12
$x_4$	0	0	0	1	0	-6/11	0	0	0	0	0	-1/11	0

## Iterasi 6

Variabel dasar	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$
Z	0	0	0	0	M	-31/44 +25/44M	0	0	13/4 + 5/4M	0	0	15/44 - 5/44M	3/8 -1/8M
$x_7$	0	0	0	0	0	-25/44	1	0	-5/4	0	0	5/44	1/8
$x_8$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
$x_{11}$	0	0	0	0	0	15/22	0	0	3/2	0	1	-3/22	-5/4
$x_{10}$	0	0	0	0	0	19/44	0	0	-1/6	1	0	5/44	1/8
$x_1$	1	0	0	0	0	5/11	0	0	1	0	0	-1/11	0

$x_3$	0	0	1	0	0	-5/11	0	0	0	0	0	1/11	0
$x_2$	0	1	0	0	0	5/44	0	0	1/4	0	0	-1/44	-1/8
$x_{14}$	0	0	0	0	0	-38/11	0	0	0	0	0	-10/11	0
$x_{15}$	0	0	0	0	-1	-25/44	0	0	-5/4	0	0	5/44	<b>1/8</b>
$x_4$	0	0	0	1	0	-6/11	0	0	0	0	0	-1/11	0

### Iterasi 7

Variabel dasar	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$x_{14}$
<b>Z</b>	0	0	0	0	3	1	0	0	7	0	0	0	0	0
$x_7$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$x_8$	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
$x_{11}$	0	0	0	0	-10	-5	0	0	-11	0	1	1	0	0
$x_{10}$	0	0	0	0	1	1	0	0	13/12	1	0	5/22	0	0
$x_1$	1	0	0	0	0	5/11	0	0	1	0	0	-1/11	0	0
$x_3$	0	0	1	0	0	-5/11	0	0	0	0	0	1/11	0	0
$x_2$	0	1	0	0	-1	-5/11	0	0	-1	0	0	1/11	0	0
$x_{14}$	0	0	0	0	0	-38/11	0	0	0	0	0	-10/11	0	1
$x_{13}$	0	0	0	0	-8	-50/11	0	0	-10	0	0	10/11	1	0
$x_4$	0	0	0	1	0	-6/11	0	0	0	0	0	-1/11	0	0

## LAMPIRAN 2

**Tabel Nilai Variabel dan Nilai Z pada Tiap Iterasi Kasus 2 dengan Algoritma Titik Interior**

Iterasi 1		Iterasi 2		Iterasi 3	
$\tilde{X}^1 =$	30.1145	$\tilde{X}^2 =$	29.9736	$\tilde{X}^3 =$	30.1520
	50.0104		49.7487		49.6344
	5.0310		5.2547		5.2996
	7.0369		7.3032		7.3565
	30.6249		30.1080		29.8057
	9.2295		7.6660		7.7355
	19.8751		20.2777		20.2136
	7.9321		7.4420		7.3438
	4.8545		4.7717		4.5484
	2.9527		2.9480		3.0090
	469.9894		467.5137		466.1924
	4.9983		4.9877		4.9849
	339.8541		338.0426		336.7715
	46.2329		47.9164		48.2530
	0.5000		0.3857		0.0193
	2.1616		0.1081		0.0793
$Z(\tilde{X}^1) = -2668$		$Z(\tilde{X}^2) = -498.8847$		$Z(\tilde{X}^3) = -102.4273$	

Iterasi 6	Iterasi 7	Iterasi 8	
-----------	-----------	-----------	--



$\tilde{X}^6 =$ $\begin{bmatrix} 31.2309 \\ 29.7436 \\ 8.5528 \\ 11.2201 \\ 10.9751 \\ 14.7742 \\ 39.0256 \\ 0.2272 \\ 0.2163 \\ 19.0364 \\ 266.2049 \\ 4.7836 \\ 175.4869 \\ 72.6549 \\ 0.0006 \\ 0.0013 \end{bmatrix}$ $Z(\tilde{X}^6) = 73.8412$	$\tilde{X}^7 =$ $\begin{bmatrix} 31.2353 \\ 19.3129 \\ 8.5631 \\ 11.2096 \\ 0.5488 \\ 14.7739 \\ 49.4519 \\ 0.2273 \\ 0.2017 \\ 29.4775 \\ 161.8933 \\ 4.6699 \\ 92.0323 \\ 72.5510 \\ 0.0006 \\ 0.0012 \end{bmatrix}$ $Z(\tilde{X}^7) = 105.3437$	$\tilde{X}^8 =$ $\begin{bmatrix} 31.4114 \\ 18.6156 \\ 8.5517 \\ 11.1913 \\ 0.0274 \\ 14.7434 \\ 49.9730 \\ 0.2570 \\ 0.0368 \\ 30.1931 \\ 154.7445 \\ 4.6464 \\ 86.1019 \\ 72.4272 \\ 0.0004 \\ 0.0004 \end{bmatrix}$ $Z(\tilde{X}^8) = 109.1634$	
---	--	--	--

<b>Iterasi 11</b>	<b>Iterasi 12</b>	<b>Iterasi 13</b>	
-------------------	-------------------	-------------------	--

$\bar{X}^{11} =$	37.8395	$\bar{X}^{12} =$	38.1093	$\bar{X}^{13} =$	38.1226
	12.1678		11.8977		11.8800
	2.1598		1.8900		1.8768
	3.4857		3.1423		3.1248
	0.0073		0.0071		0.0027
	0.6456		0.0323		0.0016
	49.9927		49.9929		49.9974
	14.3544		14.9677		14.9984
	0.0007		0.0007		0.0006
	44.3464		44.9600		44.9952
	83.8389		80.8679		80.6773
	4.4697		4.3716		4.3636
	21.6638		18.9631		18.7947
	23.5663		21.3583		21.2452
	0.0000		0.0000		0.0000
	0.0000		0.0000		0.0000
$Z(\bar{X}^{11}) = 124.2888$		$Z(\bar{X}^{12}) = 124.9043$		$Z(\bar{X}^{13}) = 124.9716$	

### LAMPIRAN 3

**Tabel Nilai Variabel dan Nilai Z pada Tiap Iterasi Kasus 3 dengan Metode Simpleks dan Tabel Optimal di Iterasi ke-28**

Iterasi 1	Iterasi 2	Iterasi 3	Iterasi 4	Iterasi 5
<b>Z</b> = 0.00	<b>Z</b> = 1875.00	<b>Z</b> = 1966.11	<b>Z</b> = 2566.11	<b>Z</b> = 277.00
$x_{94}$ = 500.00	$x_{94}$ = 500.00	$x_{94}$ = 500.00	$x_{74}$ = 20.00	$x_{74}$ = 20.00
$x_{95}$ = 160.00	$x_{95}$ = 10.00	$x_{57}$ = 1.11	$x_{57}$ = 1.11	$x_{61}$ = 10.00
$x_{96}$ = 170.00	$x_{96}$ = 245.00	$x_{96}$ = 248.33	$x_{96}$ = 248.33	$x_{96}$ = 235.00
$x_{97}$ = 150.00	$x_{45}$ = 25.00	$x_{45}$ = 26.11	$x_{45}$ = 26.11	$x_{45}$ = 21.00
$x_{98}$ = 260.00	$x_{98}$ = 210.00	$x_{98}$ = 204.44	$x_{98}$ = 204.44	$x_{98}$ = 216.00
$x_{99}$ = 280.00	$x_{99}$ = 130.00	$x_{99}$ = 118.89	$x_{99}$ = 118.89	$x_{99}$ = 120.00
$x_{100}$ = 295.00	$x_{100}$ = 345.00	$x_{100}$ = 347.22	$x_{100}$ = 347.22	$x_{100}$ = 318.00
$x_{101}$ = 265.00	$x_{101}$ = 140.00	$x_{101}$ = 134.44	$x_{101}$ = 174.44	$x_{101}$ = 196.00
$x_{102}$ = 1000.00	$x_{102}$ = 875.00	$x_{102}$ = 866.11	$x_{102}$ = 866.11	$x_{102}$ = 891.00
$x_{103}$ = 990.00	$x_{103}$ = 940.00	$x_{103}$ = 937.78	$x_{103}$ = 937.78	$x_{103}$ = 906.00

Iterasi 8	Iterasi 9	Iterasi 10	Iterasi 11	Iterasi 12
<b>Z</b> = 5105.38	<b>Z</b> = 7258.00	<b>Z</b> = 8618.42	<b>Z</b> = 9185.33	<b>Z</b> = 9185.33
$x_{74}$ = 20.00	$x_{74}$ = 20.00	$x_{74}$ = 20.00	$x_{74}$ = 20.00	$x_{74}$ = 20.00
$x_{61}$ = 87.69	$x_{61}$ = 127.56	$x_{61}$ = 147.50	$x_{61}$ = 151.04	$x_{61}$ = 151.04
$x_{96}$ = 112.12	$x_{79}$ = 43.19	$x_{79}$ = 89.72	$x_{79}$ = 112.13	$x_{79}$ = 112.13
$x_{20}$ = 57.88	$x_{20}$ = 170.00	$x_{20}$ = 264.47	$x_{20}$ = 311.95	$x_{20}$ = 311.95
$x_{98}$ = 247.31	$x_{98}$ = 358.59	$x_{98}$ = 399.18	$x_{98}$ = 416.43	$x_{98}$ = 416.43
$x_{57}$ = 4.23	$x_{57}$ = 39.11	$x_{57}$ = 82.15	$x_{57}$ = 103.19	$x_{57}$ = 103.19
$x_{100}$ = 119.62	$x_{100}$ = 39.89	$x_{77}$ = 15.75	$x_{77}$ = 21.89	$x_{77}$ = 21.89
$x_{101}$ = 305.00	$x_{101}$ = 391.37	$x_{101}$ = 405.72	$x_{101}$ = 402.12	$x_{101}$ = 402.12
$x_{102}$ = 987.31	$x_{102}$ = 623.56	$x_{102}$ = 215.22	$x_{45}$ = 3.54	$x_{63}$ = 3.54
$x_{103}$ = 639.23	$x_{103}$ = 79.78	$x_{103}$ = 400.00	$x_{103}$ = 378.78	$x_{103}$ = 378.78

Iterasi 15	Iterasi 16	Iterasi 17	Iterasi 18	Iterasi 19
<b>Z</b> = 14461.55	<b>Z</b> = 14540.99	<b>Z</b> = 16346.21	<b>Z</b> = 16874.67	<b>Z</b> = 16874.67
$x_{46}$ = 292.13	$x_{46}$ = 292.75	$x_{46}$ = 339.68	$x_{46}$ = 355.40	$x_{46}$ = 355.40
$x_{61}$ = 140.68	$x_{61}$ = 141.60	$x_{61}$ = 135.40	$x_{61}$ = 127.66	$x_{61}$ = 127.66
$x_{79}$ = 117.08	$x_{79}$ = 117.41	$x_{79}$ = 116.51	$x_{79}$ = 113.18	$x_{79}$ = 113.18
$x_{20}$ = 300.85	$x_{20}$ = 301.56	$x_{20}$ = 222.50	$x_{20}$ = 154.23	$x_{20}$ = 154.23
$x_{38}$ = 1.70	$x_{36}$ = 3.93	$x_{36}$ = 8.07	$x_{76}$ = 7.94	$x_{76}$ = 7.94
$x_{57}$ = 113.22	$x_{57}$ = 112.77	$x_{57}$ = 66.27	$x_{57}$ = 28.49	$x_{45}$ = 28.49

$x_{77}$	= 21.81	$x_{77}$	= 21.93	$x_{77}$	= 8.75	$x_{77}$	= 5.31	$x_{77}$	=
$x_{101}$	= 381.59	$x_{101}$	= 390.17	$x_{101}$	= 454.26	$x_{101}$	= 441.02	$x_{101}$	=
$x_5$	= 42.13	$x_5$	= 42.75	$x_5$	= 89.68	$x_5$	= 105.40	$x_5$	= 1
$x_{103}$	= 216.63	$x_{103}$	= 209.83	$x_{34}$	= 95.92	$x_{34}$	= 170.41	$x_{34}$	=

Iterasi 22		Iterasi 23		Iterasi 24		Iterasi 25		It
$Z$	= 17585.42	$Z$	= 18523.63	$Z$	= 21362.65	$Z$	= 22522.38	$Z$
$x_{46}$	= 371.95	$x_{46}$	= 391.92	$x_{46}$	= 448.93	$x_{46}$	= 460.03	$x_{46}$
$x_{61}$	= 121.68	$x_{61}$	= 111.46	$x_{61}$	= 53.33	$x_{61}$	= 33.93	$x_{61}$
$x_{79}$	= 107.96	$x_{79}$	= 111.53	$x_{79}$	= 229.12	$x_{79}$	= 275.95	$x_{79}$
$x_{20}$	= 102.52	$x_{20}$	= 87.19	$x_{77}$	= 89.97	$x_{77}$	= 137.41	$x_{77}$
$x_{76}$	= 10.33	$x_{38}$	= 9.01	$x_{38}$	= 23.54	$x_{38}$	= 25.97	$x_{36}$
$x_{21}$	= 2.75	$x_{21}$	= 41.41	$x_{21}$	= 354.92	$x_{21}$	= 497.24	$x_{21}$
$x_{89}$	= 22.25	$x_{89}$	= 82.71	$x_{89}$	= 108.99	$x_{89}$	= 136.73	$x_{89}$
$x_{101}$	= 449.92	$x_{101}$	= 443.02	$x_{101}$	= 155.67	$x_{59}$	= 19.40	$x_{59}$
$x_5$	= 121.95	$x_5$	= 141.92	$x_5$	= 198.93	$x_5$	= 210.03	$x_5$
$x_{34}$	= 220.37	$x_{34}$	= 236.46	$x_{34}$	= 512.95	$x_{34}$	= 634.92	$x_{34}$

## LAMPIRAN 4

**Tabel Nilai Variabel dan Nilai Z pada Tiap Iterasi Kasus 3 dengan Algoritma Titik Interior**

Iterasi 0	Iterasi 1	Iterasi 2	Iterasi 3	Iterasi 4
$\tilde{X}^0 =$	$\tilde{X}^1 =$	$\tilde{X}^2 =$	$\tilde{X}^3 =$	$\tilde{X}^4 =$
1	2.1932	2.6506	3.9869	
1	1.1435	1.0789	0.9929	
1	1.2345	1.2569	1.2764	
1	1.2996	1.2077	0.8638	
1	2.2673	2.5315	3.4943	
1	1.4540	1.2860	0.6929	
1	1.5604	1.7571	2.4026	
1	2.5624	2.6214	3.0833	
1	1.5484	1.6321	1.7255	
1	0.7341	0.6745	0.5013	
1	1.0697	1.0342	0.8874	
1	1.1405	1.0493	0.7521	
1	1.2027	0.9494	0.3289	
1	1.2724	0.9275	0.2117	
1	1.3856	1.3032	0.9229	
1	1.4167	1.1638	0.3840	
1	1.5239	1.2582	0.5150	
1	1.5960	1.1393	0.1470	
1	3.0086	1.4734	0.1775	
1	0.5337	0.5446	0.6044	
1	1.0801	1.0900	1.1005	
1	1.1595	1.1808	1.2103	
1	1.2337	1.2645	1.3388	
1	1.2804	1.2426	0.9844	
1	1.3933	1.4539	1.6356	
1	1.4389	1.4189	1.1161	
1	1.5583	1.6735	1.9163	

Lanjutan iterasi 0 sampai dengan iterasi 6

1	1.6395	1.7961	2.1168
1	1.7037	1.7069	1.8116
1	0.2770	0.2722	0.2622
1	1.0708	1.0425	1.0117
1	1.1441	1.0788	0.9930
1	1.2198	1.1155	0.9891
1	1.3389	1.5456	2.0146
1	1.3816	1.4881	1.4681
1	1.4868	1.6455	1.9961
1	1.5299	1.3566	1.1877
1	1.6182	1.5957	1.6445
1	1.7009	1.6182	1.5779
1	0.0500	0.0499	0.0498
1	1.0737	1.0783	1.1056
1	1.1534	1.1764	1.1862
1	1.2346	1.2522	1.2464
1	1.3119	1.3479	1.4073
1	6.9120	10.9438	2.0550
1	2.5990	3.5047	6.8227
1	1.5604	1.6701	1.8959
1	1.6293	1.7477	1.9680
1	1.6879	1.7605	1.6242
1	0.7507	0.7352	0.6985
1	1.0754	1.0760	1.0789
1	1.1592	1.1756	1.2112
1	1.2381	1.2651	1.3245
1	1.2883	1.2715	1.0769
1	1.3973	1.4555	1.5888
1	1.4787	1.5625	1.7584
1	1.5715	1.8293	1.6450
1	1.6292	1.7632	2.0353

Lanjutan iterasi 0 sampai dengan iterasi 6

1	1.7022	1.5528	0.8303
1	0.5140	0.5031	0.4750
1	5.3689	11.0350	40.9152
1	1.1520	1.1726	1.2032
1	2.5771	2.6911	3.4102
1	1.3110	1.3638	1.4375
1	1.4001	1.4679	1.6156
1	1.4807	1.5717	1.7805
1	1.5600	1.6779	1.9471
1	1.6398	1.7886	2.1352
1	1.7158	1.8891	2.4063
1	0.2776	0.2728	0.2629
1	1.0777	1.0842	1.1076
1	1.1591	1.1768	1.2205
1	1.2368	1.2655	1.3479
1	3.3657	5.1749	10.5166
1	1.9065	1.4164	0.5866
1	1.4671	1.5580	1.7424
1	1.5130	1.2459	1.0649
1	1.6288	1.7527	2.0909
1	1.7163	1.6681	1.6496
1	0.5154	0.5038	0.4840
1	1.0800	1.0880	1.1052
1	1.1599	1.1784	1.2188
1	1.2405	1.2724	1.3423
1	1.3205	1.3686	1.4766
1	1.4006	1.4683	1.6237
1	1.4662	1.4330	1.3850
1	1.1552	1.1745	1.2345
1	1.6412	1.7901	2.1591
1	1.7215	1.9061	2.3774

Lanjutan iterasi 0 sampai dengan iterasi 6

1	0.7591	0.7471	0.7229	
1	1.0734	1.0723	1.0471	
1	1.1367	1.0397	0.7072	
1	1.2371	1.2627	1.3022	
284	148.2539	105.0470	5.2524	
102	24.0714	1.2036	0.9932	
107	105.0017	113.0209	79.2129	
109	26.9126	4.9818	3.7845	
192	146.1679	139.7541	155.2226	
231	166.7754	122.7600	77.7673	
238	215.1977	215.3664	138.4332	
202	151.6325	135.9893	187.5646	
918	856.7989	840.4493	883.8944	
948	908.6818	879.4937	780.7128	
$\tilde{X}^0 = 589$	$\tilde{X}^1 = 1748$	$\tilde{X}^2 = 2408,6$	$\tilde{X}^3 = 3629,2$	$\tilde{X}$

Iterasi 7	Iterasi 8	Iterasi 9	Iterasi 10	Iter
-----------	-----------	-----------	------------	------



$\tilde{X}^7 =$	<div>10.4554</div> <div>0.6808</div> <div>0.9383</div> <div>0.3380</div> <div>9.0720</div> <div>0.2406</div> <div>11.6093</div> <div>0.6830</div> <div>0.6931</div> <div>0.2198</div> <div>0.4882</div> <div>0.3149</div> <div>0.1393</div> <div>0.1035</div> <div>0.3977</div> <div>0.1057</div> <div>0.1939</div> <div>0.0919</div> <div>0.1067</div> <div>1.1849</div> <div>1.1467</div> <div>1.3315</div> <div>1.5633</div> <div>0.1471</div> <div>2.3510</div> <div>0.1061</div> <div>3.0228</div>	$\tilde{X}^8 =$	<div>0.5228</div> <div>0.5473</div> <div>0.5258</div> <div>0.2229</div> <div>22.1159</div> <div>0.1635</div> <div>16.9431</div> <div>0.3179</div> <div>0.2344</div> <div>0.1445</div> <div>0.3518</div> <div>0.2278</div> <div>0.1072</div> <div>0.0785</div> <div>0.3077</div> <div>0.0466</div> <div>0.1466</div> <div>0.0760</div> <div>0.0864</div> <div>1.9571</div> <div>1.1831</div> <div>1.4233</div> <div>1.7438</div> <div>0.0591</div> <div>2.9941</div> <div>0.0534</div> <div>3.9483</div>	$\tilde{X}^9 =$	<div>0.4996</div> <div>0.5015</div> <div>0.4447</div> <div>0.1917</div> <div>106.1829</div> <div>0.1424</div> <div>20.7516</div> <div>0.2783</div> <div>0.2010</div> <div>0.1248</div> <div>0.3079</div> <div>0.2014</div> <div>0.0952</div> <div>0.0697</div> <div>0.2717</div> <div>0.0395</div> <div>0.1297</div> <div>0.0691</div> <div>0.0789</div> <div>3.2245</div> <div>1.1773</div> <div>1.3969</div> <div>1.6751</div> <div>0.0504</div> <div>3.3187</div> <div>0.0454</div> <div>4.4155</div>	$\tilde{X}^{10} =$	<div>0.4935</div> <div>0.4763</div> <div>0.4267</div> <div>0.1838</div> <div>132.6572</div> <div>0.1389</div> <div>19.4709</div> <div>0.2582</div> <div>0.1962</div> <div>0.1217</div> <div>0.2992</div> <div>0.1967</div> <div>0.0934</div> <div>0.0683</div> <div>0.2667</div> <div>0.0386</div> <div>0.1267</div> <div>0.0680</div> <div>0.0766</div> <div>3.8402</div> <div>1.3102</div> <div>1.1635</div> <div>1.5988</div> <div>0.0491</div> <div>3.0917</div> <div>0.0442</div> <div>4.5467</div>	$\tilde{X}^{11} =$	
-----------------	---	-----------------	---	-----------------	--	--------------------	--	--------------------	--

Lanjutan iterasi 7 sampai dengan iterasi 13

4.6434	8.4942	12.3837	13.6048
1.8330	2.0251	2.1274	2.0236
0.2344	0.2207	0.2132	0.2115
0.8755	0.8316	0.8132	0.7972
0.7037	0.6134	0.5866	0.5742
0.6588	0.5864	0.5665	0.5546
9.7877	34.9973	181.7453	233.3376
0.0377	0.0331	0.0309	0.0305
5.4224	11.4226	25.1720	40.8434
0.7097	0.6233	0.6024	0.5797
1.4885	1.4371	1.4303	1.2992
1.2109	1.1772	1.2129	1.1878
0.0492	0.0486	0.0482	0.0478
0.9551	0.7422	0.6744	0.6402
0.9353	0.6227	0.5278	0.4877
0.8649	0.4518	0.3748	0.3679
0.7041	0.3009	0.2601	0.2518
0.0876	0.0782	0.0743	0.0726
209.1845	238.4064	320.4276	348.0689
3.0950	3.7744	3.8122	4.2316
0.3771	0.2251	0.1941	0.1884
0.0762	0.0560	0.0493	0.0482
0.4306	0.2487	0.2148	0.2080
0.9608	0.8515	0.8140	0.8017
1.2860	1.3064	1.3259	1.3280
1.4241	1.4256	1.4437	1.4418
0.1727	0.0718	0.0610	0.0595
1.8770	1.9233	1.9985	1.9997
2.4753	2.9207	3.3529	3.4558
0.5524	0.2723	0.2282	0.2194
1.2107	0.4974	0.4265	0.3936

Lanjutan iterasi 7 sampai dengan iterasi 13

0.3146	0.2431	0.2153	0.2113
0.4005	0.3640	0.3384	0.3230
53.9867	57.4763	59.9204	59.9650
0.7027	0.3557	0.3054	0.2785
5.6784	11.5004	32.1723	46.0528
0.8102	0.3702	0.3153	0.2991
2.3159	2.8896	3.4078	3.5162
2.9250	4.1006	5.4415	5.9274
3.6585	5.6457	8.3912	9.2582
4.7745	8.5585	15.6113	18.5218
7.2652	18.7729	57.8262	72.4514
0.2371	0.2242	0.2175	0.2158
1.1602	1.1902	1.1996	1.1874
1.3584	1.4454	1.4959	1.4977
1.6092	1.7889	1.8876	1.8603
0.1659	0.0648	0.0552	0.0540
0.1878	0.1254	0.1105	0.1071
0.8949	0.3780	0.3243	0.3073
0.4254	0.2699	0.2473	0.2359
0.8760	0.4242	0.3760	0.3418
3.3196	12.4427	78.6436	99.6327
0.4269	0.4002	0.3855	0.3871
1.1603	1.1921	1.2083	1.1429
1.3581	1.4448	1.4873	1.1822
1.6085	1.7941	1.9245	1.8725
1.9325	2.2890	2.5609	2.1747
2.3647	3.0316	3.6251	2.5786
1.1476	1.1372	1.0816	1.0005
0.9485	0.5958	0.5281	0.4962
5.0888	10.0438	20.8962	1.0448
7.1161	18.0307	58.3729	9.2737

Lanjutan iterasi 7 sampai dengan iterasi 13

<div>0.6584</div> <div>0.6765</div> <div>0.2604</div> <div>1.1212</div> <div>2.9306</div> <div>0.5620</div> <div>42.3483</div> <div>1.9723</div> <div>2.4370</div> <div>2.6263</div> <div>86.3288</div> <div>152.1257</div> <div>882.1378</div> <div>743.1848</div>	<div>0.6270</div> <div>0.3657</div> <div>0.1571</div> <div>0.7696</div> <div>1.4210</div> <div>0.4526</div> <div>45.1048</div> <div>1.6628</div> <div>1.6809</div> <div>2.3809</div> <div>38.2230</div> <div>132.5904</div> <div>759.5137</div> <div>725.8167</div>	<div>0.6083</div> <div>0.3096</div> <div>0.1339</div> <div>0.6655</div> <div>1.2027</div> <div>0.4090</div> <div>21.6364</div> <div>1.5711</div> <div>1.5094</div> <div>2.2878</div> <div>32.7279</div> <div>68.6076</div> <div>37.9757</div> <div>372.4773</div>	<div>0.5759</div> <div>0.3016</div> <div>0.1304</div> <div>0.6494</div> <div>1.1718</div> <div>0.4022</div> <div>20.7345</div> <div>1.5321</div> <div>1.4545</div> <div>2.2591</div> <div>28.7355</div> <div>40.7783</div> <div>3.2129</div> <div>123.3037</div>	
$\tilde{X}^7 = 8323,8$	$\tilde{X}^8 = 9833,3$	$\tilde{X}^9 = 1557,6$	$\tilde{X}^{10} = 1687,3$	$\tilde{X}$

Iterasi 14	Iterasi 15	Iterasi 16	Iterasi 17	Iter
------------	------------	------------	------------	------

$\tilde{X}^{14} =$	<div>0.3130</div> <div>0.2283</div> <div>0.2075</div> <div>0.1354</div> <div>126.7875</div> <div>0.1225</div> <div>0.3094</div> <div>0.0953</div> <div>0.1274</div> <div>0.0868</div> <div>0.2802</div> <div>0.1602</div> <div>0.0909</div> <div>0.0630</div> <div>0.2751</div> <div>0.0281</div> <div>0.1124</div> <div>0.0675</div> <div>0.0587</div> <div>1.6695</div> <div>18.9353</div> <div>0.3197</div> <div>1.0935</div> <div>0.0317</div> <div>1.0285</div> <div>0.0298</div> <div>3.0605</div>	$\tilde{X}^{15} =$	<div>0.1882</div> <div>0.2033</div> <div>0.1377</div> <div>0.1414</div> <div>128.7029</div> <div>0.1349</div> <div>0.2645</div> <div>0.0890</div> <div>0.0961</div> <div>0.0770</div> <div>0.3304</div> <div>0.1649</div> <div>0.1006</div> <div>0.0664</div> <div>0.3164</div> <div>0.0230</div> <div>0.1203</div> <div>0.0743</div> <div>0.0634</div> <div>0.0964</div> <div>29.5618</div> <div>0.3220</div> <div>0.8766</div> <div>0.0240</div> <div>0.8273</div> <div>0.0238</div> <div>1.1570</div>	$\tilde{X}^{16} =$	<div>0.1337</div> <div>0.1782</div> <div>0.1009</div> <div>0.1484</div> <div>139.2427</div> <div>0.1522</div> <div>0.2213</div> <div>0.0817</div> <div>0.0745</div> <div>0.0676</div> <div>0.4064</div> <div>0.1700</div> <div>0.1143</div> <div>0.0707</div> <div>0.3776</div> <div>0.0190</div> <div>0.1307</div> <div>0.0838</div> <div>0.0694</div> <div>0.0901</div> <div>68.4741</div> <div>0.3163</div> <div>0.6641</div> <div>0.0187</div> <div>0.6576</div> <div>0.0191</div> <div>0.7767</div>	$\tilde{X}^{17} =$	<div>0.1259</div> <div>0.1690</div> <div>0.0972</div> <div>0.1434</div> <div>141.8877</div> <div>0.1504</div> <div>0.1981</div> <div>0.0767</div> <div>0.0708</div> <div>0.0654</div> <div>0.3518</div> <div>0.1658</div> <div>0.1120</div> <div>0.0702</div> <div>0.3538</div> <div>0.0184</div> <div>0.1291</div> <div>0.0821</div> <div>0.0671</div> <div>0.0889</div> <div>75.7221</div> <div>0.2608</div> <div>0.4441</div> <div>0.0182</div> <div>0.5757</div> <div>0.0186</div> <div>0.5566</div>	$\tilde{X}^{18} =$	
--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--	--------------------	--

Lanjutan iterasi 14 sampai dengan iterasi 20

7.5678	4.6316	2.0531	0.1027
0.7941	0.7000	0.5929	0.4805
0.1857	0.1741	0.1612	0.1554
0.5342	0.4873	0.4384	0.4208
0.3169	0.2694	0.2270	0.2165
0.3496	0.3242	0.2960	0.2827
288.0802	299.4231	324.5561	328.6142
0.0246	0.0214	0.0184	0.0180
216.4948	229.3880	238.6874	239.9327
0.2271	0.2004	0.1741	0.1642
0.1197	0.1082	0.0965	0.0924
0.6053	0.5706	0.5286	0.4987
0.0434	0.0437	0.0438	0.0433
0.3326	0.1878	0.1331	0.1291
0.2351	0.2510	0.2637	0.1992
0.2259	0.1352	0.0967	0.0939
0.1801	0.1738	0.1659	0.1600
0.0572	0.0607	0.0651	0.0646
369.1057	372.6824	384.2887	387.1103
0.2613	0.2041	0.1633	0.1617
0.1327	0.1205	0.1080	0.1042
0.0352	0.0292	0.0242	0.0235
0.1483	0.1411	0.1326	0.1279
0.3820	0.2871	0.2221	0.2124
1.0532	0.9095	0.7801	0.7580
0.8384	0.6430	0.5040	0.4837
0.0402	0.0313	0.0248	0.0240
0.7176	0.5077	0.3807	0.3639
1.4610	0.9885	0.7280	0.6975
0.1966	0.2449	0.3321	0.3335
0.1783	0.1813	0.1799	0.1466

Lanjutan iterasi 14 sampai dengan iterasi 20

0.2296	0.2495	0.2781	0.2869
0.1555	0.1068	0.0784	0.0720
52.3943	51.1484	50.8434	50.8873
0.1516	0.1808	0.2248	0.1814
140.4063	150.3939	159.7386	160.7155
0.2116	0.2013	0.1851	0.1518
2.0648	1.8952	1.7095	1.6181
10.2745	15.1590	27.8629	36.0899
0.3150	0.3082	0.2997	0.2951
0.6530	0.6030	0.5485	0.5252
86.4672	88.1877	92.4862	93.7653
0.1828	0.1726	0.1614	0.1579
0.9518	0.8830	0.8100	0.7883
1.4355	1.4157	1.3916	1.3813
1.2638	1.1272	0.9931	0.9551
0.0364	0.0278	0.0217	0.0211
0.0789	0.0803	0.0816	0.0787
0.2134	0.3123	0.5473	0.3158
0.1085	0.1055	0.1020	0.1029
0.1316	0.1386	0.1460	0.1357
100.3772	102.6140	112.0315	113.6743
0.3930	0.3544	0.3179	0.3175
0.6025	0.6073	0.6070	0.5722
0.2334	0.2346	0.2331	0.2173
1.3140	1.4070	1.5207	1.4549
0.5454	0.5654	0.5834	0.5416
0.3950	0.4080	0.4193	0.3900
0.4827	0.4664	0.4277	0.3001
0.3744	0.5236	0.8602	0.8413
0.5671	0.6130	0.6690	0.6274
2.5119	6.3991	35.6220	43.3954

Lanjutan iterasi 14 sampai dengan iterasi 20

0.2886	0.2268	0.1805	0.1728	
0.1964	0.1440	0.1104	0.1069	
0.0971	0.0775	0.0626	0.0610	
0.4085	0.2466	0.1767	0.1718	
0.7785	0.6041	0.4782	0.4626	
0.3856	0.4191	0.4650	0.4656	
71.3839	70.0512	3.5026	2.2158	
0.9422	0.8638	0.7799	0.7445	
1.1641	1.4317	1.8955	1.8492	
1.2902	1.0116	0.8040	0.7708	
0.5373	0.5179	0.4955	0.4870	
3.6918	3.0457	2.5042	2.3766	
1.2883	1.2836	1.2636	1.1823	
4.2074	0.2104	0.1987	0.1979	
$\tilde{X}^{14} = 19527$	$\tilde{X}^{15} = 19956$	$\tilde{X}^{16} = 21156$	$\tilde{X}^{17} = 21428$	$\tilde{X}^{18}$

<b>Iterasi 21</b>	<b>Iterasi 22</b>	<b>Iterasi 23</b>
-------------------	-------------------	-------------------



	$\tilde{X}^{21} = \begin{bmatrix} 0.0193 \\ 0.0302 \\ 0.0269 \\ 0.0578 \\ 149.5314 \\ 0.1253 \\ 0.0091 \\ 0.0104 \\ 0.0137 \\ 0.0208 \\ 0.0286 \\ 0.0771 \\ 0.0738 \\ 0.0692 \\ 0.0791 \\ 0.0069 \\ 0.1051 \\ 0.0519 \\ 0.0245 \\ 0.0477 \\ 84.7453 \\ 0.0130 \\ 0.0194 \\ 0.0070 \\ 0.0327 \\ 0.0070 \\ 0.0217 \end{bmatrix}$		$\tilde{X}^{22} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 117.7 \\ 0.0001 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0001 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0001 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 85.4 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$	
--	--	--	--	--

Lanjutan iterasi 21 sampai dengan iterasi 24

0.0187	0.0000	0.0000
0.0191	0.0000	0.0000
0.0446	0.0000	0.0000
0.0985	0.0000	0.0000
0.0393	0.0000	0.0000
0.0549	0.0000	0.0000
347.7653	425.3	432.8
0.0079	0.0000	0.0000
0.3850	0.0001	0.0001
0.0206	0.0000	0.0000
0.0171	0.0000	0.0000
0.0606	0.0000	0.0000
0.0276	0.0000	0.0000
0.0499	0.0000	0.0000
0.0080	0.0000	0.0000
0.0338	0.0000	0.0000
0.0519	0.0000	0.0000
0.0527	0.0000	0.0000
397.8640	367.2	365.3
0.1076	0.0000	0.0000
0.0337	0.0000	0.0000
0.0086	0.0000	0.0000
0.0414	0.0000	0.0000
0.0399	0.0000	0.0000
0.2297	0.0001	0.0001
0.0956	0.0000	0.0000
0.0081	0.0000	0.0000
0.0616	0.0000	0.0000
0.1109	0.0000	0.0000
0.6842	3.8	0.0016
0.0067	0.0000	0.0000

Lanjutan iterasi 21 sampai dengan iterasi 24

1.7497	45.9	50.6
0.0070	0.0000	0.0000
49.7338	0.0025	0.0001
0.0099	0.0000	0.0000
110.1767	23.01	236.7
0.0079	0.0000	0.0000
0.0389	0.0000	0.0000
620.4942	1023.6	1042.2
0.1288	0.0000	0.0000
0.0543	0.0000	0.0000
99.0277	90.1	89
0.0669	0.0000	0.0000
0.2861	0.0001	0.0001
0.9685	0.0005	0.0005
0.2271	0.0001	0.0001
0.0071	0.0000	0.0000
0.0266	0.0000	0.0000
0.0101	0.0000	0.0000
0.1331	0.0002	0.0002
0.0173	0.0000	0.0000
118.8274	95.5	92.7
0.3003	0.0003	0.0003
0.0971	0.0000	0.0000
0.0297	0.0000	0.0000
0.3348	0.0001	0.0001
0.0679	0.0000	0.0000
0.0508	0.0000	0.0000
0.0127	0.0000	0.0000
0.6944	0.0009	0.0010
0.0922	0.0000	0.0000
37.5094	11.5	14.6

Lanjutan iterasi 21 sampai dengan iterasi 24

<div><div>0.0435</div><div>0.0363</div><div>0.0264</div><div>0.0670</div><div>0.1511</div><div>0.6195</div><div>0.0973</div><div>0.1476</div><div>1.0075</div><div>0.1601</div><div>0.2292</div><div>0.4241</div><div>0.1736</div><div>0.1719</div></div> <div><div><math>\tilde{X}^{21}</math></div><div>= 22829</div></div>	<div><div>0.0000</div><div>0.0000</div><div>0.0000</div><div>0.0000</div><div>0.0000</div><div>1.3</div><div>0.0000</div><div>0.0000</div><div>0.0004</div><div>0.0000</div><div>0.0001</div><div>0.0001</div><div>0.0001</div><div>0.0001</div></div> <div><div><math>\tilde{X}^{22}</math></div><div>= 24121</div></div>
---	--