

OPTIMASI

Sejarah dan Tujuan Optimasi

Latar Belakang Optimasi

- Keinginan untuk memperoleh yang terbaik atau mengoptimalkan apa yang dimiliki
- Di dalam industri dan pemrograman setiap keputusan yang dibuat diharapkan bisa memecahkan sebuah permasalahan yang ada dengan seoptimal mungkin
- Optimasi matematis berawal pada riset operasi yang dikembangkan dalam perang dunia II
- Optimasi digunakan untuk mempertimbangkan beberapa tujuan yang saling bertentangan pada waktu yang bersamaan (disebut masalah optimasi vector)

Definisi

- ❑ **Optimasi** ialah suatu proses untuk mencapai hasil yang ideal atau **optimal** (nilai efektif yang dapat dicapai)
- ❑ Dalam disiplin matematika optimasi merujuk pada studi permasalahan yang mencoba untuk mencari nilai minimum atau maksimum dari suatu fungsi riil
- ❑ **optimasi adalah** cara mendapatkan harga ekstrim baik maksimum atau minimum dari suatu fungsi tertentu dengan faktor-faktor pembatasnya
- ❑ Optimasi program linier
- ❑ Optimasi program non-linier

Sifat program linier

- Linieritas

Sifat ini pada suatu kasus dapat ditentukan dengan menggunakan beberapa cara. Secara statistik, kita dapat memeriksa kelinieran (diagram pencar) ataupun menggunakan uji hipotesis. Secara teknis, linieritas ditunjukkan oleh adanya sifat proporsionalitas, aditivitas, divisibilitas, dan kepastian fungsi tujuan dan pembatasan (kendala).

- Proporsionalitas

Sifat ini dipenuhi jika kontribusi setiap variabel pada fungsi tujuan atau penggunaan sumber daya, membatasi proporsional terhadap level nilai variabel. Jika harga perunit produk misalnya adalah sama berapapun jumlah yang dibeli, maka sifat proporsional dipenuhi. Dengan kata lain, jika pembelian dalam jumlah besar mendapatkan diskon, maka sifat proporsional tidak dipenuhi.

- **Aditivitas**

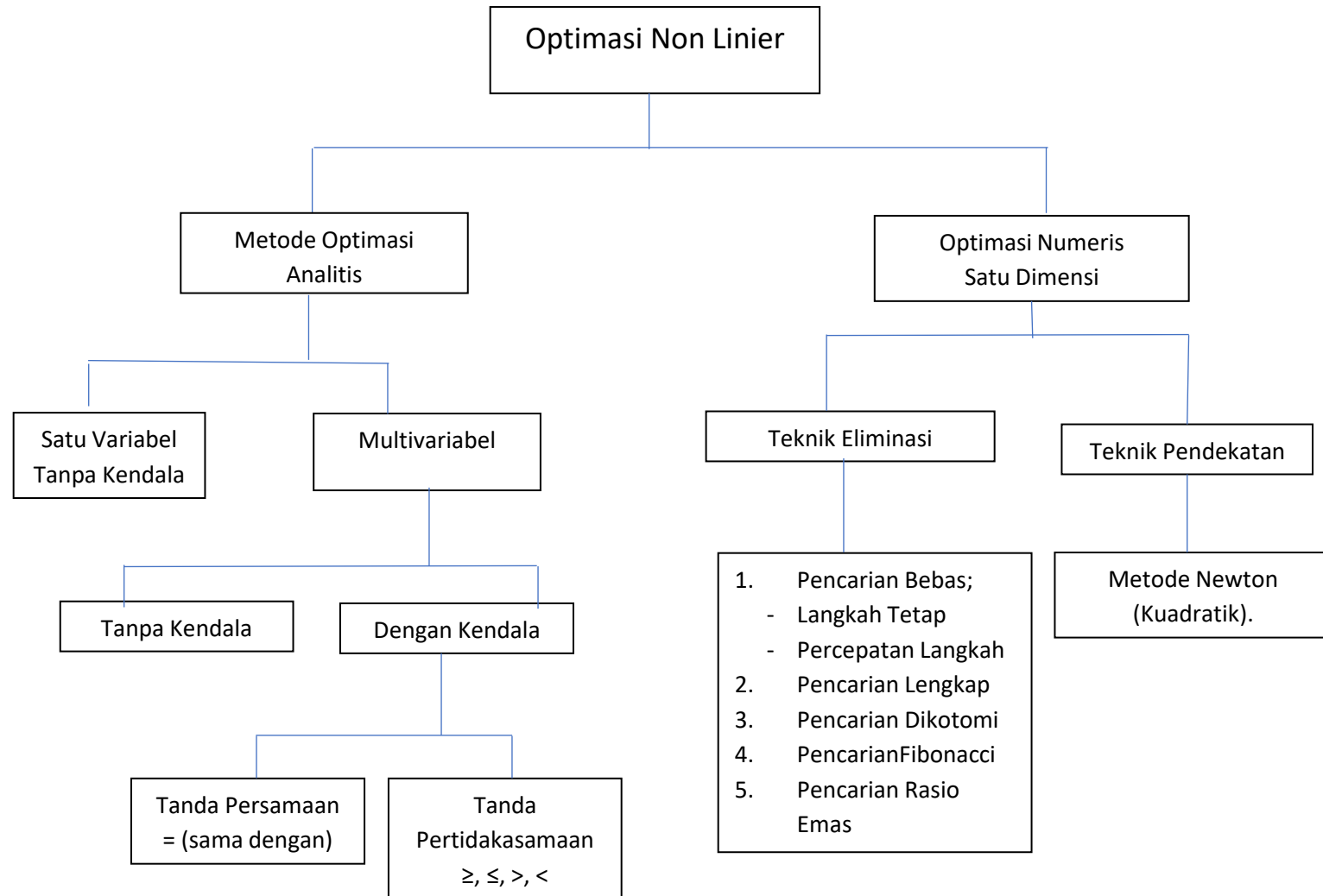
Sifat aditivitas dipenuhi jika fungsi tujuan merupakan penambahan langsung kontribusi masing-masing variabel keputusan. Untuk fungsi kendala, sifat aditivitas dipenuhi jika nilai kanan merupakan total penggunaan masing-masing variabel keputusan, sehingga nilai variabel keputusan non integer di mungkinkan

- **Kepastian**

Sifat kepastian menunjukkan bahwa semua parameter model berupa konstanta. Artinya, koefisien fungsi tujuan maupun fungsi pembatasan (kendala) merupakan suatu nilai pasti, bukan merupakan nilai dengan peluang tertentu.

Pembentukan Model (Modeling)

- Fungsi Tujuan
- Fungsi Kendala



Contoh Optimasi Linier

Seorang pengrajin menghasilkan satu tipe meja dan satu tipe kursi. Proses yang dikerjakan hanya merakit meja dan kursi. Dibutuhkan waktu 2 jam untuk merakit 1 unit meja dan 30 menit untuk merakit 1 unit kursi. Perakitan dilakukan oleh 4 orang karyawan dengan waktu kerja 8 jam perhari. Pelanggan pada umumnya membeli paling banyak 4 kursi untuk 1 meja. Oleh karena itu, pengrajinan harus memproduksi kursi paling banyak empat kali dari jumlah meja. Harga jual perunit meja sebesar Rp 2 juta dan per unit kursi sebesar Rp 1,2 juta.

Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk memaksimumkan pendapatan!

JAWAB

1. Identifikasi tujuan, alternatif keputusan, dan sumber daya yang membatasi.
 - Tujuan: memaksimalkan pendapatan
 - Alternatif keputusan: jumlah meja dan kursi yang akan diproduksi
 - Sumber daya yang membatasi:
 - waktu kerja karyawan
 - perbandingan jumlah kursi dan meja yang harus di produksi (sesuai pangsa pasar)
2. Memeriksa sifat proporsionalitas, aditivitas, divisibilitas dan kepastian
 - Proporsionalitas:
 - total pendapatan yang diperoleh pengrajin proporsional terhadap jumlah produk yang terjual
 - waktu kerja karyawan dan pangsa pasar proporsional terhadap jumlah meja dan kursi yang diproduksi.
 - Aditivitas: penggunaan sumber daya (waktu kerja karyawan dan pangsa pasar) merupakan sebuah penjumlahan yang digunakan untuk memproduksi meja dan kursi. (Sifat divisibilitas dan kepastian juga terpenuhi).
3. Ada dua variabel keputusan dan dua sumber daya yang membatasi. Fungsi tujuan merupakan maksimisasi, karena semakin besar pendapatan maka akan semakin disukai oleh para pengrajin. Fungsi kendala pertama (Batasan waktu) menggunakan pertidaksamaan \leq , karena waktu yang tersedia dapat digunakan sepenuhnya atau tidak, tapi tidak mungkin melebihi waktu yang ada. Fungsi kendala yang kedua bisa menggunakan \leq atau \geq tergantung dari pendefinisian variabel.

Pemodelan

- Definisikan:

$x_1 \rightarrow$ Jumlah meja yang diproduksi

$x_2 \rightarrow$ Jumlah kursi yang diproduksi

Fungsi Tujuan: Memaksimumkan (pendapatan)

$$z = 2x_1 + 1,2x_2$$

Fungsi Kendala:

- $2x_1 + 0,5x_2 \leq 32$
- $x_1/x_2 \geq 1/4$ atau $4x_1 \geq x_2$ atau $4x_1 - x_2 \geq 0$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Contoh 2

Seorang peternak memiliki 200 kambing yang mengkonsumsi 90 kg pakan khusus setiap harinya. Pakan tersebut disiapkan menggunakan campuran jagung dan kedelai dengan komposisi sebagai berikut:

Bahan jagung mengandung 0,001 kg Kalsium, 0,090 kg Protein, 0,02 kg Serat dengan biaya Rp 2.000 setiap kgnya. Dan untuk kedelai mengandung 0,002 kg Kalsium, 0,060 kg Protein, 0,06 kg Serat dengan biaya Rp 5.500 setiap kgnya.

Kebutuhan pakan kambing setiap harinya adalah paling banyak 1% kalsium, paling sedikit 30% protein dan paling banyak 5% serat.

Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk meminimalkan biaya pembelian bahan pakan!

JAWAB

1. Identifikasi tujuan, alternatif keputusan, dan sumber daya yang membatasi.
 - Tujuan: meminimumkan biaya
 - Alternatif keputusan: jumlah jagung dan kedelai yang digunakan
 - Sumber daya yang membatasi:
 - Jumlah pakan/hari = 90 kg
 - Kandungan kalsium: jagung = 0,001 kg; kedelai = 0,002 kg; jumlah maksimum = 1%
 - Kandungan protein: jagung = 0,09 kg; kedelai = 0,6 kg; jumlah minimum = 30%
 - Kandungan serat: jagung = 0,02 kg; kedelai = 0,06 kg; jumlah minimum = 5%
2. Memeriksa sifat proporsionalitas, aditivitas, divisibilitas dan kepastian
 - Proporsionalitas:

Tidak menginfokan adanya discount pembelian bahan untuk jumlah banyak dan sedikit sama
 - Aditivitas: penggunaan kalsium, protein dan serat merupakan penjumlahan dari kalsium, protein dan serat yang ada pada jagung dan kedelai. (Sifat divisibilitas dan kepastian juga terpenuhi).
3. Ada dua variabel keputusan dan tiga sumber daya yang membatasi. Fungsi tujuan merupakan minimisasi, karena semakin kecil pengeluaran maka akan semakin disukai oleh peternak.

Pemodelan

- Definisikan:

$x_1 \rightarrow$ Jumlah jagung yang dibutuhkan

$x_2 \rightarrow$ Jumlah kedelai yang dibutuhkan

Fungsi Tujuan: Meminimumkan (biaya)

$$z = 2.000 x_1 + 5.500 x_2$$

Fungsi Kendala:

- $x_1 + x_2 = 90$
- Kalsium: $0,001 x_1 + 0,002 x_2 \leq 0,9 \rightarrow$ (1% dari 90)
- Protein: $0,09 x_1 + 0,6 x_2 \geq 27 \rightarrow$ (30% dari 90)
- Serat: $0,02 x_1 + 0,06 x_2 \leq 4,5 \rightarrow$ (5% dari 90)
- $x_1, x_2 \geq 0$

Contoh 3

Suatu bank kecil mengalokasikan dana maksimum Rp 180 juta untuk pinjaman pribadi dan pembelian mobil satu bulan kedepan. Bank mengenakan biaya suku bunga per tahun 14% untuk pinjaman pribadi dan 12% untuk pinjaman pembelian mobil. Kedua tipe pinjaman itu dikembalikan bersama dengan bunganya satu tahun kemudian. Jumlah pinjaman pembelian mobil paling tidak dua kali lipat dibandingkan pinjaman pribadi. Pengalaman sebelumnya menunjukkan bahwa 1% pinjaman pribadi merupakan kredit macet.

Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk memaksimumkan pendapatan bunga dan pengembalian pinjaman!

JAWAB

1. Identifikasi tujuan, alternatif keputusan, dan sumber daya yang membatasi.
 - Tujuan: memaksimumkan pendapatan bunga
 - Alternatif keputusan: jumlah anggaran pinjaman pribadi dan pembelian mobil
 - Sumber daya yang membatasi:
 - Total alokasi dana ≤ 180 juta
 - Jumlah anggaran pinjaman pembelian mobil ≥ 2 kali pinjaman pribadi
2. Memeriksa sifat proporsionalitas, aditivitas, divisibilitas dan kepastian
 - Proporsionalitas:

Tidak menginfokan adanya perbedaan bunga antara pinjaman banyak atau sedikit
 - Aditivitas: Jumlah pendapatan bunga merupakan penjumlahan dari pendapatan bunga pinjaman pribadi dan pembelian mobil. (Sifat divisibilitas dan kepastian juga terpenuhi).
3. Ada dua variabel keputusan dan dua sumber daya yang membatasi. Fungsi tujuan merupakan maksimisasi, karena semakin besar pendapatan maka akan semakin disukai oleh bank. Fungsi kendala

Pemodelan

- Definisikan:

$x_1 \rightarrow$ Jumlah anggaran pinjaman pribadi

$x_2 \rightarrow$ Jumlah anggaran pinjaman pembelian mobil

Fungsi Tujuan: Memaksimumkan (pendapatan bunga)

$$z = (0,14 - 0,01) x_1 + 0,12 x_2$$

Fungsi Kendala:

- $x_1 + x_2 \leq 180$
- $x_2 \geq 2x_1$ atau $-2x_1 + x_2 \geq 0$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Contoh 4

Suatu pabrik perakitan radio menghasilkan dua tipe radio, yaitu HiFi-1 dan HiFi-2 pada fasilitas perakitan yang sama. Lini perakitan terdiri dari 3 stasiun kerja. Waktu perakitan masing-masing tipe pada masing-masing stasiun kerja adalah sebagai berikut:

Perakitan HiFi-1 memerlukan waktu 6 menit, 5 menit dan 4 menit yg terdiri dari 3 stasiun kerja sedangkan perakitan HiFi-2 memerlukan waktu 6 menit, 4 menit dan 3 menit yg terdiri dari 3 stasiun kerja.

Waktu kerja masing-masing stasiun kerja adalah 8 jam per hari. Masing-masing stasiun kerja membutuhkan perawatan harian selama 10%, 14% dan 12% dari total waktu kerja (8 jam) secara berturut-turut untuk stasiun kerja 1, 2 dan 3.

Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematikanya untuk memaksimumkan jumlah radio HiFi-1 dan HiFi-2 yang diproduksi!

JAWAB

1. Identifikasi tujuan, alternatif keputusan, dan sumber daya yang membatasi.
 - Tujuan: memaksimalkan produksi
 - Alternatif keputusan: jumlah HiFi-1 dan Jumlah HiFi-2
 - Sumber daya yang membatasi:
 - Waktu produksi efektif masing-masing stasiun
 - ✓ Stasiun 1 : $8\text{jam} - 10\% = 480 - 48 = 432$ menit
 - ✓ Stasiun 2 : $8\text{jam} - 14\% = 480 - 67,2 = 412,8$ menit
 - ✓ Stasiun 3 : $8\text{jam} - 12\% = 480 - 57,6 = 422,4$ menit
2. Memeriksa sifat proporsionalitas, aditivitas, divisibilitas dan kepastian
 - Proporsionalitas:

Tidak menginfokan adanya kendala produksi
 - Aditivitas: Jumlah produksi merupakan penjumlahan dari jumlah HiFi-1 dan HiFi-2 yang diproduksi. (Sifat divisibilitas dan kepastian juga terpenuhi).
3. Ada dua variabel keputusan dan tiga sumber daya yang membatasi. Fungsi tujuan merupakan maksimisasi, karena semakin besar produksi maka akan semakin di sukai

Pemodelan

- Definisikan:

$x_1 \rightarrow$ Jumlah produksi HiFi-1

$x_2 \rightarrow$ Jumlah produksi HiFi-2

Fungsi Tujuan: Memaksimumkan (produksi)

$$z = x_1 + x_2$$

Fungsi Kendala:

- $6x_1 + 6x_2 \leq 432$
- $5x_1 + 4x_2 \leq 412,8$
- $4x_1 + 3x_2 \leq 422,4$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Contoh 5

Dua produk dihasilkan menggunakan tiga mesin. Waktu masing-masing mesin yang digunakan untuk menghasilkan kedua produk dibatasi hanya 10 jam per hari. Waktu produksi per unit mesin untuk masing-masing produk ditunjukkan di bawah ini:

Dua produk dihasilkan menggunakan 3 mesin yaitu mesin 1, mesin 2, dan mesin 3. Waktu produksi untuk menghasilkan produk 1 yaitu 10 menit oleh mesin 1, 6 menit mesin oleh 2, dan 8 menit oleh 3. Sedangkan waktu produksi untuk menghasilkan produk 2 yaitu 5 menit oleh mesin 1, 20 menit oleh mesin 2, dan 15 menit oleh mesin 3.

Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk memaksimumkan keuntungan!

JAWAB

1. Identifikasi tujuan, alternatif keputusan, dan sumber daya yang membatasi.
 - Tujuan: memaksimalkan produksi
 - Alternatif keputusan: Produk-1 dan Produk-2
 - Sumber daya yang membatasi:
 - Waktu produksi masing-masing mesin = 10 jam
2. Memeriksa sifat proporsionalitas, aditivitas, divisibilitas dan kepastian
 - Proporsionalitas:

Tidak menginfokan adanya kendala produksi
 - Aditivitas: Jumlah produksi merupakan penjumlahan dari jumlah Produk-1 dan Produk-2 yang diproduksi. (Sifat divisibilitas dan kepastian juga terpenuhi).
3. Ada dua variabel keputusan dan satu sumber daya yang membatasi. Fungsi tujuan merupakan maksimisasi, karena semakin besar produksi maka akan semakin di sukai

Pemodelan

- Definisikan:

$x_1 \rightarrow$ Jumlah produksi Produk-1

$x_2 \rightarrow$ Jumlah produksi Produk-2

Fungsi Tujuan: Memaksimumkan (produksi)

$$z = x_1 + x_2$$

Fungsi Kendala:

- $10x_1 + 5x_2 \leq 600$
- $6x_1 + 20x_2 \leq 600$
- $8x_1 + 15x_2 \leq 600$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Contoh 6

Empat produk diproses secara berurutan pada 2 mesin. Waktu pemrosesan dalam jam per unit produk pada kedua mesin ditunjukkan di bawah ini :

Empat produk di proses secara berurutan pada 2 mesin yaitu mesin 1 dan mesin 2. Waktu pemrosesan dalam jam perunit produk pada mesin 1 yaitu 2 menit produk 1, 3 menit produk 2, 4 menit produk 3, dan 2 menit produk 4. Sedangkan waktu pemrosesan dalam jam perunit produk pada mesin 2 yaitu 3 menit produk 1, 2 menit produk 2, 1 menit produk 3 dan 2 menit produk 4.

Biaya total untuk memproduksi setiap unit produk didasarkan secara langsung pada jam mesin. Asumsikan biaya operasional per jam mesin 1 dan 2 secara berturut-turut adalah \$10 dan \$5. Waktu yang disediakan untuk memproduksi keempat produk pada mesin 1 adalah 500 jam dan mesin 2 adalah 380 jam. Harga jual per unit keempat produk secara berturut-turut adalah \$65, \$70, \$55 dan \$45. Formulasikan masalah di atas ke dalam bentuk model matematiknya untuk memaksimumkan keuntungan dari produksi!

SILAHKAN BERLATIH UNTUK SOAL 6

Rangkuman

- Program linear adalah salah satu teknik menyelesaikan riset operasi, dalam hal ini program linier menyelesaikan masalah-masalah yang dapat di ubah menjadi fungsi
- Program linier memiliki sifat linieritas, proposionalitas, aditivitas, divisibilitas, dan kepastian.
- Sifat linearitas dapat diperiksa menggunakan grafik (diagram pencar) ataupun menggunakan uji hipotesis
- Sifat proporsionalitas dipenuhi jika kontribusi setiap variabel pada fungsi tujuan atau penggunaan sumber daya yang membatasi proposional terhadap level nilai variabel.
- Sifat aditivitas mengasumsikan bahwa tidak ada bentuk perkalian silang di antara berbagai aktivitas, sehingga tidak akan ditemukan bentuk perkalian silang pada model dalam sembarang level fraksional, sehingga nilai variabel keputusan non integer di mungkinkan.
- Sifat kepastian menunjukkan bahwa semua parameter model berupa konstanta. Artinya, koefisien fungsi tujuan maupun fungsi pembatasan merupakan suatu nilai pasti, bukan merupakan nilai dengan peluang tertentu.