

Program Linier

Masalah Optimisasi

DUALITAS

Dual adalah masalah Program Linear (PL) pembantu yang didefinisikan secara langsung dari model PL asli (Primal) nya.

Bentuk Dual dapat disusun dari bentuk Primal asal masalah PL disusun dalam bentuk standar

Bentuk standar umum dari Primal




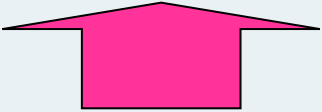
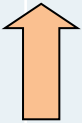

$$\text{Max/Min } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Terhadap kendala

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Untuk menyusun dual koefisien pada primal disusun seperti tabel berikut

Var primal 	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n		
Ruas kanan kendala dual 	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n		
Koefisien ruas kiri kendala Dual 	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1	y_1
	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2	y_2
	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m	y_m
	 Batasan dual ke $-j$						 Tujuan Dual	 Var dual

Jadi dual diperoleh dari primal dengan cara

- Untuk tiap kendala primal terdapat satu variabel dual
- Untuk tiap variabel primal terdapat satu kendala dual
- Koefisien fs obyektif primal menjadi ruas kanan kendala dual
- Ruas kanan kendala primal menjadi koefisien fs obyektif dual
- Koefisien kendala var primal membentuk koefisien-koefisien pada ruas kiri kendala dual

Untuk jenis optimasi (maks/min), tipe kendala (\leq , \geq , $=$) dan tanda var dual sbb

Primal Standar	Dual		
Fungsi obyektif	Fs Obyektif	Tipe kendala	Var
Maksimisasi	Minimisasi	\geq	tak tbt
Minimisasi	Maksimisasi	\leq	tak tbt

Contoh

- Bentuk Primal :

$$\text{Maksimumkan : } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$\text{Terhadap : } x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- Bentuk standar :

$$\text{Maksimumkan : } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0s_1 - M R_1$$

$$\text{Terhadap : } x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + R_1 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, R_1 \geq 0$$

Tabel Koefisien bentuk standar primal

x_1	x_2	x_3	s_1	R_1	
5	12	4	0	-M	
1	2	1	1	0	10 ← y_1
2	-1	3	0	1	8 ← y_2

- Bentuk Dual

Minimumkan : $w = 10y_1 + 8y_2$

Terhadap : $y_1 + 2y_2 \geq 5$

$2y_1 - y_2 \geq 12$

$y_1 + 3y_2 \geq 4$

$y_1 \geq 0$

$y_2 \geq -M$

y_1, y_2 , tak dibatasi

didominasi oleh $y_1 \geq 0$

Hub. Primal-Dual

- Solusi optimal dari salah satu masalah (P/D) dapat diperoleh dari tabel simpleks optimal masalah lainnya (D/P)
- Kompleksitas perhitungan pada masalah PL sebagian besar dipengaruhi oleh jumlah kendala (daripada jml variabel)
- Jika jumlah kendala Dual $<$ jml kendala Primal maka PL diselesaikan lewat Dual (atau sebaliknya)

MENENTUKAN NILAI VARIABEL/SOLUSI OPTIMAL DUAL DARI SOLUSI PRIMAL

- Ada Sifat :

Nilai optimal fs obyektif Primal = nilai optimal fs obyektif Dual

$$Z_{\text{maks/min}} = W_{\text{min/maks}}$$

- Optimal Dual dpt diperoleh dr optimal Primal dg rumus (*) sbb :

Koefisien z optimal dr vb iterasi awal Primal = ruas kiri – ruas kanan kendala dual yg terkait dg vb iterasi awal Primal

Contoh :

- Berikut ini diberikan contoh menentukan nilai var dual dan nilai optimal dual dari solusi primalnya
- Perhatikan masalah primal berikut.

$$\text{Maksimumkan : } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$\text{Terhadap : } x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- Jika masalah Primal di atas diselesaikan menggunakan tabel simpleks, maka diperoleh tabel iterasi optimal sbb :

Basis	x_1	x_2	x_3	s_1	R	Solusi
z	0	0	$3/5$	$29/5$	$-2/5+M$	$274/5$
x_2	0	1	$-1/5$	$2/5$	$-1/5$	$12/5$
x_1	1	0	$7/5$	$1/5$	$2/5$	$26/5$

- Tabel koefisien pada bentuk Primal standar (menggunakan metode M) adalah sbb:

Bentuk standar

Maksimumkan : $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - M + 0 s_1$

Terhadap : $x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 10$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 + R = 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

x_1	x_2	x_3	s_1	R	Solusi
5	12	4	0	-M	
1	2	1	1	0	10 ← y_1
2	-1	3	0	1	8 ← y_2

- Diperoleh hubungan antara var primal dan kendala dual yang terkait, sbb :

Variabel Primal	Kendala dual yang terkait
x_1	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
x_2	$2y_1 - y_2 \geq 12$
x_3	$y_1 + 3y_2 \geq 4$
s_1	$y_1 \geq 0$
R	$y_2 \geq -M$

Variabel Primal	Kendala dual yang terkait
x_1	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
x_2	$2y_1 - y_2 \geq 12$
x_3	$y_1 + 3y_2 \geq 4$
s_1	$y_1 \geq 0$
R	$y_2 \geq -M$

- Memperhatikan rumus (*) diperoleh :

Variabel basis iterasi awal Primal	s_1	R
Koefisien persamaan z optimal	$29/5$	$-2/5 + M$
Ruas kiri – ruas kanan kendala yang terkait dg vb iterasi awal Primal	$y_1 - 0$	$y_2 - (-M)$

Variabel basis iterasi awal Primal	s_1	R
Koefisien persamaan z optimal	$29/5$	$-2/5 + M$
Ruas kiri – ruas kanan kendala yang terkait dg vb iterasi awal Primal	$y_1 - 0$	$y_2 - (-M)$

- Menggunakan rumus (*) diperoleh nilai optimum untuk variabel dual dan fungsi obyektif dual sbb :
- $y_1 - 0 = 29/5$ $y_1 = 29/5$
- $y_2 - (-M) = -2/5 + M$ $y_2 = -2/5$
- $w_{\min} = 10 y_1 + 8 y_2 = 274/5$

Terlihat $w_{\min} = z_{\max}$

3 it,
sol 5
 $x_1=1$ $x_2=3$

Diketahui masalah Program Linear berikut:

Maksimumkan : $z = 2x_1 + x_2$

terhadap kendala : $3x_1 + x_2 \leq 6$

$$2x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Buatlah bentuk dualnya

Tentukan penyelesaian dual dari tabel optimal primal

Minimize $z = 4x_1 + x_2$

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solution
z	0	0	0	-98.6	-100	-.2	3.4
x_1	1	0	0	.4	0	-.2	.4
x_2	0	1	0	.2	0	.6	1.8
x_3	0	0	1	1	-1	1	1.0

Diketahui masalah Program Linear berikut:

$$z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

terhadap kendala : $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Buatlah bentuk dualnya

Tentukan penyelesaian dual dari tabel optimal primal