

MATEMATIKA IPA

- Rangkuman Materi
- Contoh Soal dan Pembahasan

BAB 1 PERSAMAAN KUADRAT

BAB 2 FUNGSI KUADRAT

BAB 3 PERTIDAKSAMAAN

BAB 4 EKSPONEN DAN LOGARITMA

BAB 5 TRIGONOMETRI

BAB 6 STATISTIK DAN PELUANG

BAB 7 LINGKARAN

BAB 8 SUKU BANYAK

BAB 9 LIMIT

BAB 10 TURUNAN

BAB 11 INTEGRAL

BAB 12 MATRIKS DAN TRANSFORMASI

BAB 13 VEKTOR

BAB 14 BARISAN DAN DERET

BAB 15 DIMENSI TIGA





- BAB 1 - Persamaan Kuadrat

Rangkuman Materi

A. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat: $ax^2 + bx + c = 0$

Akar-akar persamaan kuadrat dapat dicari dengan

1. Metode faktorisasi
2. Metode melengkapkan kuadrat sempurna
3. Metode rumus kuadrat (Rumus abc)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

B. Sifat-Sifat Akar

Misalkan x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $D > 0$, maka:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ atau } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Sebagai akibat rumus tersebut, diperoleh:

1. Jumlah akar $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
2. Hasil kali akar $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
3. Selisih akar $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$
4. Beberapa rumus yang biasa digunakan saat menentukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat
 - a) Jumlah kuadrat
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2)$$
 - b) Selisih kuadrat
$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$
 - c) Kuadrat selisih
$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2$$
 - d) Jumlah pangkat tiga
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 \cdot x_2)(x_1 + x_2)$$
 - e) Selisih pangkat tiga
$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3(x_1 \cdot x_2)(x_1 + x_2)$$

f) Jumlah kebalikan

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

C. Jenis-Jenis Akar

1. Dilihat dari diskriminannya ($D = b^2 - 4ac$), akar-akar persamaan kuadrat dibagi menjadi 3 yaitu:
 - a) $D \geq 0$ berarti memiliki akar real
 - $D > 0$ berarti memiliki 2 akar real berbeda
 - $D = 0$ berarti memiliki satu akar real (kembar)
 - b) $D < 0$ berarti tidak memiliki akar real (imajiner)
 - c) $D = k^2$ berarti memiliki 2 akar rasional
2. Bentuk perluasan untuk akar-akar real:
 - a) Kedua akar berkebalikan ($x_1 = \frac{1}{x_2}$)
 - $D \geq 0$
 - $x_1 x_2 = 1$
 - b) Kedua akar berlawanan ($x_1 = -x_2$)
 - $D > 0$
 - $x_1 + x_2 = 0$
 - $x_1 x_2 < 0$
 - c) Kedua akar positif ($x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$)
 - $D \geq 0$
 - $x_1 + x_2 > 0$
 - $x_1 x_2 > 0$
 - d) Kedua akar negatif ($x_1 < 0 \wedge x_2 < 0$)
 - $D \geq 0$
 - $x_1 + x_2 < 0$
 - $x_1 x_2 > 0$
 - e) Akar yang satu positif dan yang lain negatif (berlainan tanda)
 - $D > 0$
 - $x_1 x_2 < 0$
 - f) Kedua akar lebih besar dari bilangan konstan p ($x_1 > p \wedge x_2 > p$)
 - $D \geq 0$
 - $(x_1 - p) + (x_2 - p) > 0$
 - $(x_1 - p)(x_2 - p) > 0$
 - g) Kedua akar lebih kecil dari bilangan konstan q ($x_1 < q \wedge x_2 < q$)
 - $D \geq 0$
 - $(x_1 - q) + (x_2 - q) < 0$
 - $(x_1 - q)(x_2 - q) > 0$

Untuk akar-akar berelasi, tentukan syarat dengan melihat D , $x_1 + x_2$, dan $x_1 \cdot x_2$
--

D. Menyusun Persamaan Kuadrat Baru

Jika diketahui x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, maka persamaan kuadrat baru dengan akar-akar α dan β , dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

1. Menggunakan rumus, yaitu $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
2. Menyubstitusikan invers akar-akar yang baru ke persamaan semula

Soal dan Pembahasan

1. Jika a dan b adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + x - 3 = 0$, maka nilai $2a^2 + b^2 + a = \dots$
- A. 10
B. 9
C. 7
D. 6
E. 4

(TKDU SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

Karena a akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + x - 3 = 0$, maka berlaku:

$$a^2 + a - 3 = 0$$

$$a^2 = 3 - a$$

$$2a^2 = 6 - 2a$$

Karena b juga akar-akar persamaan $x^2 + x - 3 = 0$, maka berlaku:

$$b^2 + b - 3 = 0$$

$$b^2 = 3 - b$$

$$\text{Jadi, } 2a^2 + b^2 + a$$

$$= (6 - 2a) + (3 - b) + a$$

$$= 9 - (a + b)$$

$$= 9 - (-1)$$

$$= 10$$

-----**Jawaban: A**

2. Diketahui m dan n akar-akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$. Jika $m+2$ dan $n+2$ merupakan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + qx + r = 0$, maka $q + r = \dots$
- A. $c + 3b$
B. $c - b + 4a$
C. $c - b$

- D. $c - b + 8a$
E. $c + 3b + 8a$

(TKDU SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} m \\ n \end{cases}$$

$$\bullet \quad m+n = -\frac{b}{a}$$

$$\bullet \quad m \cdot n = \frac{c}{a}$$

$$ax^2 + qx + r = 0 \begin{cases} m+2 \\ n+2 \end{cases}$$

$$(m+2) + (n+2) = -\frac{q}{a}$$

$$\Leftrightarrow (m+n)+4 = -\frac{q}{a}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{a} + 4 = -\frac{q}{a}$$

$$\Leftrightarrow b - 4a = q$$

$$(m+2)\beta(n+2) = \frac{r}{a}$$

$$\Leftrightarrow mn+2(m+n)+4 = \frac{r}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a} + 2\left(-\frac{b}{a}\right) + 4 = \frac{r}{a}$$

$$\Leftrightarrow c - 2b + 4a = r$$

$$\text{Jadi, } q + r$$

$$= (b-4a) + (c-2b+4a)$$

$$= c - b$$

-----**Jawaban: C**

3. Misalkan $a \neq 0$, serta x_1 dan x_2 adalah akar-akar $x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 = 0$. Jika persamaan $x^2 + bx + c = 0$ memiliki akar-akar $2x_1$ dan $2x_2$, maka nilai $2a^2 + c + ab = \dots$

- A. -6
- B. -2
- C. 0
- D. 2
- E. 6

(TKDU SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 = 0 \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} \text{ sehingga}$$

$$x_1 + x_2 = a + \frac{1}{a} \text{ dan } x_1 x_2 = 1$$

$$x^2 + bx + c = 0 \begin{cases} 2x_1 \\ 2x_2 \end{cases} \text{ sehingga:}$$

- $2x_1 + 2x_2 = -b$

$$2(x_1 + x_2) = -b$$

$$2\left(a + \frac{1}{a}\right) = -b$$

$$2a^2 + 2 = -ab$$

$$2a^2 + ab = -2$$

- $2x_1 \cdot 2x_2 = c$

$$4x_1 x_2 = c$$

$$4(1) = c$$

$$c = 4$$

Jadi, nilai

$$2a^2 + c + ab = (2a^2 + ab) + c = -2 + 4 = 2$$

-----**Jawaban: D**

4. Jika semua akar $x^2 - 99x + p = 0$ merupakan bilangan prima, maka nilai p adalah ...

- A. 100
- B. 194
- C. 198
- D. 288
- E. 380

(TKDU SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

Misalkan akar persamaan kuadrat $x^2 - 99x + p = 0$ adalah α dan β , maka:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 99$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = p$$

Jumlah kedua bilangan prima = 99 (ganjil), maka kita ambil bilangan yang satu genap dan yang satunya ganjil. Salah satu bilangan prima yang genap

adalah 2, sehingga bilangan yang lain adalah $99 - 2 = 97$.

Jadi, $p = \alpha\beta = 2 \cdot 97 = 194$.

-----**Jawaban: B**

5. Jika akar-akar $x^2 - ax - b = 0$ saling berkebalikan dan salah satu akar tersebut merupakan bilangan bulat positif, maka nilai terkecil yang mungkin untuk $a - b$ adalah

- A. -3
- B. -1
- C. 1
- D. 2
- E. 3

(TKDU SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

Misalkan akar-akar $x^2 - ax - b = 0$ adalah α dan β , maka:

$$\alpha + \beta = a$$

$$\alpha\beta = -b$$

Kedua akar-akarnya saling berkebalikan, artinya

$$\alpha = \frac{1}{\beta}$$

Syarat yang harus terpenuhi:

- (1) Hasil kali kedua akar pasti 1

$$\Leftrightarrow \alpha\beta = 1$$

$$\Leftrightarrow -b = 1$$

- (2) Salah satu akarnya bilangan bulat positif, maka akar yang lain pasti juga positif sehingga $\alpha + \beta > 0$.

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta > 0$$

$$\Leftrightarrow a > 0$$

- (3) Persamaan kuadrat tersebut memiliki dua akar real, maka $D \geq 0$.

$$\Leftrightarrow a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b) \geq 0$$

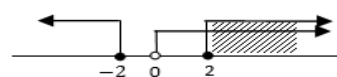
$$\Leftrightarrow a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a+2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \text{ atau } a = -2$$

Iriskan (2) dan (3)



Nilai minimum $a = 2$ sehingga $-b = 2+1 = 3$.

-----**Jawaban: E**

6. Persamaan kuadrat $x^2 - (c-2)x + 4 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 . Jika $x_1 > 1$ dan $x_2 > 1$, maka ...
- $c < 7$
 - $c \leq -2$
 - $6 \leq c < 7$
 - $c \leq -2$ atau $c \geq 6$
 - $c \leq -2$ atau $2 \leq c < 7$

(TKDU SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$x^2 - (c-2)x + 4 = 0 \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

- $x_1 > 1 \rightarrow x_1 - 1 > 0$
- $x_2 > 1 \rightarrow x_2 - 1 > 0$

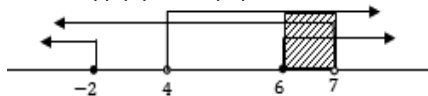
Jadi,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \\ & \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ & \Leftrightarrow 4 - (c-2) + 1 > 0 \\ & \Leftrightarrow c < 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \\ & \Leftrightarrow (x_1 + x_2) - 2 > 0 \\ & \Leftrightarrow c - 2 - 2 > 0 \\ & \Leftrightarrow c > 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad & D \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (c-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow c^2 - 4c - 12 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (c-6)(c+2) \geq 0 \end{aligned}$$

Iriskan (i), (ii), dan (iii)



Jadi, $6 \leq c < 7$.

-----**Jawaban: C**

7. Jika p dan q merupakan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - (a+1)x + \left(-a - \frac{5}{2}\right) = 0$. Maka nilai minimum $p^2 + q^2$ adalah
- $\frac{5}{2}$
 - 2
 - 1

- $\frac{1}{2}$
- 0

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$x^2 - (a+1)x + \left(-a - \frac{5}{2}\right) = 0 \begin{cases} p \\ q \end{cases}$$

$$p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 - 2 \cdot \left(-a - \frac{5}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 + 2a + 5$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a + 6$$

$$\text{Syarat minimum } f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2$$

$$\text{Jadi, nilai minimum } p^2 + q^2 \text{ adalah } (-2)^2 + 4(-2) + 6 = 2$$

-----**Jawaban: B**

8. Diketahui x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan $x^2 + 5ax + a^3 - 4a + 1 = 0$. Nilai a sehingga $x_1 + x_1x_2 + x_2$ maksimum pada interval $[-3, 3]$ adalah

- 3
- $-\sqrt{3}$
- 0
- $\sqrt{3}$
- 3

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$x^2 + 5ax + a^3 - 4a + 1 = 0 \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}, \text{ sehingga } x_1 + x_2 = -5a \text{ dan } x_1x_2 = a^3 - 4a + 1.$$

Misal $f(a) = x_1 + x_1x_2 + x_2$, maka:

$$\begin{aligned} f(a) &= (x_1 + x_2) + x_1x_2 \\ &= -5a + a^3 - 4a + 1 \\ &= a^3 - 9a + 1 \end{aligned}$$

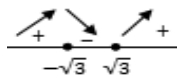
Supaya maksimum, maka $f'(a) = 0$

$$3a^2 - 9 = 0$$

$$3(a^2 - 3) = 0$$

$$3(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) = 0$$

$$a = \sqrt{3} \text{ atau } a = -\sqrt{3}$$



$$f(-3) = -27 + 27 + 1 = 1$$

$$f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 1 = 6\sqrt{3} + 1$$

$$f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 1 = -6\sqrt{3} + 1$$

$$f(3) = 27 - 27 + 1 = 1$$

Jadi, nilai $x_1 + x_1x_2 + x_2$ maksimum di $a = -\sqrt{3}$.

-----**Jawaban: B**

9. Jika α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $(m-1)x^2 - (m+2)x - 1 = 0$, maka $\log(1 + (1-\alpha)\beta + \alpha)$ ada nilainya untuk ...
- $m > -1$
 - $m < 1$
 - $-1 < m < 1$
 - $m < -1$ atau $m > 1$
 - $m < -\frac{2}{3}$ atau $m > \frac{2}{3}$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$(m-1)x^2 - (m+2)x - 1 = 0 \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m+2}{m-1}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{m-1}$$

$$1 + (1-\alpha)\beta + \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 + \beta - \alpha\beta + \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 + (\alpha + \beta) - \alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{m+2}{m-1}\right) - \left(\frac{-1}{m-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m+2}{m-1}$$

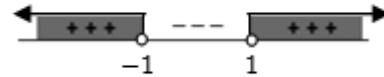
$$\log(1 + (1-\alpha)\beta + \alpha) = \log\left(\frac{2m+2}{m-1}\right)$$

Supaya ada nilainya, maka

$$\frac{2m+2}{m-1} > 0$$

$$2m+2 = 0 \rightarrow m = -1$$

$$m-1 = 0 \rightarrow m = 1$$



Jadi, nilai m yang memenuhi adalah $m < -1$ atau $m > 1$.

-----**Jawaban: D**

10. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar $25^x - 2.5^x - 5^x + a = 0$ di mana $x_1 + x_2 = 2$. ${}^5\log 2 + 1$, maka nilai a adalah
- 30
 - 25
 - 20
 - 10
 - 5

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$25^x - 2.5^x - 5^x + a = 0$$

$$(5^x)^2 - 2.5^x - 5^x + a = 0$$

$$(5^x)^2 - 11.5^x + a \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

$$5^{x_1} \cdot 5^{x_2} = \frac{c}{a} = a$$

$$5^{x_1+x_2} = a$$

$$5^{2 \cdot {}^5\log 2 + 1} = a$$

$$5^{5\log 2^2 + {}^5\log 5} = a$$

$$5^{5\log 20} = a$$

$${}^5\log a = {}^5\log 20$$

$$a = 20$$

-----**Jawaban: C**



- BAB 2 - Fungsi Kuadrat

Rangkuman Materi

A. Bentuk Umum Fungsi Kuadrat

Bentuk umum: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

1. Koordinat puncak

$$x_p = -\frac{b}{2a}$$

$$y_p = -\frac{D}{4a}$$

2. Sumbu simetri $x = x_p$
3. Nilai maksimum/minimum $y = y_p$

B. Sifat Kurva Parabola

1. Dilihat dari koefisien "a"

Nilai a untuk menentukan arah membukanya grafik

- $a > 0$, parabola **terbuka ke atas** sehingga mempunyai **nilai minimum**
- $a < 0$, parabola **terbuka ke bawah** sehingga mempunyai **nilai maksimum**

2. Dilihat dari koefisien "b"

Nilai b untuk menentukan posisi sumbu simetri

- a. a dan b bertanda sama ($a > 0, b > 0$) atau ($a < 0, b < 0$), sumbu simetri berada di **kiri sumbu y**
- b. a dan b berlainan tanda ($a < 0, b > 0$) atau ($a > 0, b < 0$), sumbu simetri berada di **kanan sumbu y**

3. Dilihat dari koefisien "c"

Nilai c untuk menentukan titik potong dengan sumbu y

- a. $c > 0$, parabola **memotong sumbu y positif**
- b. $c < 0$, parabola **memotong sumbu y negatif**

4. Dilihat dari $D = b^2 - 4ac$ (Diskriminan)

- a. $D > 0$ berarti parabola memotong sumbu x di dua titik
- b. $D = 0$ berarti parabola menyinggung sumbu x
- c. $D < 0$ berarti parabola tidak memotong dan tidak menyinggung sumbu x
 - Jika parabola selalu berada di atas sumbu x, disebut **definit positif**, syaratnya:
 $D < 0, a > 0$
 - Jika parabola selalu berada di bawah sumbu x, disebut **definit negatif**, syaratnya:
 $D < 0, a < 0$

C. Menyusun Fungsi Kuadrat

1. Diketahui memotong sumbu x di $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$, maka gunakan rumus:
 $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
2. Diketahui titik puncak (x_p, y_p) , maka gunakan rumus: $y = f(x) = a(x - x_p)^2 + y_p$
3. Diketahui menyinggung sumbu x di $(x_1, 0)$, maka gunakan rumus: $y = f(x) = a(x - x_1)^2$

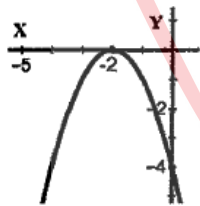
D. Hubungan Garis dan Parabola

Dilihat dari $D = b^2 - 4ac$, kedudukan garis terhadap parabola dibagi menjadi 3, yaitu:

1. $D > 0$ berarti garis memotong parabola di dua titik
2. $D = 0$ berarti garis memotong parabola di satu titik (menyinggung)
3. $D < 0$ berarti garis tidak memotong dan tidak menyinggung parabola

Soal dan Pembahasan

1. Jika gambar di bawah ini adalah grafik fungsi kuadrat f dengan titik puncak $(-2, 0)$ dan melalui titik $(0, -4)$, maka nilai $f(-5)$ adalah



- A. -7
B. -8
C. -9
D. -10
E. -11

(MATDAS SNMPTN 2012)

Pembahasan CERDAS:

Fungsi kuadrat yang diketahui $(x_p, y_p) = (-2, 0)$ dan melalui $(0, -4)$.

$$\begin{aligned} y &= f(x) = a(x - x_p)^2 + y_p \\ \Leftrightarrow y &= a(x + 2)^2 + 0 \\ \Leftrightarrow -4 &= a(0 + 2)^2 + 0 \\ \Leftrightarrow -4 &= 4a \\ \Leftrightarrow a &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi, } f(x) &= -(x + 2)^2 \\ \rightarrow f(-5) &= -(-5 + 2)^2 = -9 \end{aligned}$$

Jawaban: C

2. Fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + 2px + p$ mempunyai nilai minimum $-p$ dengan $p \neq 0$. Jika sumbu simetri kurva f adalah $x = a$, maka nilai $a + f(a) = \dots$
- A. 6
B. 4
C. -4
D. -5
E. -6

(TKDU SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} D &= -4a \\ y_{\min} &= \frac{D}{-4a} = -p \\ \Leftrightarrow \frac{(2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p}{-4 \cdot 1} &= -p \\ \Leftrightarrow 4p^2 - 4p &= 4p \\ \Leftrightarrow 4p^2 - 8p &= 0 \\ \Leftrightarrow 4p(p - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= 0 \text{ (tm)} \vee p = 2 \\ f(x) &= x^2 + 2px + p \\ \rightarrow f(x) &= x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

$$a = x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$f(a) = f(-2) = 4 - 8 + 2 = -2$$

$$\text{Jadi, } a + f(a) = -2 - 2 = -4$$

-----**Jawaban: C**

3. Diketahui titik minimum fungsi kuadrat $y = x^2 + bx + c$ adalah $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$. Jika grafik fungsi tersebut melalui titik $(p, 0)$ dan $(q, 0)$, maka nilai $p^2q + pq^2 = \dots$
- A. -30
B. -11
C. 11
D. 25
E. 30

(TKDU SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$y = x^2 + bx + c$$

$$\circ x_p = -\frac{b}{2a}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{2 \cdot 1} = -\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow b = -5$$

$$\circ y_p = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{b^2 - 4 \cdot 1 \cdot c}{4 \cdot 1} = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-5)^2 - 4c}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 25 - 4c = 1$$

$$\Leftrightarrow 4c = 24$$

$$\Leftrightarrow c = 6$$

sehingga diperoleh fungsi kuadrat

$$y = x^2 - 5x + 6$$

Grafik memotong sumbu $x \rightarrow y = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ atau } x = 2$$

$$\text{Jadi, nilai } p^2q + pq^2 = 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 30$$

-----**Jawaban: E**

4. Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik puncak $(8, 4)$ dan memotong sumbu- x negatif, maka

- A. $a > 0, b > 0$, dan $c > 0$
B. $a < 0, b < 0$, dan $c > 0$
C. $a < 0, b > 0$, dan $c < 0$
D. $a > 0, b > 0$, dan $c < 0$
E. $a < 0, b > 0$, dan $c > 0$

(TKDU SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

Titik puncak $(8, 4) \rightarrow$ grafik terbuka ke bawah, maka $a < 0$.

$$x_p = -\frac{b}{2a} = 8 (+)$$

karena $a < 0 \rightarrow b > 0$

Memotong sumbu x negatif $\rightarrow D > 0$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0$$

$$\Leftrightarrow (+) - 4(-)c > 0$$

$$\Leftrightarrow c > 0$$

-----**Jawaban: E**

5. Untuk $0 < a < 10$, fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + 2ax + 10$ memenuhi sifat

- A. selalu negatif
B. selalu positif
C. hanya positif di setiap x , dengan $0 < x < 10$
D. hanya negatif di setiap x , dengan $0 < x < 10$
E. hanya positif di setiap x , dengan $x < 0$ atau $x > 10$

(TKDU SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$0 < a < 10 \rightarrow a > 0$$

$$D = (2a)^2 - 4 \cdot a \cdot 10$$

$$= 4a^2 - 40a < 0$$

Karena $a > 0, D < 0$, maka defitif positif (selalu positif untuk setiap x).

-----**Jawaban: B**

6. Jika parabola $y = x^2 - 2x + a$ digeser ke kanan searah sumbu x sejauh 1 satuan sehingga melalui titik $(0,0)$, maka nilai a adalah

A. -3
B. -1
C. 0
D. 1
E. 3

(TKDU SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$y = x^2 - 2x + a$$

$$y = (x - 1)^2 + a - 1$$

Digeser ke kanan sejauh 1 satuan

$$y = ((x - 1) - 1)^2 + a - 1$$

$$= (x - 2)^2 + a - 1$$

Melalui titik $(0,0)$

$$\Leftrightarrow 0 = (0 - 2)^2 + a - 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = 4 + a - 1$$

$$\Leftrightarrow a = -3$$

Jadi, nilai $a = -3$

-----Jawaban: A

7. Jika grafik fungsi $y = x^2 - 10x$ memotong sumbu x di titik A dan B, serta C adalah titik puncaknya, maka luas segitiga ABC adalah

A. 25
B. 50
C. 75
D. 100
E. 125

(TKDU SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

Fungsi $y = x^2 - 10x$ memotong sumbu x

$$\rightarrow y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 10$$

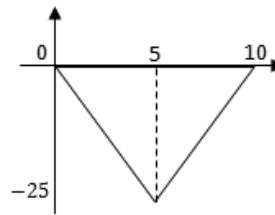
diperoleh titik A(0,0) dan B(10,0)

$$y = x^2 - 10x$$

$$x_p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2 \cdot 1} = 5$$

$$y_p = (5)^2 - 10(5) = -25$$

diperoleh titik C (5, -25).



$$L_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 25 = 125$$

-----Jawaban: E

8. Diketahui suatu parabola simetris terhadap garis $x = -2$ dan garis singgung parabola tersebut dititik $(0,1)$ sejajar dengan garis $4x + y = 4$. Titik puncak parabola tersebut adalah

A. (-2,-3)
B. (-2,-2)
C. (-2,0)
D. (-2,1)
E. (-2,5)

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

Misalkan parabola $y = ax^2 + bx + c$

Parabola simetris terhadap garis:

$$x = -2 \rightarrow x_p = -\frac{b}{2a} = -2$$

diperoleh **$b = 4a$** .

- $g \equiv 4x + y = 4 \rightarrow m_g = -4$

Karena sejajar, maka

$$m_{\text{parabola}} = m_g = -4$$

$$\Leftrightarrow m_{\text{parabola}} = y'$$

$$\Leftrightarrow 2ax + b = -4 \text{ melalui } (0,1)$$

$$\Leftrightarrow 2a(0) + b = -4$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{b = -4}$$

- $b = 4a$

$$\Leftrightarrow -4 = 4a$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a = -1}$$

- $y = -x^2 - 4x + c \text{ melalui } (0,1)$

$$\Leftrightarrow 1 = -0^2 - 4(0) + c$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c = 1}$$

Jadi, $y = -x^2 - 4x + 1$

$$x_p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-1)} = -2$$

$$y_p = -(-2)^2 - 4(-2) + 1 = 5$$

-----Jawaban: E

9. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik puncak di (p, p) dan titik potong terhadap sumbu y di $(0, -p)$. Jika $p \neq 0$, maka b adalah
- A. $-p$
 B. 0
 C. 2
 D. 4
 E. p

(Matematika Dasar Simak UI 2014)

Pembahasan CERDAS:

- $y = ax^2 + bx + c$ memotong sumbu y di titik $(0, -p)$
 $\Leftrightarrow -p = a(0)^2 + b(0) + c$
 $\Leftrightarrow c = -p \dots (i)$

- $y = ax^2 + bx + c$ mempunyai puncak (p, p)

$$x_p = -\frac{b}{2a} = p$$

$$2a = -\frac{b}{p} \dots (ii)$$

$$y_p = \frac{-4ac}{-4a} = p$$

$$\frac{b^2 - 4ac}{-4a} = p$$

$$\frac{b^2 - 2(2a)c}{-2(2a)} = p \dots (iii)$$

Substitusikan (i) dan (ii) ke (iii)

$$\frac{b^2 - 2\left(-\frac{b}{p}\right)(-p)}{-2\left(-\frac{b}{p}\right)} = p$$

$$b^2 - 2b = p \cdot -2\left(-\frac{b}{p}\right)$$

$$b^2 - 2b = 2b$$

$$b^2 - 4b = 0$$

$$b(b - 4) = 0$$

$$b = 0 \text{ atau } b = 4$$

$$\text{Jadi, nilai } b = 4$$

-----**Jawaban: D**

10. Jika garis $x - 2y = 3$ tidak memotong maupun menyinggung kurva

$$y = x^2 + ax - \frac{15}{16}, \text{ maka}$$

- A. $a > 2$
 B. $1 < a < 2$
 C. $-1 < a < 2$
 D. $-2 < a < -1$
 E. $-2 < a < 1$

(TKDU SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$\frac{y}{x-3} = x^2 + ax - \frac{15}{16}$$

$$x^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x + \frac{19}{16} = 0$$

Syarat tidak memotong tidak menyinggung: $D < 0$.

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{19}{16} < 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)(a + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \text{ atau } a = -1$$



Jadi, $-1 < a < 2$

-----**Jawaban: C**



- BAB 3 - Pertidaksamaan

Rangkuman Materi

A. Pengertian

Pertidaksamaan adalah kalimat matematika terbuka yang menggunakan tanda $>$, $<$, \geq , \leq , dan \neq .

B. Sifat - Sifat Pertidaksamaan

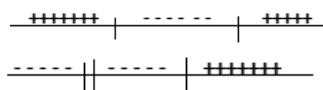
1. Jika a dan b bilangan real, maka berlaku $a > b$ atau $a = b$ atau $a < b$
2. Jika $a > b$ dan $b > c$, maka $a > c$
3. Jika $a > b$, maka $a \pm c > b \pm c$
4. Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka $ac > bc$ dan $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
5. Jika $a > b$ dan $c < 0$, maka $ac < bc$ dan $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
6. Jika m genap dan $a > b$, maka:
 - $a^m > b^m$, untuk $a > 0$ dan $b > 0$
 - $a^m < b^m$, untuk $a < 0$ dan $b < 0$
7. Jika n ganjil dan $a > b$, maka $a^n > b^n$
8. Jika $a > b$, maka:
 - $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, untuk a dan b bertanda sama
 - $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, untuk a dan b berbeda tanda

C. Garis Bilangan

Garis bilangan digunakan untuk mengetahui daerah $(+/-)$ suatu fungsi.

Cara menentukan garis bilangan:

1. Nalkan salah satu ruas
2. Faktorkan
3. Tes tanda untuk menentukan daerah $(+/-)$
Tanda ruas paling kanan sama dengan tanda koefisien pangkat tertinggi.
4. Tentukan intervalnya
Jika pangkat ganjil berlainan tanda dan pangkat genap sama tanda.



D. Definit

1. Jenis Definit
 - a) Definit Positif
Fungsi $f(x)$ dikatakan definit positif jika $f(x) > 0$ untuk nilai x berapa pun.
 - b) Definit Negatif
Fungsi $f(x)$ dikatakan definit negatif jika $f(x) < 0$ untuk nilai x berapa pun.
2. Sifat Definit
 - a) Untuk $f(x)$ definit positif dan $g(x)$ sembarang
 - $f(x)g(x) > 0 \rightarrow g(x) > 0$
 - $f(x)g(x) < 0 \rightarrow g(x) < 0$
 - $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \rightarrow g(x) > 0$
 - $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \rightarrow g(x) < 0$
 - b) Untuk $f(x)$ definit negatif dan $g(x)$ sembarang
 - $f(x)g(x) > 0 \rightarrow g(x) < 0$
 - $f(x)g(x) < 0 \rightarrow g(x) > 0$
 - $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \rightarrow g(x) < 0$
 - $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \rightarrow g(x) > 0$

E. Jenis Pertidaksamaan

1. Pertidaksamaan Linier
Penyelesaian: letakkan variabel x di ruas tersendiri, terpisah dari konstanta - konstanta.
2. Pertidaksamaan Kuadrat
Penyelesaian:
 - a) Nalkan salah satu ruas
 - b) Faktorkan
 - c) Tetapkan nilai - nilai nolnya
 - d) Tentukan daerah $(+/-)$
 - e) Tentukan daerah penyelesaian
 - Jika yang ditanyakan > 0 atau ≥ 0 , maka daerah penyelesaian adalah daerah $(+)$.
 - Jika yang ditanyakan < 0 atau ≤ 0 , maka daerah penyelesaian adalah daerah $(-)$.
3. Pertidaksamaan Pecahan
 - a) Nalkan salah satu ruas
 - b) Samakan penyebutnya
 - c) Selanjutnya sama dengan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat
4. Pertidaksamaan Bentuk Akar
 - a) $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$
 - (i) $f(x) \geq 0$
 - (ii) $g(x) \geq 0$
 - (iii) $f(x) \leq g(x)$Daerah penyelesaiannya adalah $(i) \cap (ii) \cap (iii)$

$$b) \sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$$

$$(i) f(x) \geq 0$$

$$(ii) f(x) \geq g(x)$$

Daerah Penyelesaiannya adalah $(i) \cap (ii)$

5. Pertidaksamaan Harga Mutlak

$$a) |f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) \geq 0$$

$$b) |f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) \leq 0$$

c) Definisi Harga Mutlak

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{bila } x < 0 \\ x, & \text{bila } x \geq 0 \end{cases}$$

Soal dan Pembahasan

1. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$\frac{1+x}{1-x} > -1 \text{ adalah}$$

A. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

B. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

C. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

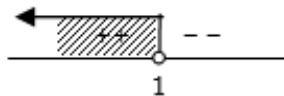
D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ atau } x > 1\}$

E. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ atau } x > 1\}$

(TKDU SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x} &> -1 \\ \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1+x+1-x}{1-x} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{1-x} &> 0 \end{aligned}$$



Jadi, $x < 1$

-----**Jawaban: A**

$$E. x \leq -2 \text{ atau } x \geq 2$$

(TKDU SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \frac{8}{x} - \frac{15}{2x+1} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{8}{x} - \frac{15}{2x+1} - 1 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{8(2x+1) - 15x - x(2x+1)}{x(2x+1)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 8}{x(2x+1)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2(x^2 - 4)}{x(2x+1)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2(x-2)(x+2)}{x(2x+1)} &\geq 0 \end{aligned}$$



Jadi, $-2 \leq x < -\frac{1}{2} \text{ atau } 0 < x \leq 2$

-----**Jawaban: C**

2. Semua bilangan real x yang memenuhi

$$\frac{8}{x} - \frac{15}{2x+1} \geq 1 \text{ adalah}$$

A. $-2 \leq x \leq 2$

B. $x \leq -2 \text{ atau } 0 \leq x < 1$

C. $-2 \leq x < -\frac{1}{2} \text{ atau } 0 < x \leq 2$

D. $-2 \leq x < -\frac{1}{2} \text{ atau } x \geq 2$

3. Jika $-2 < a < -1$, maka semua nilai x yang memenuhi pertidaksamaan

$$\frac{x^2+2x-3a}{x^2+4x} \geq 0 \text{ adalah}$$

A. $x > -4$

B. $x < -2$

C. $-4 < x < 0$

D. $x < -4 \text{ atau } x > 0$

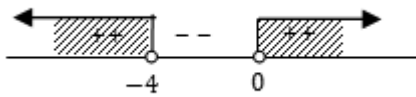
E. $x < -2$ atau $x > 1$

(TKDU SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

Karena $-2 < a < -1$, maka $a < 0$ (bilangan negatif (-))

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3a &\geq 0 \\ \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 3(-)} &\geq 0 \\ \frac{x^2 + 4x}{\text{definit (+)}} &\geq 0 \\ \frac{x(x+4)}{x(x+4)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x(x+4) &> 0 \end{aligned}$$



Jadi, $x < -4$ atau $x > 0$

-----**Jawaban: D**

4. Penyelesaian pertidaksamaan

$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \leq 4\left(1 - \frac{1}{x}\right) - 3$ adalah

- A. $x < -\frac{1}{2}$
- B. $x \geq -\frac{1}{2}$
- C. $x \geq 2$
- D. $x \leq 2$
- E. $x \leq -\frac{1}{2}$ atau $x \geq 2$

(TKDU SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 &\leq 4\left(1 - \frac{1}{x}\right) - 3 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 &\leq 4\left(\frac{x-1}{x}\right) - 3. \end{aligned}$$

Misalkan $p = \frac{x-1}{x}$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4p + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (p-3)(p-1) \leq 0$$

- $p = 3 \rightarrow \frac{x-1}{x} = 3 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$
- $p = 1 \rightarrow \frac{x-1}{x} = 1 \text{ (tm)}$

-----**Jawaban: A**

5. Semua nilai x yang memenuhi

$\sqrt{x+10} - \sqrt{x+2} > 2$ adalah

A. $-2 \leq x < -1$

B. $x > 1$

C. $-\frac{3}{2} \leq x \leq -1$

D. $x > 2$

E. $-1 < x < 1$

(TKDU SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+10} > 2 + \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+10})^2 > (2 + \sqrt{x+2})^2$$

$$\Leftrightarrow x+10 > 4 + 4\sqrt{x+2} + (x+2)$$

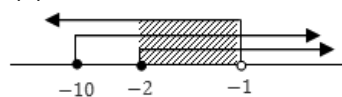
$$\Leftrightarrow 1 > \sqrt{x+2}$$

Syarat

(1) $1 > x+2 \rightarrow x < -1$

(2) $x+2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$

(3) $x+10 \geq 0 \rightarrow x \geq -10$



Dari (1), (2) dan (3) diperoleh:

$$-2 \leq x < -1$$

-----**Jawaban: A**

6. Jika $m > 0$, maka himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{m^2 - x^2} \leq x$ adalah

A. $\left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{m}{2}\right\}$

B. $\left\{x \mid \frac{m}{\sqrt{2}} \leq x\right\}$

C. $\left\{x \mid x \leq -\frac{m}{\sqrt{2}} \text{ atau } x \geq \frac{m}{\sqrt{2}}\right\}$

D. $\left\{x \mid -m \leq x \leq -\frac{m}{\sqrt{2}} \text{ atau } \frac{m}{\sqrt{2}} \leq x \leq m\right\}$

E. $\left\{x \mid \frac{m}{\sqrt{2}} \leq x \leq m\right\}$

(MATDAS UM UGM 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$\sqrt{m^2 - x^2} \leq x, \text{ syarat:}$$

1) $m^2 - x^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (m-x)(m+x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = m \vee x = -m$$

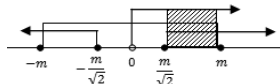
2) $m^2 - x^2 \leq x^2$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m - \sqrt{2}x)(m + \sqrt{2}x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{m}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{m}{\sqrt{2}}$$

Dari (1) \cap (2), dan $m > 0$ diperoleh



Jadi, himpunan penyelesaian:

$$\left\{x \mid \frac{m}{\sqrt{2}} \leq x \leq m\right\}$$

-----**Jawaban: E**

7. Semua nilai x yang memenuhi

$$\frac{1+\sqrt{4-x^2}}{x^2-x} > 0 \text{ adalah}$$

- A. $-2 \leq x < 0$ atau $1 < x \leq 2$
- B. $-2 < x < 0$ atau $1 < x < 2$
- C. $-2 \leq x < -1$ atau $0 < x \leq 2$
- D. $x < 0$ atau $x > 1$
- E. $0 < x < 1$

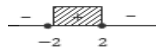
(SAINTEK UM UGM 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\frac{1+\sqrt{4-x^2}}{x^2-x} > 0$$

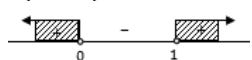
Syarat :

$$(i) \quad \begin{aligned} 4-x^2 &\geq 0 \\ (2-x)(2+x) &\geq 0 \end{aligned}$$

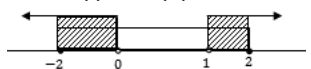


$$(ii) \quad \frac{1+\sqrt{4-x^2}}{x^2-x} > 0$$

$$\frac{\text{def}(+)}{x(x-1)} > 0$$



Iriskan (i) dan (ii)



Jadi, $-2 \leq x < 0$ atau $1 < x \leq 2$

-----**Jawaban: A**

8. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 + 2|x| - 15 \geq 0$ adalah

- A. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ atau } x \geq 3\}$
- B. $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$
- C. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$

- D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
- E. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

(Matematika IPA Simak UI 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$x^2 + 2|x| - 15 \geq 0$$

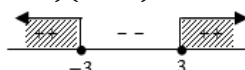
$$|x|^2 + 2|x| - 15 \geq 0$$

$$(|x| + 5)(|x| - 3) \geq 0$$

$$\text{bilangan}(+) (|x| - 3) \geq 0$$

$$|x| \geq 3$$

$$(x-3)(x+3) \geq 0$$



Jadi, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ atau } x \geq 3\}$

-----**Jawaban: A**

9. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|x+2|^2 \geq 2|x+2| + 15$ adalah

- A. $-7 \leq x \leq -3$
- B. $-7 \leq x \leq 3$
- C. $-3 \leq x \leq 5$
- D. $x \leq -7$ atau $x \geq 3$
- E. $x \leq -3$ atau $x \geq 5$

Pembahasan CERDAS:

$$|x+2|^2 \geq 2|x+2| + 15$$

$$\text{Misalkan } p = |x+2|$$

$$p^2 \geq 2p + 15$$

$$p^2 - 2p - 15 \geq 0$$

$$(p-5)(p+3) \geq 0$$

$$(p-5)\text{definit}(+) \geq 0$$

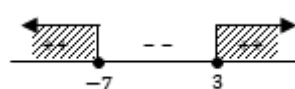
$$p-5 \geq 0$$

$$p \geq 5$$

$$|x+2| \geq 5$$

$$(x+2-5)(x+2+5) \geq 0$$

$$(x-3)(x+7) \geq 0$$



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $x \leq -7$ atau $x \geq 3$.

-----**Jawaban: D**

10. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$ adalah

- A. $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 2\}$
 B. $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 2\}$
 C. $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < 0 \text{ atau } 0 < x < 2\}$
 D. $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq \sqrt{3}\}$
 E. $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 2\}$

Pembahasan CERDAS:

$$|x| \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

- $x \geq 0$

$$\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{x} \geq 0 \rightarrow \sqrt{4-x^2} \geq -1$$

(terpenuhi)

- $x < 0$

$$\sqrt{4-x^2} + \frac{-x}{x} \geq 0$$

Syarat:

$$(1) \sqrt{4-x^2} \geq 1$$

$$4-x^2 \geq 1$$

$$3-x^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) \geq 0$$

$$(2) 4-x^2 \geq 0$$

$$(2-x)(2+x) \geq 0$$

$$(3) x \neq 0$$

Dari (1), (2) dan (3) diperoleh

$$-\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq \sqrt{3}.$$

-----**Jawaban: D**





- BAB 4 - Eksponen dan Logaritma

Rangkuman Materi

A. Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma

1. Bentuk Pangkat dan Akar

- a) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ kali}}$
- b) $a^0 = 1$, dengan $a \neq 0$
- c) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- d) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- e) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, dengan $a \neq 0$
- f) $(a^m)^n = a^{mn}$
- g) $(a \cdot b)^n = a^n b^n$
- h) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ dengan $b \neq 0$
- i) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geq 0$, a bilangan positif
- j) $a^{\frac{p}{m \cdot n}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}}$
- k) $b^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b$
- l) $p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$
- m) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- n) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- o) $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}}$, dengan $a > b$
- p) Sekawan dari \sqrt{a} adalah \sqrt{a}
- q) Sekawan dari $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ adalah $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$

2. Logaritma

- a) ${}^a\log b = c \Leftrightarrow a^c = b$, untuk $a > 0$ dan $a \neq 1$
- b) ${}^a\log a = 1$
- c) ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a} = \frac{{}^p\log b}{{}^p\log a}$, untuk $p > 0$ dan $p \neq 1$
- d) ${}^a\log(bd) = {}^a\log b + {}^a\log d$
- e) ${}^a\log\left(\frac{b}{d}\right) = {}^a\log b - {}^a\log d$

- f) $a^m \log b^n = \left(\frac{n}{m}\right) ({}^a \log b)$
 g) ${}^a \log b \cdot {}^b \log c \cdot {}^c \log d = {}^a \log d$
 h) $(a)^{{}^a \log b} = b$

B. Persamaan dan Pertidaksamaan Eksponen

1. Persamaan Eksponen

Untuk $0 < a < 1, a \neq b, 0 < b < 1$, dan $a, b > 1$

- a) $a^{f(x)} = a^m \Rightarrow f(x) = m$
 b) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$
 c) $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow f(x) = 0$

2. Pertidaksamaan Eksponen

Syarat	Bentuk	Penyelesaian
$a > 1$	$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$	$f(x) \geq g(x)$
	$a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$	$f(x) \leq g(x)$
$0 < a < 1$	$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$	$f(x) \leq g(x)$
	$a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$	$f(x) \geq g(x)$

C. Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma

1. Persamaan Logaritma

- a) ${}^a \log f(x) = {}^a \log m \rightarrow f(x) = m$
 b) ${}^a \log f(x) = {}^a \log g(x) \rightarrow f(x) = g(x)$
 c) ${}^a \log f(x) = {}^b \log f(x) \Rightarrow f(x) = 1$
 d) ${}^{f(x)} \log g(x) = {}^{f(x)} \log h(x) \begin{cases} f(x) > 0; g(x) > 0; \\ h(x) > 0; f(x) \neq 1; \\ g(x) = h(x) \end{cases}$

2. Pertidaksamaan Logaritma

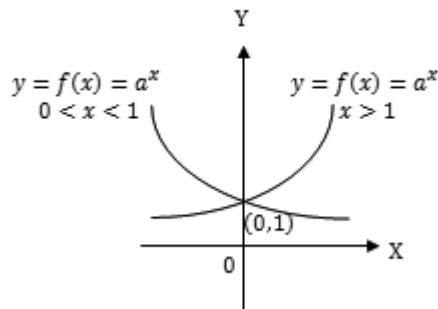
Syarat	Bentuk	Penyelesaian
$a > 1$	${}^a \log f(x) \geq {}^a \log g(x)$	$f(x) \geq g(x)$
	${}^a \log f(x) \leq {}^a \log g(x)$	$f(x) \leq g(x)$
	${}^a \log f(x) \geq b$	$f(x) \geq a^b$
$0 < a < 1$	${}^a \log f(x) \geq {}^a \log g(x)$	$f(x) \leq g(x)$
	${}^a \log f(x) \leq {}^a \log g(x)$	$f(x) \geq g(x)$
	${}^a \log f(x) \geq b$	$f(x) \leq a^b$

D. Grafik Fungsi Eksponen dan Logaritma

1. Grafik Fungsi Eksponen $f(x) = y = a^x$

Sifat-sifat fungsi eksponen:

- a) Untuk $a > 1$ merupakan fungsi monoton naik dan untuk $0 < a < 1$ merupakan fungsi monoton turun.

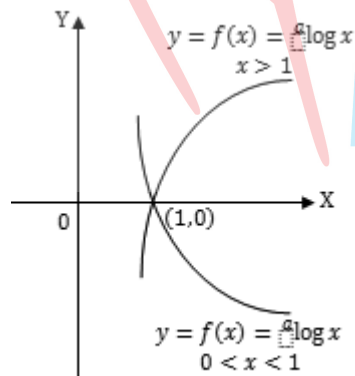


- b) Grafiknya selalu di atas sumbu X dan sumbu Y merupakan asimtot datar
c) Definit positif karena fungsi selalu bernilai positif
d) Memotong sumbu koordinat di titik (0,1)

2. Grafik Fungsi Logaritma $f(x) = y = {}^a\log x$

Sifat-sifat fungsi logaritma:

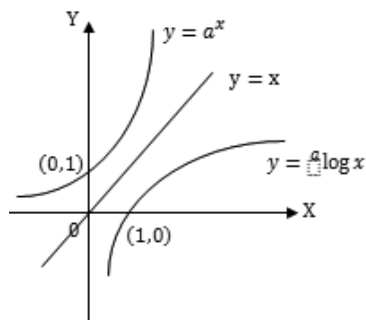
- a) Untuk $a > 1$ merupakan fungsi monoton naik dan untuk $0 < a < 1$ merupakan fungsi monoton turun.



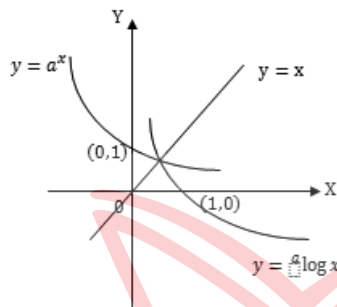
- b) Grafiknya selalu berada di sebelah kanan sumbu Y (terdefinisi untuk $x > 0$)
c) Sumbu Y merupakan asimtot tegak
d) Memotong sumbu koordinat di titik (1,0).

3. Hubungan Grafik Fungsi Eksponen dan Grafik Fungsi Logaritma

a) Grafik fungsi eksponen $y = a^x$ dan fungsi logaritma $y = {}^a\log x$ (untuk $a > 1$)



b) Grafik fungsi eksponen $y = a^x$ dan fungsi logaritma $y = {}^a\log x$ (untuk $0 < a < 1$)



Kesimpulan:

- 1) Fungsi eksponen adalah fungsi invers dari fungsi logaritma dan sebaliknya.
- 2) Grafik fungsi eksponen memotong sumbu Y positif.
- 3) Grafik fungsi logaritma memotong sumbu X positif.

Soal dan Pembahasan

1. Jika $4^x - 4^{x-1} = 6$, maka $(2x)^x$ sama dengan

- A. 3
B. $3\sqrt{3}$
C. 9
D. $9\sqrt{3}$
E. 27

(TKDU SBMPTN 2014)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot 4^x &= 6 \\ \Leftrightarrow 4^x &= 8 \\ \Leftrightarrow 2^{2x} &= 2^3 \\ \Leftrightarrow 2x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } (2x)^x = \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

-----Jawaban: B

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} 4^x - 4^{x-1} &= 6 \\ \Leftrightarrow 4^x - \frac{1}{4} \cdot 4^x &= 6 \end{aligned}$$

2. Jika $A^{2x} = 2$, maka $\frac{A^{5x} - A^{-5x}}{A^{3x} + A^{-3x}} = \dots$

- A. $\frac{31}{18}$
- B. $\frac{31}{9}$
- C. $\frac{32}{18}$
- D. $\frac{33}{9}$
- E. $\frac{33}{18}$

(TKDU SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$A^{2x}=2 \rightarrow A^x = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{A^{5x} - A^{-5x}}{A^{3x} + A^{-3x}} &= \frac{(A^x)^5 - \frac{1}{(A^x)^5}}{(A^x)^3 + \frac{1}{(A^x)^3}} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^5 - \frac{1}{(\sqrt{2})^5}}{(\sqrt{2})^3 + \frac{1}{(\sqrt{2})^3}} \\ &= \frac{4\sqrt{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\frac{32-1}{8+1}}{\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{31}{18} \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

3. Grafik $y = 3^{x+1} - \left(\frac{1}{9}\right)^x$ berada di bawah grafik $y = 3^x + 1$ jika
- A. $0 < x < 1$
 - B. $x > 1$
 - C. $x < 0$
 - D. $x > 3$
 - E. $1 < x < 3$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} y &= 3^{x+1} - \left(\frac{1}{9}\right)^x \text{ berada di bawah grafik} \\ y &= 3^x + 1, \text{ maka} \\ 3^{x+1} - \left(\frac{1}{9}\right)^x &< 3^x + 1 \end{aligned}$$

$$3^x \cdot 3 - \frac{1}{(3^x)^2} < 3^x + 1$$

$$\text{Misalkan } 3^x = p$$

$$3p - \frac{1}{p^2} < p + 1$$

$$2p - \frac{1}{p^2} - 1 < 0$$

$$\frac{2p^3 - p^2 - 1}{p^2} < 0$$

$$\frac{(2p^2 + p + 1)(p - 1)}{p^2} < 0$$

$2p^2 + p + 1$ dan p^2 definit positif, sehingga

$$p - 1 < 0$$

$$3^x < 1$$

$$3^x < 3^0$$

$$x < 0$$

-----Jawaban: C

4. Nilai c yang memenuhi pertidaksamaan $(0,14)^{(3x^2+4x-c)} < (0,0196)^{(x^2+2x+5)}$ adalah

- A. $-10 < c < 6$
- B. $c < -10$
- C. $-10 < c < 0$
- D. $c < 6$
- E. $c > -10$

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$(0,14)^{(3x^2+4x-c)} < (0,0196)^{(x^2+2x+5)}$$

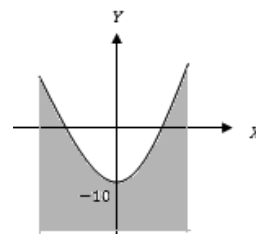
$$(0,14)^{(3x^2+4x-c)} < (0,14)^{2(x^2+2x+5)}$$

Karena bilangan pokok 0,14, artinya $0 < a < 1$ sehingga pertidaksamaannya dibalik.

$$3x^2 + 4x - c > 2x^2 + 4x + 10$$

$$x^2 - 10 - c > 0$$

$$c < x^2 - 10$$



Dari grafik dapat kita lihat bahwa nilai c selalu berada di bawah titik puncak $f(x) = x^2 - 10$ sehingga

$$c < f(x_p) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(0)$$

$$\Leftrightarrow c < 0^2 - 10$$

$$\Leftrightarrow c < -10$$

Jadi, nilai $c < -10$.

-----**Jawaban: B**

5. Jika ${}^b\log a + {}^b\log a^2 = 4$, maka nilai ${}^a\log b$ adalah

- A. $\frac{3}{4}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{4}{3}$
D. 2
E. $\frac{3}{2}$

(MATDAS SNMPTN 2012)

Pembahasan CERDAS:

$${}^b\log a + {}^b\log a^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow {}^b\log a + 2 {}^b\log a = 4$$

$$\Leftrightarrow 3 {}^b\log a = 4$$

$$\Leftrightarrow {}^b\log a = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow {}^a\log b = \frac{3}{4}$$

-----**Jawaban: A**

6. Jika $p = ({}^a\log 2)({}^{a^2b}\log 4)$, maka $\frac{1}{p} = \dots$

- A. $2 {}^2\log a + {}^2\log \sqrt{a} {}^2\log b$
B. $2 {}^2\log a + \frac{1}{2} {}^2\log(ab)$
C. $({}^2\log a)^2 + \frac{1}{2} {}^2\log a {}^2\log b$
D. $({}^2\log a)^2 + \frac{1}{2} {}^2\log(ab)$
E. $({}^2\log a)^2 + {}^2\log \sqrt{ab}$

(TKDU SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$p = ({}^a\log 2)({}^{a^2b}\log 4)$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{1}{p} &= \frac{1}{({}^a\log 2)({}^{a^2b}\log 4)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p} &= ({}^2\log a)({}^4\log a^2b) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p} &= ({}^2\log a)({}^{2^2}\log a^2b) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p} &= ({}^2\log a)\left(\frac{1}{2}({}^2\log a^2 + {}^2\log b)\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p} &= ({}^2\log a)\left(\frac{1}{2}(2 {}^2\log a + {}^2\log b)\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p} &= ({}^2\log a)\left(({}^2\log a) + \frac{1}{2}({}^2\log b)\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p} &= ({}^2\log a)^2 + \frac{1}{2}({}^2\log a)({}^2\log b)\end{aligned}$$

-----**Jawaban: C**

7. Diketahui ${}^p\log 2 = 8$ dan ${}^q\log 8 = 4$. Jika $s = p^4$ dan $t = q^2$, maka nilai ${}^t\log s$ adalah

- A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{2}{3}$
D. $\frac{3}{2}$
E. 3

(TKPA SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$${}^p\log 2 = 8 \rightarrow p^8 = 2 \rightarrow p = 2^{\frac{1}{8}}$$

$${}^q\log 8 = 4 \rightarrow q^4 = 8 \rightarrow q = 8^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}{}^t\log s &= {}^{q^2}\log p^4 \\ &= \frac{4}{2} \cdot {}^q\log p \\ &= 2 \cdot {}^{2^{\frac{3}{4}}}\log 2^{\frac{1}{8}} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{\frac{8}{3}}\right) \cdot {}^2\log 2 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

-----**Jawaban: B**

8. Diketahui

$$f(n) = {}^3\log 4 \cdot {}^4\log 5 \dots {}^{n-1}\log n$$

Jika a_1 dan a_2 penyelesaian persamaan $f(a) + f(a^2) + \dots + f(a^9) = f(a) \cdot f(a^5)$, maka $a_1 a_2 = \dots$

- A. 3^7
- B. 3^8
- C. 3^9
- D. 3^{10}
- E. 3^{11}

(TKDU SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$f(n) = {}^3\log 4 \cdot {}^4\log 5 \dots {}^{n-1}\log n = {}^3\log n$$

$$f(a) + f(a^2) + \dots + f(a^9) = f(a) \cdot f(a^5)$$

$$\Leftrightarrow {}^3\log a + {}^3\log a^2 + \dots + {}^3\log a^9$$

$$= {}^3\log a \cdot {}^3\log a^5$$

$$\Leftrightarrow {}^3\log (a \cdot a^2 \dots a^9) = {}^3\log a \cdot {}^3\log a^5$$

$$\Leftrightarrow {}^3\log a^{45} = 5({}^3\log a)^2$$

$$\Leftrightarrow 45 \cdot {}^3\log a = 5({}^3\log a)^2$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot {}^3\log a = ({}^3\log a)^2$$

$$\Leftrightarrow ({}^3\log a)^2 - 9 \cdot {}^3\log a = 0$$

$$\Leftrightarrow ({}^3\log a)({}^3\log a - 9) = 0$$

Maka,

$$\bullet {}^3\log a = 0 \rightarrow a_1 = 3^0 = 1$$

$$\bullet {}^3\log a - 9 = 0 \rightarrow {}^3\log a = 9 \rightarrow a_2 = 3^9$$

$$\text{Jadi, } a_1 a_2 = 3^9$$

-----**Jawaban: C**

9. Semua nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $|1-x|\log(x+5) > 2$ adalah...

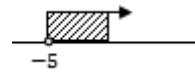
- A. $-1 < x < 1$
- B. $-1 < x < 0$ atau $2 < x < 4$
- C. $-5 < x < 1$
- D. $-1 < x < 0$ atau $1 < x < 4$
- E. $1 < x < 2$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

• Syarat numerus

$$x + 5 > 0 \rightarrow x > -5$$



• Syarat basis,

$$\checkmark |1-x| \neq 1$$

$$\Leftrightarrow (-x)(2-x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ dan } x \neq 2$$

$$\checkmark |1-x| > 1$$

$$\Leftrightarrow (-x)(2-x) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \text{ atau } x > 2$$

$$\checkmark 0 < |1-x| < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1-x < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < -x < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1$$



• Syarat harga mutlak

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x; & 1-x \geq 0 \rightarrow x \leq 1 \\ x-1; & 1-x < 0 \rightarrow x > 1 \end{cases}$$

✓ Untuk $x \leq 1$

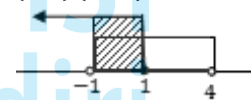
$${}^{1-x}\log(x+5) > 2$$

$${}^{1-x}\log(x+5) > {}^{1-x}\log(1-x)^2$$

$$x+5 > 1-2x+x^2$$

$$x^2-3x-4 < 0$$

$$(x-4)(x+1) < 0$$



✓ Untuk $x > 1$

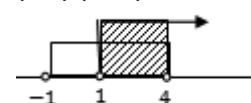
$${}^{x-1}\log(x+5) > 2$$

$${}^{x-1}\log(x+5) > {}^{x-1}\log(x-1)^2$$

$$x+5 > 1-2x+x^2$$

$$x^2-3x-4 < 0$$

$$(x-4)(x+1) < 0$$



Dari semua syarat, maka dapat digambarkan irisan daerah nilai x , yaitu



Artinya nilai x yang memenuhi adalah $-1 < x < 0$ atau $2 < x < 4$.

-----**Jawaban: B**

10. Penyelesaian pertidaksamaan

$(1-|x|) \log (3x-1) < 1$ adalah

- A. $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$
- C. $\frac{1}{3} < x < 1$
- D. $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$
- E. $\frac{1}{2} < x < 1$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

i) Syarat numerus

$$3x - 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{3}$$

ii) Syarat basis

$$\checkmark \quad 1 - |x| > 0$$

$$\Leftrightarrow |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$$\checkmark \quad 1 - |x| \neq 1$$

$$\Leftrightarrow |x| \neq 0$$

Jadi, $-1 < x < 0$ dan $0 < x < 1$

sehingga

$$\Leftrightarrow 0 < |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < -|x| < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 - |x| < 1$$

$$\text{iii) } (1-|x|) \log (3x-1) < 1$$

$$(1-|x|) \log (3x-1) < (1-|x|) \log (1-|x|)$$

karena batas $0 < 1 - |x| < 1$, maka

$$\Leftrightarrow 3x - 1 > 1 - |x|$$

$$\Leftrightarrow |x| > 2 - 3x$$

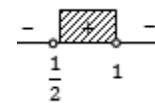
$$\Leftrightarrow (x + (2-3x))(x - (2-3x)) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - 2x)(-2 + 4x) > 0$$

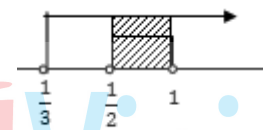
Pembuat nol,

$$2 - 2x = 0 \rightarrow x = 1$$

$$-2 + 4x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$



Dengan demikian, diperoleh daerah penyelesaian $\frac{1}{2} < x < 1$ seperti pada gambar berikut,



Jawaban: E



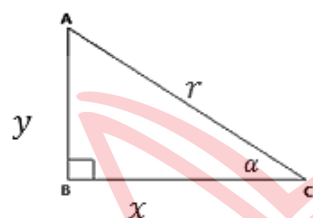
- BAB 5 - Trigonometri

Rangkuman Materi

A. Definisi

1. Perbandingan Trigonometri

Pada segitiga siku-siku ABC, berlaku



a) $\sin \alpha = \frac{y}{r}$

b) $\cos \alpha = \frac{x}{r}$

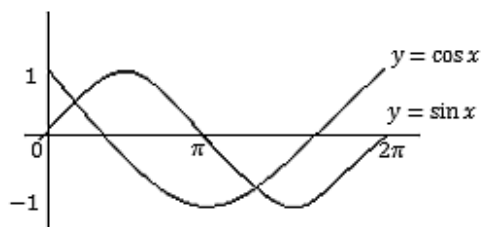
c) $\tan \alpha = \frac{y}{x}$

d) $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{r}{y}$

e) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x}$

f) $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{y}{x}$

2. Grafik Fungsi



B. Sudut dan Kuadran

1. Pembagian Daerah

Kuadran	I	II	III	IV
Absis (x)	+	−	−	+
Ordinat (y)	+	+	−	−

2. Tanda-Tanda Fungsi

Kuadran	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−

3. Sudut-Sudut Istimewa

Kuadran	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

4. Sudut Berelasi

- Kalau kita gunakan $(90^\circ \pm \dots)$ atau $(270^\circ \pm \dots)$
 - Fungsi berubah

Mula-Mula	Perubahan
sin	$+/- \cos$
cos	$+/- \sin$
tan	$+/- \cot$

- Tanda $+/-$ mengikuti kuadran

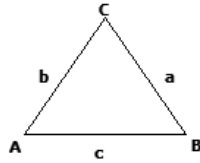
- Kalau kita gunakan $(180^\circ \pm \dots)$ atau $(360^\circ - \dots)$
 - Fungsi tetap

Mula-Mula	Perubahan
sin	$+/- \sin$
cos	$+/- \cos$
tan	$+/- \tan$

- Tanda $+/-$ mengikuti kuadran

C. Dalil Segitiga

1. Aturan Sinus



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

2. Aturan Cosinus

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ atau

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ atau

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ atau

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

3. Aturan Tangen

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$$

4. Luas Segitiga

a) Jika diketahui ketiga sisinya

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ dengan } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

b) Jika diketahui dua sisi dan sudut yang diapitnya

$$L = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$$

D. Rumus-Rumus Trigonometri

1. Identitas

a) Kebalikan

$$1) \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{r}{y}$$

$$2) \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{r}{x}$$

$$3) \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{y}{x}$$

b) Ekuivalen

$$1) \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$2) \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

c) Pythagoras

$$1) \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$2) 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$3) 1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

2. Penjumlahan dan Selisih Dua Sudut

$$a) \sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$b) \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$c) \tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

3. Sudut Rangkap

$$a) \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$b) \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 1 - 2 \sin^2 A$$

$$= 2 \cos^2 A - 1$$

$$c) \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

4. Jumlah dan Selisih Sinus dan Cosinus

$$a) \sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$b) \sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$c) \cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$d) \cos A - \cos B = -2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

5. Rumus Perkalian Sinus dan Cosinus

$$a) 2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$b) 2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$c) 2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$d) -2 \sin A \sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$$

6. Bentuk $k \cos(x - \alpha)$

$$\text{Bentuk: } a \cos px + b \sin px = k \cos(px - \alpha)$$

$$\text{dengan ketentuan } k = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ dan } \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

Kuadran dari α ditentukan dengan melihat letak a dan b .

Kuadran	I	II	III	IV
a	+	-	-	+
b	+	+	-	-

Catatan: $\cos \alpha$ terdefinisi pada range $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

E. Persamaan Trigonometri

1. $\sin x = \sin \alpha$, maka $x = \alpha + k \cdot 2\pi$ atau $x = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$
2. $\cos x = \cos \alpha$, maka $x = \pm \alpha + k \cdot 2\pi$
3. $\tan x = \tan \alpha$, maka $x = \alpha + k \cdot \pi$

Dengan ketentuan k bilangan bulat

F. Pertidaksamaan Trigonometri

Langkah-langkahnya:

1. Buat garis bilangan dengan x adalah penyelesaian dari persamaan trigonometrinya.
2. Jangan lupa untuk x yang menyebabkan nilai x tidak terdefinisi, misalnya: $\tan 90^\circ$.
3. Tentukan tanda (+/-) pada garis bilangan, dengan cara memasukkan salah satu nilai pada interval tertentu.

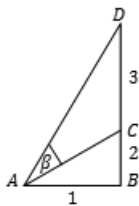
Soal dan Pembahasan

1. Segitiga ABD siku-siku di B. Titik C pada BD sehingga $CD = 3$ dan $BC = 2$. Jika $AB = 1$ dan $\angle CAD = \beta$, maka $\sin^2 \beta = \dots$

- A. $\frac{25}{26}$
- B. $\frac{4}{5}$
- C. $\frac{31}{175}$
- D. $\frac{9}{130}$
- E. $\frac{5}{201}$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:



$$AD = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Dengan membandingkan luasnya

$$L_{ABD} = L_{ABC} + L_{ACD}$$

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{26} \cdot \sin \beta \\ \frac{5}{2} - 1 &= \frac{1}{2} \sqrt{130} \sin \beta \\ \frac{3}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{130} \sin \beta \\ \sin \beta &= \frac{3}{\sqrt{130}} \\ \sin^2 \beta &= \frac{9}{130} \end{aligned}$$

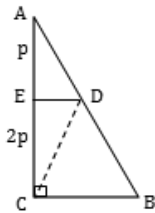
Jawaban: D

2. Diketahui segitiga ABC dan $\angle C = 90^\circ$. Titik D pada sisi miring AB dan E pada AC sehingga $AD : BD = AE : EC = 1 : 2$. Jika $p = \tan B$, maka $\tan \angle ADC = \dots$

- A. $\frac{2p}{1-p^2}$
- B. $\frac{3p}{1-2p^2}$
- C. $\frac{3p}{1+2p^2}$
- D. $\frac{2p}{1+p^2}$
- E. $\frac{p}{1-p^2}$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:



$$\begin{aligned}\tan B &= p \\ \tan \angle ADE &= \tan B = p \\ \tan \angle EDC &= 2p \\ \tan \angle ADC &= \tan (\angle ADE + \angle EDC) \\ &= \frac{\tan \angle ADE + \tan \angle EDC}{1 - \tan \angle ADE \tan \angle EDC} \\ &= \frac{p + 2p}{1 - p \cdot 2p} \\ &= \frac{3p}{1 - 2p^2}\end{aligned}$$

-----Jawaban: B

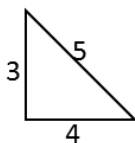
3. Jika $\tan x = -\frac{3}{4}$ untuk $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, maka

- $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \dots$
- $(2\sqrt{3} + 3)/10$
 - $(3\sqrt{3} + 3)/10$
 - $(4\sqrt{3} + 3)/10$
 - $(3\sqrt{3} - 3)/10$
 - $(4\sqrt{3} - 3)/10$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

- $\tan x = -\frac{3}{4}, \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (kuadran IV)



- $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$
 $= \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x$
 $= \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{5}\right)$
 $= \frac{1}{10} (4\sqrt{3} + 3)$

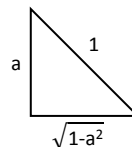
-----Jawaban: C

4. Jika $\sin(40^\circ + x) = a$ untuk $0^\circ < x < 45^\circ$, maka $\cos(70^\circ + x) = \dots$

- $\frac{(\sqrt{1-a^2} - a)}{2}$
- $\frac{(\sqrt{3(1-a^2)} - a)}{2}$
- $\frac{(\sqrt{3(1-a^2)} + a)}{2}$
- $\frac{(\sqrt{2(1-a^2)} + a)}{2}$
- $\frac{(\sqrt{2(1-a^2)} - a)}{2}$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:



$$\begin{aligned}\sin(40^\circ + x) &= a \\ \text{Sehingga,} \\ \cos(70^\circ + x) &= \cos((40^\circ + x) + 30^\circ) \\ &= \cos(40^\circ + x) \cos 30^\circ - \sin(40^\circ + x) \sin 30^\circ \\ &= (\sqrt{1-a^2}) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} - a \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{3(1-a^2)} - a)\end{aligned}$$

-----Jawaban: B

5. Jika $\sin(2x + 75^\circ) = a$ dan $\sin(x + 45^\circ) = b$, maka $\cos(3x + 120^\circ) \cos(x + 30^\circ) = \dots$

- $1 - a^2 - b^2$
- $1 - a^2 + b^2$
- $a^2 + b^2 - 1$
- $2 - a^2 b^2$
- $1 - a^2 b^2$

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned}\text{Misalkan: } A &= 2x + 75^\circ \text{ dan } B = x + 45^\circ \\ \cos(3x + 120^\circ) \cos(x + 30^\circ) &= \cos((2x + 75^\circ) + (x + 45^\circ)) \\ &= \cos((2x + 75^\circ) - (x + 45^\circ))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cos(A+B) \cos(A-B) \\
 &= (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \\
 & \quad (\cos A \cos B + \sin A \sin B) \\
 &= (\cos A \cos B)^2 - (\sin A \sin B)^2 \\
 &= (\sqrt{1-a^2} \sqrt{1-b^2})^2 - (ab)^2 \\
 &= (1-a^2-b^2+(ab)^2) - (ab)^2 \\
 &= 1-a^2-b^2
 \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

6. Jika $\sin(x+15^\circ) = a$ dengan $0^\circ \leq x \leq 75^\circ$, maka nilai $\sin(2x+75^\circ)$ adalah

- A. $a\sqrt{2(1+a^2)} - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+2a^2)$
 B. $a\sqrt{2(1-a^2)} - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-2a^2)$
 C. $a\sqrt{2(1-a^2)} - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+2a^2)$
 D. $a\sqrt{2(1-a^2)} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-2a^2)$
 E. $a\sqrt{2(1+a^2)} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-2a^2)$

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

Misalkan: $A = x + 15^\circ$
 $\sin(2x + 75^\circ)$
 $= \sin(2(x+15^\circ)+45^\circ)$
 $= \sin(2A+45^\circ)$
 $= \sin 2A \cos 45^\circ + \cos 2A \sin 45^\circ$
 $= (2 \sin A \cos A) \frac{1}{2}\sqrt{2} + (\cos^2 A - \sin^2 A) \frac{1}{2}\sqrt{2}$
 $= a\sqrt{2(1-a^2)} + \frac{1}{2}\sqrt{2}((1-a^2)-a^2)$
 $= a\sqrt{2(1-a^2)} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-2a^2)$

-----Jawaban: D

7. Diketahui $\triangle ABC$ dan α, β, γ adalah sudut di A, B, dan C. Jika diketahui $\sin \beta = \frac{1}{3}$ dan $\sin \gamma = \frac{1}{2}$, maka $\frac{BC}{AC}$ adalah

- A. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$
 B. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
 C. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$
 D. $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$
 E. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

- ABC segitiga $\rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$$

$$\sin \alpha = \sin(180 - (\beta + \gamma))$$

$$= \sin(\beta + \gamma)$$

$$= \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$$

- Menggunakan aturan sin

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \beta}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$$

-----Jawaban: C

8. Pada segitiga ABC diketahui $3 \sin A + 4 \cos B = 6$ dan $3 \cos A + 4 \sin B = 1$. Nilai $\sin C = \dots$

- A. $\frac{1}{2}$
 B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 D. $\sqrt{3}$
 E. 1

(Saintek SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

- $3 \sin A + 4 \cos B = 6$

$$\Leftrightarrow 9 \sin^2 A + 24 \sin A \cos B +$$

$$16 \cos^2 B = 36 \dots (1)$$

$$3 \cos A + 4 \sin B = 1$$

$$\Leftrightarrow 9 \cos^2 A + 24 \cos A \sin B +$$

$$16 \sin^2 B = 1 \dots (2)$$

Dari (1) dan (2)

$$9 \sin^2 A + 24 \sin A \cos B + 16 \cos^2 B = 36$$

$$\underline{9 \cos^2 A + 24 \cos A \sin B + 16 \sin^2 B = 1}$$

$$9 + 24(\sin A \cos B + \cos A \sin B) + 16 = 37$$

$$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

- $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
 $\sin C = \sin(180^\circ - (A+B))$
 $= \sin(A+B)$
 $= \sin A \cos B + \cos A \sin B$
 $= \frac{1}{2}$

-----Jawaban: A

9. Nilai x antara 0 dan π yang memenuhi pertidaksamaan $2 \cos x + \sin x \geq 1$ adalah

- A. $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$
- B. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$
- C. $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- D. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- E. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$2 \cos x + \sin x \geq 1 \text{ (kuadratkan)}$$

$$4 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + \sin^2 x \geq 1$$

$$4 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + \sin^2 x - 1 \geq 0$$

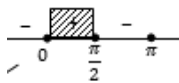
$$4 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - \cos^2 x \geq 0$$

$$3 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x \geq 0$$

$$\cos x (3 \cos x + 4 \sin x) \geq 0$$

Pembuat nol

- $\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$
- $3 \cos x + 4 \sin x = 0$
 $4 \sin x = -3 \cos x$
 $\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$
 $\tan x = -\frac{3}{4} \text{ (tm)}$



Jadi, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

-----Jawaban: D

10. Himpunan semua x di selang $[0, 2\pi]$ yang memenuhi pertidaksamaan $1 + \sqrt{3} \sin x \leq \cos x \leq 0$ dapat dituliskan sebagai $[a, b]$. Nilai ab adalah

- A. $\frac{20\pi^2}{9}$
- B. $\frac{\pi^2}{12}$

- C. $\frac{20\pi^2}{12}$
- D. $\frac{10\pi^2}{3}$
- E. $\frac{6\pi^2}{3}$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$1 + \sqrt{3} \sin x \leq \cos x \leq 0$$

(i) $1 + \sqrt{3} \sin x \leq \cos x$

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x \leq -1$$

$$2 \cos \left(x - \frac{2}{3} \pi \right) \leq -1$$

$$\cos \left(x - \frac{2}{3} \pi \right) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\cos \left(x - \frac{2}{3} \pi \right) \leq \cos \frac{2}{3} \pi$$

a) $x - \frac{2}{3} \pi = -\frac{2}{3} \pi + k.2\pi$

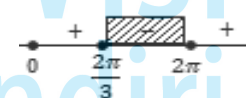
$$x = 0 + k.2\pi$$

$$x = 0, 2\pi$$

b) $x - \frac{2}{3} \pi = \frac{2}{3} \pi + k.2\pi$

$$x = \frac{4}{3} \pi + k.2\pi$$

$$x = \frac{4}{3} \pi$$



(ii) $\cos x \leq 0$

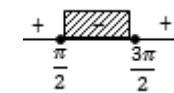
$$\cos x = \cos \frac{\pi}{2}$$

a) $x = \frac{\pi}{2} + k.2\pi$

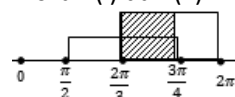
$$x = \frac{\pi}{2}$$

b) $x = \frac{3\pi}{2} + k.2\pi$

$$x = \frac{3\pi}{2}$$



Iriskan (i) dan (ii)



Diperoleh $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} = \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4} \right] = [a, b]$

Jadi, $ab = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{6\pi^2}{12}$

-----Jawaban: C



- BAB 6 - Statistik dan Peluang

Rangkuman Materi

A. Definisi

1. Ukuran Pemusatan dan Penyebaran

- a) **Pemusatan** adalah ukuran yang menggambarkan pemusatan data tersebut pada suatu nilai tertentu. Contoh: rata-rata, modus, median, kuartil.
- b) **Penyebaran** adalah ukuran yang menggambarkan penyebaran data tersebut dan dapat dikaitkan dengan simpangan (lebar data) dari suatu nilai tertentu. Contoh:jangkauan, hamparan, simpangan kuartil, simpangan rata-rata, dan lainnya.

2. Perumusan Ukuran Statistika

Perumusan ukuran statistika dibedakan menjadi 2 jenis data, yaitu

- a) **Data tunggal**: data yang dituliskan dengan mendaftar, satu per satu.
- b) **Data kelompok**: data yang dituliskan dalam bentuk interval kelas.

3. Ukuran Pemusatan Data Kelompok

Jika data dalam bentuk grafik, maka ubahlah dalam bentuk tabel, kemudian cari 4 unsur, yaitu kelas, nilai tengah, frekuensi, dan frekuensi kumulatif seperti tabel berikut:

Kelas	Interval		Nilai Tengah	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif
	Tepi Bawah	Tepi Atas			
a s/d b	a - 0,5	b + 0,5	$\frac{a + b}{2}$	p	p
c s/d d	c - 0,5	d + 0,5	$\frac{c + d}{2}$	q	p + q

dan seterusnya

4. Ukuran Pemusatan

- a) Mean (\bar{x})

Jumlah semua data dibagi banyak data.

Data tunggal:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Data kelompok:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i x_i$$

Keterangan:

n = banyaknya data

x_i = titik tengah kelas ke- i

f_i = frekuensi kelas ke- i

b) Median (Me)

Nilai tengah dari data yang sudah diurutkan dari nilai terkecil.

Data Tunggal:

- **Data ganjil:** ambil nilai yang berada di tengah
- **Data genap:** ambil rata-rata dua data yang berada di tengah

Data kelompok:

$$Me = L_2 + \left(\frac{\frac{n}{2} - (\sum f)_2}{f_2} \right) \cdot c$$

Keterangan:

L_2 = tepi bawah kelas median

n = banyaknya data

$(\sum f)_2$ = jumlah frekuensi sebelum kelas median

f_2 = frekuensi kelas median

c = panjang interval kelas

c) Modus (Mo)

Nilai yang sering muncul.

Data tunggal: ambil data yang jumlahnya paling banyak.

Data kelompok:

$$Mo = L_0 + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) \cdot c$$

Keterangan:

L_0 = tepi bawah kelas modus

d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas **sebelum** modus

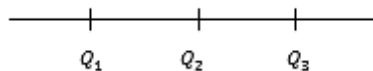
d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas **sesudah** modus

c = panjang interval kelas

d) Kuartil (Q_i)

Membagi data menjadi 4 bagian yang sama setelah data diurutkan dari yang terkecil.

Data tunggal:



Q_1 = kuartil bawah

Q_2 = Median

Q_3 = kuartil atas

Data kelompok:

$$Q_i = L_i + \left(\frac{\frac{n}{4} - (\sum f)_i}{f_{Qi}} \right) \cdot c$$

Keterangan:

- L_i = tepi bawah kuartil
 n = banyaknya data
 $(\sum f)_i$ = jumlah frekuensi sebelum kelas kuartil
 f_{Qi} = frekuensi kelas kuartil
 c = panjang interval kelas

e) Desil (D_i)

Membagi data menjadi 10 bagian yang sama setelah data diurutkan dari yang terkecil.

Data kelompok:

$$D_i = L_i + \left(\frac{\frac{n}{10} - (\sum f)_i}{f_{Di}} \right) \cdot c$$

5. Ukuran penyebaran

a) Jangkauan/Range (J)

Selisih antara data terbesar dengan data terkecil.

$$J = x_n - x_1$$

b) Jangkauan Antarkuartil/Hamparan (R)

Selisih antara kuartil atas dengan kuartil bawah.

$$R = Q_3 - Q_1$$

c) Simpangan kuartil/Jangkauan semi interkuartil (Q_d)

Simpangan antarkuartil.

$$Q_d = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1)$$

d) Simpangan rata-rata (SR)

Simpangan terhadap rata-rata.

Data tunggal:

$$SR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

Data kelompok:

$$SR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i |x_i - \bar{x}|$$

e) Simpangan Baku/Standar Deviasi (s)

Data tunggal:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Data kelompok:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

f) Ragam/Variansi (s^2)

Data tunggal:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Data kelompok:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

6. Perubahan Data

Jika tiap data dilakukan perubahan, maka cukup dilihat apakah data termasuk pemusatan atau penyebaran. Perubahan data dapat dilihat pada tabel di bawah:

Ukuran	Setiap data dikali/dibagi	Setiap data ditambah/dikurang
Pemusatan	Berubah	Berubah
Penyebaran	Berubah	Tetap

B. Peluang

1. Kaidah Pencacahan

a) Aturan perkalian

Jika banyak cara memilih unsur pertama ada m cara dan banyak cara memilih unsur kedua ada n cara, maka banyak cara memilih kedua unsur tersebut sekaligus ada $m \times n$ cara.

Faktorial

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$2! = 2 \cdot 1$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

b) Permutasi

Permutasi menyatakan banyaknya penyusunan objek dengan **memperhatikan letak/ukuran**. Banyak permutasi (susunan terurut) r unsur dari n unsur adalah:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Jenis-jenis permutasi, antara lain:

1) Permutasi n unsur: $n!$

Permutasi dengan menggunakan seluruh unsur.

2) Permutasi dengan n unsur sama:

$$\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!}$$

dengan p, q, r menyatakan banyaknya unsur yang sama.

3) Permutasi siklis (melingkar): $(n-1)!$

c) Kombinasi

Kombinasi menyatakan banyaknya penyusunan objek-objek dengan **tidak memperhatikan letak/ukuran**. Banyak kombinasi (susunan) r unsur dari n unsur:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

2. Peluang Kejadian

a) Pengertian

Peluang suatu kejadian adalah kemungkinan munculnya suatu kejadian dari sebuah semesta himpunan dengan ketentuan $0 \leq P(A) \leq 1$. Dirumuskan:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan ketentuan:

$n(A)$ = banyaknya kemungkinan terjadinya kejadian A

$n(S)$ = banyaknya seluruh kejadian yang mungkin

b) Frekuensi Harapan

Jika A adalah kejadian pada ruang sampel s dengan peluang $P(A)$, maka frekuensi harapan kejadian A dari n kali percobaan adalah: $f(A) = P(A) \cdot n$.

c) Peluang Kejadian Majemuk

1) Peluang Gabungan 2 Kejadian

Jika A dan B dua kejadian yang berada dalam ruang sampel S. Peluang kejadian AUB adalah: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

2) Kejadian Saling Lepas

Syarat kejadian ini adalah bila tidak ada irisan antara 2 himpunan sehingga $A \cap B = 0$. Jadi, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

3) Kejadian Saling Bebas

Syarat kejadian ini adalah bila suatu kejadian tidak mempengaruhi kejadian yang lain sehingga berlaku $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

4) Kejadian Bersyarat

Kejadian yang menyatakan peluang munculnya kejadian A setelah muncul kejadian B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

5) Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Jika A dan A' adalah 2 buah kejadian yang saling komplemen, maka peluang komplemen kejadian A (ditulis $P(A')$) adalah: $P(A') = 1 - P(A)$.

Soal dan Pembahasan

1. Median dan rata-rata dari data yang terdiri dari empat bilangan asli yang telah diurutkan mulai dari yang terkecil adalah 8. Jika selisih antara data terbesar dan terkecilnya adalah 10 dan modusnya tunggal, maka hasil kali data pertama dan ketiga adalah

- A. 24
- B. 27
- C. 30

- D. 33
- E. 36

(TKDU SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

Misalkan data: a, b, c, d

- $Me = 8$
 $\Leftrightarrow \frac{a + d}{2} = 8$
 $\Leftrightarrow a + d = 16 \dots (1)$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \bar{x} &= 8 \\ \Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{4} &= 8 \\ \Leftrightarrow a+b+c+d &= 32 \\ \Leftrightarrow b+c+16 &= 32 \\ \Leftrightarrow b+c &= 16 \dots (2) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad d-a = 10 \dots (3)$$

Dari (1) dan (3) diperoleh $a = 3$, $d = 13$ sehingga diperoleh data 3, b, c, 13.

Dari persamaan (2) syaratnya $b + c = 16$, tetapi harus memenuhi $Me = 8$ dan modulusnya tunggal, sehingga diambil $b = 7$, $c = 9$. Jadi, $a.c = 3.9 = 27$.

-----Jawaban: B

2. Tiga puluh data mempunyai rata-rata p. Jika rata-rata 20% di antaranya adalah $p + 0,1$, 40% lainnya adalah $p - 0,1$, dan 10% lainnya lagi adalah $p - 0,5$, dan rata-rata 30% data sisanya adalah $p + q$, maka $q = \dots$

- A. $\frac{1}{5}$
B. $\frac{7}{30}$
C. $\frac{4}{15}$
D. $\frac{3}{10}$
E. $\frac{1}{3}$

(TKPA SBMPTN 2014)

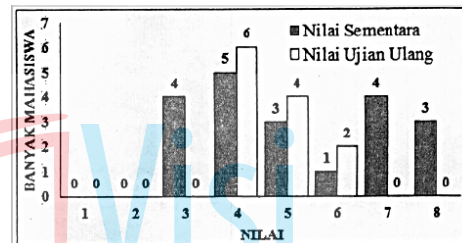
Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{gab} &= \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3 + n_4\bar{x}_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4} \\ &= \frac{\frac{2}{10}(30)\left(p + \frac{1}{10}\right) + \frac{4}{10}(30)\left(p - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10}(30)\left(p - \frac{5}{10}\right) + \frac{3}{10}(30)(p+q)}{30} \\ 30p &= 6\left(p + \frac{1}{10}\right) + 12\left(p - \frac{1}{10}\right) + 3\left(p - \frac{5}{10}\right) + 9(p+q) \\ 30p &= (6+12+3+9)p + \left(\frac{6}{10} - \frac{12}{10} - \frac{15}{10}\right) + 9q \\ 30p &= 30p - \frac{21}{10} + 9q \\ 9q &= \frac{21}{10} \end{aligned}$$

$$q = \frac{21}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{30}$$

-----Jawaban: B

3. Diagram di bawah ini menyajikan data (dalam bilangan bulat) nilai sementara dan nilai ujian ulang mahasiswa peserta kuliah Matematika. Ujian ulang diikuti hanya oleh peserta kuliah tersebut dengan nilai sementara lebih kecil daripada 6. Jika yang dinyatakan lulus kuliah adalah mahasiswa yang memperoleh nilai sementara tidak lebih kecil daripada 6 atau ujian ulangnya adalah 6, maka rata-rata nilai mahasiswa yang lulus mata kuliah tersebut adalah



- A. 6,33
B. 6,50
C. 6,75
D. 7,00
E. 7,25

(TKPA SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

Yang lulus adalah nilai semmentaranya tidak lebih kecil dari 6 atau nilai ujian ulangnya 6.

- Nilai sementara
Nilai 6 ada 1 orang
Nilai 7 ada 4 orang
Nilai 8 ada 3 orang
- Nilai ujian ulang
Nilai 6 ada 2 orang

Sehingga,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{6.1 + 7.4 + 8.3 + 6.2}{1 + 4 + 3 + 2} \\ \bar{x} &= \frac{6 + 28 + 24 + 12}{10} \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{70}{10} = 7$$

-----Jawaban: D

4. Empat siswa akan mengikuti suatu perlombaan karya inovatif. Untuk itu, diperlukan biaya Rp900.000,00. Karena masing-masing memiliki kondisi keuangan yang berbeda, besar kontribusi masing-masing siswa tidak sama. Siswa A memberikan kontribusi setengah dari jumlah kontribusi siswa yang lainnya. Siswa B memberikan kontribusi sepertiga dari jumlah kontribusi tiga siswa lainnya. Siswa C memberikan kontribusi seperempat dari jumlah kontribusi tiga siswa lainnya. Besar kontribusi D adalah Rp
- 150.000,00
 - 180.000,00
 - 195.000,00
 - 225.000,00
 - 300.000,00

(TKPA SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

Model matematika:

- (1) $A + B + C + D = 900.000$
- (2) $A = \frac{1}{2}(B + C + D) \rightarrow 2A = B + C + D$
- (3) $B = \frac{1}{3}(A + C + D) \rightarrow 3B = A + C + D$
- (4) $C = \frac{1}{4}(A + B + D) \rightarrow 4C = A + B + D$

Substitusikan (2) ke (1)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2A &= B + C + D \\ \Leftrightarrow 2A &= 900.000 - A \\ \Leftrightarrow 3A &= 900.000 \\ \Leftrightarrow A &= 300.000 \dots (4) \end{aligned}$$

Substitusikan (3) ke (1)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3B &= A + C + D \\ \Leftrightarrow 3B &= 900.000 - B \\ \Leftrightarrow 4B &= 900.000 \\ \Leftrightarrow B &= 225.000 \end{aligned}$$

Substitusikan (4) ke (1)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4C &= A + B + D \\ \Leftrightarrow 4C &= 900.000 - C \\ \Leftrightarrow 5C &= 900.000 \\ \Leftrightarrow C &= 180.000 \end{aligned}$$

Substitusikan nilai A, B, C ke (1)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow A + B + C + D &= 900.000 \\ \Leftrightarrow 300.000 + 225.000 + 180.000 + D &= 900.000 \\ \Leftrightarrow 705.000 + D &= 900.000 \\ \Leftrightarrow D &= 195.000 \end{aligned}$$

Jadi, kontribusi siswa D adalah Rp195.000,00.

-----Jawaban: C

5. Banyaknya bilangan ratusan dengan angka pertama dan terakhir mempunyai selisih 3 dan ada angka yang sama adalah

- 32
- 30
- 26
- 16
- 15

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{array}{rcl} 1 & - & 4 \\ : & : & \\ 6 & - & 9 \\ 3 & - & 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 1 \\ : \\ 6 \\ 3 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} (2 \times 6) \times 2 = 24 \\ 2 \times 1 = 2 \end{array}$$

Jadi, banyaknya bilangan = $24 + 2 = 26$.

-----Jawaban: C

6. Tujuh finalis lomba menyanyi tingkat SMA di suatu kota berasal dari 6 SMA yang berbeda terdiri atas empat pria dan tiga wanita. Diketahui satu pria dan satu wanita berasal dari SMA "A". Jika urutan tampil diatur bergantian antara pria dan wanita, serta finalis dari SMA "A" tidak tampil berurutan, maka susunan urutan tampil yang mungkin ada sebanyak

- 144
- 108
- 72
- 36
- 35

(TKPA SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

Banyaknya cara 7 finalis bergantian pria dan wanita tanpa ada syarat = $4!3! = 144$.

Tampilnya finalis pria dan wanita harus bergantian, maka susunan dimulai dari pria. Kita cari 2 finalis dari SMA "A" tampil berurutan, yaitu dengan menyisipkan finalis dari sekolah lain.

P _A	W _A	P	W	P	W	P
P	W _A	P _A	W	P	W	P
P	W	P _A	W _A	P	W	P
P	W	P	W _A	P _A	W	P
P	W	P	W	P _A	W _A	P
P	W	P	W	P	W _A	P _A

Banyak cara SMA "A" tampil berurutan = $6(3!2!) = 6(12) = 72$.

Banyaknya cara SMA "A" tampil tidak berurutan = $144 - 72 = 72$.

-----**Jawaban: C**

7. Banyaknya bilangan genap $n = abc$ dengan 3 digit sehingga $3 < b < c$ adalah
- A. 48
B. 54
C. 60
D. 64
E. 72

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$n = abc$ dan $3 < b < c$

$3 < b$, maka kemungkinan diisi angka 4, 5, 6, 7. Karena n bilangan genap, maka c harus genap kemungkinan diisi angka 6, 8.

Kemungkinan I

a	b	c
9	2	1
Diisi angka 1 sampai 9	Diisi angka 4,5	Diisi angka 6

Banyaknya cara = $9 \times 2 \times 1 = 18$ cara

Kemungkinan II

a	b	c
9	4	1
Diisi angka 1 sampai 9	Diisi angka 4, 5, 6, 7	Diisi angka 8

Banyaknya cara = $9 \times 4 \times 1 = 36$ cara

Jadi, banyaknya bilangan genap $n = abc$, dan $3 < b < c$ adalah $18 + 36 = 54$ cara.

-----**Jawaban: B**

8. Enam anak, 3 laki-laki dan 3 perempuan duduk berjajar. Peluang 3 perempuan duduk berdampingan adalah

- A. $\frac{1}{60}$
B. $\frac{1}{30}$
C. $\frac{1}{15}$
D. $\frac{1}{10}$
E. $\frac{1}{5}$

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

Anggap ada 3 laki-laki dan 1 perempuan (karena harus berdampingan). Jadi, banyak cara duduk berjajar = $4!3!$

Sehingga peluangnya adalah

$$\frac{4!3!}{6!} = \frac{1}{5}$$

-----**Jawaban: E**

9. Jika $L(a)$ adalah luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x dan parabola $y = 2ax - x^2$, $0 < a < 1$, maka peluang nilai a sehingga $L(a) \geq \frac{9}{16}$ adalah

- A. $\frac{3}{4}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{3}{8}$
D. $\frac{1}{3}$
E. $\frac{1}{4}$

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$L(a) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot a \cdot a^2 \right) = \frac{4}{3} a^3$$

$$L(a) = \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} a^3 = \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

Karena $0 < a < 1 \rightarrow L(a) \geq \frac{9}{16}$ adalah

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Jadi, peluangnya adalah

$$\frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}$$

-----**Jawaban: E**

10. Dua kelas masing-masing terdiri atas 30 siswa. Satu siswa dipilih dari tiap-tiap kelas. Peluang terpilih keduanya laki-laki adalah $\frac{11}{36}$. Peluang terpilih paling sedikit satu diantaranya laki-laki adalah

- A. $\frac{161}{180}$
- B. $\frac{155}{180}$
- C. $\frac{25}{180}$
- D. $\frac{19}{180}$
- E. $\frac{11}{180}$

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

Masing-masing kelas $n(S) = 30$

$$P(L_1 \cap L_2) = \frac{11}{36}$$

Misalkan:

Siswa laki-laki kelas pertama = x

$$P(L_1) = \frac{x}{30}$$

Siswa laki-laki kelas kedua = y

$$P(L_2) = \frac{y}{30}$$

Sehingga,

$$P(L_1 \cap L_2) = \frac{x}{30} \cdot \frac{y}{30}$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{36} = \frac{x}{30} \cdot \frac{y}{30}$$

$$\Leftrightarrow 25 \cdot 11 = xy$$

Jadi, kemungkinan $x = 25$ dan $y = 11$ atau sebaliknya.

$$\text{Jika } n(L_1) = 25 \rightarrow n(P_1) = 5 \rightarrow P(P_1) = \frac{5}{30}$$

$$\text{Jika } n(L_2) = 11 \rightarrow n(P_2) = 19 \rightarrow P(P_2) = \frac{19}{30}$$

Sehingga,

$$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1) \cdot P(P_2)$$

$$= \frac{5}{30} \cdot \frac{19}{30}$$

$$= \frac{19}{180}$$

Peluang terpilih paling sedikit satu di antaranya laki-laki sama artinya dengan komplement dari peluang terpilih keduanya perempuan.

$$P(\text{paling sedikit satu laki-laki})$$

$$= 1 - P(P_1 \cap P_2)$$

$$= 1 - \frac{19}{180}$$

$$= \frac{161}{180}$$

-----**Jawaban: A**



- BAB 7 - Lingkaran

Rangkuman Materi

A. Persamaan Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap titik tertentu.
Persamaan lingkaran:

Pusat dan Jari-Jari	Persamaan
Pusat (0,0) jari-jari r	$x^2 + y^2 = r^2$
Pusat (a,b) jari-jari r	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
Pusat $(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$ Jari-jari $r = \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C)}$	$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Jadi, untuk menyusun persamaan lingkaran, lakukan langkah sebagai berikut:

1. Cari unsur persamaan lingkaran, yaitu pusat dan jari-jari.
2. Konstruksikan persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

B. Jarak

1. Jarak titik (x_1, y_1) ke titik (x_2, y_2)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2. Jarak titik (x_1, y_1) ke garis $Ax + By + C = 0$

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

C. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

1. Diketahui titik pada lingkaran

Jika diketahui titik (x_1, y_1) pada lingkaran, maka gunakan prinsip bagi adil.

Prinsip bagi adil:

Bentuk	Diubah menjadi
x^2 y^2	$x \cdot x$ $y \cdot y$
$(x - a)^2$ $(y - b)^2$	$(x - a)(x - a)$ $(y - b)(y - b)$
Ax By	$\frac{1}{2}A(x+x)$ $\frac{1}{2}B(y+y)$

Sehingga diperoleh:

Persamaan	Persamaan Garis Singgung
$x^2 + y^2 = r^2$	$x_1x + y_1y = r^2$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$
$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x_1 + x) + \frac{B}{2}(y_1 + y) + C = 0$

2. Diketahui titik di luar lingkaran

- Tentukan garis polar, langkahnya gunakan prinsip bagi adil.
- Substitusikan garis polar ke persamaan lingkaran sehingga diperoleh (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) .
- Persamaan garis singgung lingkaran diperoleh dengan cara bagi adil titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) .

3. Diketahui gradien

Jika diketahui titik (x_1, y_1) dengan gradien m pada lingkaran:

Pusat	Persamaan	Persamaan Garis Singgung
$(0,0)$	$x^2 + y^2 = r^2$	$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$
(a,b)	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$
$(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B)$	$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$	$y - (-\frac{1}{2}B) = m(x - (-\frac{1}{2}A)) \pm r\sqrt{1+m^2}$

D. Kedudukan Dua Lingkaran

Jika d adalah jarak antara pusat-pusat lingkaran, sedangkan r_1 dan r_2 masing-masing jari-jari kedua lingkaran, maka kedua lingkaran akan:

- Saling lepas $\rightarrow d > r_1 + r_2$
- Saling bersinggungan di luar $\rightarrow d = r_1 + r_2$
- Saling bersinggungan di dalam $\rightarrow d = |r_1 - r_2|$
- Lingkaran di dalam lingkaran $\rightarrow d < |r_1 - r_2|$
- Saling berpotongan $\rightarrow |r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$

Soal dan Pembahasan

1. Lingkaran $(x + 6)^2 + (y + 1)^2 = 25$ menyinggung garis $y = 4$ di titik ...
- $(-6, 4)$
 - $(6, 4)$
 - $(-1, 4)$
 - $(1, 4)$
 - $(5, 4)$

(Matematika IPA SNMPTN 2012)

Pembahasan CERDAS:

$f(x + 6)^2 + (y + 1)^2 = 25$ menyinggung garis $y = 4$

$$\Leftrightarrow (x + 6)^2 + (4 + 1)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (x + 6)^2 + 25 = 25$$

$$\Leftrightarrow (x + 6)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -6$$

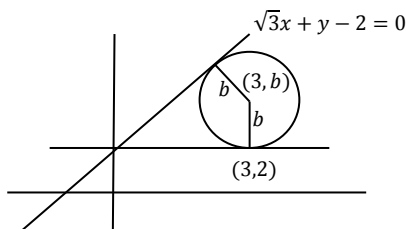
Jadi, lingkaran menyinggung garis $y = 4$ di titik $(-6, 4)$.

----- **Jawaban: A**

2. Titik pusat lingkaran yang menyinggung garis $y = 2$ di $(3, 2)$ dan menyinggung garis $y = -x\sqrt{3} + 2$ adalah
- $(3, \sqrt{3})$
 - $(3, 3\sqrt{3})$
 - $(3, 2 + \sqrt{3})$
 - $(3, 2 + 2\sqrt{3})$
 - $(3, 2 + 3\sqrt{3})$

(Matematika IPA UM UGM 2013)

Pembahasan CERDAS:



$$\Leftrightarrow \sqrt{(3 - 3)^2 + (b - 2)^2} = \frac{|3\sqrt{3} + b \cdot 1 - 2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow b - 2 = \left| \frac{3\sqrt{3} + b - 2}{2} \right|$$

$$\Leftrightarrow 2(b - 2) = |3\sqrt{3} + b - 2|$$

$$\Leftrightarrow 2b - 4 = 3\sqrt{3} + b - 2$$

$$\Leftrightarrow b = 3\sqrt{3} + 2$$

----- **Jawaban: E**

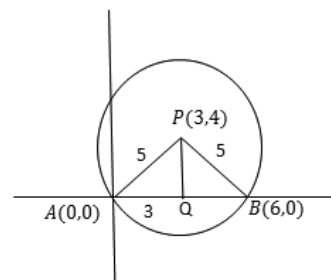
3. Lingkaran $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ memotong sumbu-x di titik A dan B. Jika P adalah titik pusat lingkaran tersebut, maka $\cos \angle APB = \dots$

- $\frac{7}{25}$
- $\frac{8}{25}$
- $\frac{12}{25}$
- $\frac{16}{25}$
- $\frac{18}{25}$

(Matematika IPA SNMPTN 2012)

Pembahasan CERDAS:

- Lingkaran $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
 $\rightarrow P(3, 4)$ dan $r = 5$
- Memotong sumbu-x $\rightarrow y = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (0 - 4)^2 = 25$
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 9$
 $\Leftrightarrow (x - 3)^2 = (\pm 3)^2$
 $\Leftrightarrow x = 6 \vee x = 0$



Menggunakan aturan Pythagoras

$$PQ = \sqrt{(AP)^2 - (AQ)^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos \angle APQ &= \frac{4}{5}, \sin \angle APQ = \frac{3}{5} \\ \cos \angle APB &= \cos 2\angle APQ \\ &= \cos^2 \angle APQ - \sin^2 \angle APQ \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \\ &= \frac{7}{25} \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

4. Persamaan lingkaran dengan pusat (-1, 1) dan menyinggung garis $3x - 4y + 12 = 0$ adalah

- A. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$
 B. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$
 C. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 17 = 0$
 D. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$
 E. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 1 = 0$

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

- Jari-jari = jarak titik (-1,1) ke garis $3x - 4y + 12 = 0$

$$r = \left| \frac{3(-1) + (-4)(1) + 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| = \left| \frac{-3 - 4 + 12}{5} \right| = 1$$

- Persamaan lingkaran dengan pusat (-1,1) dan jari-jari 1

$$\begin{aligned} (x - (-1))^2 + (y - 1)^2 &= 1^2 \\ (x + 1)^2 + (y - 1)^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

5. Misalkan diberikan titik A (1,0) dan B(0,1). Jika P bersifat $|\overline{PA}| : |\overline{PB}| = \sqrt{m} : \sqrt{n}$, maka P terletak pada lingkaran dengan persamaan

- A. $(n - m)(x^2 + y^2 - 1) = 2(nx - my)$
 B. $(n - m)(x^2 + y^2 - 1) = 2(nx + my)$
 C. $(n + m)(x^2 + y^2 - 1) = (nx - my)$
 D. $(n + m)(x^2 + y^2 + 1) = (mx - ny)$

$$E. (n - m)(x^2 + y^2 + 1) = 2(nx - my)$$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

Misalkan P (x,y)

$$|\overline{PA}| : |\overline{PB}| = \sqrt{m} : \sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} : \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{m} : \sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow ((x-1)^2 + y^2) : (x^2 + (y-1)^2) = m : n$$

$$\Leftrightarrow m(x^2 + (y-1)^2) = n((x-1)^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow m(x^2 + y^2 - 2y + 1) = n(x^2 - 2x + 1 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow mx^2 + my^2 - 2my + m = nx^2 - 2nx + n + ny^2$$

$$\Leftrightarrow 2(nx - my) = (n - m)(x^2 + y^2 + 1)$$

-----Jawaban: A

6. Jika garis $y = mx + k$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 24 = 0$ di titik (8,-4), maka nilai $m + k$ adalah

- A. -26
 B. -25
 C. -24
 D. -23
 E. -22

(Matematika IPA UM UGM 2014)

Pembahasan CERDAS:

Persamaan garis singgung lingkaran di titik (8,-4) adalah

$$y_1 y + x_1 x + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$$

$$8x - 4y - 5(x+8) + 3(y-4) + 24 = 0$$

$$8x - 4y - 5x - 40 + 3y - 12 + 24 = 0$$

$$3x - y - 28 = 0$$

$$y = 3x - 28 \equiv y = mx + k$$

$$\text{diperoleh } m = 3 \text{ dan } k = -28$$

$$\text{Jadi, } m + k = 3 - 28 = -25.$$

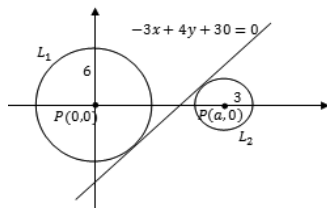
-----Jawaban: B

7. Misalkan L_1 lingkaran yang mempunyai radius 6 dan pusat di (0,0) dan L_2 lingkaran yang mempunyai radius 3 dan pusat di sumbu-x positif. Jika persamaan garis singgung dalam kedua lingkaran adalah $4y - 3x + 30 = 0$, maka persamaan L_2 adalah

- A. $(x - 13)^2 + y^2 = 9$
 B. $(x - 15)^2 + y^2 = 9$
 C. $(x - 16)^2 + y^2 = 9$
 D. $(x - 17)^2 + y^2 = 9$
 E. $(x - 19)^2 + y^2 = 9$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:



Misalkan pusat L_2 adalah $(a,0)$ dan $r = 3$, maka jarak $(a,0)$ ke garis $-x + 4y + 30 = 0$ $= r$, sehingga :

$$3 = \left| \frac{a(-3) + 0(4) + 30}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} \right|$$

$$3 = \left| \frac{-3a + 30}{5} \right|$$

$$15 = |-3a + 30|$$

- $15 = -3a + 30$

$$3a = 15$$

$$a = 5$$

Untuk $a = 5$ tidak memenuhi karena jari-jari $L_1 = 6$, maka $-3x + 4y + 30$ akan memotong L_2 .

- $15 = 3a - 30$

$$3a = 45$$

$$a = 15$$

Jadi, L_2 adalah lingkaran dengan pusat di $(15,0)$ dan jari-jari = 3. Bentuk umum persamaan L_2 adalah $(x-15)^2 + y^2 = 9$.

-----**Jawaban: B**

8. Lingkaran L menyinggung sumbu- x , menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dan melalui titik $B(4,6)$. Persamaan L dapat ditulis sebagai

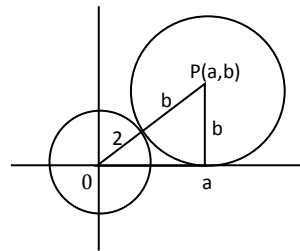
A. $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 144$

B. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$

- C. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$
 D. $x^2 + y^2 - 24x + 44 = 0$
 E. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 56 = 0$

(Matematika IPA SPMB 2005)

Pembahasan CERDAS:



$$(OP)^2 = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow (2 + b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 4b + 4 = a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow 4b = a^2 - 4 \dots (1)$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2 \text{ melalui titik } (4,6)$$

$$\Leftrightarrow (4 - a)^2 + (6 - b)^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow (4 - a)^2 + b^2 - 12b + 36 = b^2$$

$$\Leftrightarrow (4 - a)^2 + 36 - 12b = 0 \dots (2)$$

Substitusikan (1) ke (2)

$$\Leftrightarrow (4 - a)^2 + 36 - 3(4b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 8a + 16 + 36 - 3(a^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 8a + 16 + 36 - 3a^2 + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 8a - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 4)(a + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 4 \vee a = -8 \text{ (tm)}$$

$$\text{Untuk } a = 4 \rightarrow b = 3$$

Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat $P(a,b) = (4,3)$ dan $r = b = 3$

$$\Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$$

-----**Jawaban: C**

9. Titik $(0,b)$ adalah titik potong garis singgung persekutuan luar lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ dan $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 16$ dengan sumbu y . Nilai b adalah

A. $4\sqrt{2}$

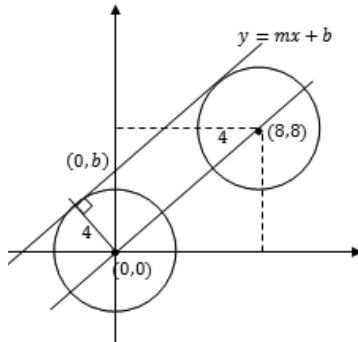
B. $3\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$

- D. $2\sqrt{3}$
E. $\sqrt{3}$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:



Lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ artinya lingkaran berpusat di $(0,0)$ dan $r = 4$.

Lingkaran $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 = 16$ artinya lingkaran berpusat di $(8,8)$ dengan jari-jari = 4.

Misalkan garis singgung luar kedua lingkaran adalah $y = mx + b$. Garis $y = mx + b$ sejajar dengan garis yang melalui kedua pusat lingkaran yaitu titik $(0,0)$ dan $(8,8)$, sehingga:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 0}{8 - 0} = 1$$

Diperoleh garis singgung luar $y = x + b$. Jarak titik $(0,0)$ ke garis $y = x + b \Leftrightarrow x - y + b = 0$ adalah jari-jari lingkaran = 4, sehingga:

$$4 = \left| \frac{0 \cdot 1 + 0(-1) + b}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \right|$$

$$4 = \left| \frac{b}{\sqrt{2}} \right|$$

$$b = \pm 4\sqrt{2}$$

Jadi, nilai b adalah $4\sqrt{2}$.

-----**Jawaban: A**

10. Misalkan titik A dan B pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$ sehingga garis singgung lingkaran di titik A dan titik B berpotongan di $C(8,1)$. Jika luas segi-

empat yang melalui titik A, B, C dan pusat lingkaran adalah 12, maka $k = \dots$

- A. -1
B. 0
C. 1
D. 2
E. 3

(SAINTEK SBMPTN 2015)

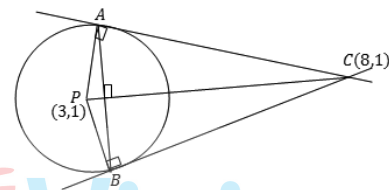
Pembahasan CERDAS:

$$L \equiv x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$$

$$\text{Pusat} = \left(-\frac{1}{2}(-6), -\frac{1}{2}(-2) \right) = (3,1)$$

Jari-jari:

$$r = \sqrt{3^2 + 1^2 - k} = \sqrt{10 - k}$$



$$PB = PA = r$$

$$\begin{aligned} PC &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(8 - 3)^2 + (1 - 1)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 0^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(PC)^2 - (PB)^2} \\ &= \sqrt{5^2 - r^2} \\ &= \sqrt{25 - r^2} \end{aligned}$$

$$L_{APBC} = 12 \rightarrow L_{PBC} = L_{APC} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

$$L_{PBC} = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot BC$$

$$6 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{25 - r^2}$$

$$\frac{12}{r} = \sqrt{25 - r^2}$$

$$\frac{144}{r^2} = 25 - r^2$$

$$r^4 - 25r^2 + 144 = 0$$

$$(r^2 - 9)(r^2 - 16) = 0$$

$$r = \pm 3 \text{ atau } r = \pm 4$$

-----**Jawaban: E**



- BAB 8 - Suku Banyak

Rangkuman Materi

A. Definisi Suku Banyak

1. Bentuk Umum

Suku banyak dalam x berderajat n dinyatakan sebagai:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dengan,

$$a_n \neq 0$$

n bilangan cacah

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ adalah bilangan real yang merupakan koefisien suku banyak

$x^n, x^{n-1}, \dots, x^2, x$ merupakan variabel atau peubah

2. Nilai Suku Banyak

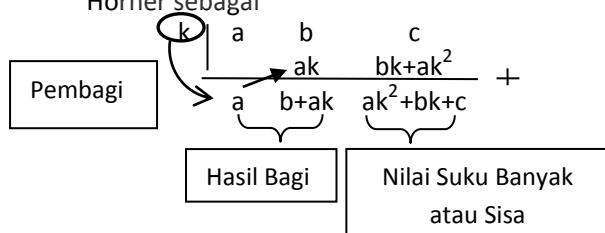
a) Cara Substitusi

Misalkan suku banyak $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Nilai suku banyak

$f(x)$ untuk $x = k$ adalah $f(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0$

b) Cara Horner/Bangun/Skema/Sintetik

Misal, akan ditentukan nilai suku banyak $f(x) = ax^2 + bx + c$ untuk $x = k$, maka cara Horner sebagai



B. Operasi Aljabar

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Penjumlahan dan pengurangan antar suku banyak dilakukan dengan cara menjumlahkan dan mengurangi koefisien dari variabel yang berpangkat sama.

2. Perkalian

Perkalian antar suku banyak dilakukan dengan mengalikan setiap suku dari suku banyak dengan suku banyak lainnya.

3. Algoritma Pembagian Suku Banyak

Suku banyak $f(x)$ jika dibagi oleh $p(x)$ akan diperoleh hasil bagi $h(x)$ dan sisa $s(x)$, maka algoritma pembagian suku banyak, yaitu

$$f(x) = p(x) \cdot h(x) + s(x).$$

Derajat $f(x)$ = derajat $p(x)$ + derajat $h(x)$. Jika suku banyak $f(x)$ berderajat n dan pembagi $p(x)$ berderajat m , maka hasil baginya $h(x)$ berderajat $n-m$ dan sisanya $s(x)$ berderajat maksimum $m - 1$.

C. Teorema Sisa

Berdasarkan algoritma pembagian, maka diperoleh teorema sisa sebagai berikut:

1. Jika suku banyak $f(x)$ dibagi oleh $x - b$, maka sisanya adalah $f(b)$.
2. Jika suku banyak $f(x)$ dibagi oleh $ax + b$, maka sisanya $f\left(-\frac{b}{a}\right) = c$, di mana c adalah suatu konstanta.
3. Jika suku banyak $f(x)$ dibagi oleh $(x - a)(x - b)$, maka sisanya adalah $px + q$. Nilai p dan q dapat dihitung dengan eliminasi pada $f(a) = ap + q$ dan $f(b) = bp + q$.

D. Teorema Faktor

1. $(x - a)$ adalah faktor dari suku banyak $f(x)$, jika dan hanya jika $f(a) = 0$.
2. $(ax - b)$ adalah faktor dari suku banyak $f(x)$, jika dan hanya jika $f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$.
3. Suku banyak $f(x)$ habis dibagi $(x - a)$ jika dan hanya jika $f(a) = 0$.

Soal dan Pembahasan

1. Banyaknya akar real $f(t) = t^9 - t$ adalah

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 6
- E. 9

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} f(t) &= t^9 - t \\ &= t(t^8 - 1) \\ &= t(t^4 + 1)(t^4 - 1) \\ &= t(t^4 + 1)(t^2 + 1)(t^2 - 1) \\ &= t(t^4 + 1)(t^2 + 1)(t + 1)(t - 1) \end{aligned}$$

Jadi, banyaknya akar real ada 3, yaitu 0, -1, dan 1.

-----**Jawaban: B**

2. Jika suku banyak $2x^3 - x^2 + 6x - 1$ dibagi $2x - 1$, maka sisanya adalah

- A. -10
- B. -1
- C. 1
- D. 2
- E. 23

(MATEMATIKA IPA SNMPTN 2012)

Pembahasan CERDAS:

$$2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Sisa pembagian $2x^3 - x^2 + 6x - 1$ oleh $2x - 1$ dengan Horner,

$$x = \frac{1}{2} \begin{array}{r|rrrr} 2 & -1 & 6 & -1 \\ & 1 & 0 & 3 \\ \hline 2 & 0 & 6 & 2(\text{sisa}) \end{array}$$

-----**Jawaban: D**

3. Sisa pembagian $Ax^{2014} - Bx^{2015} + 2x + 1$ oleh $x^2 - 1$ adalah $x + 2$. Nilai $A + B$ adalah
- A. 2
B. 1
C. 0
D. -1
E. -2

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x)H(x) + s(x) \\ Ax^{2014} - Bx^{2015} + 2x + 1 &= (x^2 - 1)H(x) + (x + 2) \\ Ax^{2014} - Bx^{2015} + 2x + 1 &= \underbrace{(x-1)(x+1)}_{\text{pembuat nol}} H(x) + (x+2) \end{aligned}$$

Untuk $x = -1$

$$A + B - 2 + 1 = 1$$

$$A + B = 2$$

Jadi, nilai $A + B = 2$.

-----**Jawaban: A**

4. Sisa pembagian suatu suku banyak $A(x-2)^{2014} + B(x-1)^{2015} + (x-2)^2$ oleh $x^2 - 3x + 2$ adalah $-x + 3$. Nilai $A + B$ adalah
- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x)H(x) + s(x) \\ A(x-2)^{2014} + B(x-1)^{2015} + (x-2)^2 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (x^2 - 3x + 2)H(x) + (-x + 3) \\ A(x-2)^{2014} + B(x-1)^{2015} + (x-2)^2 &= \underbrace{(x-2)(x-1)}_{\text{pembuat nol}} H(x) + (-x + 3) \end{aligned}$$

Untuk $x = 2 \rightarrow B = 1$

Untuk $x = 1 \rightarrow A + 1 = 2 \rightarrow A = 1$

Jadi, nilai $A + B = 1 + 1 = 2$

-----**Jawaban: C**

5. Diketahui $P(x)$ suatu polinomial. Jika $P(x+1)$ dan $P(x-1)$ masing-masing memberikan sisa 2 apabila masing-masing dibagi $x - 1$, maka $P(x)$ dibagi $x^2 - 2x$ memberikan sisa
- A. $x+2$
B. $2x$
C. x
D. 1
E. 2

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

- $P(x+1)$ dibagi $(x-1)$ sisa 2
 $P(1+1) = 2 \rightarrow P(2) = 2$
- $P(x-1)$ dibagi $(x-1)$ sisa 2
 $P(1-1) = 2 \rightarrow P(0) = 2$
- $P(x)$ dibagi $(x^2 - 2x) = x(x-2)$ sisa $(ax+b)$
 $P(0) = b \rightarrow b = 2$
 $P(2) = 2a + b \rightarrow 2a + 2 = 2 \rightarrow a = 0$
Jadi, sisanya 2.

-----**Jawaban: E**

6. Diketahui P dan Q suatu polinomial sehingga $P(x)Q(x)$ dibagi $x^2 - 1$ bersisa $3x + 5$. Jika $Q(x)$ dibagi $x-1$ bersisa 4, maka $P(x)$ dibagi $x-1$ bersisa
- A. 8
B. 6
C. 4
D. 2
E. 1

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

- $Q(x)$ dibagi $(x-1)$ sisa 4 $\rightarrow Q(1) = 4$

- $P(x)Q(x)$ dibagi $x^2-1 = (x-1)(x+1)$
 sisa $(3x+5)$
 Untuk $x = 1$
 $P(1)Q(1) = 3(1) + 5 = 8$
 $P(1)(4) = 8$
 $P(1) = 2$

- $P(x)$ dibagi $(x-1)$ sisa = $P(1) = 2$

-----**Jawaban: D**

7. Suku banyak $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$ membagi habis $x^4 + 4x^3 + 2ax^2 + 4bx + c$. Nilai $a + b$ adalah
- A. 12
 B. 10
 C. 9
 D. 6
 E. 3

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^3+3x^2+9x+3 \overline{) x^4+4x^3+2ax^2+4bx+c} \\ \underline{x^4+3x^3+9x^2+3x} \\ x^3+(2a-9)x^2+(4b-3)x+c \\ \underline{x^3+3x^2+9x+3} \\ (2a-12)x^2+(4b-12)x+(c-3) \rightarrow \text{sisa} = 0 \end{array}$$

Karena sisanya nol, maka

$$2a - 12 = 0 \rightarrow a = 6$$

$$4b - 12 = 0 \rightarrow b = 3$$

$$\text{Jadi, } a + b = 9$$

-----**Jawaban: C**

8. Jika $x^4 + ax^3 + (b-10)x^2 + 15x - 6 = f(x)$ $(x-1)$ dengan $f(x)$ habis dibagi $x-1$, maka nilai b adalah
- A. 2
 B. 1
 C. 0
 D. -1
 E. -2

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$f(x)(x-1) = \frac{x^4+ax^3+(b-10)x^2+15x-6}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{x^4+ax^3+(b-10)x^2+15x-6}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{x^4+ax^3+(b-10)x^2+15x-6}{x^2-2x+1}$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & a & b-10 & 15 & -6 & \\ 2 & & 2 & 2a+4 & 2b+4a-14 & & \\ -1 & & & -1 & -a-2 & -b-2a+7 & \\ \hline & 1 & a+2 & b+2a-7 & 2b+3a-1 & -b-2a+1 & \end{array}$$

$$2b + 3a = 1 \quad | \times 1 | \quad 2b + 3a = 1$$

$$-b - 2a = -1 \quad | \times 2 | \quad -2b - 4a = -2$$

$$-a = -1$$

$$a = 1 \rightarrow b = -1$$

Jadi, nilai $b = -1$

-----**Jawaban: D**

9. Jika sisa pembagian $f(x)$ oleh $x^3 - 3x + 5$ adalah $3x^2 - 2$, dan sisa pembagian $(x + f(x))^2$ oleh $x^3 - 3x + 5$ adalah $ax^2 + bx + c$, maka nilai $a - b - c = \dots$
- A. 33
 B. 43
 C. 53
 D. 63
 E. 73

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$f(x) = p(x)H(x) + s(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (x^3 - 3x + 5)H(x) + (3x^2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow x+f(x) = (x^3-3x+5)H(x) + (3x^2-2) + x$$

$$\Leftrightarrow x+f(x) = (x^3-3x+5)H(x) + (3x^2+x-2)$$

$$\Leftrightarrow (x+f(x))^2 = ((x^3-3x+5)H(x))^2 + 2((x^3-3x+5)H(x))(3x^2+x-2) + (3x^2+x-2)^2$$

Polinom $x^3 - 3x + 5$ habis dibagi

$x^3 - 3x + 5$ sehingga $(x + f(x))^2$ dibagi

$x^3 - 3x + 5$ sama dengan $(3x^2 + x - 2)^2$

dibagi $x^3 - 3x + 5$.

Kita jabarkan dulu

$$(3x^2 + x - 2)^2 = 9x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 4x + 4$$

$$\begin{array}{r} 9x+6 \\ x^3-3x+5 \overline{) 9x^4+6x^3-11x^2-4x+4} \\ \underline{9x^4-27x^2+45x} \\ 6x^3+16x^2-49x+4 \\ \underline{6x^3-18x+30} \\ 16x^2-31x-26 \end{array}$$

$16x^2 - 31x - 26 \equiv ax^2 + bx + c$
 Diperoleh nilai $a = 16$, $b = -31$, dan
 $c = -26$. Jadi, nilai $a - b - c$ adalah
 $= 16 + 31 + 26 = 73$.

-----**Jawaban: E**

- 10.** Jika diketahui sisa pembagian $xf(x)$ oleh $(x^2 + 4x - 12)$ adalah $ax + b$, sisa pembagian $(x-1)g(x)$ oleh $(x^2 + x - 6)$ oleh $x+3$ dan sisa pembagian $f(x)g(x)$ oleh $(x^2 - 8x + 12)$ adalah $7x - 13$, maka $4a^2 + 4ab + b^2 = \dots$

- A. $\frac{4}{25}$
 B. $\frac{6}{25}$
 C. $\frac{8}{25}$
 D. $\frac{10}{25}$
 E. $\frac{11}{25}$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

- $xf(x) = (x^2 + 4x - 12)H(x) + (ax + b)$
 $= (x+6)(x-2)H(x) + (ax + b)$
 $2f(2) = 2a + b \dots (i)$

- $(x-1)g(x)$
 $= (x^2 + x - 6)H(x) + (x+3)$
 $= (x+3)(x-2)H(x) + (x+3)$
 Untuk $x = 2$
 $(2-1)g(2) = 5$
 $g(2) = 5 \dots (ii)$

Dari (i) dan (ii) diperoleh:

$$2f(2)g(2) = 5(2a+b)$$

$$f(2)g(2) = \frac{5}{2}(2a+b) \dots (iii)$$

- $f(x)g(x)$
 $= (x^2 - 8x + 12)H(x) + (7x - 13)$
 $= (x-2)(x-6)H(x) + (7x - 13)$
 Untuk $x = 2$
 $f(2)g(2) = 1 \dots (iv)$

Substitusikan (iii) ke (iv)

$$\frac{5}{2}(2a+b) = 1$$

$$(2a+b) = \frac{2}{5} \text{ (kuadratkan)}$$

$$4a^2 + 4ab + b^2 = \frac{4}{25}$$

$$\text{Jadi, nilai } 4a^2 + 4ab + b^2 = \frac{4}{25}$$

-----**Jawaban: A**



- BAB 9 - Limit

Rangkuman Materi

A. Limit Fungsi Aljabar

1. Nilai limit di $x = a$

Langkah-langkah untuk menghitung nilai $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ adalah

- Substitusi $x = a$ ke $f(x)$ sehingga diperoleh nilai $f(a)$
- Jika $f(a) = \frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu), maka $f(x)$ harus diubah sedemikian rupa sehingga menjadi bentuk tentu ($\frac{p}{q}, \frac{0}{k}, \frac{k}{0} = \infty$), dengan cara
 - Menghilangkan faktor $(x-a)$ dari pembilang dan penyebut.
 - Apabila terdapat bentuk akar, maka terlebih dulu dikalikan sekawan agar bentuk akar hilang, kemudian disederhanakan.
 - Menentukan turunan dan penyebut sehingga diperoleh bentuk tentu.

2. Nilai limit tak hingga

Dapat diselesaikan dengan membagi pangkat tertinggi. Rumus dasar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$, untuk n bilangan bulat positif.

a) Model 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots}{px^n + qx^{n-1} + \dots} = \begin{cases} \infty & \text{jika } m > n \\ \frac{a}{p} & \text{jika } m = n \\ 0 & \text{jika } m < n \end{cases}$$

b) Model 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} = \begin{cases} \infty & \text{jika } a > p \\ \frac{b-q}{2\sqrt{a}} & \text{jika } a = p \\ 0 & \text{jika } a < p \end{cases}$$

atau

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} - \sqrt[n]{px^n + qx^{n-1} + \dots} = \begin{cases} \infty & \text{jika } a > p \\ \frac{b-q}{n \cdot \sqrt[n]{(a)^{n-1}}} & \text{jika } a = p \\ 0 & \text{jika } a < p \end{cases}$$

B. Limit Fungsi Trigonometri

Rumus-rumus yang digunakan untuk menyelesaikan limit fungsi trigonometri adalah

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = 1$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

C. Teorema Limit

1. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ dengan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
4. $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ dengan k adalah konstanta
5. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$
6. Jika $f(x) = k$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$ dengan k adalah konstanta
7. Jika $f(x) = x$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$

D. Kontinuitas Fungsi

Fungsi $f(x)$ dikatakan kontinu di titik $x = x_0$, jika:

1. $f(x_0)$ terdefinisi
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ada
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Soal dan Pembahasan

1. Nilai $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{2-x}+1)}{1-x}$ adalah

- A. $-\frac{1}{2}$
- B. $-\frac{1}{4}$
- C. $\frac{1}{8}$
- D. $\frac{1}{4}$
- E. $\frac{1}{2}$

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{2-x}+1)}{1-x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{2-x}+1)}{1-x} \cdot \frac{\sqrt{5-x}+2}{\sqrt{5-x}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5-x-4)(\sqrt{2-x}+1)}{(1-x)\sqrt{5-x}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{(1-x)\sqrt{5-x}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{2-x}+1)}{\sqrt{5-x}+2} \\ &= \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jawaban: E

2. Jika a dan b adalah bilangan bulat, serta $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-b}{2-x} = a$, maka $b-a = \dots$

- A. -5
- B. -3
- C. -1
- D. 2
- E. 5

(TKDU SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-b}{2-x} &= a \\ \bullet \text{ Jika } x &= 2 \text{ disubstitusikan ke } \frac{x^2-x-b}{2-x}, \\ &\text{maka hasilnya } \frac{0}{0} \text{ sehingga} \\ &2^2 - 2 - b = 0 \rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

- Menggunakan dalil L'Hopital kita turunkan pembilang dan penyebut dari $\frac{x^2-x-b}{2-x}$ yaitu $\frac{2x-1}{-1}$. Lalu substitusikan $x = 2$, maka

$$\frac{2 \cdot 2 - 1}{-1} = a \rightarrow a = -3$$

Jadi, nilai $b - a = 2 - (-3) = 5$.

Jawaban: E

3. Jika $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{Ax+B}-2}{x} = 1$, maka

- A. $B = A^2$
- B. $4B^2 = A$
- C. $4B = A^2$
- D. $4B = A$
- E. $A+B = 0$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{Ax+B}-2}{x} = 1$$

- Jika $x = 0$ disubstitusikan ke $\frac{\sqrt{Ax+B}-2}{x}$, maka hasilnya $\frac{0}{0}$ sehingga $\sqrt{B}-2=0 \rightarrow B=4$
- Menggunakan dalil L'Hopital kita turunkan pembilang dan penyebut dari $\frac{\sqrt{Ax+B}-2}{x}$ yaitu

$$\frac{1}{2} A(Ax+B)^{-\frac{1}{2}} = \frac{A}{2\sqrt{Ax+B}}$$

Substitusikan $x = 0$, maka

$$\frac{A}{2\sqrt{A \cdot 0 + 4}} = 1 \rightarrow A = 4$$

Jadi, nilai $A = 4$ dan $B = 4$ sehingga kesimpulan yang tepat adalah $4B = A^2$

Jawaban: C

4. Jika $f(x) = x^2 + ax + b$ dengan $f(2) = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1)-f(x)}{x-2} = 2$, maka $b = \dots$

- A. -6
- B. -5
- C. 0

- D. 5
E. 6

(TKDU SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$f(2) = 0$$

$$4 + 2a + b = 0$$

$$2a + b = -4 \dots (i)$$

Jika $x = 2$ disubstitusikan ke $\frac{f(x+1) - f(x)}{x-2}$,

$$\text{maka hasilnya } \frac{0}{0}$$

$$f(3) - f(2) = 0$$

$$9 + 3a + b - 0 = 0$$

$$3a + b = -9 \dots (ii)$$

Eliminasikan (i) dan (ii)

$$3a + b = -9$$

$$2a + b = -4$$

$$a = -5 \rightarrow b = 6$$

Jadi, nilai $b = 6$

-----**Jawaban: E**

5. Jika $\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{g(x)} \right) = 4$ dan

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) - \frac{1}{g(x)} \right) = -3, \text{ maka}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left((f(x))^2 + \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 \right) = \dots$$

- A. $\frac{24}{3}$
B. $\frac{23}{5}$
C. $\frac{25}{3}$
D. $\frac{25}{2}$
E. $\frac{27}{2}$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) + \frac{1}{g(x)} \right) = 4$$

kedua ruas dikuadratkan

$$\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 +$$

$$2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = 4^2 \dots (i)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) - \frac{1}{g(x)} \right) = -3$$

kedua ruas dikuadratkan

$$\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 -$$

$$2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = (-3)^2 \dots (ii)$$

Persamaan (i) dan (ii) dijumlahkan sehingga diperoleh,

$$2 \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f^2(x) + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 \right\} = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} \right)^2 = \frac{25}{2}$$

-----**Jawaban: D**

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sqrt{4-x}}{\cos x - \cos 3x} = \dots$

- A. -2
B. $-\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{2}$
D. 1
E. 2

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sqrt{4-x}}{\cos x - \cos 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sqrt{4-x}}{2 \sin 2x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2x \cdot x} \cdot \sqrt{4-x} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{4-0} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

-----**Jawaban: C**

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \cos x + 1}{x \tan x} = \dots$

- A. $\frac{3}{2}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $-\frac{1}{2}$
D. -1
E. -2

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \cos x + 1}{x \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x - \cos x + 1}{x \tan x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{x \tan x} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + 2)(\cos x - 1)}{x \tan x} \\
 &= - \frac{(1+2) \left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x \cdot x} \\
 &= -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x \tan x} = \dots$
- A. 2
B. $\frac{1}{2}$
C. -1
D. $-\frac{1}{2}$
E. -2

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x \tan x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x - x^2 (1 - \sin^2 x)}{x \tan x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x - x^2 + x^2 \sin^2 x}{x \tan x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x^2 + x^2 \cdot x^2}{x \cdot x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x^4}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + x^2}{1} = 2 + 0^2 = 2
 \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} = \dots$
- A. $-\frac{1}{2}$
B. $-\frac{1}{4}$
C. 0
D. $\frac{1}{4}$
E. $\frac{1}{2}$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} \\
 &= \frac{(1 + \tan x) - (1 + \sin x)}{x^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} \\
 &= \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x^3} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{\tan x \cdot 2 \sin^2 \frac{1}{2} x}{x^3} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{x \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} x^2}{x^3} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

-----Jawaban: D

10. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(2x+h) - \cos(2x-h)}{h\sqrt{4-h^2}} = \dots$

- A. $-\cos 2x$
B. $-\sin 2x$
C. $\sin 2x$
D. $-\sin^2 x$
E. $\cos^2 x$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(2x+h) - \cos(2x-h)}{h\sqrt{4-h^2}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(4x) \sin \frac{1}{2}(2h)}{h\sqrt{4-h^2}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x \sin h}{h\sqrt{4-h^2}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x}{\sqrt{4-h^2}} \\
 &= \frac{-2 \sin 2x}{2} \\
 &= -\sin 2x
 \end{aligned}$$

-----Jawaban: B



- BAB 10 - Turunan

Rangkuman Materi

A. Aturan Turunan Fungsi

1. $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n.a.x^{n-1}$
2. $f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$
3. $f(x) = ku \rightarrow f'(x) = k.u'$
4. $f(x) = u \pm v \rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
5. $f(x) = u.v \rightarrow f'(x) = u'v + uv'$
6. $f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
7. $f(x) = f(u) \rightarrow f'(x) = f'(u).u'$
8. $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)).h'(x)$
9. $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
10. $f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

B. Turunan Fungsi Trigonometri

1. $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$
2. $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$
3. $f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
4. $f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$
5. $f(x) = \sec x \rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
6. $f(x) = \csc x \rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

C. Aplikasi Turunan

1. Persamaan Garis Singgung
Rumus persamaan garis singgung suatu kurva di titik (x_1, y_1)
 $(y - y_1) = m(x - x_1)$, dengan gradien $(m) = f'(x_1)$

2. Fungsi Naik Turun

Fungsi dikatakan naik jika $f'(x) > 0$

Fungsi dikatakan turun jika $f'(x) < 0$

3. Stasioner

Suatu fungsi mencapai stasioner saat $f'(x) = 0$. Jenis Stasioner:

- Minimum $f'(x) > 0$
- Maksimum $f'(x) < 0$
- Belok $f'(x) = 0$

Soal dan Pembahasan

1. Diketahui $f(0) = 1$ dan $f'(0) = 2$. Jika

$$g(x) = \frac{1}{(2f(x)-1)^3}, \text{ maka } g'(0) = \dots$$

- 12
- 6
- 6
- 8
- 12

(TKDU SMBPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(2f(x)-1)^3} = (2f(x)-1)^{-3} \\ g'(x) &= (-3)(2f(x)-1)^{-4} \cdot (2) \cdot (f'(x)) \\ &= (-6)(f'(x))(2f(x)-1)^{-4} \\ g'(0) &= (-6)(f'(0))(2f(0)-1)^{-4} \\ &= (-6)(2)(2(1)-1)^{-4} \\ &= -12 \end{aligned}$$

-----**Jawaban: A**

2. Diketahui $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{6}$. Jika $g(x) = f(2x-1)$, maka g turun pada selang

- $-\frac{5}{4} \leq x \leq 1$
- $-1 \leq x \leq \frac{5}{4}$
- $-1 \leq x \leq 1$
- $-1 \leq x \leq 0$
- $0 \leq x \leq 1$

(MAT IPA SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

- $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{6}$
- $g(x) = f(2x-1)$

$$= \frac{2}{3}(2x-1)^3 - \frac{1}{2}(2x-1)^2 - 3(2x-1) + \frac{1}{6}$$
- Fungsi $g(x)$ turun jika $g'(x) < 0$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(3)(2x-1)^2(2) - \frac{1}{2}(2)(2x-1)(2) - 3(2) &< 0 \\ \Leftrightarrow 4(2x-1)^2 - 2(2x-1) - 6 &< 0 \\ \Leftrightarrow 2(2x-1)^2 - (2x-1) - 3 &< 0 \\ \Leftrightarrow 8x^2 - 10x &< 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 5x &< 0 \\ \Leftrightarrow x(4x-5) &< 0 \end{aligned}$$

$$0 < x < \frac{5}{4}$$

Jadi, g turun pada selang $0 \leq x \leq 1$.

-----**Jawaban: E**

3. Fungsi $f(x) = \sqrt{2 + \frac{x}{2} - \cos^2 x}$, $0 \leq x \leq 2\pi$ turun pada interval

- $\frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{11\pi}{12}$
- $\frac{12}{7\pi} < x < \frac{11\pi}{12}$
- $\frac{12}{7\pi} < x < \frac{13\pi}{12}$
- $\frac{12}{11\pi} < x < \frac{12}{17\pi}$
- $\frac{5\pi}{12} < x < \frac{9\pi}{12}$

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$f(x) = \sqrt{2 + \frac{x}{2} - \cos^2 x} = \left(2 + \frac{1}{2}x - \cos^2 x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{2}x - \cos^2 x\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + 2 \cos x \sin x\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \sin 2x}{2\sqrt{2 + \frac{1}{2}x - \cos^2 x}}$$

Syarat $f(x)$ turun $\rightarrow f'(x) < 0$

$$\frac{\frac{1}{2} + \sin 2x}{2\sqrt{2 + \frac{1}{2}x - \cos^2 x}} < 0$$

Pembuat nol

$$\frac{1}{2} + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{7}{6}\pi$$

$$\bullet \quad 2x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

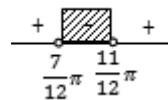
$$x = \frac{7}{12}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{7}{12}\pi$$

$$\bullet \quad 2x = \left(\pi - \frac{7}{6}\pi\right) + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{11}{12}\pi$$



Jadi, $f(x)$ turun pada interval

$$\frac{7}{12}\pi < x < \frac{11}{12}\pi$$

-----**Jawaban: B**

4. Fungsi $f(x) = x^4 - 2x^2 + ax + a$ mempunyai nilai minimum b di $x = 1$. Nilai $a + b = \dots$

- A. 2
B. 1
C. 0
D. -1
E. -2

(TKPA SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

Syarat $f(x)$ minimum (stasioner):

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 - 4x + a = 0$$

Substitusikan $x = 1$ ke $f'(x) = 0$

$$4(1)^2 - 4(1) + a = 0$$

$$a = 0$$

$$\text{Diperoleh } f(x) = x^4 - 2x^2$$

$f(x)$ mempunyai nilai minimum b di

$$x = 1 \rightarrow f(1) = b$$

$$1^4 - 2(1) = b$$

$$b = -1$$

$$\text{Jadi, nilai } a + b = 0 + (-1) = -1$$

-----**Jawaban: D**

5. Jika p dan q akar-akar persamaan kuadrat: $x^2 - (a+1)x + \left(-a - \frac{5}{2}\right) = 0$, maka nilai minimum $p^2 + q^2$ adalah

- A. $\frac{5}{2}$
B. 2
C. 1
D. $\frac{1}{2}$
E. 0

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$\bullet \quad p+q = -\frac{-(a+1)}{1} = a+1$$

$$\bullet \quad pq = \frac{-a - \frac{5}{2}}{1} = -a - \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad p^2 + q^2 &= (p+q)^2 - 2pq \\ &= (a+1)^2 - 2\left(-a - \frac{5}{2}\right) \\ &= a^2 + 2a + 1 + 2a + 5 \\ &= a^2 + 4a + 6 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad p^2 + q^2 \text{ minimum jika } (p^2 + q^2)' = 0, \\ 2a + 4 = 0 \rightarrow a = -2$$

Jadi, minimum dari

$$p^2 + q^2 = (-2)^2 + 4(-2) + 6 = 2$$

-----**Jawaban: B**

6. Diketahui $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{6}$. Jika $g(x) = f(1-2x)$, maka kurva g mempunyai titik maksimum lokal di

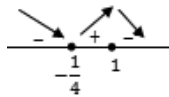
- A. -1
B. $\frac{1}{2}$

- C. $(1, -\frac{8}{3})$
 D. $(1, 2)$
 E. $(0, 2)$

(MAT IPA SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

- $g(x) = f(1-2x)$
 $= \frac{2}{3}(1-2x)^3 - \frac{1}{2}(1-2x)^2 - 3(1-2x) + \frac{1}{6}$
- $g'(x) = 0$
 $-4(1-2x)^2 + 2(1-2x) + 6 = 0$
 $-2(1-2x)^2 - (1-2x) - 3 = 0$
 $-2(1-2x-3)((1-2x)+1) = 0$
 $2(1-2x)-3 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{4}$ atau
 $(1-2x)+1 = 0 \rightarrow x = 1$



Terlihat bahwa maksimum saat $x = 1$, sehingga

$$y = \frac{2}{3}(1-2(1))^3 - \frac{1}{2}(1-2(1))^2 - 3(1-2(1)) + \frac{1}{6}$$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{-4-3+18+1}{6}$$

$$= 2$$

-----**Jawaban: D**

7. Jika $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 12x + 5a$ memotong sumbu Y di titik $(0, 10)$, maka nilai maksimum $f(x)$ untuk $x \in [-1, 0]$ adalah
- A. 12
 B. 18
 C. 20
 D. 21
 E. 23

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

- $f(x)$ memotong sumbu Y di $(0, 10)$
 $\rightarrow f(0) = 10$
 $a(0)^3 + 3(0)^2 - 12(0) + 5a = 10$
 $5a = 10$
 $a = 2$

Diperoleh $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$

- Syarat minimum (stasioner)
 $\rightarrow f'(x) = 0$
 $6x^2 + 6x - 12 = 0$
 $x^2 + x - 2 = 0$
 $(x+2)(x-1) = 0$
 $x = -2$ (tm) atau $x = 1$ (tm)
- Nilai maksimum $f(x)$ pada interval $[-1, 0]$
 $f(-1) = 23 \rightarrow \max$
 $f(0) = 10$

-----**Jawaban: E**

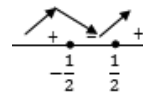
8. Diketahui $f(x) = ax^2 + bx - 2$ mencapai titik maksimum di titik minimum $g(x) = 4x^3 - 3x + 3$. Nilai $a + b = \dots$

- A. -16
 B. -8
 C. 0
 D. 8
 E. 16

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

- Syarat minimum (stasioner)
 $\rightarrow g'(x) = 0$
 $12x^2 - 3 = 0$
 $3(4x^2 - 1) = 0$
 $3(2x-1)(2x+1) = 0$
 $x = \frac{1}{2}$ atau $x = -\frac{1}{2}$



Dari grafik terlihat $g(x)$ minimum di $x = \frac{1}{2}$.

- $f(x) = ax^2 + bx - 2$
 $x_{\max} = \frac{1}{2}$
 $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$
 $a + b = 0$

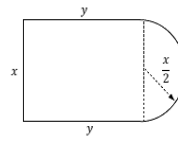
Jadi, nilai $a + b = 0$

-----**Jawaban: C**

9. Garis singgung kurva $y = 3 - x^2$ di titik $P(-a, b)$ dan $Q(a, b)$ memotong sumbu Y di titik R . Nilai a yang membuat segitiga PQR sama sisi adalah

- A. $2\sqrt{3}$
 B. $\sqrt{3}$
 C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 D. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
 E. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$

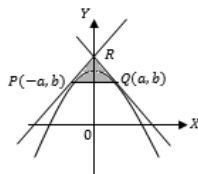
(SAINTEK SBMPTN 2016)



- A. $\frac{2a}{\pi}$
 B. $\frac{a}{\pi}$
 C. $\frac{a}{4+\pi}$
 D. $\frac{a}{4+2\pi}$
 E. $\frac{2a}{4+\pi}$

(SNMPTN 2011 IPA)

Pembahasan CERDAS:



- $m = y' = -2x$ melalui (a, b) , maka $m = -2a$
 Persamaan garis melalui titik (a, b) dengan gradien m
 $y - b = -2a(x - a)$
 $y = -2ax + 2a^2 + b$
 Garis y memotong sumbu $y \rightarrow x = 0$ sehingga:
 $y = -2a(0) + 2a^2 + b$
 $y = 2a^2 + b$
 Diperoleh titik $R(0, 2a^2 + b)$
- Agar segitiga PQR sama sisi, maka $PQ = QR = RP$
 Jarak $PQ = 2a \rightarrow$ jarak $QR = 2a$
 $(QR)^2 = (a - 0)^2 + (b - (2a^2 + b))^2$
 $4a^2 = a^2 + 4a^4$
 $a^2 = \frac{3}{4}$
 $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

-----Jawaban: C

10. Kolam renang berbentuk gabungan persegi panjang dan setengah lingkaran seperti gambar berikut. Keliling kolam renang sama dengan a satuan panjang. Agar luas kolam renang maksimum, maka $x = \dots$ satuan panjang.

Pembahasan CERDAS:

- Keliling setengah lingkaran
 $= \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r = \pi \left(\frac{x}{2}\right)$
- Keliling kolam renang
 $a = 2y + x + \frac{\pi}{2}x$
 $y = \frac{a - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x}{2}$
- Luas persegi panjang (L_p) = xy
- Luas setengah lingkaran
 $\left(L_{\frac{1}{2}\odot}\right) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{\pi}{8}x^2$
- Luas kolam renang
 $L = L_p + L_{\frac{1}{2}\odot} = xy + \frac{\pi}{8}x^2$
 $= x \left(\frac{a - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x}{2} \right) + \frac{\pi}{8}x^2$
 $= \frac{a}{2}x - \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2$
 $= -\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{a}{2}x$
 $= -\left(\frac{\pi+4}{8}\right)x^2 + \frac{a}{2}x$

Luas kolam renang akan maksimum jika

$L' = 0$ sehingga

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{\pi+4}{4}\right)x + \frac{a}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi+4}{4}\right)x = \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{4}{\pi+4}\right) = \frac{2a}{\pi+4}$$

-----Jawaban: E



- BAB 11 - Integral

Rangkuman Materi

A. Pengertian

Integral merupakan lawan dari turunan. Jika $f(x)$ merupakan turunan pertama dari $F(x)$, maka

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

B. Integral Tak Tentu

1. $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C; n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

C. Integral Tertentu

1. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
2. $\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
3. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
4. $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$
5. $\int_a^a f(x) dx = 0$
6. $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+k}^{b+k} f(x-k) dx = \int_{a-k}^{b-k} f(x+k) dx$

D. Teknik Pengintegralan

1. Teknik Dasar
Ubahlah operasinya menjadi bentuk penjumlahan atau pengurangan.

2. Substitusi

a) Aljabar

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{1}{n+1} (ax+b)^{n+1} + C$$

b) Trigonometri

Bentuk	Perubahan Bentuk	
$\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$	$x = \frac{a}{b} \sin \theta$	$dx = \frac{a}{b} \cos \theta d\theta$
$\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$	$x = \frac{a}{b} \tan \theta$	$dx = \frac{a}{b} \sec^2 \theta d\theta$
$\sqrt{b^2 x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{b} \sec \theta$	$dx = \frac{a}{b} \sec \theta \tan \theta d\theta$

3. Parsial

$$\int u dv = uv - \int v du$$

atau cara lainnya, yaitu dengan **tanzalin**

diturunkan	diintegrasikan
u	dv
u'	+
u''	-
u'''	+
...	-
0	-

Integral Fungsi Trigonometri

1. Perkalian sin dan cos dengan sudut berbeda ($\int \sin A \cos B dx$)

- $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $-2 \sin A \sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

2. Perkalian sin dan cos dengan pangkat berbeda ($\int \sin^m x \cos^n x dx$)

	Pangkat Ganjil	Pangkat Genap
$\sin^2 x$	$1 - \cos^2 x$	$\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$
$\cos^2 x$	$1 - \sin^2 x$	$\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

a) Jika **sin pangkat ganjil** dan **cos pangkat ganjil**

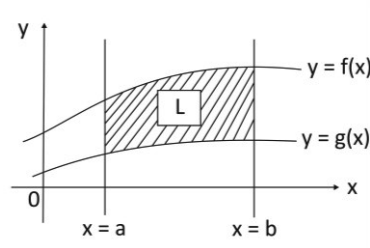
- ✓ Ubahlah pangkat ganjil terkecil menjadi bentuk seperti tabel
- ✓ Penyelesaian dengan teknik substitusi

- b) Jika **sin pangkat ganjil** dan **cos pangkat genap** atau sebaliknya
 ✓ Ubahlah pangkat ganjil menjadi bentuk seperti tabel
 ✓ Penyelesaian dengan teknik substitusi
- c) Jika **sin pangkat genap** dan **cos pangkat genap**
 ✓ Ubahlah menjadi bentuk seperti tabel

E. Aplikasi

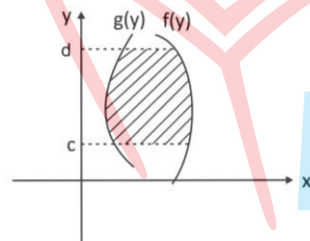
1. Menghitung Luas Daerah Antara Dua Kurva

- a) Berdasarkan batas sumbu x



$$L = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

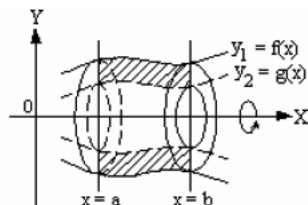
- b) Berdasarkan batas sumbu y



$$L = \int_c^d f(y) - g(y) dy$$

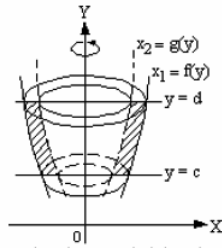
2. Menghitung Volume Benda Putar

- a) Diputar mengelilingi sumbu x



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) - g^2(x) dx$$

b) Diputar mengelilingi sumbu y



$$V = \pi \int_c^d f^2(y) - g^2(y) dy$$

Cara mencari luas dan volume:

- 1) Sketsa kurva, kemudian tentukan daerahnya.
- 2) Tentukan batas integrasi dengan mencari titik potong antara kurva.
- 3) Hitung sesuai rumus.

Soal dan Pembahasan

1. Jika $\int_{-1}^a \frac{x+1}{(x+2)^4} dx = \frac{10}{81}$ dan $a > -2$, maka nilai $a = \dots$

- A. $-1\frac{1}{2}$
 B. -1
 C. 0
 D. 1
 E. $1\frac{1}{2}$

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^a \frac{x+1}{(x+2)^4} dx &= \frac{10}{81} \\ \equiv \int_{-1}^a (x+1)(x+2)^{-4} dx &= \frac{10}{81} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan integral parsial

$x+1$	$(x+2)^{-4}$
1	$-\frac{1}{3}(x+2)^{-3}$
0	$\frac{1}{6}(x+2)^{-2}$

diperoleh

$$\left[-\frac{x+1}{3(x+2)^3} - \frac{1}{6(x+2)^2} \right]_{-1}^a = \frac{10}{81}$$

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{a+1}{3(a+2)^3} - \frac{1}{6(a+2)^2} \right) - \left(0 - \frac{1}{6} \right) = \frac{10}{81} \\ &\left(-\frac{a+1}{3(a+2)^3} - \frac{1}{6(a+2)^2} \right) + \frac{1}{6} = \frac{10}{81} \\ &\frac{-2(a+1) - (a+2)}{6(a+2)^3} = \frac{10}{81} - \frac{1}{6} \\ &\frac{-3a-4}{6(a+2)^3} = \frac{60-81}{81 \cdot 6} \\ &\frac{-3a-4}{6(a+2)^3} = -\frac{21}{81 \cdot 6} \\ &\frac{3a+4}{(a+2)^3} = \frac{7}{27} \\ &81a + 108 = 7(a^3 + 6a^2 + 12a + 8) \\ &7a^3 + 42a^2 + 84a + 56 = 81a + 108 \\ &7a^3 + 42a^2 + 3a - 52 = 0 \\ &\begin{array}{r|rrrr} & 7 & 42 & 3 & -52 \\ 1 & & 7 & 49 & 52 \\ \hline & 7 & 49 & 52 & 0 \end{array} \end{aligned}$$

Jadi, nilai $a = 1$

Jawaban: D

2. $\int 4 \sin^2 x \cos 2x dx = \dots$

- A. $\sin 2x - \frac{1}{8} \sin 4x + x + C$
 B. $\sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x - x + C$

- C. $\sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x - x + C$
 D. $-\sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x + x + C$
 E. $\sin 2x - \frac{1}{2} \sin 4x - x + C$

(MAT IPA SNMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} & \int 4 \sin^2 x \cos 2x \, dx \\ &= \int 4 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) (\cos 2x) \, dx \\ &= 2 \int (1 - \cos 2x) (\cos 2x) \, dx \\ &= 2 \int \cos 2x - \cos^2 2x \, dx \\ &= 2 \int \cos 2x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} \right) \, dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x \right) + C \\ &= \sin 2x - x - \frac{1}{4} \sin 4x + C \end{aligned}$$

-----**Jawaban: C**

3. Jika $f(x) = 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots$ dengan $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, maka $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \, dx = \dots$
 A. $-\sqrt{2}$
 B. -1
 C. 0
 D. 1
 E. $\sqrt{2}$

(MAT IPA SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$f(x) = 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots$ membentuk barisan geometri dengan $a = 1$ dan $r = \sin x$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{1}{1-\sin x} \\ &= \frac{1}{1-\sin x} \cdot \frac{1+\sin x}{1+\sin x} \\ &= \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = \sec x \tan x \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x + \sec x \tan x \, dx \\ &= [\tan x + \sec x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= (1 + \sqrt{2}) - (0 + 1) \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

-----**Jawaban: E**

4. Diketahui fungsi $f(x) = f(x+2)$ untuk setiap x . Jika $\int_0^2 f(x) \, dx = B$, maka $\int_3^7 f(x+8) \, dx = \dots$
 A. B
 B. $2B$
 C. $3B$
 D. $4B$
 E. $5B$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} f(x) &= f(x+2) \\ f(x+2) &= f(x+4) \\ f(x+4) &= f(x+6) \\ f(x+6) &= f(x+8) \end{aligned} \right\} f(x) = f(x+8) \\ & \int_3^7 f(x+8) \, dx = \int_3^7 f(x) \, dx \\ &= 2 \int_0^2 f(x) \, dx \\ &= 2B \end{aligned}$$

-----**Jawaban: B**

5. Diketahui fungsi f dan g dengan $f(x) = f(x+a)$, $f(x) = x^5 + 2016x^3$ untuk $0 < x \leq a$, dan $g(x) = g(x+2a)$, $g(x) = x^5 + 2016x^3$ untuk $-a < x \leq a$, dan $\int_0^a f(x) \, dx = b$. Nilai dari $\int_0^{3a} (f(x) + g(x)) \, dx$ adalah
 A. $2a$
 B. $3a$
 C. $4b$
 D. $5b$
 E. $6b$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) = x^5 + 2016x^3 \\ f(x+a) &= g(x+2a) \end{aligned}$$

$$\int_0^a f(x) = b$$

$$\int_a^{2a} f(x+a) = b$$

$$\int_{2a}^{3a} f(x+2a) = b$$

Sehingga $\int_0^{3a} (f(x)+g(x)) dx$

$$= 2 \int_0^{3a} f(x) dx$$

$$= 2 \left(\int_0^a f(x) dx + \int_a^{2a} f(x) dx + \int_{2a}^{3a} f(x) dx \right)$$

$$= 2(b+b+b)$$

$$= 6b$$

-----**Jawaban: E**

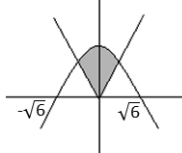
6. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 6-x^2$ dan $y = |x|$ adalah

- A. $2 \int_{-1}^0 (-x^2-x+6) dx$
 B. $2 \int_0^2 (-x^2-x+6) dx$
 C. $2 \int_0^3 (-x^2-x+6) dx$
 D. $2 \int_{-2}^2 (x^2-x-6) dx$
 E. $2 \int_{-2}^2 (-x^2+x+6) dx$

(MAT IPA SNMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

Sketsa gambar



Titik potong

$$y = y$$

$$6-x^2 = |x|$$

$$x^4-12x^2+36 = x^2$$

$$x^4-13x^2+36 = 0$$

$$(x^2-9)(x^2-4)$$

$$x = \pm 3 \text{ (tm)} \text{ atau } x = \pm 2$$

$$\text{Jadi, } L = 2 \int_0^2 (-x^2-x+6) dx$$

-----**Jawaban: B**

7. Luas daerah di antara kurva $y = 2a+1$ dan kurva $y = x^2+2a$ selalu bernilai

konstanta, yaitu k. Nilai dari k adalah

....

- A. $\frac{1}{3}$
 B. $\frac{2}{3}$
 C. $\frac{4}{3}$
 D. $\frac{5}{3}$
 E. $\frac{7}{3}$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

Titik potong:

$$y = y$$

$$x^2+2a = 2a+1$$

$$x^2-1 = 0$$

$$(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$$\text{Luas} = 2 \int_0^1 (2a+1)-(x^2+2a) dx$$

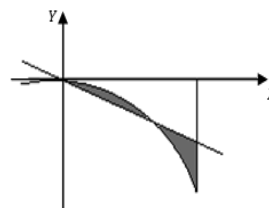
$$= 2 \int_0^1 1-x^2 dx$$

$$= 2 \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

-----**Jawaban: C**

8. Pada interval $0 \leq x \leq c$, luas daerah di bawah kurva $y = -x^2$ dan di atas garis $y = -3x$ sama dengan luas daerah di atas $y = -x^2$ dan di bawah garis $y = -3x$. Nilai $c = \dots$



- A. $4\frac{1}{2}$
 B. $4\frac{3}{4}$
 C. 5
 D. $5\frac{1}{5}$
 E. $5\frac{1}{3}$

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

Titik potong

$$y = y$$

$$-x^2 = -3x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 3$$

Karena $L_1 = L_2$, maka:

$$\int_0^3 -3x + x^2 dx = \int_3^c -x^2 + 3x dx$$

$$\left[-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_3^c$$

$$\left(-\frac{27}{2} + 9 \right) - (0) = \left(-\frac{1}{3}c^3 + \frac{3}{2}c^2 \right) - \left(-9 + \frac{27}{2} \right)$$

$$-\frac{27}{2} + 9 - 9 + \frac{27}{2} = -\frac{1}{3}c^3 + \frac{3}{2}c^2$$

$$-\frac{1}{3}c^3 + \frac{3}{2}c^2 = 0$$

$$c^2 \left(-\frac{1}{3}c + \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$-\frac{1}{3}c + \frac{3}{2} = 0$$

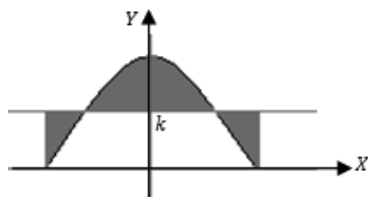
$$-2c + 9 = 0$$

$$c = \frac{9}{2}$$

$$c = 4\frac{1}{2}$$

-----Jawaban: A

9. Pada interval $-4 \leq x \leq 4$, luas daerah di atas kurva $y = 16 - x^2$ dan di bawah garis $y = k$ sama dengan luas daerah di bawah kurva $y = 16 - x^2$ dan di atas garis $y = k$. Nilai $k = \dots$



- A. 9
B. $9\frac{2}{3}$
C. $10\frac{1}{3}$
D. $10\frac{2}{3}$
E. 11

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

Titik potong

$$y = y$$

$$16 - x^2 = k$$

$$x^2 = 16 - k$$

$$x = \pm\sqrt{16-k}$$

Karena $L_1 = L_2$, maka:

$$\int_0^{\sqrt{16-k}} 16 - x^2 - k dx = \int_{\sqrt{16-k}}^4 k - 16 + x^2 dx$$

$$\left[16x - \frac{1}{3}x^3 - kx \right]_0^{\sqrt{16-k}} = \left[kx - 16x + \frac{1}{3}x^3 \right]_{\sqrt{16-k}}^4$$

$$\left[(16-k)x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{16-k}} = \left[-(16-k)x + \frac{1}{3}x^3 \right]_{\sqrt{16-k}}^4$$

$$\left((16-k)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(16-k)^{\frac{3}{2}} \right) - (0)$$

$$= \left(-4(16-k) + \frac{64}{3} \right) - \left(-(16-k)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(16-k)^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$\frac{2}{3}(16-k)^{\frac{3}{2}} = -4(16-k) + \frac{64}{3} + \frac{2}{3}(16-k)^{\frac{3}{2}}$$

$$3(16-k) = 16$$

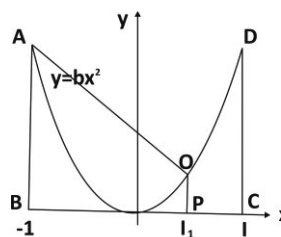
$$48 - 3k = 16$$

$$32 = 3k$$

$$k = 10\frac{2}{3}$$

-----Jawaban: D

10. Misalkan $A(t)$ menyatakan luas daerah di bawah kurva $y = bx^2$ untuk $0 \leq x \leq t$. Jika titik $P(x_0, 0)$ sehingga $A(x_0) : A(1) = 1 : 8$, maka perbandingan luas trapesium $ABPQ : DCPQ = \dots$

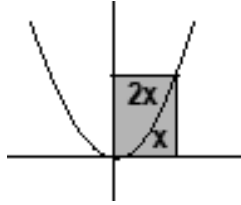


- A. 2:1
B. 3:1
C. 6:1
D. 8:1
E. 9:1

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

Fungsi kuadrat membagi persegi panjang menjadi dua daerah dengan perbandingan 1:2.



$$A(x_0) : A(1) = 1 : 8$$

$$\frac{A(x_0)}{A(1)} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\frac{1}{3} x_0 b x_0^2}{\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot b} = \frac{1}{8}$$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{L_{ABPQ}}{L_{DCPQ}} = \frac{PB}{PC} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{1}$$

-----**Jawaban: B**





- BAB 12 - Matriks dan Transformasi

Rangkuman Materi

A. Operasi Aljabar pada Matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan yang dinyatakan dalam baris dan kolom.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks atau lebih dapat dijumlahkan atau dikurangi jika berordo sama. Cara operasinya dengan menjumlahkan atau mengurangi elemen yang seletak.

2. Perkalian Matriks

a) Perkalian skalar

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak & bk \\ ck & dk \end{pmatrix}$$

b) Perkalian dua matriks

Matriks A dapat dikalikan dengan matriks B dengan syarat kolom A = baris B. Jika sudah memenuhi syarat maka elemen baris A dikali dengan elemen kolom B, seperti berikut.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

B. Transpose, Determinan, dan Invers Matriks

1. Transpose Matriks

Transpose dari matriks A adalah A^t atau A^T . Matriks A^T adalah matriks baru yang diperoleh dengan mengubah baris pada matriks awal menjadi kolom dan kolom pada matriks awal menjadi baris.

Misal:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

2. Determinan Matriks

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan matriks A $\rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Determinan dapat digunakan dalam *aturan Cramer*. Misal diberikan sistem persamaan

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ maka } x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

3. Invers Matriks

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka invers matriks A $\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Matriks A dikatakan singular jika $|A|=0$, artinya matriks A tidak mempunyai invers. Sedangkan matriks A dikatakan nonsingular jika $|A| \neq 0$, artinya matriks A mempunyai invers.

Sifat-sifat invers matriks:

- a) $(A^{-1})^{-1} = A$
- b) $AA^{-1} = A^{-1}A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- c) $I.A = A.I = A$
- d) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

C. Transformasi oleh Matriks

Jika titik $A(x,y)$ ditransformasikan oleh matriks M sehingga memiliki bayangan $A'(x',y')$, maka berlaku

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

di mana M^{-1} merupakan invers dari matriks M .

D. Translasi (Pergeseran)

Translasi (pergeseran) adalah transformasi yang menggeser setiap titik dengan jarak dan arah tertentu. Jika titik $A(x,y)$ ditranslasikan oleh $M = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, maka bayangannya adalah titik $A'(x' = x+a, y' = y+b)$.

E. Refleksi (Pencerminan)

Refleksi (pencerminan) adalah transformasi yang merefleksikan setiap titik menggunakan sifat bayangan cermin. Matriks pencerminan dapat dituliskan:

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

dengan α merupakan sudut antara cermin dan sumbu X positif. Berikut ini tabel matriks dari beberapa pencerminan dengan titik asalnya adalah $A(x,y)$.

Cermin	Matriks M	Bayangan $A'(x', y')$	Cermin	Matriks M	Bayangan $A'(x', y')$
Sumbu x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(x, -y)$	Garis $x = h$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-h \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$	$(2h-x, y)$
Sumbu y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(-x, y)$	Garis $y = k$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$	$(x, 2k-y)$
Garis $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	(y, x)	Pusat $O(0,0)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(-x, -y)$
Garis $y = -x$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$(-y, -x)$	Titik (h,k)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$	$(2h-x, 2k-y)$

F. Rotasi (Perputaran)

Rotasi (perputaran) adalah transformasi yang memutar setiap titik dengan pusat dan arah tertentu. Matriks rotasi dapat dituliskan:

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

dengan θ merupakan sudut perputaran. Jika perputaran searah jarum jam maka sudut θ bernilai negatif. Jika perputaran berlawanan arah jarum jam maka sudut θ bernilai positif.

1. Jika titik $A(x,y)$ dirotasikan sebesar θ berlawanan arah jarum jam dengan pusat $O(0,0)$, maka bayangannya adalah $A'(x', y')$ atau dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Jika titik $A(x,y)$ dirotasikan sebesar θ berlawanan arah jarum jam dengan pusat $P(a,b)$, maka bayangannya adalah $A'(x', y')$ atau dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

G. Dilatasi (Perubahan Skala)

Dilatasi (perubahan skala) adalah transformasi yang memperbesar atau memperkecil suatu objek, tetapi bentuknya tetap. Dilatasi ditentukan oleh pusat dilatasi P dan faktor skala k .

1. Jika titik $A(x,y)$ didilatasikan dengan pusat $O(0,0)$ dan faktor skala k , maka bayangannya adalah $A'(x', y')$ atau dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Jika titik $A(x,y)$ didilatasikan dengan pusat $P(a,b)$ dan faktor skala k , maka bayangannya adalah $A'(x', y')$ atau dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Soal dan Pembahasan

1. Jika $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$,

E. $\begin{pmatrix} 4 & -19 \\ 8 & -26 \end{pmatrix}$

maka $A \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \dots$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

- A. $\begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 2 & -16 \\ 4 & -18 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Sehingga

$$A \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & -19 \\ 8 & -26 \end{pmatrix}$$

-----**Jawaban: E**

2. Jika A adalah matriks berukuran 2×2 dan $(x \ 1)A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = x^2 - 5x + 8$, maka matriks A yang tepat adalah

- A. $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$
 E. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- $(x \ 1)A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = x^2 - 5x + 8$
 $(x \ 1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = x^2 - 5x + 8$
 $(x \ 1) \begin{pmatrix} ax+b \\ cx+d \end{pmatrix} = x^2 - 5x + 8$
 $ax^2 + bx + cx + d = x^2 - 5x + 8$
 $ax^2 + (b+c)x + d = x^2 - 5x + 8$
- Ruas kiri dan kanan dilihat dari masing-masing
 - Koefisien $x^2 \rightarrow a = 1$
 - Koefisien $x \rightarrow b+c = -5$
 - Konstanta $d = 8$

Jadi, matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 8 \end{pmatrix}$, dalam pilihan ganda hanya ada 2 kemungkinan jawaban yaitu (d) dan (e). Namun, yang memenuhi $b + c = -5$ adalah pilihan ganda (d).

-----**Jawaban: D**

3. Jika $\begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dengan $b^2 \neq 2a^2$, maka $x + y = \dots$

- A. -2
 B. -1
 C. 0
 D. 1
 E. 2

(TKDU SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

Misal: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$|A| = a \cdot 2a - b \cdot b = 2a^2 - b^2$$

$x+y$ dapat dicari dengan determinasi, yaitu

$$x+y = \frac{\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{ab-ab}{2a^2-b^2} = 0$$

-----**Jawaban: C**

4. Jika $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\det(A) = 2$, maka $\det(BA^{-1})$ adalah

- A. 8
 B. 6
 C. 4
 D. 2
 E. 1

(MATDAS SNMPTN 2012)

Pembahasan CERDAS:

Jika $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, maka

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow |A||B| = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot |B| = 4$$

$$\Leftrightarrow |B| = 2$$

$$\det(BA^{-1}) = |BA^{-1}| = |B| \cdot \frac{1}{|A|} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

-----**Jawaban: E**

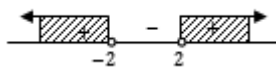
5. Jika diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2a & -4 \\ -4 & 2a \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2b & b \\ -4 & b \end{pmatrix}$ mempunyai invers, maka semua bilangan real a yang memenuhi $\det(BAB^{-1}) > 0$ adalah

- A. $a < -4$ atau $a > 4$
- B. $a < -2$ atau $a > 2$
- C. $-2 < a < 2$
- D. $0 < a < 2$
- E. $a > 2$

(TKDU SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} |BAB^{-1}| &> 0 \\ |A| &> 0 \\ |A| &> 0 \\ 4a^2 - 16 &> 0 \\ 4(a-2)(a+2) &> 0 \end{aligned}$$



Jadi, $a < -2$ atau $a > 2$

-----Jawaban: B

6. Jika grafik fungsi $y = x^2 - (9+a)x + 9a$ diperoleh dari grafik $y = x^2 - 2x - 3$ melalui pencerminan terhadap garis $x = 4$, maka $a = \dots$
- A. 7
 - B. 5
 - C. 3
 - D. -5
 - E. -7

(TKDU SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{M_{x=4}} y = x^2 - (9+a)x + 9a \\ x' &= 2(4) - x \rightarrow x = 8 - x' \\ y' &= y \\ \text{Substitusikan } x &= 8 - x' \text{ dan } y = y' \text{ ke garis} \\ y &= x^2 - 2x - 3 \\ y' &= (8 - x')^2 - 2(8 - x') - 3 \\ y' &= x'^2 - 16x' + 64 - 16 + 2x' - 3 \\ y' &= x'^2 - 14x' + 45 \\ \text{Diperoleh bayangan } y &= x^2 - 14x + 45 \\ \text{identik dengan } y &= x^2 - (9+a)x + 9a, \\ \text{sehingga } 9a &= 45 \rightarrow a = 5 \end{aligned}$$

-----Jawaban: B

7. Pencerminan garis $y = -x + 2$ terhadap garis $y = 3$ menghasilkan garis
- A. $y = x + 4$

- B. $y = -x + 4$
- C. $y = x + 2$
- D. $y = x - 2$
- E. $y = -x - 4$

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} g &\equiv y = -x + 2 \xrightarrow{M_{y=3}} g' \\ x' &= x \\ y' &= 2(3) - y \rightarrow y = 6 - y' \\ \text{Substitusikan } x &= x' \text{ dan } y = 6 - y' \text{ ke garis} \\ y &= -x + 2 \\ 6 - y' &= -x' + 2 \\ y' &= x' + 4 \\ \text{Jadi, bayangan yang terbentuk adalah} \\ y &= x + 4. \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

8. Titik $(2a, -a)$ diputar 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat perputaran titik $(1, 1)$. Jika hasil rotasi adalah $(2+a, -2)$, maka $a = \dots$
- A. 2
 - B. 1
 - C. 0
 - D. -1
 - E. -2

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \text{Rotasi } 90^\circ \text{ berlawanan arah jarum jam} \\ \text{mempunyai matriks } M &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dengan pusat perputaran } (1, 1), \text{ maka} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2+a \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-1 \\ -a-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2+a \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2+a \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+2 \\ 2a \end{pmatrix} \\ \text{Jadi, } -2 &= 2a \rightarrow a = -1 \end{aligned}$$

-----Jawaban: D

9. Pencerminan titik $P(s, t)$ terhadap garis $x = a$ dan dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $y = b$ meng-

hasilkan titik Q. Jika garis PQ melalui titik (0,0), maka $a : b = \dots$

- A. $s : t$
- B. $t : s$
- C. $2t : s$
- D. $s : 2t$
- E. $2s : t$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$P(s,t) \xrightarrow{M_{x=a}} P' \xrightarrow{M_{y=b}} Q$$

Ingat!

$$(x,y) \xrightarrow{x=h} (2h-x,y)$$

$$(x,y) \xrightarrow{y=k} (x,2k-y)$$

Sehingga

$$P(s,t) \xrightarrow{M_{x=a}} P'(2a-s,t) \xrightarrow{M_{y=b}} Q(2a-s,2b-t)$$

Persamaan garis melalui titik PQ

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-y_1}{y-t} = \frac{x-x_1}{x-s}$$

$$\frac{(2b-t)-t}{y-t} = \frac{(2a-s)-s}{x-s}$$

$$\frac{2(b-t)-2(a-s)}{-t} = \frac{2(a-s)-s}{-s}$$

$$\frac{2(b-t)-2(a-s)}{-t} = \frac{2(a-s)-s}{-s}$$

$$t(a-s) = s(b-t)$$

$$at-st = bs-st$$

$$at = bs$$

$$a : b = s : t$$

-----**Jawaban: A**

- 10.** Transformasi T merupakan komposisi pencerminan terhadap garis $y = 5x$ dilanjutkan pencerminan terhadap garis $y = -\frac{x}{5}$. Matriks penyajian T adalah

- A. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- E. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

Dikarenakan pencerminan terhadap garis $y = 5x$ tegak lurus dengan pencerminan terhadap garis $y = -\frac{1}{5}x$, maka terbentuk sudut $\alpha = 90^\circ$ sedemikian sehingga ini sama artinya dengan rotasi sebesar $2\alpha = 180^\circ$. Jadi, matriks transformasinya adalah

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

-----**Jawaban: B**



- BAB 13 - Vektor

Rangkuman Materi

A. Operasi Aljabar pada Vektor

Vektor adalah besaran yang mempunyai panjang dan arah. Notasi dan panjang vektor diberikan sebagai berikut:

1. Vektor \vec{a} pada $R^2 \rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$

Panjang vektor \vec{a} adalah $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

2. Vektor \vec{a} pada $R^3 \rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

Panjang vektor \vec{a} adalah $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Jika titik $A(a_1, a_2, a_3)$ dan titik $B(b_1, b_2, b_3)$, maka vektor yang menghubungkan kedua titik tersebut adalah vektor $\vec{c} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ dengan panjang vektor \vec{c} adalah

$$|\vec{c}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Jika vektor $\vec{a} = (a_1, a_2)$, maka vektor satuan dari \vec{a} adalah

$$\hat{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

1. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

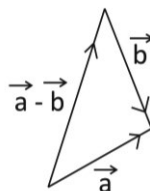
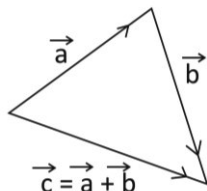
Jika vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, maka

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$$

Secara geometri penjumlahan vektor $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ dapat dilihat sebagai berikut,

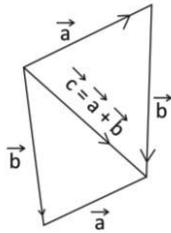
a) Aturan Segitiga

Titik ujung vektor \vec{a} menjadi titik pangkal vektor \vec{b} .



b) Aturan Jajargenjang

Titik pangkal vektor \vec{a} dan \vec{b} harus berimpit.



2. Perkalian pada Dua Vektor

a) Perkalian Skalar

Jika vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, maka $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$ dengan k adalah skalar.

b) Perkalian Titik

Jika vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

3. Sifat Operasi Aljabar pada Vektor

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

c) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

e) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

f) $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$

g) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

h) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$

i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

j) $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

k) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

l) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

B. Hubungan Dua Vektor

1. Dua Vektor Saling Tegak Lurus

Vektor \vec{a} tegak lurus dengan vektor \vec{b} jika $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

2. Dua Vektor Sejajar

Vektor \vec{a} sejajar dengan vektor \vec{b} jika $\vec{a} = \beta\vec{b}$ di mana $\beta \neq 0$, sedangkan untuk $\beta > 0$ artinya dua vektor saling searah, untuk $\beta < 0$ artinya dua vektor saling berlawanan arah.

3. Sudut antara Dua Vektor

Jika vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan vektor $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, maka sudut yang terbentuk antara vektor \vec{a} dan vektor \vec{b} adalah:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

C. Proyeksi

1. Panjang Vektor Proyeksi \vec{a} pada \vec{b}

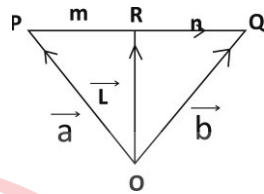
$$|\vec{c}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

2. Vektor Proyeksi \vec{a} pada vektor \vec{b}

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

3. Teorema Faktor Pembagian Ruas Garis

Jika O adalah titik asal, \vec{a} dan \vec{b} masing-masing adalah vektor posisi titik $P(x_P, y_P, z_P)$ dan $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, titik R terletak pada garis PQ dengan $PR : RQ = m : n$.



a) Vektor posisi titik R

$$\vec{r} = \frac{m\vec{a} + n\vec{b}}{m+n}$$

b) Koordinat titik R

$$\vec{R}(x_R, y_R, z_R)$$

dengan

$$x_R = \frac{m x_P + n x_Q}{m+n}$$

$$y_R = \frac{m y_P + n y_Q}{m+n}$$

$$z_R = \frac{m z_P + n z_Q}{m+n}$$

Jika $\triangle ABC$ dengan koordinat titik $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, dan $C(x_C, y_C, z_C)$, maka koordinat titik berat segitiga adalah: $S(x_S, y_S, z_S)$

dengan

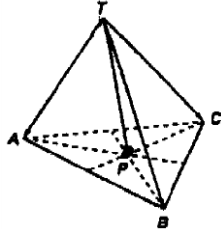
$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$z_S = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

Soal dan Pembahasan

1. Diberikan limas T.ABC. Misalkan $\vec{u} = \vec{TA}$, $\vec{v} = \vec{TB}$, $\vec{w} = \vec{TC}$. Jika P adalah titik berat $\triangle ABC$, maka $\vec{TP} = \dots$



- A. $\frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$
 B. $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$
 C. $\frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$
 D. $\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$
 E. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

- $\vec{AB} = \vec{v} - \vec{u}$
- $\vec{AC} = \vec{w} - \vec{u}$
- $\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$
- $\vec{OC} = \vec{AC} - \vec{AO}$

$$= \vec{w} - \vec{u} - \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$$

$$= \vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}$$
- $\vec{PC} = \frac{2}{3}\vec{OC}$

$$= \frac{2}{3}\left(\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\vec{w} - \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{u}$$
- $\vec{TP} = \vec{TC} - \vec{PC}$

$$= \vec{w} - \left(\frac{2}{3}\vec{w} - \frac{1}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{u}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

-----Jawaban: A

2. Diketahui $|\vec{u}| = 1$ dan $|\vec{v}| = 2$. Jika \vec{u} dan \vec{v} membentuk sudut 30° , maka $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} = \dots$

- A. $\sqrt{3} + 4$
 B. $\sqrt{3} + 2$
 C. $2\sqrt{3} + 4$
 D. 3
 E. 5

(MAT IPA SNMPTN 2012)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned}
 (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\
 &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos 30^\circ + |\vec{v}|^2 \\
 &= 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} + 2^2 \\
 &= \sqrt{3} + 4
 \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

3. Vektor-vektor \vec{u} , \vec{v} , dan \vec{w} tak nol dan $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. Jika $|\vec{v} - \vec{w}| = |\vec{u} - \vec{w}|$, maka...

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{w}|$
 B. $\vec{w} = \frac{2\vec{u} + 3\vec{v}}{5}$
 C. $|\vec{u} - \vec{w}| = |\vec{v}|$
 D. $\vec{u} - \vec{v}$ tegak lurus \vec{w}
 E. $\vec{u} + \vec{v}$ tegak lurus \vec{w}

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned}
 |\vec{v} - \vec{w}| &= |\vec{u} - \vec{w}| \\
 \sqrt{(\vec{v} - \vec{w})^2} &= \sqrt{(\vec{u} - \vec{w})^2} \\
 \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w} - 2\vec{v} \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{w} - 2\vec{u} \cdot \vec{w} \\
 |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} &= |\vec{u}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{w} \\
 \text{karena } |\vec{u}| &= |\vec{v}|, \text{ maka} \\
 \vec{v} \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} \\
 \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} &= 0 \\
 (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} &= 0 \\
 \text{Artinya, } (\vec{u} - \vec{v}) &\text{ tegak lurus } \vec{w}.
 \end{aligned}$$

-----Jawaban: D

4. Vektor-vektor \vec{u} , \vec{v} , dan \vec{x} tidak nol. Vektor $\vec{u} + \vec{v}$ tegak lurus $\vec{u} - \vec{x}$, jika

- A. $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$
 B. $|\vec{v}| = |\vec{x}|$
 C. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} = -\vec{x}$

D. $u \cdot u = v \cdot v, v = x$

E. $u \cdot v = v \cdot v$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

$u+v$ tegak lurus $u-x$, artinya

$$(u+v) \cdot (u-x) = 0$$

$$u \cdot u - u \cdot x + u \cdot v - v \cdot x = 0$$

Jika $v = x$, maka

$$u \cdot u - u \cdot v + u \cdot v - v \cdot v = 0$$

$$u \cdot u - v \cdot v = 0$$

$$u \cdot u = v \cdot v$$

-----**Jawaban: D**

5. Diketahui \vec{a} , \vec{b} , dan \vec{c} vektor dalam dimensi tiga. Jika $\vec{a} \perp \vec{b}$ dan $\vec{a} \perp (\vec{b} + 2\vec{c})$, maka $\vec{a} \cdot (2\vec{b} - \vec{c})$ adalah

A. 4

B. 2

C. 1

D. 0

E. -1

(MAT IPA SNMPTN 2010)

Pembahasan CERDAS:

• $\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

• $\vec{a} \perp (\vec{b} + 2\vec{c}) \rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + 2\vec{c}) = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

• $\vec{a} \cdot (2\vec{b} - \vec{c}) = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 2(0) - (0) = 0$

-----**Jawaban: D**

6. Diketahui vektor $\vec{p} = a\vec{i} + b\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} + 2\vec{j} + c\vec{k}$, dan $\vec{r} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + c\vec{k}$, dengan $a, b \neq 0$. Jika $\vec{p} \perp \vec{q}$ dan $\vec{p} \perp \vec{r}$, maka $\frac{a^2 + 4b^2}{ab} = \dots$

A. -8

B. -4

C. -2

D. 2

E. 4

(MAT IPA UM UGM 2015)

Pembahasan CERDAS:

• $\vec{p} \perp \vec{q} \rightarrow \vec{p} \cdot \vec{q} = 0$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$a + 2b + 2c = 0$$

• $\vec{p} \perp \vec{r}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$3a + 6b + 2c = 0$$

Karena $\vec{p} \perp \vec{q}$ dan $\vec{p} \perp \vec{r}$, maka

$$(3a + 6b + 2c) - (a + 2b + 2c) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a + 4b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2b$$

Substitusikan $a = -2b$ ke $\frac{a^2 + 4b^2}{ab}$, sehingga

$$\Leftrightarrow \frac{(-2b)^2 + 4b^2}{-2b(b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8b^2}{-2b^2}$$

$$\Leftrightarrow -4$$

-----**Jawaban: B**

7. Diketahui vektor $\vec{u} = -p^2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ dan $\vec{v} = p\vec{i} + p\vec{j} - 5\vec{k}$ dengan $-2 < p < 2$. Nilai maksimum $\vec{u} \cdot \vec{v}$ adalah

A. 8

B. 7

C. 5

D. 4

E. 3

(MAT IPA SNMPTN 2011)

Pembahasan CERDAS:

• Misalkan $A = \vec{u} \cdot \vec{v}$

$$A = \begin{pmatrix} -p^2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ p \\ -5 \end{pmatrix} = -p^3 + 3p + 5$$

• Nilai A maksimum jika $A' = 0$,

$$-3p + 3 = 0$$

$$p = 1$$

• Dengan demikian, vektor $\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

dan $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = -1 + 3 + 5 = 7$$

-----**Jawaban: B**

8. Diketahui $A(4,0,0)$, $B(0,-4,0)$, dan $C(0,0,8)$. Panjang vektor proyeksi \overrightarrow{AC} ke vektor \overrightarrow{AB} adalah

- A. $2\sqrt{2}$
 B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
 C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 D. $\sqrt{2}$
 E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

- $\overrightarrow{AC} = C - A$
 $= (0,0,8) - (4,0,0)$
 $= (-4,0,8)$
- $\overrightarrow{AB} = B - A$
 $= (0,-4,0) - (4,0,0)$
 $= (-4,-4,0)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 0} = 4\sqrt{2}$$

- Panjang vektor proyeksi \overrightarrow{AC} ke vektor \overrightarrow{AB} ,

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} &= \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{16 + 0 + 0}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

9. Misalkan $A(t^2+1,t)$ dan $B(1,2)$ sehingga panjang vektor proyeksi \overrightarrow{OA} terhadap \overrightarrow{OB} lebih dari $\frac{4}{\sqrt{5}}$, maka nilai t yang mungkin adalah

- A. $-3 < t < 1$
 B. $t < -1$ atau $t > 3$
 C. $t < -3$ atau $t > 1$
 D. $-1 < t < 3$
 E. $1 < t < 3$

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

Misalkan panjang vektor proyeksi \overrightarrow{OA} terhadap \overrightarrow{OB} adalah $|\overline{v}|$

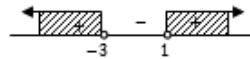
$$|\overline{v}| = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} = \frac{\begin{pmatrix} t^2+1 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{t^2+1+2t}{\sqrt{5}}$$

Panjang vektor proyeksi \overrightarrow{OA} terhadap \overrightarrow{OB} lebih dari $\frac{4}{\sqrt{5}}$

$$\frac{t^2+2t+1}{\sqrt{5}} > \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{t^2+2t-3}{\sqrt{5}} > 0$$

$$\frac{(t+3)(t-1)}{\sqrt{5}} > 0$$



Jadi, $t < -3$ atau $t > 1$.

-----Jawaban: C

10. Diketahui vektor $\vec{u} = (a,1,-a)$ dan $\vec{v} = (1,a,a)$. Jika \vec{u}_1 vektor proyeksi \vec{u} pada \vec{v} , \vec{v}_1 vektor proyeksi \vec{v} pada \vec{u} , dan θ sudut antara \vec{u} dan \vec{v} dengan $\cos \theta = \frac{1}{3}$, maka luas jajaran genjang yang dibentuk oleh \vec{u}_1 dan \vec{v}_1 adalah

- A. $\frac{2}{9}\sqrt{2}$
 B. $\frac{2}{9}\sqrt{6}$
 C. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
 D. $\frac{2}{3}\sqrt{6}$
 E. 2

(MAT IPA UM UGM 2013)

Pembahasan CERDAS:

Diberikan vektor $\vec{u} = (a,1,-a)$ dan $\vec{v} = (1,a,a)$

- \vec{u}_1 vektor proyeksi \vec{u} pada \vec{v} ,

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{1^2+a^2+a^2}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{a+a-a^2}{(2a^2+1)} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_1 = \frac{2a-a^2}{2a^2+1} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

- \bar{v}_1 vektor proyeksi \bar{v} pada \bar{u} ,

$$\bar{v}_1 = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{|\bar{u}|^2} \bar{u}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{pmatrix}}{\left(\sqrt{a^2+1^2+(-a)^2}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{a+a-a^2}{2a^2+1} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_1 = \frac{2a-a^2}{2a^2+1} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -a \end{pmatrix}$$

- θ sudut antara \bar{u} dan \bar{v} dengan

$$\cos \theta = \frac{1}{3},$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| |\bar{v}| \cos \theta$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{a^2+1+(-a)^2} \cdot \sqrt{1^2+a^2+a^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$a+a-a^2 = \sqrt{2a^2+1} \cdot \sqrt{2a^2+1} \cdot \frac{1}{3}$$

$$2a-a^2 = (2a^2+1) \frac{1}{3}$$

$$6a-3a^2 = 2a^2+1$$

$$5a^2-6a+1 = 0$$

$$(5a-1)(a-1) = 0$$

$$a = \frac{1}{5} \text{ atau } a = 1$$

Untuk $a = 1$, maka:

$$\bar{u}_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1^2}{2 \cdot 1^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

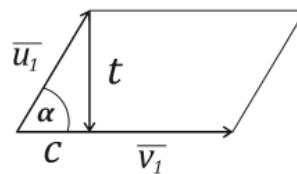
$$|\bar{u}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{3},$$

dan

$$\bar{v}_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1^2}{2 \cdot 1^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$|\bar{v}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

- Luas jajaran genjang yang dibentuk oleh \bar{u}_1 dan \bar{v}_1 adalah



Misalkan sudut α merupakan sudut yang terbentuk dari vektor \bar{u}_1 dengan \bar{v}_1 , maka

$$\cos \alpha = \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{v}_1}{|\bar{u}_1| |\bar{v}_1|}$$

$$\frac{c}{|\bar{u}_1|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} \sqrt{3}}$$

$$\frac{c}{\frac{1}{3} \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$c = \frac{1}{9} \sqrt{3}$$

Dengan demikian,

$$t = \sqrt{|\bar{u}_1|^2 - c^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{9} - \frac{3}{81}} = \sqrt{\frac{24}{81}} = \sqrt{\frac{8}{27}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

Jadi, luas jajaran genjang

$$= (\text{panjang})(\text{tinggi})$$

$$= |\bar{v}_1| \cdot t$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{9} \sqrt{2}$$

-----Jawaban: A



- BAB 14 - Barisan dan Deret

Rangkuman Materi

A. Barisan dan Deret

1. Barisan
Barisan adalah himpunan bilangan-bilangan yang diurutkan menurut aturan tertentu. Barisan suku ke-1 sampai suku ke- n dapat dituliskan $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$.
2. Deret
Deret adalah penjumlahan dari suatu barisan yang berurutan. Secara umum dapat dituliskan

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{n-1} + U_n = \sum_{i=1}^n U_i$$
3. Hubungan antara barisan dan deret

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

B. Barisan dan Deret Aritmetika

1. Barisan Aritmetika
adalah suatu barisan bilangan yang selisih/beda antara dua suku yang berurutan selalu sama. $b = U_n - U_{n-1}$
Rumus suku ke- n dari barisan aritmetika adalah $U_n = a + (n-1)b$
dengan U_n = suku ke- n
 a = suku pertama
 b = beda
2. Deret Aritmetika
Jumlah n suku pertama dari deret aritmetika dirumuskan:

$$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n) = \frac{n}{2} (2a + (n-1)b)$$
 dengan S_n = jumlah n suku pertama
 U_n = suku ke- n
 a = suku pertama
 b = beda
3. Rata-Rata Aritmetika
Jika $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, maka $\bar{x}n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ sehingga $n\bar{x} = U_{x_1} + U_{x_2} + \dots + U_{x_n}$

4. Sisipan

Jika antara dua suku disisipkan m bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika baru, maka:

	BA Lama	BA Baru
Suku pertama	a	a
Suku terakhir	k	k
Banyaknya suku	n	$n' = n + (n-1)m$
Beda	b	$b' = \frac{b}{m+1}$
Jumlah suku	$\frac{S_n}{S_{n'}} = \frac{n}{n'}$	

5. Memisalkan bilangan yang membentuk aritmetika

a) Jika banyak bilangan ganjil (misalkan beda = q)

- 3 bilangan $\rightarrow (p-q), p, (p+q)$
- 5 bilangan $\rightarrow (p-2q), (p-q), p, (p+q), (p+2q)$
- dan seterusnya

b) Jika banyak bilangan genap (misalkan beda = $2q$)

- 4 bilangan $\rightarrow (p-3q), (p-q), (p+q), (p+3q)$
- 6 bilangan $\rightarrow (p-5q), (p-3q), (p-q), (p+q), (p+3q), (p+5q)$
- dan seterusnya

c) Jika bilangan tidak diketahui

Misalkan $a, (a+b), (a+2b), (a+3b), \dots$

C. Barisan dan Deret Geometri

1. Barisan Geometri

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang perbandingan/rasio dua suku yang berurutan selalu sama, yaitu $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$. Rumus suku ke- n dari barisan geometri adalah

$$U_n = ar^{n-1}$$

dengan: U_n = suku ke- n

a = suku pertama

r = rasio

2. Deret Geometri

Jumlah n suku pertama dari deret geometri dirumuskan:

$$S_n = \frac{a}{1-r} (1-r^n) = \frac{a}{r-1} (r^n-1)$$

dengan: S_n = jumlah n suku pertama

a = suku pertama

r = rasio

3. Rata-Rata Geometri

Jika $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, maka $\bar{x}n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ sehingga $(U_{\bar{x}})^n = U_{x_1} \cdot U_{x_2} \cdot \dots \cdot U_{x_n}$

4. Sisipan

Jika antara dua suku disisipkan m bilangan sehingga membentuk barisan geometri baru, maka:

	BG Lama	BG Baru
Suku pertama	a	a
Suku terakhir	k	k
Banyaknya suku	n	$n' = n + (n-1)m$
Beda	r	$r' = \sqrt[m+1]{r}$
Jumlah suku	$\frac{S_n}{S_{n'}} = \frac{n}{n'}$	

5. Memisalkan bilangan yang membentuk barisan geometri

a) Jika banyak bilangan ganjil (misalkan rasio = q)

- 3 bilangan $\rightarrow \frac{p}{q}, p, pq$
- 5 bilangan $\rightarrow \frac{p}{q^2}, \frac{p}{q}, p, pq, pq^2$
- Dan seterusnya

b) Jika banyak bilangan genap (misalkan rasio = q^2)

- 4 bilangan $\rightarrow \frac{p}{q^3}, \frac{p}{q}, pq, pq^3$
- 6 bilangan $\rightarrow \frac{p}{q^5}, \frac{p}{q^3}, \frac{p}{q}, pq, pq^3, pq^5$
- Dan seterusnya

c) Jika bilangan tidak diketahui

Misalkan a, ar, ar^2, ar^3, \dots

D. Deret Tak Hingga (Konvergen)

1. Barisan geometri tak hingga akan mempunyai nilai yang konvergen (nilainya memusat) jika:

$$-1 < r < 1 \text{ dengan } S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

2. Kasus S_{ganjil} dan S_{genap}

a) $S_{\infty} = S_{\text{genap}} + S_{\text{ganjil}}$ dan $r = \frac{S_{\text{genap}}}{S_{\text{ganjil}}}$

b) $S_{\text{genap}} = U_2 + U_4 + U_6 + \dots = \frac{ar}{1-r^2}$

c) $S_{\text{ganjil}} = U_1 + U_3 + U_5 + \dots = \frac{a}{1-r^2}$

3. Kasus Bola Memantul

Jika bola dijatuhkan dari ketinggian h_0 kemudian memantul dengan tinggi pantulan $r = \frac{m}{n}$ dari ketinggian sebelumnya

a) Jumlah seluruh lintasan yang dilalui bola dari awal hingga berhenti

$$L = 2S_{\infty} - h_0 \text{ atau } L = h_0 \cdot \frac{n+m}{n-m}$$

b) Jumlah seluruh lintasan yang dilalui bola dari pantulan ke- n hingga berhenti

$$L_n = \frac{2h_0 r^n}{1-r}$$

Soal dan Pembahasan

1. Misalkan U_k dan S_k berturut-turut menyatakan suku ke- k dan jumlah k suku pertama suatu barisan aritmatika. Jika $U_2 - U_4 + U_6 - U_8 + U_{10} - U_{12} + U_{14} - U_{16} + U_{18} = 20$, maka $S_{19} = \dots$
- 630
 - 380
 - 210
 - 105
 - 21

(TKDU SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} (U_2 + U_6 + U_{10} + U_{14} + U_{18}) - \\ (U_4 + U_8 + U_{12} + U_{16}) &= 20 \\ 5U_{10} - 4U_{10} &= 20 \\ U_{10} &= 20 \\ S_{19} &= \frac{19}{2}(U_1 + U_{19}) \\ &= \frac{19}{2}(2U_{10}) \\ &= 19(20) \\ &= 380 \end{aligned}$$

-----Jawaban: B

2. Jika suku pertama, ke-3, dan ke-6 suatu barisan aritmetika masing-masing adalah $b-a$, a , 36 serta jumlah 9 suku pertama barisan tersebut adalah 180, maka beda barisan tersebut adalah
- 18
 - 16
 - 12
 - 9
 - 6

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

- Misalkan $U_1 = p$ dan beda $= q$
 $U_1 = p = b-a$
 $U_3 = p+2q = a$
 $\Leftrightarrow q = \frac{a-p}{2}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow q &= \frac{a-(b-a)}{2} \\ \Leftrightarrow q &= \frac{2a-b}{2} \\ U_6 &= p+5q = 36 \\ \Leftrightarrow b-a+5\left(\frac{2a-b}{2}\right) &= 36 \\ \Leftrightarrow 4a-\frac{3b}{2} &= 36 \\ \Leftrightarrow 8a-3b &= 72 \dots (1) \end{aligned}$$

- $S_9 = 180$
 $180 = \frac{9}{2}(2p+8q)$
 $20 = p+4q$
 $20 = b-a+4\left(\frac{2a-b}{2}\right)$
 $20 = 3a-b \dots (2)$
- Dari (1) dan (2)
 $8a - 3b = 72 \quad | \times 1 | \quad 8a - 3b = 72$
 $3a - b = 20 \quad | \times 3 | \quad 9a - 3b = 60$
 $\hline a = -12$
 $a = -12 \rightarrow b = -56$

- Beda
 $q = \frac{2a-b}{2} = \frac{2(-12)+56}{2} = \frac{32}{2} = 16$

-----Jawaban: B

3. Jika k adalah bilangan real positif, serta $k+3$, $k+1$, dan k adalah berturut-turut suku ketiga, keempat, dan kelima suatu barisan geometri, maka jumlah dua suku pertama barisan tersebut adalah
- 12
 - 16
 - 20
 - 24
 - 28

(TKDU SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} k+3, k+1, \text{ dan } k &\rightarrow \text{barisan geometri} \\ \Leftrightarrow (k+1)^2 &= (k+3) \cdot k \\ \Leftrightarrow k^2+2k+1 &= k^2+3k \\ \Leftrightarrow k &= 1 \end{aligned}$$

Diperoleh:

$$U_3 = k+3 = 1+3 = 4$$

$$U_4 = k+1 = 1+1 = 2$$

$$U_5 = k = 1$$

Sehingga:

$$r = \frac{U_4}{U_3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Substitusikan $r = \frac{1}{2}$ ke $U_3 = 4$

$$\Leftrightarrow ar^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow a \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}a = 4$$

$$\Leftrightarrow a = 16$$

$$S_2 = U_1 + U_2$$

$$= a + ar$$

$$= 16 + 16 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 16 + 8$$

$$= 24$$

Jadi, jumlah suku pertama dan suku kedua adalah 24.

-----**Jawaban: D**

4. Suatu barisan geometri semua sukunya positif. Jika $\frac{U_1 + U_2}{U_3 + U_4} = \frac{1}{9}$, maka

$$\frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}{U_2 + U_4} = \dots$$

- A. $\frac{10}{9}$
B. 3
C. $\frac{10}{3}$
D. 4
E. 10

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{U_1 + U_2}{U_3 + U_4} &= \frac{1}{9} \\ \frac{a + ar}{ar^2 + ar^3} &= \frac{1}{9} \\ \frac{a(1+r)}{ar^2(1+r)} &= \frac{1}{9} \\ \frac{1}{r^2} &= \frac{1}{9} \\ r &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}{U_2 + U_4} &= \frac{a + ar + ar^2 + ar^3}{ar^2 + ar^3} \\ &= \frac{a(1+r+r^2+r^3)}{ar(r+r^2)} \\ &= \frac{1+3+9+27}{1+3+9+27} \\ &= \frac{40}{12} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

-----**Jawaban: C**

5. Jika U_1, U_2, U_3, \dots adalah barisan geometri yang memenuhi $U_3 - U_6 = x$ dan $U_2 - U_4 = y$. Maka $\frac{x}{y} = \dots$

- A. $(r^3 - r^2 - r)/(r - 1)$
B. $(r^3 - r^2 + r)/(r - 1)$
C. $(r^3 + r^2 + r)/(r + 1)$
D. $(r^3 + r^2 - r)/(r - 1)$
E. $(r^3 - r^2 + r)/(r + 1)$

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{U_3 - U_6}{U_2 - U_4} \\ &= \frac{ar^2 - ar^5}{ar^2 - ar^4} \\ &= \frac{ar - ar^3}{ar(r-r^4)} \\ &= \frac{ar(1-r^2)}{r(1-r^3)} \\ &= \frac{(1-r)(1+r)}{r(1-r)(1+r+r^2)} \\ &= \frac{(1+r)}{r^3 + r^2 + r} \\ &= \frac{1}{r + 1} \end{aligned}$$

-----**Jawaban: C**

6. Diketahui $a, a+b$, dan $4a+b$ merupakan 3 suku berurutan suatu barisan aritmetika. Jika $a, a+b, 4a+b+9$ merupakan suatu barisan geometri, maka $a+b = \dots$

- A. 2
B. 3

- C. 4
D. 5
E. 6

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

- $a, a+b, 4a+b \rightarrow BA$
 $\Leftrightarrow 2(a+b) = a+4a+b$
 $\Leftrightarrow 2a+2b = 5a+b$
 $\Leftrightarrow b = 3a \dots (1)$
- $a, a+b, 4a+b+9 \rightarrow BG$
 $\Leftrightarrow (a+b)^2 = a(4a+b+9)$
 $\Leftrightarrow (a+3a)^2 = a(4a+3a+9)$
 $\Leftrightarrow 16a^2 = 7a^2+9a$
 $\Leftrightarrow 9a^2-9a = 0$
 $\Leftrightarrow 9a(a-1) = 0$
 $\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 1$
 Untuk $a = 1 \rightarrow b = 3(1) = 3$
 Jadi, $a + b = 1+3 = 4$

-----**Jawaban: C**

7. Diketahui $a, a+b, a+5b$ merupakan 3 suku pertama suatu barisan geometri. Jika $a, a+b, x, y$, dan z merupakan 5 suku pertama barisan aritmetika dan $x + y + z = -15$, maka suku ke-10 barisan aritmetika tersebut adalah

- A. $-\frac{21}{2}$
B. -14
C. $-\frac{29}{2}$
D. -15
E. $-\frac{31}{2}$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

- $a, a+b, a+5b \rightarrow BG$
 $\Leftrightarrow (a+b)^2 = a(a+5b)$
 $\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 = a^2+5ab$
 $\Leftrightarrow b^2 = 3ab$
 $\Leftrightarrow b = 3a$
- $a, a+b, x, y$, dan $z \rightarrow 5$ suku pertama BA
 $S_5 = \frac{5}{2}(2a+4b)$
 $\Leftrightarrow a+(a+b)+(x+y+z) = 5a+10b$
 $\Leftrightarrow 2a+b+(-15) = 5a+10b$
 $\Leftrightarrow 2a+3a-15 = 5a+30a$

$$\Leftrightarrow 30a = -15$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Untuk } a = -\frac{1}{2} \rightarrow b = -\frac{3}{2}$$

- Jadi, $U_{10} = a+9b$
 $= -\frac{1}{2} - \frac{27}{2} = -\frac{28}{2} = -14$

-----**Jawaban: B**

8. Jika

$$S = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x + \frac{1}{8} \sin^3 2x + \dots$$

maka

- A. $\frac{2}{3} < S < 2$
B. $\frac{3}{2} < S < 2$
C. $\frac{2}{3} < S < \frac{3}{2}$
D. $\frac{1}{2} < S < \frac{3}{2}$
E. $\frac{1}{2} < S < \frac{2}{3}$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

- Syarat konvergen $-1 < r < 1$
 $-1 < \frac{1}{2} \sin 2x < 1$
 $-2 < \sin 2x < 2$
- $S_{\infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{2}{2 - \sin 2x}$
 Untuk $\sin 2x = -1 \rightarrow \frac{2}{2 - (-1)} = \frac{2}{3}$
 Untuk $\sin 2x = 1 \rightarrow \frac{2}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$
- Jadi, $\frac{2}{3} < S < 2$

-----**Jawaban: A**

9. Diketahui deret geometri tak hingga $U_1 + U_2 + U_3 + \dots$. Jika rasio deret tersebut adalah r dengan $-1 < r < 1$ dan $U_1 + U_3 + U_5 + \dots = \frac{2}{3} U_1 + (U_2 + U_4 + U_6 + \dots)$, maka nilai $r^2 = \dots$

- A. $\frac{1}{9}$
B. $\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{1}{2}$
E. 1

(TKDU SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:

$$U_1 + U_3 + U_5 + \dots = \frac{2}{3} U_1 + (U_2 + U_4 + U_6 + \dots)$$

$$\Leftrightarrow S_{\text{ganjil}} = \frac{2}{3} U_1 + (S_{\text{genap}})$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1-r^2} = \frac{2}{3} a + \left(\frac{ar}{1-r^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1-r^2} - \frac{ar}{1-r^2} = \frac{2}{3} a$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(1-r)}{(1-r)(1+r)} = \frac{2}{3} a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-r}{1+r} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2+2r = 3$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\text{Jadi, } r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

-----**Jawaban: B**

10. Diketahui deret geometri tak hingga mempunyai jumlah sama dengan nilai maksimum fungsi $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x + c$ untuk $-1 \leq x \leq 2$. Selisih suku kedua dan suku pertama deret geometri tersebut adalah $-2f'(0)$. Jika rasio deret geometri tersebut $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, maka nilai c adalah

- A. $\frac{10}{3}$
 B. $\frac{8}{3}$
 C. $\frac{7}{3}$
 D. $\frac{5}{3}$
 E. $\frac{4}{3}$

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:

$$\bullet f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x + c$$

$$f'(x) = -x^2 + 1$$

$$\text{Syarat maksimum } f'(x) = 0$$

$$-x^2 + 1 = 0$$

$$(1-x)(1+x) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = -1$$

$$\text{Nilai maksimum untuk } -1 \leq x \leq 2$$

$$f(-1) = -\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) + c = -\frac{2}{3} + c$$

$$f(1) = -\frac{1}{3}(1) + 1 + c = \frac{2}{3} + c$$

$$f(2) = -\frac{1}{3}(2) + 2 + c = \frac{4}{3} + c \dots (\text{max})$$

$$\bullet S_{\infty} = \text{nilai maksimum } f(x) = \frac{4}{3} + c$$

$$\frac{a}{1-r} = \frac{4}{3} + c$$

$$\frac{a}{1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{4}{3} + c$$

$$\frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4}{3} + c$$

$$a\sqrt{2} = \frac{4}{3} + c$$

$$a = \frac{4+3c}{3\sqrt{2}} \dots (i)$$

$$\bullet U_2 - U_1 = -2f'(0)$$

$$ar - a = -2(-0^2 + 1)$$

$$a(r-1) = -2$$

$$\left(\frac{4+3c}{3\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = -2$$

$$\left(\frac{4+3c}{3\sqrt{2}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -2$$

$$-(4+3c) = -12$$

$$4+3c = 12$$

$$3c = 8$$

$$c = \frac{8}{3}$$

$$\text{Jadi, nilai } c = \frac{8}{3}$$

-----**Jawaban: B**



- BAB 15 - Dimensi Tiga

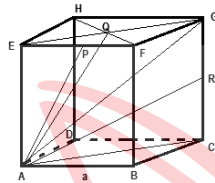
Rangkuman Materi

A. Jarak

Jarak antara dua unsur ruang adalah panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan kedua unsur ruang tersebut.

1. Jarak titik dengan titik

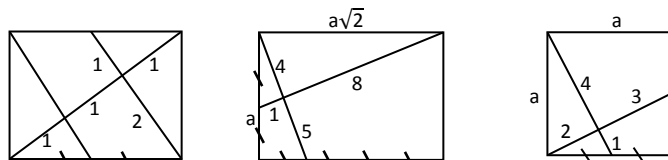
Yaitu panjang garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut.



Garis	Keterangan	Jarak
AC	Diagonal sisi	$a\sqrt{2}$
AG	Diagonal ruang	$a\sqrt{3}$
AP	Jarak titik A ke tengah garis sisi terdekat	$\frac{a}{2}\sqrt{5}$
AQ	Jarak titik A ke titik diagonal sisi di seberangnya	$\frac{a}{2}\sqrt{6}$
AR	Jarak titik A ke tengah sisi bidang diagonal	$\frac{3}{2}a$

2. Jarak titik dengan garis

Jarak titik A dan garis g adalah panjang ruas garis AB di mana B merupakan proyeksi A ke garis g. Perbandingan-perbandingan istimewa pada segiempat:



3. Jarak titik dengan bidang

Jarak antara titik A dengan bidang adalah panjang ruas garis AB di mana B merupakan proyeksi titik A pada bidang.

4. Jarak garis dengan garis
Menentukan jarak antara garis g dan garis h yaitu dengan membuat garis yang tegak lurus dengan kedua garis.
5. Jarak bidang dengan bidang
Menentukan jarak bidang α dan β yaitu dengan cara menarik garis AB di mana A di bidang α dan B di bidang β serta AB tegak lurus bidang α dan β .

B. Sudut

1. Sudut antara garis dengan garis
Sudut antara garis dengan garis adalah sudut terkecil yang dibentuk oleh kedua garis.
2. Sudut antara garis dengan bidang
Sudut antara garis dengan bidang adalah sudut antara garis dan bayangannya bila garis tersebut diproyeksikan pada bidang.
3. Sudut antara bidang dengan bidang
Sudut antara bidang dengan bidang adalah sudut yang dibentuk oleh dua garis yang tegak lurus garis potong pada bidang α dan β .

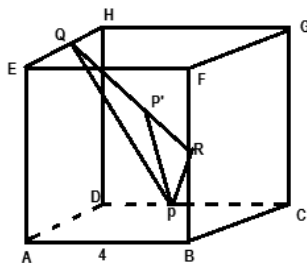
Soal dan Pembahasan

1. Diketahui kubus $ABCD.EFGH$ mempunyai sisi 4 cm. titik P adalah titik tengah CD , titik Q adalah titik tengah EH dan titik R adalah titik tengah BF . Jarak P ke QR adalah

- A. $\sqrt{15}$
- B. $3\sqrt{2}$
- C. $\sqrt{6}$
- D. $\sqrt{5}$
- E. $2\sqrt{2}$

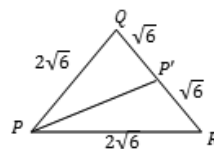
(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:



$$\begin{aligned} \bullet \text{ } QF &= \sqrt{(QE)^2 + (EF)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ } QR &= \sqrt{(QF)^2 + (FR)^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{20})^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{24} \\ &= 2\sqrt{6} \\ PQ &= QR = PR = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \bullet \text{ Jarak } P \text{ ke } QR &\text{ adalah } PP' \\ PP' &= \sqrt{(PQ)^2 - (QP')^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^2} \\ &= \sqrt{24 - 6} \\ &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

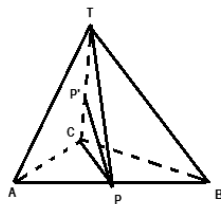
-----Jawaban: B

2. Diberikan bidang empat beraturan T.ABC dengan panjang rusuk a. Jika titik P adalah titik tengah rusuk AB, maka jarak titik P ke garis TC adalah

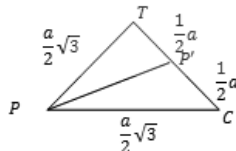
- A. $\frac{a}{3}\sqrt{2}$
 B. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$
 C. $a\sqrt{2}$
 D. $\frac{a}{2}\sqrt{6}$
 E. $\frac{3a}{2}\sqrt{6}$

(SAINTEK SBMPTN 2013)

Pembahasan CERDAS:



$$\begin{aligned} PC &= PT = \sqrt{(BC)^2 - (BP)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}a^2} \\ &= \frac{a}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$



Jarak titik P ke garis TC adalah PP'

$$\begin{aligned} PP' &= \sqrt{(PC)^2 - (CP')^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{4}a^2} \\ &= \frac{a}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

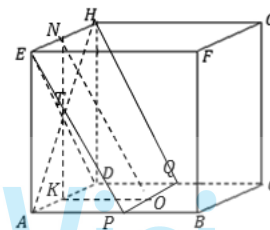
-----**Jawaban: B**

3. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk a. Jika P,Q,T masing-masing adalah titik tengah AB, CD, dan AH. Maka jarak T pada bidang EPQH adalah

- A. $\frac{a}{5}\sqrt{5}$
 B. $\frac{a}{6}\sqrt{5}$
 C. $\frac{a}{8}\sqrt{5}$
 D. $\frac{a}{10}\sqrt{5}$
 E. $\frac{a}{12}\sqrt{5}$

(SAINTEK UM UNDIP 2015)

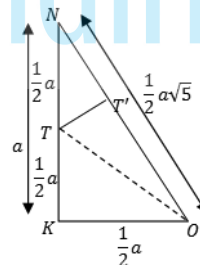
Pembahasan CERDAS:



$$NO = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$$

Jarak T ke bidang EPQH = jarak T ke

ON = TT'



Dengan membandingkan luas ΔTNO

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot TN \cdot KO &= \frac{1}{2} \cdot NO \cdot TT' \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{5} \cdot TT' \\ TT' &= \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{4}a\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a\sqrt{5}} \end{aligned}$$

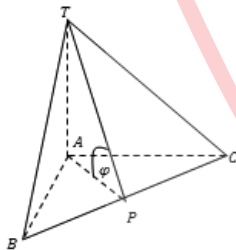
$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2}{2a\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{a}{10} \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

-----**Jawaban: D**

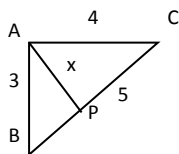
4. Diketahui limas T.ABC dengan TA tegak lurus bidang ABC. Panjang rusuk AB, AC, BC, dan TA berturut-turut adalah 3 cm, 4 cm, 5 cm dan $\frac{9}{5}$ cm. Jika φ sudut antara bidang BCT dengan bidang ABC, maka nilai $\cos \varphi$ adalah
- $\frac{4}{5}$
 - $\frac{3}{5}$
 - $\frac{6}{25}$
 - $\frac{9}{25}$
 - $\frac{12}{25}$

(MAT IPA SNMPTN 2011)

Pembahasan CERDAS:



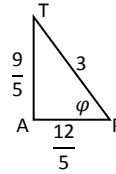
Lihat alas limas ABC



Dengan membandingkan luasnya

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AP \\
 3 \cdot 4 &= 5 \cdot AP \\
 AP &= \frac{12}{5}
 \end{aligned}$$

Lihat ΔTAP



Menggunakan Pythagoras

$$\begin{aligned}
 TP &= \sqrt{(TA)^2 + (AP)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{81}{25} + \frac{144}{25}} \\
 &= \sqrt{\frac{225}{25}} \\
 &= \sqrt{9} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } \cos \varphi = \frac{12/5}{3} = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{5}$$

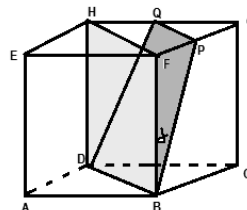
-----**Jawaban: A**

5. Diberikan balok ABCD.EFGH dengan AB = AE = 4 dan BC = 3. Titik P dan Q masing-masing titik tengah FG dan GH. Tangen sudut bidang diagonal FHDB dan bidang PQDB adalah

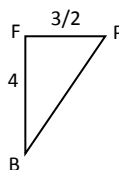
- $\frac{1}{10}$
- $\frac{3}{10}$
- $\frac{2}{5}$
- $\frac{3}{8}$
- $\frac{7}{16}$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:



Sudut bidang diagonal FHDB dan bidang PQDB adalah $\angle FBP$



$$\tan FBP = \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

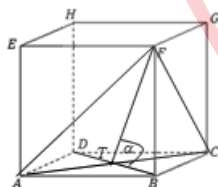
-----Jawaban: D

6. Diberikan kubus ABCD.EFGH. Jika α adalah sudut antara bidang ACF dan bidang ABCD, maka $\sin \alpha + \cos \alpha = \dots$

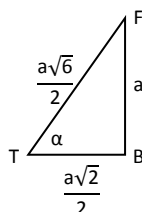
- A. $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}}$
- B. $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
- C. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- D. $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
- E. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

(MAT IPA SBMPTN 2012)

Pembahasan CERDAS:



Sudut antara bidang ACF dan bidang ABCD adalah $\alpha = \angle BTF$



$$\begin{aligned} \sin \alpha + \cos \alpha &= \frac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} + \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

-----Jawaban: D

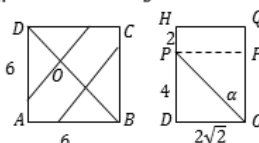
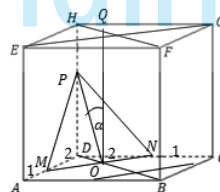
7. Diketahui kubus ABCD.EFGH. Titik M berada pada rusuk AD sedemikian sehingga $AM : MD = 1 : 2$. Titik N berada pada di rusuk CD sedemikian sehingga $CN : ND = 1 : 2$. Titik P berada di rusuk DH sedemikian sehingga $DP : PH = 2 : 1$. Jika α adalah sudut antara bidang MNP dan bidang ACE, maka nilai $\sin \alpha = \dots$

- A. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$
- B. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$
- C. $\frac{1}{3}\sqrt{4}$
- D. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
- E. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

(SAINTEK SBMPTN 2016)

Pembahasan CERDAS:

Misalkan rusuk = 6 cm



$$DO = \frac{1}{3}a\sqrt{2} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$PO = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16+8} = 2\sqrt{6}$$

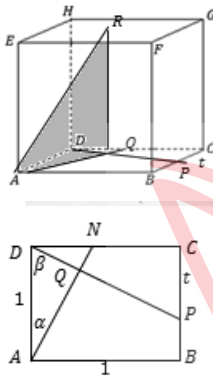
$$\sin \alpha = \frac{PP'}{PO} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

-----Jawaban: D

8. Kubus ABCD.EFGH panjang sisinya 1 dm. titik P pada BC dengan $|PC| = t$ dm. Titik Q adalah proyeksi A pada DP dan R adalah proyeksi Q pada bidang EFGH. Luas segitiga AQR adalah dm^2
- $\frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}$
 - $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$
 - $2\sqrt{t^2+1}$
 - $\frac{\sqrt{t^2+1}}{2}$
 - t^2+1

(MAT IPA SNMPTN 2010)

Pembahasan CERDAS:



$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{AQ}{AD} = \frac{AD}{AN} \\ \frac{AQ}{1} &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ AQ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \text{Luas } \triangle AQR &= \frac{AQ \cdot QR}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot 1}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\end{aligned}$$

-----Jawaban: A

9. Diberikan kubus ABCD.EFGH. Titik P, Q, R, dan S masing-masing pada AB, BC, CD, dan AD sehingga $BP = CR = \frac{AB}{3}$

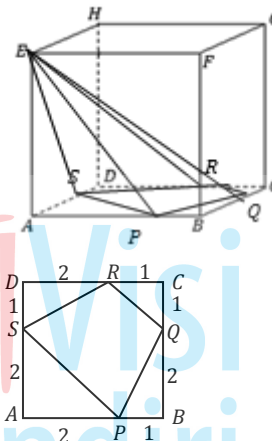
dan $QC = DS = \frac{AD}{3}$. Volume limas E.PQRS adalah volume

- $\frac{1}{6}$
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{1}{2}$

(SAINTEK SBMPTN 2014)

Pembahasan CERDAS:

Misalkan sisi kubus 3 cm

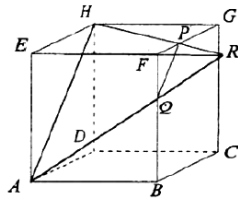


$$\begin{aligned}L_{PQRS} &= L_{ABCD} - (L_{\triangle APS} + L_{\triangle PBQ} + L_{\triangle QCR} + L_{\triangle ASDR}) \\ &= 3^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \right) \\ &= 9 - \left(2 + 1 + \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \\ V_{E.PQRS} &= \frac{1}{3} \cdot L_{PQRS} \cdot t \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2} \\ \frac{V_{E.PQRS}}{V_{kubus}} &= \frac{\frac{9}{2}}{3^3} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{6} \text{ volume}\end{aligned}$$

-----Jawaban: A

10. Pada kubus ABCD.EFGH, P adalah pada FG dengan $FP : PG = 1 : 2$ dan titik Q pada FB dengan $FQ : QB = 1 : 2$. Perpanjangan HP dan AQ berpotongan di perpanjangan EF di titik R. Jika pan-

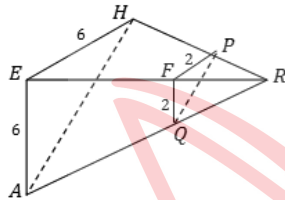
jang rusuk kubus adalah 6, maka volume EAH.FQP adalah



- A. 52
- B. 54
- C. 66
- D. 76
- E. 96

(SAINTEK SBMPTN 2015)

Pembahasan CERDAS:



Perhatikan perbandingannya:

$$FP : PG = 1 : 2 \rightarrow FP = \frac{1}{3} FG = \frac{1}{3} (6) = 2$$

$$FQ : QB = 1 : 2 \rightarrow FQ = \frac{1}{3} FB = \frac{1}{3} (6) = 2$$

Lihat $\triangle EHR$ dan $\triangle FPR$ (sebangun)

$$\frac{FR}{ER} = \frac{FP}{EH} \rightarrow \frac{FR}{ER} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Karena $FR : ER = 1 : 3 \rightarrow FR : EF = 1 : 2$

$$\text{maka } FR = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

sehingga,

$$V_{AEHR} = \frac{1}{3} \cdot L_{AEH} \cdot ER = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \right) \cdot 9 = 54$$

$$V_{QFPR} = \frac{1}{3} \cdot L_{QFP} \cdot FR = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) \cdot 3 = 2$$

Jadi,

$$V_{EAH \cdot FQP} = V_{AEHR} - V_{QFPR} = 54 - 2 = 52$$

-----Jawaban: A

