

# **MATEMATIKA DASAR**

- Rangkuman Materi
- Contoh Soal dan Pembahasan

**BAB 1 LOGIKA MATEMATIKA**

**BAB 2 PERSAMAAN KUADRAT**

**BAB 3 FUNGSI KUADRA**

**BAB 4 PERTIDAKSAMAAN**

**BAB 5 EKSPONEN DAN LOGARITMA**

**BAB 6 TRIGONOMETRI**

**BAB 7 STATISTIK DAN PELUANG**

**BAB 8 FUNGSI KOMPOSISI DAN INVERS**

**BAB 9 LIMIT**

**BAB 10 TURUNAN**

**BAB 11 GARIS DAN PROGRAM LINIER**

**BAB 12 MATRIKS DAN TRANSFORMASI**

**BAB 13 BARISAN DAN DERET**

**BAB 14 GEOMETRI**





## - BAB 1 - Logika Matematika

### Rangkuman Materi

Logika matematika adalah sebuah cabang matematika yang merupakan gabungan dari ilmu logika dan ilmu matematika. Logika matematika akan memberikan landasan tentang bagaimana cara mengambil kesimpulan.

#### A. Operasi Logika

1. Disjungsi : ... atau....
2. Konjungsi : ... dan....
3. Implikasi : jika...maka...
4. Biimplikasi : jika dan hanya jika....
5. Negasi : bukan...

Tabel kebenaran:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
B	B	<b>B</b>	B	B	<b>B</b>
B	S	S	B	<b>S</b>	S
S	B	S	B	B	S
S	S	S	<b>S</b>	B	<b>B</b>

#### B. Kuantor

Ada dua macam kuantor, yaitu:

1. Kuantor Universal  
Suatu pernyataan yang berlaku untuk umum, notasinya " $\forall x$ " dibaca "untuk semua nilai x"
2. Kuantor Eksistensial  
Suatu pernyataan yang berlaku secara khusus, notasinya " $\exists x$ " dibaca "ada nilai x" atau "beberapa nilai x"

#### C. Negasi Pernyataan Majemuk

Negasi/ingkaran adalah pengingkaran terhadap nilai kebenaran suatu pernyataan.

Notasi =  $\sim p$  : tidak p

Negasi pernyataan majemuk:

Kuantor	$\sim(\forall p) \equiv \exists(\sim p)$ $\sim(\exists p) \equiv \forall(\sim p)$
Konjungsi	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
Disjungsi	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
implikasi	$p \Rightarrow q \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$
Biimplikasi	$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q)$
	$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
	$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

---

#### D. Konvers, Invers, dan Kontraposisi

---

Dari suatu implikasi  $p \Rightarrow q$  diperoleh

1.  $q \Rightarrow p$  disebut **konvers** dari  $p \Rightarrow q$
2.  $\sim p \Rightarrow \sim q$  disebut **invers** dari  $p \Rightarrow q$
3.  $\sim q \Rightarrow \sim p$  disebut **kontraposisi** dari  $p \Rightarrow q$

---

#### E. Ekuivalensi

---

Dua pernyataan majemuk dikatakan ekuivalen jika kedua pernyataan ini mempunyai nilai kebenaran yang sama.

1.  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
2.  $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

---

#### F. Penarikan Kesimpulan

---

Cara menarik kesimpulan dari dua premis sebagai berikut:

##### 1. Modus Ponens

Premis 1	: $p \Rightarrow q$
Premis 2	: $p$
Kesimpulan	: $q$

##### 2. Modus Tolens

Premis 1	: $p \Rightarrow q$
Premis 2	: $\sim q$
Kesimpulan	: $\sim p$

##### 3. Silogisme

Premis 1	: $p \Rightarrow q$
Premis 2	: $q \Rightarrow r$
Kesimpulan	: $p \Rightarrow r$

## Soal dan Pembahasan

1. Diketahui tiga pernyataan berikut:

P : Jakarta ada di Pulau Bali

Q : 2 adalah bilangan prima

R : semua bilangan prima adalah bilangan ganjil

Pernyataan majemuk di bawah ini yang bernilai benar adalah...

- A.  $(\sim P \vee Q) \wedge R$
- B.  $(\sim Q \vee \sim R) \wedge (\sim Q \vee P)$
- C.  $(P \wedge \sim Q) \wedge (Q \vee \sim R)$
- D.  $\sim P \Rightarrow R$
- E.  $\sim R \wedge \sim (Q \wedge R)$

**Pembahasan CERDAS:**

P : Jakarta ada di Pulau Bali (salah)

Q : 2 adalah bilangan prima (benar)

R : semua bilangan prima adalah bilangan ganjil (salah)

Jadi, yang bernilai benar adalah

$$\sim R \wedge \sim (Q \wedge R)$$

Bukti:

$$\Leftrightarrow \sim S \wedge \sim (B \wedge S)$$

$$\Leftrightarrow B \wedge \sim S$$

$$\Leftrightarrow B \wedge B$$

$$\Leftrightarrow B$$

-----Jawaban: A

2. Jika x adalah peubah pada bilangan real, nilai x yang memenuhi agar pernyataan "Jika  $x^2 - 2x - 3 = 0$ , maka  $x^2 - x < 5$ " bernilai salah adalah ....

- A. -1
- B. 1
- C. 2
- D. 3
- E. 4

**Pembahasan CERDAS:**

$$p: x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$q: x^2 - x < 5$$

Pernyataan di atas akan bernilai salah jika p benar dan q salah.

$$\bullet \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

$$\bullet \quad x^2 - x < 5$$

$$\text{Untuk } x = 3 \rightarrow 3^2 - 3 < 5 \text{ (salah)}$$

$$\text{Untuk } x = -1 \rightarrow (-1)^2 - (-1) < 5 \text{ (benar)}$$

Jadi, yang memenuhi adalah  $x = 3$ .

-----Jawaban: D

3. Diketahui tiga pernyataan berikut bernilai benar, yaitu:

$$p \wedge q, q \Rightarrow \sim r, \text{ dan } \sim r \Rightarrow s$$

Jika nilai kebenaran p benar, maka pernyataan berikut yang bernilai benar adalah ....

- A.  $r \wedge s$
- B.  $p \Rightarrow r$
- C.  $r \Rightarrow p$
- D.  $r \vee \sim q$
- E.  $q \Rightarrow r$

**Pembahasan CERDAS:**

- p bernilai benar (B), maka  $p \wedge q$  akan bernilai benar jika q bernilai benar (B)
- q bernilai benar (B), maka  $q \Rightarrow \sim r$  akan bernilai benar jika  $\sim r$  bernilai benar (B), sehingga r bernilai salah (S)
- r bernilai salah (S), maka  $\sim r \Rightarrow s$  akan bernilai benar jika s bernilai salah (S)

Jadi, pernyataan yang bernilai benar adalah  $r \Rightarrow p$ .

-----Jawaban: C

4. Negasi dari pernyataan  $(\forall x)[a(x) \Rightarrow b(x)]$  adalah ....

- A.  $(\exists x)[a(x) \Rightarrow \sim b(x)]$
- B.  $(\exists x)[a(x) \wedge b(x)]$
- C.  $(\exists x)[\sim a(x) \wedge \sim b(x)]$
- D.  $(\exists x)[a(x) \Rightarrow b(x)]$
- E.  $(\exists x)[a(x) \wedge \sim b(x)]$

**Pembahasan CERDAS:**

$(\forall x)[a(x) \Rightarrow b(x)]$   
 $\sim(\forall x)[\sim(\sim a(x) \vee b(x))]$   
 $(\exists x)[a(x) \wedge \sim b(x)]$

-----**Jawaban: E**

5. Negasi dari pernyataan “Jika semua anggota keluarga pergi, maka Bibi Ina menyapu halaman” adalah ....
- A. Semua anggota keluarga pergi dan Bibi Ina menyapu halaman.
  - B. Ada anggota keluarga yang tidak pergi dan Bibi Ina tidak menyapu halaman.
  - C. Semua anggota keluarga tidak pergi atau Bibi Ina tidak menyapu halaman.
  - D. Semua anggota keluarga pergi dan Bibi Ina tidak menyapu halaman.
  - E. Semua anggota keluarga pergi atau Bibi Ina tidak menyapu halaman

**Pembahasan CERDAS:**

Misalkan :

$p$  = semua anggota keluarga pergi

$q$  = Bibi Ina menyapu halaman

Pernyataan di atas dapat di tulis:

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

Negasinya:  $\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

Jadi, negasi pernyataan di atas adalah “Ada anggota keluarga yang tidak pergi dan bibi Ina tidak menyapu halaman”.

-----**Jawaban: B**

6. Pernyataan  $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$  ekuivalen dengan pernyataan ....
- A.  $p \Rightarrow q$
  - B.  $p \Rightarrow \sim q$
  - C.  $\sim p \Rightarrow q$
  - D.  $\sim p \Rightarrow \sim q$
  - E.  $p \Leftrightarrow q$

**Pembahasan CERDAS:**

$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p \Leftrightarrow q$

-----**Jawaban: E**

7. Jika pernyataan “Matahari bersinar dan hari tidak hujan” bernilai benar, maka pernyataan itu ekuivalen (setara) dengan pernyataan ...

- A. “Matahari tidak bersinar jika dan hanya jika hari hujan”
- B. “matahari tidak bersinar dan hari tidak hujan”
- C. “Jika matahari bersinar maka hari hujan”
- D. “Matahari bersinar dan hari hujan”
- E. “Matahari tidak bersinar”

**Pembahasan CERDAS:**

Misalkan:  $p$  = matahari bersinar,  $q$  = hari hujan

Pernyataan “Matahari bersinar dan hari tidak hujan”  $\equiv p \wedge \sim q$

Pernyataan akan bernilai benar jika keduanya bernilai benar (B). Jadi,  $p$  benar dan  $\sim q$  benar atau  $q$  salah.

Pernyataan “Matahari tidak bersinar jika dan hanya jika hari hujan”  $\equiv \sim p \Leftrightarrow q$

Jadi,  $\sim p \Leftrightarrow q$  pernyataan bernilai S  $\Leftrightarrow$  S hasilnya B.

-----**Jawaban: A**

8. Jika Adi tidak sombong, maka Adi mempunyai banyak teman. Pada kenyataannya Adi tidak mempunyai banyak teman. Kesimpulan yang benar adalah ....

- A. Adi pasti sombong.
- B. Adi mungkin anak yang baik.
- C. Adi bukan anak yang baik.
- D. Adi punya beberapa teman.
- E. Adi anak yang baik.

**Pembahasan CERDAS:**

Misalkan :

$p$  = Adi sombong

$q$  = Adi mempunyai banyak teman

Premis 1:  $\sim p \Rightarrow q$

Premis 2:  $\sim q$  \_\_\_\_\_

Kesimpulan:  $p$

Jadi kesimpulan pernyataan di atas adalah “Adi pasti sombong”.

-----**Jawaban: A**

9. Dari premis-premis berikut:

Premis 1 :  $(p \wedge q) \Rightarrow r$

Premis 2 :  $s \Rightarrow \sim r$

Premis 3 :  $s \vee t$

Kesimpulan dari premis-premis di atas adalah ....

- A.  $r \vee t$
- B.  $p \wedge q$
- C.  $(p \wedge q) \Rightarrow \sim t$
- D.  $(\sim(p \wedge q) \vee t)$
- E.  $(p \wedge q) \vee t$

**Pembahasan CERDAS**

Premis 1 :  $(p \wedge q) \Rightarrow r$   
Premis 2 :  $s \Rightarrow \sim r \equiv r \Rightarrow \sim s$  }  $(p \wedge q) \Rightarrow \sim s$

Premis 3 :  $s \vee t \equiv \sim s \Rightarrow t$

Kesimpulan :  $(p \wedge q) \Rightarrow t \equiv \sim(p \wedge q) \vee t$

-----**Jawaban: D**

10. Diketahui pernyataan:

- I. Jika hari ini libur sekolah, maka Anis membantu Ibu
- II. Anis tidak membantu Ibu atau ia bermain dengan teman
- III. Anis tidak bermain dengan teman

Kesimpulan yang sah adalah ....

- A. Hari ini tidak libur sekolah.
- B. Hari ini libur sekolah.
- C. Hari ini Anis tidak bersekolah.
- D. Hari ini Anis bersekolah.
- E. Hari ini Anis tidak membantu Ibu.

**Pembahasan CERDAS:**

Misalkan:

$p$  = Hari ini libur sekolah

$q$  = Anis membantu ibu

$r$  = Anis bermain dengan teman

Diperoleh premis-premis berikut:

Premis I :  $p \Rightarrow q$  }  $p \Rightarrow r$

Premis II :  $\sim q \vee r \equiv q \Rightarrow r$  }

Premis III:  $\sim r$

Kesimpulan :  $\sim p$

Jadi, kesimpulan pernyataan di atas adalah "Hari ini tidak libur sekolah".

-----**Jawaban: A**



## - BAB 2 - Persamaan Kuadrat

### Rangkuman Materi

#### A. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat:  $ax^2 + bx + c = 0$

Akar-akar persamaan kuadrat dapat dicari dengan

1. Metode faktorisasi
2. Metode melengkapi kuadrat sempurna
3. Metode rumus kuadrat (Rumus abc)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

#### B. Sifat-sifat Akar

Misalkan  $x_1$  dan  $x_2$  adalah akar-akar persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  dengan  $D > 0$ , maka:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$  atau  $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ . Sebagai akibat rumus tersebut, diperoleh:

1. Jumlah akar  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
2. Hasil kali akar  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
3. Selisih akar  $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$
4. Beberapa rumus yang biasa digunakan saat menentukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat
  - a) Jumlah kuadrat
$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2)$$
  - b) Selisih kuadrat
$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$
  - c) Kuadrat selisih
$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2$$
  - d) Jumlah pangkat tiga
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 \cdot x_2)(x_1 + x_2)$$
  - e) Selisih pangkat tiga
$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3(x_1 \cdot x_2)(x_1 + x_2)$$
  - f) Jumlah kebalikan
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

---

### C. Jenis-Jenis Akar

---

1. Dilihat dari diskriminannya ( $D = b^2 - 4ac$ ), akar-akar persamaan kuadrat dibagi menjadi 3 yaitu:
  - a.  $D \geq 0$  berarti memiliki akar real
    - $D > 0$  berarti memiliki 2 akar real berbeda
    - $D = 0$  berarti memiliki satu akar real (kembar)
  - b.  $D < 0$  berarti tidak memiliki akar real (imajiner)
  - c.  $D = k^2$  berarti memiliki 2 akar rasional
2. Bentuk perluasan untuk akar - akar real:
  - a. Kedua akar berkebalikan ( $x_1 = \frac{1}{x_2}$ )
    - $D \geq 0$
    - $x_1 x_2 = 1$
  - b. Kedua akar berlawanan ( $x_1 = -x_2$ )
    - $D > 0$
    - $x_1 + x_2 = 0$
    - $x_1 x_2 < 0$
  - c. Kedua akar positif ( $x_1 > 0 \wedge x_2 > 0$ )
    - $D \geq 0$
    - $x_1 + x_2 > 0$
    - $x_1 x_2 > 0$
  - d. Kedua akar negatif ( $x_1 < 0 \wedge x_2 < 0$ )
    - $D \geq 0$
    - $x_1 + x_2 < 0$
    - $x_1 x_2 > 0$
  - e. Akar yang satu positif dan yang lain negatif (berlainan tanda)
    - $D > 0$
    - $x_1 x_2 < 0$
  - f. Kedua akar lebih besar dari bilangan konstan  $p$  ( $x_1 > p \wedge x_2 > p$ )
    - $D \geq 0$
    - $(x_1 - p) + (x_2 - p) > 0$
    - $(x_1 - p)(x_2 - p) > 0$
  - g. Kedua akar lebih kecil dari bilangan konstan  $q$  ( $x_1 < q \wedge x_2 < q$ )
    - $D \geq 0$
    - $(x_1 - q) + (x_2 - q) < 0$
    - $(x_1 - q)(x_2 - q) > 0$

Untuk akar - akar berelasi, tentukan syarat dengan melihat  $D$ ,  $x_1 + x_2$ , dan  $x_1 \cdot x_2$

---

### D. Menyusun Persamaan Kuadrat Baru

---

Jika diketahui  $x_1$  dan  $x_2$  adalah akar-akar dari persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$ , maka persamaan kuadrat baru dengan akar-akar  $\alpha$  dan  $\beta$ , dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

1. Menggunakan rumus, yaitu  $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
2. Menyubstitusikan invers akar-akar yang baru ke persamaan semula.



## Soal dan Pembahasan

1. Jika  $a$  dan  $b$  adalah akar - akar persamaan kuadrat  $x^2 + x - 3 = 0$ , maka nilai  $2a^2 + b^2 + a = \dots$
- 10
  - 9
  - 7
  - 6
  - 4

(TKDU SBMPTN 2014)

### Pembahasan CERDAS:

Karena  $a$  akar - akar persamaan kuadrat  $x^2 + x - 3 = 0$ , maka berlaku:

$$a^2 + a - 3 = 0$$

$$a^2 = 3 - a$$

$$2a^2 = 6 - 2a$$

Karena  $b$  juga akar - akar persamaan  $x^2 + x - 3 = 0$  maka berlaku:

$$b^2 + b - 3 = 0$$

$$b^2 = 3 - b$$

$$\text{Jadi, } 2a^2 + b^2 + a$$

$$= (6 - 2a) + (3 - b) + a$$

$$= 9 - (a + b)$$

$$= 9 - (-1)$$

$$= 10$$

Jawaban: A

2. Persamaan kuadrat  $2x^2 - px + 1 = 0$  dengan  $p > 0$ , mempunyai akar - akar  $\alpha$  dan  $\beta$ . Jika  $x^2 - 5x + q = 0$  mempunyai akar - akar  $\frac{1}{\alpha^2}$  dan  $\frac{1}{\beta^2}$ , maka  $q - p = \dots$

$$\text{A. } -2$$

$$\text{B. } -\frac{1}{2}$$

$$\text{C. } \frac{1}{2}$$

$$\text{D. } 1$$

$$\text{E. } 2$$

(TKDU SBMPTN 2014)

### Pembahasan CERDAS:

$$2x^2 - px + 1 = 0 \begin{cases} \alpha \\ \beta \end{cases}$$

$$\bullet \alpha + \beta = \frac{p}{2}$$

$$\bullet \alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 5x + q = 0 \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\beta^2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{p^2}{4} - 1}{\frac{1}{4}} = 5$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4 = 5$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (p + 3)(p - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 3 \vee p = -3 \text{ (tm)}$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} = q$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = q$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = q$$

$$\Leftrightarrow q = 4$$

$$\text{Jadi, } q - p = 4 - 3 = 1$$

Jawaban: D

3. Jika  $p + 1$  dan  $p - 1$  adalah akar-akar persamaan  $x^2 - 4x + a = 0$ , maka nilai  $a$  adalah ...

$$\text{A. } 0$$

$$\text{B. } 1$$

$$\text{C. } 2$$

$$\text{D. } 3$$

$$\text{E. } 4$$

(MATDAS SNMPTN 2012)

### Pembahasan CERDAS:

Misalkan akar-akar  $x^2 - 4x + a = 0$  adalah  $x_1$  dan  $x_2$ , maka

$$x^2 - 4x + a = 0 \begin{cases} x_1 = p + 1 \\ x_2 = p - 1 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (p + 1) + (p - 1) = 4$$

$$\Leftrightarrow 2p = 4$$

$$\Leftrightarrow p = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = a$$

$$\Leftrightarrow (p + 1)(p - 1) = a$$

$$\Leftrightarrow (2 + 1)(2 - 1) = a$$

$$\Leftrightarrow a = 3$$

-----Jawaban: D

4. Diketahui  $1 - \sqrt{2}$  adalah salah satu akar-akar  $x^2 + ax + b = 0$  dengan  $b$  bilangan real positif dan  $a$  suatu bilangan bulat. Nilai terkecil  $a$  adalah ...

- A. -2
- B. -1
- C. 0
- D. 1
- E. 2

(TKDU SBMPTN 2016)

#### Pembahasan CERDAS:

Salah satu akar dari  $x^2 + ax + b$  adalah  $1 - \sqrt{2}$ , maka berdasarkan rumus ABC, akar yang lainnya adalah  $1 + \sqrt{2}$ , sehingga persamaan kuadrat yang terbentuk adalah :

$$(x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2})) = 0$$

$$x^2 - (1 + \sqrt{2})x - (1 - \sqrt{2})x + (1^2 - (\sqrt{2})^2) = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

Persamaan kuadrat  $x^2 - 2x - 1 = 0$  identik dengan  $x^2 + ax + b = 0$ . Jadi, nilai  $a$  adalah -2

-----Jawaban: A

5. Misalkan dua persamaan kuadrat mempunyai satu akar yang sama, yaitu 2 dan akar-akar lainnya berkebalikan. Jika salah satu persamaan itu adalah  $x^2 - ax + 6 = 0$ , maka persamaan kuadrat lainnya adalah ...

- A.  $x^2 + x - 6 = 0$
- B.  $3x^2 - 7x + 2 = 0$
- C.  $3x^2 + 4x - 6 = 0$

$$D. x^2 - x + \frac{2}{3} = 0$$

$$E. 2x^2 - 3x - 4 = 0$$

(TKDU SBMPTN 2016)

#### Pembahasan CERDAS:

Karena 2 adalah salah satu akar persamaan  $x^2 - ax + 6 = 0$ , maka untuk mencari  $a$ , kita substitusikan  $x = 2$  ke persamaan  $x^2 - ax + 6 = 0$ .

$$\Leftrightarrow 2^2 - a(2) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2a + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

Sehingga diperoleh persamaan  $x^2 + x + 6 = 0$ , kemudian akan kita cari akar yang lain menggunakan pemfaktoran.

$$x^2 + x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x = 2 \text{ atau } x = 3$$

Kita cari persamaan kuadrat yang akar-akarnya 2 dan  $\frac{1}{3}$ , yaitu:

$$(x - 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

Jadi, persamaan kuadrat lainnya adalah  $3x^2 - 7x + 2 = 0$ .

-----Jawaban: B

6. Diketahui  $m$  dan  $n$  akar - akar persamaan  $ax^2 + bx + c = 0$ . Jika  $m + 2$  dan  $n + 2$  akar-akar persamaan kuadrat  $ax^2 + qx + r = 0$ , maka  $q + r = \dots$

- A.  $c + 3b$
- B.  $c - b + 4a$
- C.  $c - b$
- D.  $c - b + 8a$
- E.  $c + 3b + 8a$

(TKDU SBMPTN 2014)

#### Pembahasan CERDAS:

$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} m \\ n \end{cases}$$

$$\bullet m + n = -\frac{b}{a}$$

$$\bullet m \cdot n = \frac{c}{a}$$

$$\begin{aligned}
 ax^2 + qx + r &= 0 \begin{cases} m+2 \\ n+2 \end{cases} \\
 (m+2) + (n+2) &= -\frac{q}{a} \\
 \Leftrightarrow (m+n) + 4 &= -\frac{q}{a} \\
 \Leftrightarrow -\frac{b}{a} + 4 &= -\frac{q}{a} \\
 \Leftrightarrow b - 4a &= q \\
 (m+2)(n+2) &= \frac{r}{a} \\
 \Leftrightarrow mn + 2(m+n) + 4 &= \frac{r}{a} \\
 \Leftrightarrow \frac{c}{a} + 2\left(-\frac{b}{a}\right) + 4 &= \frac{r}{a} \\
 \Leftrightarrow c - 2b + 4a &= r \\
 \text{Jadi, } q + r &= (b - 4a) + (c - 2b + 4a) \\
 &= c - b
 \end{aligned}$$

-----**Jawaban: C**

7. Misalkan  $a \neq 0$ , serta  $x_1$  dan  $x_2$  adalah akar-akar  $x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 = 0$ . Jika persamaan  $x^2 + bx + c = 0$  memiliki akar-akar  $2x_1$  dan  $2x_2$ , maka nilai  $2a^2 + c + ab = \dots$
- A. -6  
B. -2  
C. 0  
D. 2  
E. 6

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 = 0 \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}, \text{ sehingga}$$

$$x_1 + x_2 = a + \frac{1}{a} \text{ dan } x_1 x_2 = 1$$

$$x^2 + bx + c = 0 \begin{cases} 2x_1 \\ 2x_2 \end{cases}, \text{ sehingga:}$$

- $2x_1 + 2x_2 = -b$   
 $2(x_1 + x_2) = -b$   
 $2\left(a + \frac{1}{a}\right) = -b$   
 $2a^2 + 2 = -ab$   
 $2a^2 + ab = -2$
- $2x_1 \cdot 2x_2 = c$   
 $4x_1 x_2 = c$   
 $4(1) = c$   
 $c = 4$

$$\text{Jadi, nilai } 2a^2 + c + ab = (2a^2 + ab) + c = -2 + 4 = 2$$

-----**Jawaban: D**

8. Jika semua akar  $x^2 - 99x + p = 0$  merupakan bilangan prima, maka nilai  $p$  adalah ...
- A. 100  
B. 194  
C. 198  
D. 288  
E. 380

(TKDU SBMPTN 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

Misalkan akar persamaan kuadrat  $x^2 - 99x + p = 0$  adalah  $\alpha$  dan  $\beta$ , maka:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 99$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = p$$

Jumlah kedua bilangan prima = 99 (ganjil), maka kita ambil bilangan yang satu genap dan yang satunya ganjil. Salah satu bilangan prima yang genap adalah 2, sehingga bilangan yang lain adalah  $99 - 2 = 97$ . Jadi,  $p = \alpha\beta = 2 \cdot 97 = 194$ .

-----**Jawaban: B**

9. Jika akar-akar  $x^2 - ax - b = 0$  saling berkebalikan dan salah satu akar tersebut merupakan bilangan bulat positif, maka nilai terkecil yang mungkin untuk  $a - b$  adalah ...
- A. -3  
B. -1  
C. 1  
D. 2  
E. 3

(TKDU SBMPTN 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

Misalkan akar-akar  $x^2 - ax - b = 0$  adalah  $\alpha$  dan  $\beta$ , maka:

$$\alpha + \beta = a$$

$$\alpha\beta = -b$$

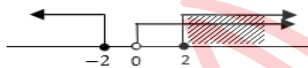
Kedua akar-akarnya saling berkebalikan artinya

$$\alpha = \frac{1}{\beta}$$

Syarat yang harus terpenuhi:

- (1) Hasil kali kedua akar pasti 1  
 $\Leftrightarrow \alpha\beta = 1$   
 $\Leftrightarrow -b = 1$
- (2) Salah satu akarnya bilangan bulat positif, maka akar yang lain pasti juga positif sehingga  $\alpha + \beta > 0$ .  
 $\Leftrightarrow \alpha + \beta > 0$   
 $\Leftrightarrow a > 0$
- (3) Persamaan kuadrat tersebut memiliki dua akar real, maka  $D \geq 0$ .  
 $\Leftrightarrow a^2 - 4.1.(-b) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow a^2 - 4.1.(1) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow a^2 - 4 \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (a - 2)(a + 2) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow a = 2 \text{ atau } a = -2$

Iriskan (2) dan (3)



Nilai minimum  $a = 2$  sehingga  $a - b = 2 + 1 = 3$ .

-----Jawaban: E

10. Persamaan kuadrat  $x^2 - (c - 2)x + 4 = 0$  mempunyai akar - akar  $x_1$  dan  $x_2$ . Jika  $x_1 > 1$  dan  $x_2 > 1$ , maka ...

- A.  $c < 7$
- B.  $c \leq -2$

- C.  $6 \leq c < 7$
- D.  $c \leq -2$  atau  $c \geq 6$
- E.  $c \leq -2$  atau  $2 \leq c < 7$

(TKDU SBMPTN 2013)

#### Pembahasan CERDAS:

$$x^2 - (c - 2)x + 4 = 0 \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$$

- $x_1 > 1 \rightarrow x_1 - 1 > 0$
- $x_2 > 1 \rightarrow x_2 - 1 > 0$

Jadi,

- (i)  $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$   
 $\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0$   
 $\Leftrightarrow 4 - (c - 2) + 1 > 0$   
 $\Leftrightarrow c < 7$
- (ii)  $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0$   
 $\Leftrightarrow (x_1 + x_2) - 2 > 0$   
 $\Leftrightarrow c - 2 - 2 > 0$   
 $\Leftrightarrow c > 4$

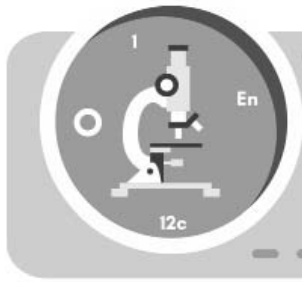
- (iii)  $D \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (c - 2)^2 - 4.1.4 \geq 0$   
 $\Leftrightarrow c^2 - 4c - 12 \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (c - 6)(c + 2) \geq 0$

Iriskan (i), (ii), dan (iii)



Jadi,  $6 \leq c < 7$ .

-----Jawaban: C



## - BAB 3 - Fungsi Kuadrat

### Rangkuman Materi

#### A. Bentuk Umum Fungsi Kuadrat

Bentuk umum:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$

1. Koordinat puncak

$$x_p = -\frac{b}{2a}$$
$$y_p = -\frac{D}{4a}$$

2. Sumbu simetri  $x = x_p$
3. Nilai maksimum/minimum  $y = y_p$

#### B. Sifat Kurva Parabola

1. Dilihat dari koefisien "a"

Nilai a untuk menentukan arah membukanya grafik

- $a > 0$ , parabola **terbuka ke atas** sehingga mempunyai **nilai minimum**
- $a < 0$ , parabola **terbuka ke bawah** sehingga mempunyai **nilai maksimum**

2. Dilihat dari koefisien "b"

Nilai b untuk menentukan posisi sumbu simetri

- a. a dan b bertanda sama ( $a > 0, b > 0$ ) atau ( $a < 0, b < 0$ ), sumbu simetri berada di **kiri sumbu y**
- b. a dan b berlainan tanda ( $a < 0, b > 0$ ) atau ( $a > 0, b < 0$ ), sumbu simetri berada di **kanan sumbu y**

3. Dilihat dari koefisien "c"

Nilai c untuk menentukan titik potong dengan sumbu y

- a.  $c > 0$ , parabola **memotong sumbu y positif**
- b.  $c < 0$ , parabola **memotong sumbu y negatif**

4. Dilihat dari  $D = b^2 - 4ac$  (Diskriminan)

- a.  $D > 0$  berarti parabola memotong sumbu x di dua titik
- b.  $D = 0$  berarti parabola menyinggung sumbu x
- c.  $D < 0$  berarti parabola tidak memotong dan tidak menyinggung sumbu x
  - Jika parabola selalu berada di atas sumbu x, disebut **definit positif**, syaratnya:  
 $D < 0, a > 0$
  - Jika parabola selalu berada di bawah sumbu x, disebut **definit negatif**, syaratnya:  
 $D < 0, a < 0$

### C. Menyusun Fungsi Kuadrat

1. Diketahui memotong sumbu  $x$  di  $(x_1, 0)$  dan  $(x_2, 0)$ , maka gunakan rumus:  
 $y = f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
2. Diketahui titik puncak  $(x_p, y_p)$ , maka gunakan rumus:  $y = f(x) = a(x - x_p)^2 + y_p$
3. Diketahui menyinggung sumbu  $x$  di  $(x_1, 0)$ , maka gunakan rumus:  $y = f(x) = a(x - x_1)^2$

### D. Hubungan Garis dan Parabola

Dilihat dari  $D = b^2 - 4ac$ , kedudukan garis terhadap parabola dibagi menjadi 3, yaitu:

1.  $D > 0$  berarti garis memotong parabola di dua titik
2.  $D = 0$  berarti garis memotong parabola di satu titik (menyinggung)
3.  $D < 0$  berarti garis tidak memotong dan tidak menyinggung parabola

## Soal dan Pembahasan

1. Jika grafik fungsi kuadrat  $f(x) = ax^2 + bx + c$  dengan titik puncak  $(5, -4)$  memotong sumbu  $x$  positif dan sumbu  $y$  negatif, maka ....

- A.  $a - c > 0$
- B.  $a + c < 0$
- C.  $a + c = 0$
- D.  $a + c > 0$
- E.  $a - c < 0$

(MATDAS SNMPTN 2011)

#### Pembahasan CERDAS:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Memotong sumbu  $y$  negatif  $\rightarrow c < 0$

$$x_p = -\frac{b}{2a} = 5 \rightarrow b = -10a$$

$$y_p = \frac{D}{-4a} = -4$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = -4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(+)+(+)}{-4a} = -4$$

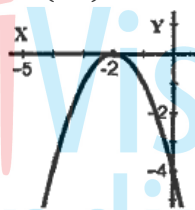
$$\Leftrightarrow a > 0$$

Jadi,  $a - c > 0$

-----**Jawaban: A**

2. Jika gambar di bawah ini adalah grafik fungsi kuadrat  $f$  dengan titik puncak

$(-2, 0)$  dan melalui titik  $(0, -4)$ , maka nilai  $f(-5)$  adalah ....



- A.  $-7$
- B.  $-8$
- C.  $-9$
- D.  $-10$
- E.  $-11$

(MATDAS SNMPTN 2012)

#### Pembahasan CERDAS:

Fungsi kuadrat yang diketahui  $(x_p, y_p) = (-2, 0)$  dan melalui  $(0, -4)$ .

$$y = f(x) = a(x - x_p)^2 + y_p$$

$$\Leftrightarrow y = a(x + 2)^2 + 0$$

$$\Leftrightarrow -4 = a(0 + 2)^2 + 0$$

$$\Leftrightarrow -4 = 4a$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

$$\text{Jadi, } f(x) = -(x + 2)^2$$

$$\rightarrow f(-5) = -(-5 + 2)^2 = -9$$

-----**Jawaban: C**

3. Fungsi kuadrat  $f(x) = x^2 + 2px + p$  mempunyai nilai minimum  $-p$  dengan  $p \neq 0$ . Jika sumbu simetri kurva  $f$  adalah  $x = a$ , maka nilai  $a + f(a) = \dots$

A. 6  
B. 4  
C. -4  
D. -5  
E. -6

(TKDU SBMPTN 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} y_{\min} &= \frac{D}{-4a} = -p \\ &\Leftrightarrow \frac{(2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p}{-4 \cdot 1} = -p \\ &\Leftrightarrow 4p^2 - 4p = 4p \\ &\Leftrightarrow 4p^2 - 8p = 0 \\ &\Leftrightarrow 4p(p - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow p = 0 \text{ (tm)} \vee p = 2 \\ f(x) &= x^2 + 2px + p \rightarrow f(x) \\ &= x^2 + 4x + 2 \\ a = x_{\min} &= -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2 \\ f(a) &= f(-2) = 4 - 8 + 2 = -2 \\ \text{Jadi, } a + f(a) &= -2 - 2 = -4 \end{aligned}$$

-----**Jawaban: C**

4. Diketahui titik minimum fungsi kuadrat  $y = x^2 + bx + c$  adalah  $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$ . Jika grafik fungsi tersebut melalui titik  $(p, 0)$  dan  $(q, 0)$ , maka nilai  $p^2q + pq^2 = \dots$
- A. -30  
B. -11  
C. 11  
D. 25  
E. 30

(TKDU SBMPTN 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} y &= x^2 + bx + c \\ \circ x_p &= \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{b}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow b = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ y_p &= -\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow -\frac{b^2 - 4 \cdot 1 \cdot c}{4 \cdot 1} = -\frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{(-5)^2 - 4c}{4} = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow 25 - 4c = 1 \\ &\Leftrightarrow 4c = 24 \\ &\Leftrightarrow c = 6 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh fungsi kuadrat  $y = x^2 - 5x + 6$

Grafik memotong sumbu  $x \rightarrow y = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

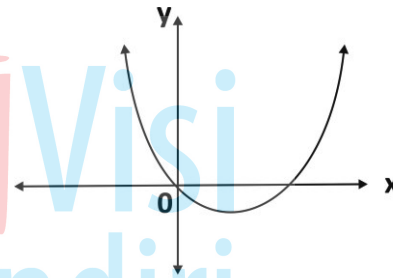
$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ atau } x = 2$$

$$\text{Jadi, nilai } p^2q + pq^2 = 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 30$$

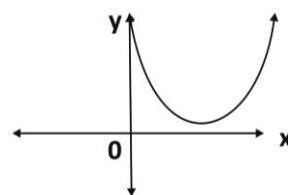
-----**Jawaban: E**

5. Fungsi  $f(x) = x^2 + ax$  mempunyai grafik berikut.

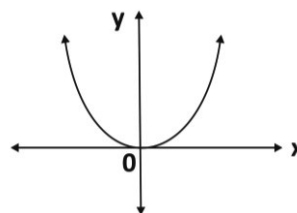


Grafik fungsi  $g(x) = x^2 - ax - 5$  adalah ....

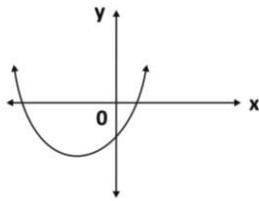
A.



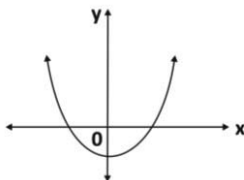
B.



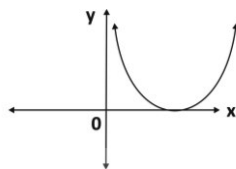
C.



D.



E.



(MATDAS SNMPTN 2010)

#### Pembahasan CERDAS:

Grafik  $g(x) = x^2 + ax$  dapat dianalisis bahwa: koefisien  $x^2$  positif, maka kurva terbuka ke atas dan kurva bergeser ke kanan, maka nilai  $a$  berlawanan tanda dengan koefisien  $x^2 \rightarrow a < 0$ .

Grafik  $g(x) = x^2 - ax - 5$ , dapat dianalisis: koefisien  $x^2$  positif, maka kurva terbuka ke atas. Koefisien  $x$  positif, maka bergeser ke kiri, dan konstanta negatif, maka memotong sumbu  $Y$  negatif. Sehingga dapat kita tarik kesimpulan bahwa grafik  $g(x) = x^2 - ax - 5$  adalah opsi C.

-----**Jawaban: C**

6. Jika grafik fungsi kuadrat  $f(x) = ax^2 + bx + c$  mempunyai titik puncak  $(8, 4)$  dan memotong sumbu- $x$  negatif, maka ...

- A.  $a > 0, b > 0$ , dan  $c > 0$
- B.  $a < 0, b < 0$ , dan  $c > 0$
- C.  $a < 0, b > 0$ , dan  $c < 0$
- D.  $a > 0, b > 0$ , dan  $c < 0$
- E.  $a < 0, b > 0$ , dan  $c > 0$

(TKDU SBMPTN 2013)

#### Pembahasan CERDAS:

Titik puncak  $(8, 4) \rightarrow$  grafik terbuka ke bawah, maka  $a < 0$ .

$$x_p = -\frac{b}{2a} = 8 (+)$$

karena  $a < 0 \rightarrow b > 0$

Memotong sumbu  $x$  negatif  $\rightarrow D > 0$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0$$

$$\Leftrightarrow (+) - 4(-)c > 0$$

$$\Leftrightarrow c > 0$$

-----**Jawaban: E**

7. Untuk  $0 < a < 10$ , fungsi kuadrat  $f(x) = ax^2 + 2ax + 10$  memenuhi sifat ....

- A. selalu negatif
- B. selalu positif
- C. hanya positif di setiap  $x$ , dengan  $0 < x < 10$
- D. hanya negatif di setiap  $x$ , dengan  $0 < x < 10$
- E. hanya positif di setiap  $x$ , dengan  $x < 0$  atau  $x > 10$

(TKDU SBMPTN 2014)

#### Pembahasan CERDAS:

$$0 < a < 10 \rightarrow a > 0$$

$$D = (2a)^2 - 4 \cdot a \cdot 10$$

$$= 4a^2 - 40a < 0$$

Karena  $a > 0, D < 0$ , maka definit positif (selalu positif untuk setiap  $x$ ).

-----**Jawaban: B**

8. Jika parabola  $y = x^2 - 2x + a$  digeser ke kanan searah sumbu  $x$  sejauh 1 satuan sehingga melalui titik  $(0, 0)$ , maka nilai  $a$  adalah ....

- A.  $-3$
- B.  $-1$
- C.  $0$
- D.  $1$
- E.  $3$

(TKDU SBMPTN 2015)

#### Pembahasan CERDAS:

$$y = x^2 - 2x + a$$

$$y = (x - 1)^2 + a - 1$$

Digeser ke kanan sejauh 1 satuan



$$y = ((x-1)-1)^2 + a - 1$$

$$= (x-2)^2 + a - 1$$

Melalui titik (0,0)

$$\Leftrightarrow 0 = (0-2)^2 + a - 1$$

$$\Leftrightarrow 0 = 4 + a - 1$$

$$\Leftrightarrow a = -3$$

Jadi, nilai  $a = -3$

-----**Jawaban: A**

9. Jika grafik fungsi  $y = x^2 - 10x$  memotong sumbu  $x$  di titik A dan B, serta C adalah titik puncaknya, maka luas segitiga ABC adalah ....

- A. 25
- B. 50
- C. 75
- D. 100
- E. 125

(TKDU SBMPTN 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

Fungsi  $y = x^2 - 10x$  memotong sumbu  $x$

$$\rightarrow y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 10$$

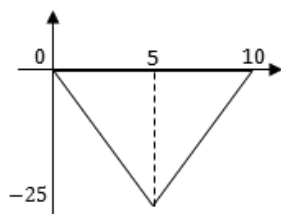
diperoleh titik A(0,0) dan B(10,0)

$$y = x^2 - 10x$$

$$x_p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-10}{2 \cdot 1} = 5$$

$$y_p = (5)^2 - 10(5) = -25$$

diperoleh titik C(5, -25)



$$L_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 25 = 125$$

-----**Jawaban: E**

10. Jika garis  $x - 2y = 3$  tidak memotong maupun menyinggung kurva  $y = x^2 + ax - \frac{15}{16}$ , maka ....

- A.  $a > 2$
- B.  $1 < a < 2$
- C.  $-1 < a < 2$
- D.  $-2 < a < -1$
- E.  $-2 < a < 1$

(TKDU SBMPTN 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

$$y = y$$

$$\frac{x-3}{2} = x^2 + ax - \frac{15}{16}$$

$$x^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x + \frac{19}{16} = 0$$

Syarat tidak memotong tidak menyinggung:  $D < 0$ .

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{19}{16} < 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} - \frac{19}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a+1) < 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \text{ atau } a = -1$$



Jadi,  $-1 < a < 2$

-----**Jawaban: E**



## - BAB 4 - Pertidaksamaan

### Rangkuman Materi

#### A. Pengertian

Pertidaksamaan adalah kalimat matematika terbuka yang menggunakan tanda  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ , dan  $\neq$ .

#### B. Sifat - Sifat Pertidaksamaan

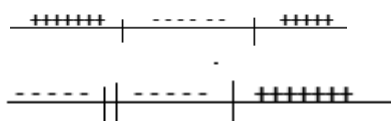
1. Jika  $a$  dan  $b$  bilangan real, maka berlaku  $a > b$  atau  $a = b$  atau  $a < b$
2. Jika  $a > b$  dan  $b > c$ , maka  $a > c$
3. Jika  $a > b$ , maka  $a \pm c > b \pm c$
4. Jika  $a > b$  dan  $c > 0$ , maka  $ac > bc$  dan  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
5. Jika  $a > b$  dan  $c < 0$ , maka  $ac < bc$  dan  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
6. Jika  $m$  genap dan  $a > b$ , maka:
  - $a^m > b^m$ , untuk  $a > 0$  dan  $b > 0$
  - $a^m < b^m$ , untuk  $a < 0$  dan  $b < 0$
7. Jika  $n$  ganjil dan  $a > b$ , maka  $a^n > b^n$
8. Jika  $a > b$ , maka:
  - $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ , untuk  $a$  dan  $b$  bertanda sama
  - $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ , untuk  $a$  dan  $b$  berbeda tanda

#### C. Garis Bilangan

Garis bilangan digunakan untuk mengetahui daerah  $(+/-)$  suatu fungsi.

Cara menentukan garis bilangan:

1. Nolkan salah satu ruas
2. Faktorkan
3. Tes tanda untuk menentukan daerah  $(+/-)$   
Tanda ruas paling kanan sama dengan tanda koefisien pangkat tertinggi.
4. Tentukan intervalnya  
Jika pangkat ganjil berlainan tanda dan pangkat genap sama tanda.



---

#### D. Definit

---

1. Jenis Definit
  - a. Definit Positif  
Fungsi  $f(x)$  dikatakan definit positif jika  $f(x) > 0$  untuk nilai  $x$  berapa pun.
  - b. Definit Negatif  
Fungsi  $f(x)$  dikatakan definit negatif jika  $f(x) < 0$  untuk nilai  $x$  berapa pun.
2. Sifat Definit
  - a. Untuk  $f(x)$  definit positif dan  $g(x)$  sembarang
    - $f(x)g(x) > 0 \rightarrow g(x) > 0$
    - $f(x)g(x) < 0 \rightarrow g(x) < 0$
    - $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \rightarrow g(x) > 0$
    - $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \rightarrow g(x) < 0$
  - b. Untuk  $f(x)$  definit negatif dan  $g(x)$  sembarang
    - $f(x)g(x) > 0 \rightarrow g(x) < 0$
    - $f(x)g(x) < 0 \rightarrow g(x) > 0$
    - $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \rightarrow g(x) < 0$
    - $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \rightarrow g(x) > 0$

---

#### E. Jenis Pertidaksamaan

---

1. Pertidaksamaan Linear  
Penyelesaian: letakkan variabel  $x$  di ruas tersendiri, terpisah dari konstanta - konstanta.
2. Pertidaksamaan Kuadrat  
Penyelesaian:
  - a. Nalkan salah satu ruas
  - b. Faktorkan
  - c. Tetapkan nilai - nilai nolnya
  - d. Tentukan daerah  $(+/-)$
  - e. Tentukan daerah penyelesaian
    - Jika yang ditanyakan  $> 0$  atau  $\geq 0$ , maka daerah penyelesaian adalah daerah  $(+)$ .
    - Jika yang ditanyakan  $< 0$  atau  $\leq 0$ , maka daerah penyelesaian adalah daerah  $(-)$ .
3. Pertidaksamaan Pecahan
  - a. Nalkan salah satu ruas
  - b. Samakan penyebutnya
  - c. Selanjutnya sama dengan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat
4. Pertidaksamaan Bentuk Akar
  - a.  $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$ 
    - (i)  $f(x) \geq 0$
    - (ii)  $g(x) \geq 0$
    - (iii)  $f(x) \leq g(x)$Daerah Penyelesaiannya adalah  $(i) \cap (ii) \cap (iii)$

b.  $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$

(i)  $f(x) \geq 0$

(ii)  $f(x) \geq g(x)$

Daerah Penyelesaiannya adalah (i)  $\cap$  (ii)

5. Pertidaksamaan Harga Mutlak

a.  $|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) \geq 0$

b.  $|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) \leq 0$

c. Definisi Harga Mutlak

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{bila } x < 0 \\ x, & \text{bila } x \geq 0 \end{cases}$$

## Soal dan Pembahasan

1. Semua nilai  $x$  yang memenuhi  $(x + 3)(x - 1) \geq (x - 1)$  adalah ....

- A.  $1 \leq x \leq 3$   
 B.  $x \leq -2$  atau  $x \geq 1$   
 C.  $-3 \leq x \leq -1$   
 D.  $-2 \geq x$  atau  $x \geq 3$   
 E.  $-1 \geq x$  atau  $x \geq 3$

(MATDAS SNMPTN 2012)

**Pembahasan CERDAS:**

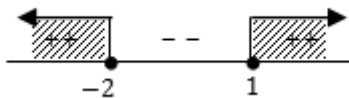
$$(x + 3)(x - 1) \geq (x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) - (x - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3 - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$



$$x \leq -2 \text{ atau } x \geq 1$$

**Jawaban: B**

2. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$\frac{1+x}{1-x} > -1 \text{ adalah ....}$$

- A.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$   
 B.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$   
 C.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$   
 D.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ atau } x > 1\}$   
 E.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ atau } x > 1\}$

(TKDU SBMPTN 2015)

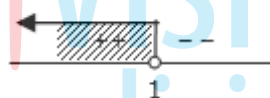
**Pembahasan CERDAS:**

$$\frac{1+x}{1-x} > -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x+1-x}{1-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1-x} > 0$$



$$\text{Jadi, } x < 1$$

**Jawaban: A**

3. Semua bilangan real  $x$  yang memenuhi

$$\frac{8}{x} - \frac{15}{2x+1} \geq 1 \text{ adalah ....}$$

- A.  $-2 \leq x \leq 2$   
 B.  $x \leq -2$  atau  $0 \leq x < 1$   
 C.  $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$  atau  $0 < x \leq 2$   
 D.  $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$  atau  $x \geq 2$   
 E.  $x \leq -2$  atau  $x \geq 2$

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\frac{8}{x} - \frac{15}{2x+1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{x} - \frac{15}{2x+1} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(2x+1) - 15x - x(2x+1)}{x(2x+1)} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 8}{x(2x + 1)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2(x^2 - 4)}{x(2x + 1)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2(x - 2)(x + 2)}{x(2x + 1)} &\geq 0 \end{aligned}$$

Jadi,  $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$  atau  $0 < x \leq 2$

-----Jawaban: C

4. Jika  $-2 < a < -1$ , maka semua nilai  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan

$$\frac{x^2 + 2x - 3a}{x^2 + 4x} \geq 0 \text{ adalah ....}$$

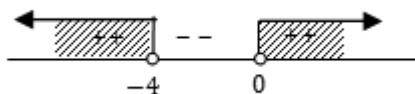
- A.  $x > -4$
- B.  $x < -2$
- C.  $-4 < x < 0$
- D.  $x < -4$  atau  $x > 0$
- E.  $x < -2$  atau  $x > 1$

(TKDU SBMPTN 2013)

#### Pembahasan CERDAS:

Karena  $-2 < a < -1$ , maka  $a < 0$  (bilangan negatif (-))

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x - 3a}{x^2 + 4x} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3(-)}{x^2 + 4x} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\text{definit (+)}}{x(x + 4)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x(x + 4) &> 0 \end{aligned}$$



Jadi,  $x < -4$  atau  $x > 0$

-----Jawaban: D

5. Penyelesaian pertidaksamaan  $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \leq$

$$4\left(1 - \frac{1}{x}\right) - 3 \text{ adalah ....}$$

- A.  $x < -\frac{1}{2}$
- B.  $x \geq -\frac{1}{2}$

- C.  $x \geq 2$
- D.  $x \leq 2$
- E.  $x \leq -\frac{1}{2}$  atau  $x \geq 2$

(TKDU SBMPTN 2014)

#### Pembahasan CERDAS:

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \leq 4\left(1 - \frac{1}{x}\right) - 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \leq 4\left(\frac{x-1}{x}\right) - 3.$$

$$\text{Misalkan } p = \frac{x-1}{x}$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4p + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (p - 3)(p - 1) \leq 0$$

- $p = 3 \rightarrow \frac{x-1}{x} = 3 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$
- $p = 1 \rightarrow \frac{x-1}{x} = 1 \text{ (tm)}$

-----Jawaban: A

6. Semua nilai  $x$  yang memenuhi  $\sqrt{x+10} - \sqrt{x+2} > 2$  adalah ....

- A.  $-2 \leq x < -1$
- B.  $x > 1$
- C.  $-\frac{3}{2} \leq x \leq -1$
- D.  $x > 2$
- E.  $-1 < x < 1$

(TKDU SBMPTN 2014)

#### Pembahasan CERDAS:

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+10} > 2 + \sqrt{x+2}$$

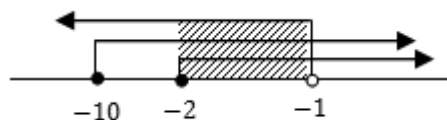
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+10})^2 > (2 + \sqrt{x+2})^2$$

$$\Leftrightarrow x + 10 > 4 + 4\sqrt{x+2} + (x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 1 > \sqrt{x+2}$$

Syarat

- (1)  $1 > x + 2 \rightarrow x < -1$
- (2)  $x + 2 \geq 0 \rightarrow x \geq -2$
- (3)  $x + 10 \geq 0 \rightarrow x \geq -10$



Dari (1), (2) dan (3) diperoleh:

$$-2 \leq x < -1$$

-----Jawaban: A

7. Jika  $m > 0$ , maka himpunan semua penyelesaian pertidaksamaan  $\sqrt{m^2 - x^2} \leq x$  adalah ....

- A.  $\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{m}{2}\}$   
 B.  $\{x \mid \frac{m}{\sqrt{2}} \leq x\}$   
 C.  $\{x \mid x \leq -\frac{m}{\sqrt{2}} \text{ atau } x \geq \frac{m}{\sqrt{2}}\}$   
 D.  $\{x \mid -m \leq x \leq -\frac{m}{\sqrt{2}} \text{ atau } \frac{m}{\sqrt{2}} \leq x \leq m\}$   
 E.  $\{x \mid \frac{m}{\sqrt{2}} \leq x \leq m\}$

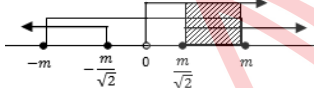
(MATDAS UM UGM 2013)

**Pembahasan CERDAS:**

$\sqrt{m^2 - x^2} \leq x$ , syarat:

- 1)  $m^2 - x^2 \geq 0$   
 $\Leftrightarrow (m - x)(m + x) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow x = m \vee x = -m$   
 2)  $m^2 - x^2 \leq x^2$   
 $\Leftrightarrow m^2 - 2x^2 \leq 0$   
 $\Leftrightarrow (m - \sqrt{2}x)(m + \sqrt{2}x) \leq 0$   
 $\Leftrightarrow x = \frac{m}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{m}{\sqrt{2}}$

Dari (1)  $\cap$  (2), dan  $m > 0$  diperoleh



Jadi, himpunan penyelesaian:

$$\left\{x \mid \frac{m}{\sqrt{2}} \leq x \leq m\right\}$$

-----Jawaban: E

8. Semua bilangan real  $x$  yang memenuhi  $|x + 2| + x^2 > 4$  adalah ....

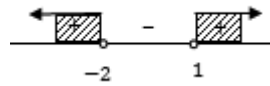
- A.  $-2 < x < 1$   
 B.  $x < -2$  atau  $x > 0$   
 C.  $x < -2$  atau  $x > 1$   
 D.  $x < 0$  atau  $x > 1$   
 E.  $x < -2$  atau  $x > 2$

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

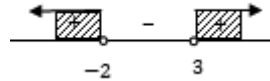
$$|x + 2| \begin{cases} x + 2, & x \geq -2 \\ -x - 2, & x < -2 \end{cases}$$

- (i)  $|x + 2| + x^2 > 4$   
 $x + 2 + x^2 > 4$   
 $x^2 + x - 2 > 0$   
 $(x + 2)(x - 1) > 0$



Karena  $x \geq -2$ , maka yang memenuhi adalah  $x > 1$ .

- (ii)  $|x + 2| + x^2 > 4$   
 $-x - 2 + x^2 > 4$   
 $x^2 - x - 6 > 0$   
 $(x - 3)(x + 2) > 0$



Karena  $x < -2$ , maka yang memenuhi adalah  $x < -2$ .

Dari (i)  $\cup$  (ii) maka  $x$  yang memenuhi adalah  $x < -2$  atau  $x > 1$ .

-----Jawaban: C

9. Semua bilangan real  $x$  yang memenuhi  $x - 1 < \frac{2}{|x|}$  adalah ....

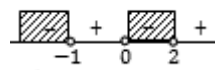
- A.  $x < 1$   
 B.  $x < 0$   
 C.  $x > 0$   
 D.  $x < 0$  atau  $0 < x < 2$   
 E.  $-1 < x < 0$  atau  $0 < x < 2$

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$|x| \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

- (i) Untuk  $x \geq 0 \rightarrow x - 1 < \frac{2}{x}$   
 $\Leftrightarrow x - 1 - \frac{2}{x} < 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x} < 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{(x - 2)(x + 1)}{x} < 0$



Karena  $x > 0$ , maka yang memenuhi  $0 < x < 2$ .

- (ii) Untuk  $x < 0 \rightarrow x - 1 < \frac{2}{-x}$   
 $\Leftrightarrow x - 1 + \frac{2}{x} < 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{x} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{def}(+)}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

Dari (i)  $\cup$  (ii) diperoleh daerah penyelesaiannya adalah  $x < 0$  dan  $0 < x < 2$ .

-----**Jawaban: D**

**10.** Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan  $\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$  adalah ....

- A.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 2\}$
- B.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 2\}$
- C.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < 0 \text{ atau } 0 < x < 2\}$
- D.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq \sqrt{3}\}$
- E.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 2\}$

**Pembahasan CERDAS:**

$$|x| \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

- $x \geq 0$

$$\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{x} \geq 0 \rightarrow \sqrt{4-x^2} \geq -1$$

(terpenuhi)

- $x < 0$

$$\sqrt{4-x^2} + \frac{-x}{x} \geq 0$$

Syarat:

$$(1) \sqrt{4-x^2} \geq 1$$

$$4-x^2 \geq 1$$

$$3-x^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) \geq 0$$

$$(2) 4-x^2 \geq 0$$

$$(2-x)(2+x) \geq 0$$

$$(3) x \neq 0$$

Dari (1), (2) dan (3) diperoleh

$$-\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq \sqrt{3}$$

-----**Jawaban: D**



## - BAB 5 - Eksponen dan Logaritma

### Rangkuman Materi

#### A. Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma

##### 1. Bentuk Pangkat dan Akar

- a)  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ kali}}$
- b)  $a^0 = 1$ , dengan  $a \neq 0$
- c)  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- d)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- e)  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ , dengan  $a \neq 0$
- f)  $(a^m)^n = a^{mn}$
- g)  $(a \cdot b)^n = a^n b^n$
- h)  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$  dengan  $b \neq 0$
- i)  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ,  $a \geq 0$ ,  $a$  bilangan positif
- j)  $a^{\frac{p}{m \cdot n}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}}$
- k)  $b^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b$
- l)  $p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$
- m)  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- n)  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- o)  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}}$ , dengan  $a > b$
- p) Sekawan dari  $\sqrt{a}$  adalah  $\sqrt{a}$
- q) Sekawan dari  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  adalah  $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$

##### 2. Logaritma

- a)  ${}^a\log b = c \Leftrightarrow a^c = b$ , untuk  $a > 0$  dan  $a \neq 1$
- b)  ${}^a\log a = 1$
- c)  ${}^a\log b = \frac{1}{{}^b\log a} = \frac{{}^p\log b}{{}^p\log a}$ , untuk  $p > 0$  dan  $p \neq 1$
- d)  ${}^a\log(bd) = {}^a\log b + {}^a\log d$
- e)  ${}^a\log\left(\frac{b}{d}\right) = {}^a\log b - {}^a\log d$
- f)  ${}^a\log b^n = \left(\frac{n}{m}\right) ({}^a\log b)$



- g)  ${}^a\log b \cdot {}^b\log c \cdot {}^c\log d = {}^a\log d$   
h) (a)  ${}^{a\log b} = b$

## B. Persamaan dan Pertidaksamaan Eksponen

### 1. Persamaan Eksponen

Untuk  $0 < a < 1, a \neq b, 0 < b < 1$ , dan  $a, b > 1$

- a)  $a^{f(x)} = a^m \Rightarrow f(x) = m$   
b)  $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$   
c)  $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow f(x) = 0$

### 2. Pertidaksamaan Eksponen

Syarat	Bentuk	Penyelesaian
$a > 1$	$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$	$f(x) \geq g(x)$
	$a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$	$f(x) \leq g(x)$
$0 < a < 1$	$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$	$f(x) \leq g(x)$
	$a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$	$f(x) \geq g(x)$

## C. Persamaan dan Pertidaksamaan Logaritma

### 1. Persamaan Logaritma

- a)  ${}^a\log f(x) = {}^a\log m \rightarrow f(x) = m$   
b)  ${}^a\log f(x) = {}^a\log g(x) \rightarrow f(x) = g(x)$   
c)  ${}^a\log f(x) = {}^b\log f(x) \Rightarrow f(x) = 1$   
d)  ${}^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x) \begin{cases} f(x) > 0; g(x) > 0; \\ h(x) > 0; f(x) \neq 1; \\ g(x) = h(x) \end{cases}$

### 2. Pertidaksamaan Logaritma

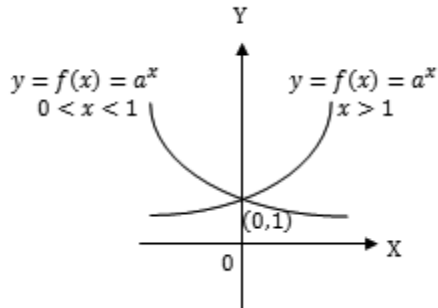
Syarat	Bentuk	Penyelesaian
$a > 1$	${}^a\log f(x) \geq {}^a\log g(x)$	$f(x) \geq g(x)$
	${}^a\log f(x) \leq {}^a\log g(x)$	$f(x) \leq g(x)$
	${}^a\log f(x) \geq b$	$f(x) \geq a^b$
$0 < a < 1$	${}^a\log f(x) \geq {}^a\log g(x)$	$f(x) \leq g(x)$
	${}^a\log f(x) \leq {}^a\log g(x)$	$f(x) \geq g(x)$
	${}^a\log f(x) \geq b$	$f(x) \leq a^b$

#### D. Grafik Fungsi Eksponen dan Logaritma

##### 1. Grafik Fungsi Eksponen $f(x) = y = a^x$

Sifat-sifat fungsi eksponen:

- a) Untuk  $a > 1$  merupakan fungsi monoton naik dan untuk  $0 < a < 1$  merupakan fungsi monoton turun

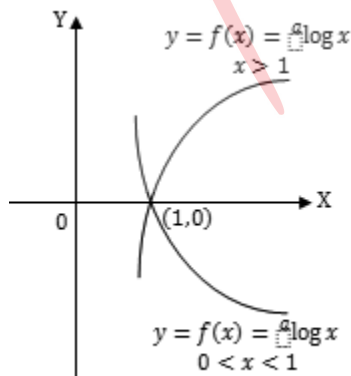


- b) Grafiknya selalu di atas sumbu X dan sumbu Y merupakan asimtot datar  
c) Definit positif karena fungsi selalu bernilai positif  
d) Memotong sumbu koordinat di titik  $(0,1)$

##### 2. Grafik Fungsi Logaritma $f(x) = y = {}^a\log x$

Sifat-sifat fungsi logaritma:

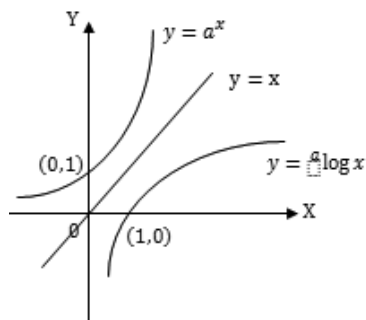
- a) Untuk  $a > 1$  merupakan fungsi monoton naik dan untuk  $0 < a < 1$  merupakan fungsi monoton turun



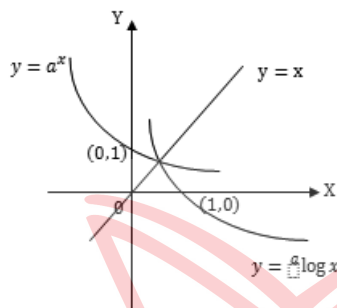
- b) Grafiknya selalu berada di sebelah kanan sumbu Y ( terdefinisi untuk  $x > 0$ )  
c) Sumbu Y merupakan asimtot tegak  
d) Memotong sumbu koordinat di titik  $(1,0)$ .

### 3. Hubungan Grafik Fungsi Eksponen dan Grafik Fungsi Logaritma

a) Grafik fungsi eksponen  $y = a^x$  dan fungsi logaritma  $y = {}^a\log x$  ( untuk  $a > 1$  )



b) Grafik fungsi eksponen  $y = a^x$  dan fungsi logaritma  $y = {}^a\log x$  ( untuk  $0 < a < 1$  )



#### Kesimpulan:

- 1) Fungsi eksponen adalah fungsi invers dari fungsi logaritma dan sebaliknya.
- 2) Grafik fungsi eksponen memotong sumbu Y positif.
- 3) Grafik fungsi logaritma memotong sumbu X positif.

### Soal dan Pembahasan

1. Jika  $4^{m+1} + 4^m = 15$ , maka  $8^m = \dots$

- A.  $3\sqrt{3}$
- B.  $2\sqrt{3}$
- C.  $\sqrt{3}$
- D. 3
- E. 6

(TKDU SBMPTN 2013)

#### Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned}
 4^{m+1} + 4^m &= 15 \\
 \Leftrightarrow 4 \cdot 4^m + 4^m &= 15 \\
 \Leftrightarrow 5 \cdot 4^m &= 15 \\
 \Leftrightarrow 4^m &= 3
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (2^m)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2^m = \sqrt{3}$$

$$\text{Sehingga } 8^m = (2^m)^3 = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$$

-----**Jawaban: A**

2. Jika  $4^x - 4^{x-1} = 6$ , maka  $(2x)^x$  sama dengan ...

- A. 3
- B.  $3\sqrt{3}$
- C. 9
- D.  $9\sqrt{3}$
- E. 27

(TKDU SBMPTN 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

$$4^x - 4^{x-1} = 6$$

$$\Leftrightarrow 4^x - \frac{1}{4} \cdot 4^x = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \cdot 4^x = 6$$

$$\Leftrightarrow 4^x = 8$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Jadi, } (2x)^x = \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

-----**Jawaban: B**

3. Jika  $A^{2x} = 2$ , maka  $\frac{A^{5x} - A^{-5x}}{A^{3x} + A^{-3x}} = \dots$

- A.  $\frac{31}{18}$   
 B.  $\frac{31}{9}$   
 C.  $\frac{32}{18}$   
 D.  $\frac{33}{9}$   
 E.  $\frac{33}{18}$

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$A^{2x} = 2 \rightarrow A^x = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{A^{5x} - A^{-5x}}{A^{3x} + A^{-3x}} &= \frac{(A^x)^5 - \frac{1}{(A^x)^5}}{(A^x)^3 + \frac{1}{(A^x)^3}} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^5 - \frac{1}{(\sqrt{2})^5}}{(\sqrt{2})^3 + \frac{1}{(\sqrt{2})^3}} \\ &= \frac{4\sqrt{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\frac{32-1}{4\sqrt{2}}}{\frac{8+1}{2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{31}{18} \end{aligned}$$

-----**Jawaban: A**

4. Jika  $6(3^{40})(^2\log a) + 3^{41}(^2\log a) = 3^{43}$ , maka nilai  $a$  adalah ....

- A.  $\frac{1}{8}$   
 B.  $\frac{1}{4}$

- C. 4  
 D. 8  
 E. 16

(MATDAS SNMPTN 2011)

**Pembahasan CERDAS:**

$$6(3^{40})(^2\log a) + 3^{41}(^2\log a) = 3^{43}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3(3^{40})(^2\log a) + 3^{41}(^2\log a) = 3^{43}$$

$$\Leftrightarrow 2(3^{41})(^2\log a) + 3^{41}(^2\log a) = 3^{43}$$

$$\Leftrightarrow 3^{42}(^2\log a) = 3^{43}$$

$$\Leftrightarrow ^2\log a = 3$$

$$\Leftrightarrow a = 8$$

-----**Jawaban: D**

5. Jika  $^b\log a + ^b\log a^2 = 4$ , maka nilai  $^a\log b$  adalah ....

- A.  $\frac{3}{4}$   
 B.  $\frac{1}{2}$   
 C.  $\frac{4}{3}$   
 D. 2  
 E.  $\frac{3}{2}$

(MATDAS SNMPTN 2012)

**Pembahasan CERDAS:**

$$^b\log a + ^b\log a^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow ^b\log a + 2 ^b\log a = 4$$

$$\Leftrightarrow 3 ^b\log a = 4$$

$$\Leftrightarrow ^b\log a = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow ^a\log b = \frac{3}{4}$$

-----**Jawaban: A**

6. Jika  $^a\log b + ^b\log a = 3$ , maka nilai  $(^a\log b)^2 + (^b\log a)^2$  adalah ....

- A. 2  
 B. 5  
 C. 7  
 D. 9  
 E. 11

(TKDU SBMPTN 2013)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned}
& {}^a\log b + {}^b\log a = 3 \text{ (kuadratkan)} \\
& \Leftrightarrow ({}^a\log b + {}^b\log a = 3)^2 = 3^2 \\
& \Leftrightarrow ({}^a\log b)^2 + 2({}^a\log b)({}^b\log a) + \\
& \quad ({}^b\log a)^2 = 9 \\
& \Leftrightarrow ({}^a\log b)^2 + 2 + ({}^b\log a)^2 = 9 \\
& \Leftrightarrow ({}^a\log b)^2 + ({}^b\log a)^2 = 7
\end{aligned}$$

**Jawaban: C**

7. Jika  $\frac{{}^3\log x}{{}^3\log w} = 2$  dan  ${}^{xy}\log w = \frac{2}{5}$ , maka

nilai  $\frac{{}^2\log w}{{}^2\log y}$  adalah ....

- A. 8  
B. 6  
C. 4  
D. 2  
E. 1

(TKDU SBMPTN 2013)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\bullet \frac{{}^3\log x}{{}^3\log w} = 2 \rightarrow {}^w\log x = 2 \rightarrow x = w^2$$

$$\bullet {}^{xy}\log w = \frac{2}{5}$$

$$\frac{{}^2\log w}{{}^2\log xy} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{{}^2\log w}{{}^2\log x + {}^2\log y} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{{}^2\log w}{{}^2\log w^2 + {}^2\log y} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{{}^2\log w}{2 \cdot {}^2\log w + {}^2\log y} = \frac{2}{5}$$

$$5 \cdot {}^2\log w = 2(2 \cdot {}^2\log w + {}^2\log y)$$

$$5 \cdot {}^2\log w = 4 \cdot {}^2\log w + 2 \cdot {}^2\log y$$

$${}^2\log w = 2 \cdot {}^2\log y$$

$$\frac{{}^2\log w}{{}^2\log y} = 2$$

$$\text{Jadi, nilai } \frac{{}^2\log w}{{}^2\log y} = 2$$

**Jawaban: D**

8. Jika  $p = ({}^a\log 2)({}^{a^2b}\log 4)$ , maka  $\frac{1}{p} = \dots$

- A.  $2 \cdot {}^2\log a + {}^2\log \sqrt{a} \cdot {}^2\log b$   
B.  $2 \cdot {}^2\log a + \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(ab)$

C.  $({}^2\log a)^2 + \frac{1}{2} \cdot {}^2\log a \cdot {}^2\log b$

D.  $({}^2\log a)^2 + \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(ab)$

E.  $({}^2\log a)^2 + {}^2\log \sqrt{ab}$

(TKDU SBMPTN 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

$$p = ({}^a\log 2)({}^{a^2b}\log 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{\{({}^a\log 2)({}^{a^2b}\log 4)\}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} = ({}^2\log a)({}^4\log a^2b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} = ({}^2\log a)({}^{2^2}\log a^2b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} = ({}^2\log a)\left(\frac{1}{2}({}^2\log a^2 + {}^2\log b)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} = ({}^2\log a)\left(\frac{1}{2}(2 \cdot {}^2\log a + {}^2\log b)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} = ({}^2\log a)\left(({}^2\log a) + \frac{1}{2}({}^2\log b)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} = ({}^2\log a)^2 + \frac{1}{2}({}^2\log a)({}^2\log b)$$

**Jawaban: C**

9. Diketahui  ${}^p\log 2 = 8$  dan  ${}^q\log 8 = 4$ . Jika  $s = p^4$  dan  $t = q^2$ , maka nilai  ${}^t\log s$  adalah ....

- A.  $\frac{1}{4}$   
B.  $\frac{1}{3}$   
C.  $\frac{2}{3}$   
D.  $\frac{3}{2}$   
E.  $\frac{3}{3}$

(TKPA SBMPTN 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

$${}^p\log 2 = 8 \rightarrow p^8 = 2 \rightarrow p = 2^{\frac{1}{8}}$$

$${}^q\log 8 = 4 \rightarrow q^4 = 8 \rightarrow q = 8^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

Sehingga,

$${}^t\log s = {}^{q^2}\log p^4$$

$$= \frac{4}{2} \cdot {}^q\log p$$

$$= 2 \cdot {}^{2^{\frac{3}{4}}}\log 2^{\frac{1}{8}}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{\frac{8}{3}}\right) \cdot {}^2\log 2 \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

-----**Jawaban: B**

10. Diketahui

$$f(n) = {}^3\log 4 \cdot {}^4\log 5 \dots {}^{n-1}\log n$$

Jika  $a_1$  dan  $a_2$  penyelesaian persamaan  $f(a) + f(a^2) + \dots + f(a^9) = f(a) \cdot f(a^5)$ , maka  $a_1 a_2 = \dots$

- A.  $3^7$
- B.  $3^8$
- C.  $3^9$
- D.  $3^{10}$
- E.  $3^{11}$

(TKDU SBMPTN 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

$$f(n) = {}^3\log 4 \cdot {}^4\log 5 \dots {}^{n-1}\log n = {}^3\log n$$

$$f(a) + f(a^2) + \dots + f(a^9) = f(a) \cdot f(a^5)$$

$$\Leftrightarrow {}^3\log a + {}^3\log a^2 + \dots + {}^3\log a^9$$

$$= {}^3\log a \cdot {}^3\log a^5$$

$$\Leftrightarrow {}^3\log(a \cdot a^2 \dots a^9) = {}^3\log a \cdot 5 \cdot {}^3\log a$$

$$\Leftrightarrow {}^3\log a^{45} = 5({}^3\log a)^2$$

$$\Leftrightarrow 45 \cdot {}^3\log a = 5({}^3\log a)^2$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot {}^3\log a = ({}^3\log a)^2$$

$$\Leftrightarrow ({}^3\log a)^2 - 9 \cdot {}^3\log a = 0$$

$$\Leftrightarrow ({}^3\log a)({}^3\log a - 9) = 0$$

Maka,

- ${}^3\log a = 0 \rightarrow a_1 = 3^0 = 1$

- ${}^3\log a - 9 = 0$

$$\rightarrow {}^3\log a = 9 \rightarrow a_2 = 3^9$$

$$\text{Jadi, } a_1 a_2 = 3^9$$

-----**Jawaban: C**





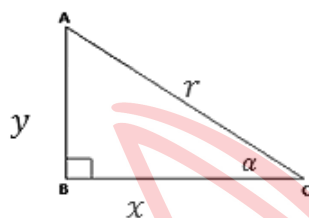
## - BAB 6 - Trigonometri

### Rangkuman Materi

#### A. Definisi

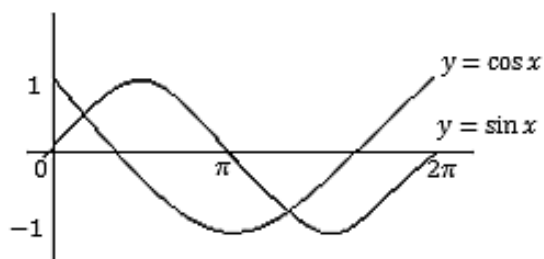
##### 1. Perbandingan Trigonometri

Pada segitiga siku - siku ABC, berlaku



- a)  $\sin \alpha = \frac{y}{r}$
- b)  $\cos \alpha = \frac{x}{r}$
- c)  $\tan \alpha = \frac{y}{x}$
- d)  $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{r}{y}$
- e)  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x}$
- f)  $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{x}{y}$

##### 2. Grafik Fungsi



## B. Sudut dan Kuadran

### 1. Pembagian Daerah

Kuadran	I	II	III	IV
Absis (x)	+	−	−	+
Ordinat (y)	+	+	−	−

### 2. Tanda-Tanda Fungsi

Kuadran	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−

### 3. Sudut-Sudut Istimewa

Kuadran	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$

### 4. Sudut Berelasi

- Kalau kita gunakan  $(90^\circ \pm \dots)$  atau  $(270^\circ \pm \dots)$ 
  - Fungsi berubah

Mula-Mula	Perubahan
sin	$+/- \cos$
cos	$+/- \sin$
tan	$+/- \cot$

- Tanda  $+/-$  mengikuti kuadran

- Kalau kita gunakan  $(180^\circ \pm \dots)$  atau  $(360^\circ - \dots)$ 
  - Fungsi tetap

Mula-Mula	Perubahan
sin	$+/- \sin$
cos	$+/- \cos$
tan	$+/- \tan$

- Tanda  $+/-$  mengikuti kuadran

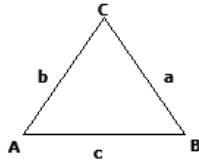


---

### C. Dalil Segitiga

---

#### 1. Aturan Sinus



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

#### 2. Aturan Cosinus

a)  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  atau

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

b)  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$  atau

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

c)  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$  atau

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

#### 3. Aturan Tangen

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$$

#### 4. Luas Segitiga

a) Jika diketahui ketiga sisinya

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ dengan } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

b) Jika diketahui dua sisi dan sudut yang diapitnya

$$L = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$$

---

### D. Rumus-Rumus Trigonometri

---

#### 1. Identitas

a) Kebalikan

1)  $\csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{r}{y}$

2)  $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{r}{x}$

3)  $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{y}{x}$

b) Ekuivalen

1)  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

$$2) \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

c) Pythagoras

$$1) \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$2) 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$3) 1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

## 2. Penjumlahan dan Selisih Dua Sudut

$$a) \sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$b) \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$c) \tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

## 3. Sudut Rangkap

$$a) \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$b) \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 1 - 2 \sin^2 A$$

$$= 2 \cos^2 A - 1$$

$$c) \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

## 4. Jumlah dan Selisih Sinus dan Cosinus

$$a) \sin A + \sin B = 2 \sin \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right)$$

$$b) \sin A - \sin B = 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( \frac{A-B}{2} \right)$$

$$c) \cos A + \cos B = 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right)$$

$$d) \cos A - \cos B = -2 \sin \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( \frac{A-B}{2} \right)$$

## 5. Rumus Perkalian Sinus dan Cosinus

$$a) 2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$b) 2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$c) 2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$$

$$d) -2 \sin A \sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$$

## 6. Bentuk $k \cos(x - \alpha)$

Bentuk:

$$a \cos px + b \sin px = k \cos(px - \alpha)$$

dengan ketentuan  $k = \sqrt{a^2 + b^2}$  dan  $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

Kuadran dari  $\alpha$  ditentukan dengan melihat letak  $a$  dan  $b$ .

Kuadran	I	II	III	IV
a	+	-	-	+
b	+	+	-	-

**Catatan:**  $\cos \alpha$  terdefinisi pada range  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

### E. Persamaan Trigonometri

1.  $\sin x = \sin \alpha$ , maka  $x = \alpha + k \cdot 2\pi$  atau  $x = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$
  2.  $\cos x = \cos \alpha$ , maka  $x = \pm \alpha + k \cdot 2\pi$
  3.  $\tan x = \tan \alpha$ , maka  $x = \alpha + k \cdot \pi$
- Dengan ketentuan  $k$  bilangan bulat

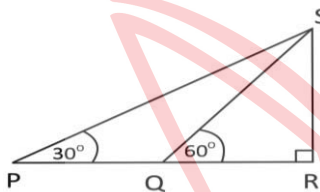
### F. Pertidaksamaan Trigonometri

Langkah-langkahnya:

1. Buat garis bilangan dengan  $x$  adalah penyelesaian dari persamaan trigonometrinya.
2. Jangan lupa untuk  $x$  yang menyebabkan nilai  $x$  tidak terdefinisi, misalnya:  $\tan 90^\circ$ .
3. Tentukan tanda (+/-) pada garis bilangan, dengan cara memasukkan salah satu nilai pada interval tertentu.

## Soal dan Pembahasan

1. Perhatikan gambar!



Jika  $PQ = 10\sqrt{3}$ , maka  $PS = \dots$

- A. 20
- B.  $20\sqrt{3}$
- C. 30
- D.  $30\sqrt{3}$
- E.  $36\sqrt{3}$

(MATDAS SNMPTN 2007)

#### Pembahasan CERDAS:

$$\tan 60^\circ = \frac{SR}{QR}$$

$$\sqrt{3} = \frac{SR}{QR} \rightarrow SR = \sqrt{3}QR$$

$$\tan P = \frac{SR}{PR}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{SR}{PQ + QR}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}QR}{10\sqrt{3} + QR}$$

$$3QR = QR + 10\sqrt{3}$$

$$QR = 5\sqrt{3} \rightarrow SR = 15 \text{ dan } PR = 15\sqrt{3}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} PS &= \sqrt{(PR)^2 + (SR)^2} \\ &= \sqrt{(15\sqrt{3})^2 + (15)^2} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Jawaban: C

2. Jika  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  dan  $\cos x = \tan x$ , maka nilai  $\sin x$  adalah ....

- A.  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
- B.  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- C.  $\frac{-1+\sqrt{2}}{5}$
- D.  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- E.  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(SPMK UB 2009)

#### Pembahasan CERDAS:

$$\cos x = \tan x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Karena  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , maka  $\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

-----**Jawaban: D**

3. Jika sudut  $\alpha$  memenuhi  $\cos^2 \alpha + 2 \sin(\pi - \alpha) = \sin^2(\pi + \alpha) + 1\frac{1}{2}$ , maka  $\sin \alpha = \dots$
- $\frac{1}{2}$
  - $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
  - $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
  - $\sqrt{3}$
  - 1

(MATDAS UM UGM 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\cos^2 \alpha + 2 \sin(\pi - \alpha) = \sin^2(\pi + \alpha) + 1\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha = \sin^2 \alpha + 1\frac{1}{2}$$

$$(1 - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha - \sin^2 \alpha - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$2 \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{2} = 0$$

$$4 \sin^2 \alpha - 4 \sin \alpha + 1 = 0$$

$$(2 \sin \alpha - 1)^2 = 0$$

$$2 \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

-----**Jawaban: A**

4. Jika  $\cos x = 2 \sin x$ , maka nilai  $\sin x \cos x$  adalah ....
- $\frac{1}{5}$
  - $\frac{1}{4}$
  - $\frac{1}{3}$
  - $\frac{2}{5}$
  - $\frac{2}{3}$

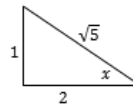
(TKDU SBMPTN 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\cos x = 2 \sin x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\tan x = \frac{1}{2}$$



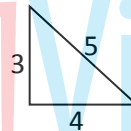
$$\text{Jadi, nilai } \sin x \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$$

-----**Jawaban: D**

5. Jika  $1 - \cot \alpha = -\frac{1}{3}$ , maka nilai  $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \dots$
- $\frac{17}{25}$
  - 1
  - $\frac{6}{5}$
  - $\frac{31}{25}$
  - $\frac{7}{5}$

(MATDAS UM UGM 2013)

**Pembahasan CERDAS:**



$$\bullet \quad 1 - \cot \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\cot \alpha = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\bullet \quad \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + 2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{24}{25} + \frac{32}{25} - \frac{25}{25}$$

$$= \frac{31}{25}$$

-----**Jawaban: D**

6. Jika  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ , maka  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \dots$
- $\frac{1}{2}$
  - $\frac{3}{4}$
  - $\frac{9}{16}$
  - $\frac{5}{8}$

E.  $\frac{11}{16}$

(MATDAS SNMPTN 2009)

**Pembahasan CERDAS:**

Ingat!

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2)\end{aligned}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ (kuadratkan)}$$

$$\Leftrightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}\sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{8}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8}$$

$$= \frac{11}{16}$$

$$= \frac{11}{16}$$

-----**Jawaban: E**

7. Nilai dari  $\cos^2(15^\circ) + \cos^2(35^\circ) + \cos^2(55^\circ) + \cos^2(75^\circ)$  adalah ....

- A. 2  
B.  $\frac{3}{2}$   
C. 1  
D.  $\frac{1}{2}$   
E. 0

(MATDAS SNMPTN 2008)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\cos^2(15^\circ) + \cos^2(35^\circ) + \cos^2(55^\circ) + \cos^2(75^\circ)$$

$$= (\cos^2(15^\circ) + \cos^2(75^\circ)) + (\cos^2(35^\circ) + \cos^2(55^\circ))$$

$$= (\cos^2(15^\circ) + \sin^2(15^\circ)) + (\cos^2(35^\circ) + \sin^2(35^\circ))$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

-----**Jawaban: A**

8. Hasil dari  $\sin^2 1 + \sin^2 2 + \sin^2 3 + \dots + \sin^2 89$  adalah ....

- A. 43  
B. 43,5  
C. 44  
D. 44,5  
E. 90

(SM UNPAD 2010)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\sin^2 1 + \sin^2 2 + \sin^2 3 + \dots + \sin^2 89$$

$$= (\sin^2 1 + \sin^2 89) +$$

$$(\sin^2 2 + \sin^2 88) + \dots +$$

$$(\sin^2 44 + \sin^2 46)$$

$$= (\sin^2 1 + \cos^2 1) +$$

$$(\sin^2 2 + \cos^2 2) + \dots +$$

$$(\sin^2 44 + \cos^2 44)$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{44 \text{ suku}}$$

$$= 44$$

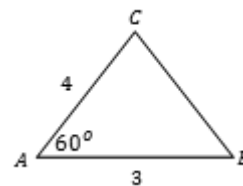
-----**Jawaban: C**

9. Dalam  $\triangle ABC$  jika  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ , dan  $\angle BAC = 60^\circ$ , maka  $\tan \angle ABC = \dots$

- A.  $\frac{1}{6}\sqrt{3}$   
B.  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$   
C.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$   
D.  $\sqrt{3}$   
E.  $2\sqrt{3}$

(MATDAS SNMPTN 2008)

**Pembahasan CERDAS:**



Menggunakan aturan cos

$$(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2 - 2(AC)(AB) \cos 60^\circ$$

$$= 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 16 + 9 - 12$$

$$= 13$$

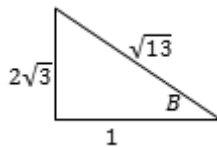
$$BC = \sqrt{13}$$

Menggunakan aturan sin

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{4}{\sin B}$$

$$\Leftrightarrow \sin B = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$



Sehingga  $\tan \angle ABC = 2\sqrt{3}$

-----**Jawaban: E**

10. Jika  $0 \leq x \leq 2\pi$  dan  $0 \leq y \leq 2\pi$  memenuhi persamaan  $\sin(y - x) = \sin y \cos x$ , maka  $\cos y \sin x = \dots$

- A. 1
- B.  $\frac{1}{2}$
- C. 0
- D.  $-\frac{1}{2}$
- E. -1

(MATDAS SNMPTN 2010)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\sin(y - x) = \sin y \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin y \cos x - \cos y \sin x = \sin y \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos y \sin x = 0$$

-----**Jawaban: C**





## - BAB 7 - Statistik dan Peluang

### Rangkuman Materi

#### A. Definisi

##### 1. Ukuran Pemusatan dan Penyebaran

- a) **Pemusatan** adalah ukuran yang menggambarkan pemusatan data tersebut pada suatu nilai tertentu. Contoh: rata-rata, modus, median, kuartil.
- b) **Penyebaran** adalah ukuran yang menggambarkan penyebaran data tersebut dan dapat dikaitkan dengan simpangan (lebar data) dari suatu nilai tertentu. Contoh: jangkauan, hamparan, simpangan kuartil, simpangan rata-rata, dan lainnya.

##### 2. Perumusan Ukuran Statistika

Perumusan ukuran statistika dibedakan menjadi 2 jenis data, yaitu

- a) **Data tunggal**: data yang dituliskan dengan mendaftar, satu per satu.
- b) **Data kelompok**: data yang dituliskan dalam bentuk interval kelas.

##### 3. Ukuran Pemusatan Data Kelompok

Jika data dalam bentuk grafik, maka ubahlah dalam bentuk tabel, kemudian cari 4 unsur, yaitu kelas, nilai tengah, frekuensi, dan frekuensi kumulatif seperti tabel berikut:

Kelas	Interval		Nilai Tengah	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif
	Tepi Bawah	Tepi Atas			
a s/d b	a - 0,5	b + 0,5	$\frac{a + b}{2}$	p	p
c s/d d	c - 0,5	d + 0,5	$\frac{c + d}{2}$	q	p + q
dan seterusnya					

##### 4. Ukuran Pemusatan

- a) **Mean ( $\bar{x}$ )**  
Jumlah semua data dibagi banyak data.  
Data tunggal:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Data kelompok:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i x_i$$

Ket:

$n$  = banyaknya data

$x_i$  = titik tengah kelas ke- $i$

$f_i$  = frekuensi kelas ke- $i$

b) Median ( $Me$ )

Nilai tengah dari data yang sudah diurutkan dari nilai terkecil.

Data Tunggal:

- **Data ganjil:** ambil nilai yang berada di tengah
- **Data genap:** ambil rata-rata dua data yang berada di tengah

Data kelompok:

$$Me = L_2 + \left( \frac{\frac{n}{2} - (\sum f)_2}{f_2} \right) c$$

Ket:

$L_2$  = tepi bawah kelas median

$n$  = banyaknya data

$(\sum f)_2$  = jumlah frekuensi sebelum kelas median

$f_2$  = frekuensi kelas median

$c$  = panjang interval kelas

c) Modus ( $Mo$ )

Nilai yang sering muncul.

Data tunggal: ambil data yang jumlahnya paling banyak.

Data kelompok:

$$Mo = L_0 + \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) \cdot c$$

Ket:

$L_0$  = tepi bawah kelas modus

$d_1$  = selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas **sebelum** modus

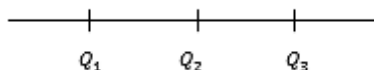
$d_2$  = selisih frekuensi kelas modus dengan frekuensi kelas **sesudah** modus

$c$  = panjang interval kelas

d) Kuartil ( $Q_i$ )

Membagi data menjadi 4 bagian yang sama setelah data diurutkan dari yang terkecil.

Data tunggal:



$Q_1$  = kuartil bawah

$Q_2$  = Median

$Q_3$  = kuartil atas



Data kelompok:

$$Q_i = L_i + \left( \frac{\frac{n}{4} - (\sum f)_i}{f_{Qi}} \right) c$$

Ket:

$L_i$  = tepi bawah kuartil

$n$  = banyaknya data

$(\sum f)_i$  = jumlah frekuensi sebelum kelas kuartil

$f_{Qi}$  = frekuensi kelas kuartil

$c$  = panjang interval kelas

e) Desil ( $D_i$ )

Membagi data menjadi 10 bagian yang sama setelah data diurutkan dari yang terkecil.

Data kelompok:

$$D_i = L_i + \left( \frac{\frac{n}{10} - (\sum f)_i}{f_{Di}} \right) c$$

## 5. Ukuran penyebaran

a) Jangkauan/Range (J)

Selisih antara data terbesar dengan data terkecil.

$$J = x_n - x_1$$

b) Jangkauan Antarkuartil/Hamparan (R)

Selisih antara kuartil atas dengan kuartil bawah.

$$R = Q_3 - Q_1$$

c) Simpangan kuartil/Jangkauan semi interkuartil ( $Q_d$ )

Simpangan antarkuartil.

$$Q_d = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1)$$

d) Simpangan rata-rata (SR)

Simpangan terhadap rata-rata.

Data tunggal:

$$SR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$$

Data kelompok:

$$SR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i |x_i - \bar{x}|$$

e) Simpangan Baku/Standar Deviasi (s)

Data tunggal:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Data kelompok:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

f) Ragam/Variansi ( $s^2$ )

Data tunggal:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Data kelompok:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

## 6. Perubahan Data

Jika tiap data dilakukan perubahan, maka cukup dilihat apakah data termasuk pemusatan atau penyebaran. Perubahan data dapat dilihat pada tabel di bawah:

Ukuran	Setiap data dikali/dibagi	Setiap data ditambah/dikurang
Pemusatan	Berubah	Berubah
Penyebaran	Berubah	Tetap

## B. Peluang

### 1. Kaidah Pencacahan

#### a) Aturan perkalian

Jika banyak cara memilih unsur pertama ada  $m$  cara dan banyak cara memilih unsur kedua ada  $n$  cara, maka banyak cara memilih kedua unsur tersebut sekaligus ada  $m \times n$  cara.

**Faktorial**

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$2! = 2 \cdot 1$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

#### b) Permutasi

Permutasi menyatakan banyaknya penyusunan objek dengan **memperhatikan letak/ukuran**. Banyak permutasi (susunan terurut)  $r$  unsur dari  $n$  unsur adalah:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Jenis-jenis permutasi, antara lain:

1) Permutasi  $n$  unsur:  $n!$

Permutasi dengan menggunakan seluruh unsur.

2) Permutasi dengan  $n$  unsur sama:

$$\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!}$$

dengan  $p, q, r$  menyatakan banyaknya unsur yang sama.

3) Permutasi siklis (melingkar):  $(n-1)!$

#### c) Kombinasi

Kombinasi menyatakan banyaknya penyusunan objek-objek dengan **tidak memperhatikan letak/ukuran**. Banyak kombinasi (susunan)  $r$  unsur dari  $n$  unsur adalah:

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

## 2. Peluang Kejadian

### a) Pengertian

Peluang suatu kejadian adalah kemungkinan munculnya suatu kejadian dari sebuah semesta himpunan dengan ketentuan  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Dirumuskan:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan ketentuan:

$n(A)$  = banyaknya kemungkinan terjadinya kejadian A

$n(S)$  = banyaknya seluruh kejadian yang mungkin

### b) Frekuensi Harapan

Jika A adalah kejadian pada ruang sampel s dengan peluang  $P(A)$ , maka frekuensi harapan kejadian A dari n kali percobaan adalah:

$$f(A) = P(A) \cdot n$$

### c) Peluang Kejadian Majemuk

#### 1) Peluang Gabungan 2 Kejadian

Jika A dan B dua kejadian yang berada dalam ruang sampel S. Peluang kejadian  $A \cup B$  adalah:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

#### 2) Kejadian Saling Lepas

Syarat kejadian ini adalah bila tidak ada irisan antara 2 himpunan sehingga  $A \cap B = 0$ , jadi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

#### 3) Kejadian Saling Bebas

Syarat kejadian ini adalah bila suatu kejadian tidak mempengaruhi kejadian yang lain.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

#### 4) Kejadian Bersyarat

Kejadian yang menyatakan peluang munculnya kejadian A setelah muncul kejadian B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

#### 5) Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Jika A dan A' adalah 2 buah kejadian yang saling komplemen, maka peluang komplemen kejadian A (ditulis  $P(A')$ ) adalah:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

## Soal dan Pembahasan

1. Median dan rata-rata dari data yang terdiri dari empat bilangan asli yang telah diurutkan mulai dari yang terkecil adalah 8. Jika selisih antara data terbesar dan terkecilnya adalah 10 dan modulusnya tunggal, maka hasil kali data pertama dan ketiga adalah ....

A. 24  
B. 27  
C. 30  
D. 33  
E. 36

(TKDU SBMPTN 2013)

### Pembahasan CERDAS:

Misalkan data:  $a, b, c, d$

- $Me = 8$   
 $\Leftrightarrow \frac{a+d}{2} = 8$   
 $\Leftrightarrow a+d = 16 \dots (1)$
- $\bar{x} = 8$   
 $\Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{4} = 8$   
 $\Leftrightarrow a+b+c+d = 32$   
 $\Leftrightarrow b+c+16 = 32$   
 $\Leftrightarrow b+c = 16 \dots (2)$
- $d-a = 10 \dots (3)$

Dari (1) dan (3) diperoleh  $a = 3$ ,  $d = 13$  sehingga diperoleh data 3,  $b$ ,  $c$ , 13.

Dari persamaan (2) syaratnya  $b+c = 16$ , tetapi harus memenuhi  $Me = 8$  dan modulusnya tunggal, sehingga diambil  $b = 7$ ,  $c = 9$ . Jadi,  $a \cdot c = 3 \cdot 9 = 27$ .

-----Jawaban: B

2. Suatu perusahaan memproduksi dua jenis produk. Penjualan produk tersebut dilakukan oleh agen yang telah ditunjuk. Untuk penjualan produk A terdapat 20 agen, sedangkan untuk penjualan produk B ada 40 agen. Total keuntungan semua agen dalam satu bulan terakhir sebesar 360 juta rupiah. Jika rata-rata keuntungan agen yang menjual produk A adalah sebesar dua kali rata-rata keuntungan agen

yang menjual produk B, maka rata-rata keuntungan agen yang menjual produk A adalah ....

A. 2,4 juta rupiah  
B. 3 juta rupiah  
C. 3,6 juta rupiah  
D. 6 juta rupiah  
E. 9 juta rupiah

(TKPA SBMPTN 2015)

### Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{gab} &= \frac{n_A \bar{x}_A + n_B \bar{x}_B}{n_A + n_B} \\ \Leftrightarrow \frac{360 \text{ juta}}{60} &= \frac{20 \bar{x}_A + 40 \left(\frac{1}{2} \bar{x}_A\right)}{20 + 40} \\ \Leftrightarrow 60 \text{ juta} &= \frac{40 \bar{x}_A}{60} \\ \Leftrightarrow \bar{x}_A &= 9 \text{ juta}\end{aligned}$$

-----Jawaban: E

3. Tiga puluh data mempunyai rata-rata  $p$ . Jika rata-rata 20% di antaranya adalah  $p + 0,1$ , 40% lainnya adalah  $p - 0,1$ , dan 10% lainnya lagi adalah  $p - 0,5$ , dan rata-rata 30% data sisanya adalah  $p + q$ , maka  $q = \dots$

A.  $\frac{1}{5}$   
B.  $\frac{7}{30}$   
C.  $\frac{4}{15}$   
D.  $\frac{3}{10}$   
E.  $\frac{1}{3}$

(TKPA SBMPTN 2014)

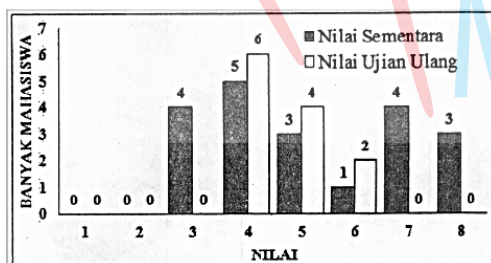
### Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{gab} &= \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + n_3 \bar{x}_3 + n_4 \bar{x}_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4} \\ p &= \frac{\frac{2}{10}(30) \left(p + \frac{1}{10}\right) + \frac{4}{10}(30) \left(p - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10}(30) \left(p - \frac{5}{10}\right) + \frac{3}{10}(30)(p + q)}{30}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30p &= 6\left(p + \frac{1}{10}\right) + 12\left(p - \frac{1}{10}\right) + \\
 &\quad 3\left(p - \frac{5}{10}\right) + 9(p + q) \\
 30p &= (6 + 12 + 3 + 9)p + \\
 &\quad \left(\frac{6}{10} - \frac{12}{10} - \frac{15}{10}\right) + 9q \\
 30p &= 30p - \frac{21}{10} + 9q \\
 9q &= \frac{21}{10} \\
 q &= \frac{21}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{30}
 \end{aligned}$$

-----Jawaban: B

4. Diagram di bawah ini menyajikan data (dalam bilangan bulat) nilai sementara dan nilai ujian ulang mahasiswa peserta kuliah Matematika. Ujian ulang diikuti hanya oleh peserta kuliah tersebut dengan nilai sementara lebih kecil daripada 6. Jika yang dinyatakan lulus kuliah adalah mahasiswa yang memperoleh nilai sementara tidak lebih kecil daripada 6 atau ujian ulangnya adalah 6, maka rata-rata nilai mahasiswa yang lulus mata kuliah tersebut adalah ....



- A. 6,33  
B. 6,50  
C. 6,75  
D. 7,00  
E. 7,25

(TKPA SBMPTN 2015)

#### Pembahasan CERDAS:

Yang lulus adalah nilai semmentaranya tidak lebih kecil dari 6 atau nilai ujian ulangnya 6.

- Nilai sementara  
Nilai 6 ada 1 orang  
Nilai 7 ada 4 orang  
Nilai 8 ada 3 orang
- Nilai ujian ulang  
Nilai 6 ada 2 orang

Sehingga,

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{6.1 + 7.4 + 8.3 + 6.2}{6 + 28 + 24 + 12} \\
 &= \frac{10}{70} = 7
 \end{aligned}$$

-----Jawaban: D

5. Banyaknya bilangan genap  $n = abc$  dengan 3 digit sehingga  $3 < b < c$  adalah ....
- A. 48  
B. 54  
C. 60  
D. 64  
E. 72

(SAINTEK SBMPTN 2016)

#### Pembahasan CERDAS:

$n = abc$  dan  $3 < b < c$

$3 < b$ , maka kemungkinan diisi angka 4, 5, 6, 7.

Karena  $n$  bilangan genap, maka  $c$  harus genap kemungkinan diisi angka 6, 8.

Kemungkinan I

a	b	c
9	2	1
Diisi angka 1 sampai 9	Diisi angka 4,5	Diisi angka 6

Banyaknya cara =  $9 \times 2 \times 1 = 18$  cara

Kemungkinan II

a	b	c
9	4	1
Diisi angka 1 sampai 9	Diisi angka 4,5,6,7	Diisi angka 8

Banyaknya cara =  $9 \times 4 \times 1 = 36$  cara

Jadi, banyaknya bilangan genap  $n = abc$ , dan  $3 < b < c$  adalah  $18 + 36 = 54$  cara.

-----Jawaban: B

6. Tujuh finalis lomba menyanyi tingkat SMA di suatu kota berasal dari 6 SMA yang berbeda terdiri atas empat pria dan tiga wanita. Diketahui satu pria dan satu wanita berasal dari SMA "A". Jika urutan tampil diatur bergantian antara pria dan wanita, serta finalis dari SMA "A" tidak tampil berurutan, maka susunan urutan tampil yang mungkin ada sebanyak ....

A. 144  
B. 108  
C. 72  
D. 36  
E. 35

(TKPA SBMPTN 2016)

#### Pembahasan CERDAS:

Banyaknya cara 7 finalis bergantian pria dan wanita tanpa ada syarat =  $4!3! = 144$ . Tampilnya finalis pria dan wanita harus bergantian, maka susunan dimulai dari pria. Kita cari 2 finalis dari SMA "A" tampil berurutan, yaitu dengan menyisipkan finalis dari sekolah lain.

P <sub>A</sub>	W <sub>A</sub>	P	W	P	W	P
P	W <sub>A</sub>	P <sub>A</sub>	W	P	W	P
P	W	P <sub>A</sub>	W <sub>A</sub>	P	W	P
P	W	P	W <sub>A</sub>	P <sub>A</sub>	W	P
P	W	P	W	P <sub>A</sub>	W <sub>A</sub>	P
P	W	P	W	P	W <sub>A</sub>	P <sub>A</sub>

Banyak cara SMA "A" tampil berurutan =  $6(3!2!) = 6(12) = 72$ .

Banyaknya cara SMA "A" tampil tidak berurutan =  $144 - 72 = 72$ .

-----**Jawaban: C**

7. Kode kupon hadiah untuk belanja pada suatu toko swalayan berbentuk bilangan yang disusun dari angka 1, 3, 3, 5, 7. Jika kupon-kupon tersebut disusun berdasarkan kodenya mulai dari yang terkecil sampai dengan yang terbesar, maka kupon dengan kode lebih daripada 53000 sebanyak ....
- A. 60  
B. 24

C. 21  
D. 20  
E. 19

(TKDU SBMPTN 2013)

#### Pembahasan CERDAS:

	Puluhan ribu	Ribuan	Ratusan	Puluhan	Satuan	Banyak Cara
Kasus I	5	3				$3! = 6$
Kasus II	5	7				$\frac{3!}{2!} = 3$
Kasus III	7					$\frac{4!}{2!} = 12$

Banyaknya cara =  $6 + 3 + 12 = 21$  cara.

-----**Jawaban: C**

8. Satu dadu dilempar 3 kali. Peluang mata dadu 6 muncul sedikitnya sekali adalah ....

A.  $\frac{1}{216}$   
B.  $\frac{3}{216}$   
C.  $\frac{12}{216}$   
D.  $\frac{18}{216}$   
E.  $\frac{91}{216}$

(TKPA SBMPTN 2014)

#### Pembahasan CERDAS:

Pelung muncul mata dadu selain angka 6 adalah  $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$

Jadi, peluang muncul mata dadu sedikitnya sekali adalah  $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

-----**Jawaban: E**

9. SMA X memiliki 6 kelas dengan banyak siswa pada setiap kelas adalah 16 pria dan 16 wanita. Jika untuk kepengurusan OSIS dipilih satu orang dari setiap kelas, maka peluang 2 orang wanita yang menjadi pengurus OSIS adalah ....

A.  $\frac{32}{64}$   
B.  $\frac{15}{64}$   
C.  $\frac{6}{64}$

- D.  $\frac{2}{64}$   
E.  $\frac{1}{64}$

(TKPA SBMPTN 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

Karena jumlah pria = jumlah wanita maka punya peluang yang sama  $\left(\frac{1}{2}\right)$ . Asumsikan kasusnya seperti pelemparan koin sebanyak 6 kali.

Jadi, peluangnya adalah  $\frac{C_2^6}{2^6} = \frac{15}{64}$

-----**Jawaban: B**

10. Empat buku berjudul kombinatorika dan dua buku berjudul statistika akan disusun di lemari buku dalam satu baris. Misalkan C adalah kejadian susunan buku sehingga terdapat tiga atau lebih buku dengan judul yang sama tersusun secara berurutan. Jika buku dengan judul yang sama tidak dibedakan, maka peluang kejadian C adalah ....

- A.  $\frac{4}{5}$   
B.  $\frac{2}{3}$   
C.  $\frac{3}{5}$   
D.  $\frac{1}{2}$   
E.  $\frac{1}{5}$

(TKPA SBMPTN 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

Ruang sampel pada kasus ini adalah menyusun buku secara permutasi dengan ada beberapa buku yang berjudul sama.

$$n(s) = \frac{6!}{4! 2!} = 15$$

C = kejadian susunan buku sehingga terdapat tiga atau lebih buku dengan judul yang sama tersusun secara berurutan.

Kemungkinan I: terdapat tiga judul yang sama tersusun secara berurutan.

KKK	S	K	S
KKK	S	S	K
S	KKK	S	K
K	S	KKK	S
S	K	S	KKK
K	S	S	KKK

Kemungkinan II : terdapat empat judul yang sama tersusun secara berurutan

KKKK	S	S
S	KKKK	S
S	S	KKKK

Banyaknya kejadian C = 6 + 3 = 9 cara.  
Sehingga

$$P(C) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

-----**Jawaban: C**



## - BAB 8 - Fungsi Komposisi dan Invers

### Rangkuman Materi

#### A. Definisi Fungsi

Fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi yang memetakan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

#### B. Domain, Kodomain, dan Range

Suatu fungsi  $f$  memetakan A ke B ( $f: A \rightarrow B$ ) dan jika  $x \in A$  dan  $y \in B$ , maka  $f: x \rightarrow y$  atau  $f(x) = y$ , sehingga

1. Domain (daerah asal) adalah himpunan semua anggota A dari pasangan terurut  $(x, y)$  dengan notasi  $D_f = \{x | y \text{ terdefinisi}\} = A$ .
2. Kodomain (daerah kawan) adalah himpunan semua anggota himpunan B.
3. Range (Daerah Hasil) adalah himpunan semua anggota himpunan B dari pasangan terurut  $(x, y)$  dengan notasi  $R_f = \{y | y = f(x), x \in D_f\}$ .

#### C. Operasi Aljabar

1. **Penjumlahan dan Pengurangan Fungsi**

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

2. **Perkalian Fungsi**

$$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

3. **Pembagian Fungsi**

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

4. **Perpangkatan**

$$(f(x))^n = f^n(x)$$

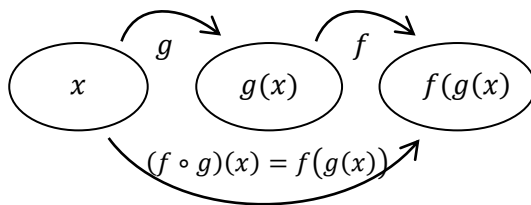
#### D. Fungsi Komposisi

1. Fungsi komposisi dapat ditulis sebagai:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \rightarrow f \text{ komposisi } g$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \rightarrow g \text{ komposisi } f$$





2. Sifat fungsi komposisi, antara lain:

- Tidak komutatif,  $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$
- Asosiatif,  $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$
- Terdapat unsur identitas  $(I)(x)$ ,  $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$

### E. Fungsi Invers

1.  $f^{-1}(x)$  adalah invers dari fungsi  $f(x)$ .



2. Invers dapat ditentukan dengan mengubah bentuk " $f(x) = y = \dots$ " menjadi " $f^{-1}(y) = x = \dots$ "

3. Sifat fungsi invers, antara lain:

- $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x)$
- $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$
- $(f \circ g)(x) = h(x) \rightarrow f(x) = (h \circ g^{-1})(x)$

4. Cara cepat untuk mencari fungsi invers, jika  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , maka  $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$

### Soal dan Pembahasan

1. Jika tabel berikut menyatakan hasil fungsi  $f$  dan  $g$ .

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	0	2
$g(x)$	0	3	2	1

Maka  $(f \circ g \circ f)(1) - (g \circ f \circ g)(2) = \dots$

- 1
- 0
- 1
- 2
- 3

(TKDU SBMPTN 2016)

#### Pembahasan CERDAS:

$$\begin{aligned}
 &(f \circ g \circ f)(1) - (g \circ f \circ g)(2) \\
 &= f(g(f(1))) - g(f(g(2))) \\
 &= f(g(3)) - g(f(2)) \\
 &= f(1) - g(0) \\
 &= 3 - 0 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

-----Jawaban: E

- Jika  $f(x) = x^2 - x + 2$  dan  $g(x) = ax + b$ , dengan  $a \neq 0$  dan  $b \neq 0$ , serta  $f(g(x)) = 9x^2 - 3x + 2$ , maka  $a + b = \dots$ 
  - 6
  - 4
  - 2

- D. 0  
E. -2

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= 9x^2 - 3x + 2 \\ f(ax + b) &= 9x^2 - 3x + 2 \\ (ax + b)^2 - (ax + b) + 2 &= 9x^2 - 3x + 2 \\ a^2x^2 + 2abx + b^2 - ax - b + 2 &= 9x^2 - 3x + 2 \\ a^2x^2 + (2ab - a)x + b^2 - b + 2 &= 9x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Diperoleh

- $a^2 = 9 \rightarrow a = \pm 3$
- $2ab - a = -3$   
Untuk  $a = 3$   
 $6b - 3 = -3$   
 $b = 0$   
Untuk  $a = -3$   
 $-6b + 3 = -3$   
 $b = 1$

Nilai  $a + b = 3 + 0 = 3$  atau  $a + b = -3 + 1 = -2$

Jadi, nilai  $a + b$  yang memenuhi adalah -2

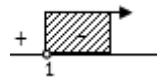
-----Jawaban: E

3. Diberikan fungsi  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  dan  $g(x) = x + 1$ . Semua bilangan real  $x$  yang memenuhi  $(g \circ f)(x) < g(x)f(x)$  adalah ....
- A.  $x > 1$   
B.  $0 < x < 1$   
C.  $x < 0$  atau  $0 < x < 1$   
D.  $0 < x < 1$  atau  $x > 1$   
E.  $x < 0$  atau  $x > 1$

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &< g(x)f(x) \\ g\left(\frac{1}{x-1}\right) &< \frac{x+1}{x-1} \\ \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 1} + 1 &< \frac{x+1}{x-1} \\ \frac{1 + (x-1) - (x+1)}{x-1} &< 0 \\ \frac{-1}{x-1} &< 0 \end{aligned}$$



Jadi,  $x > 1$

-----Jawaban: A

4. Jika  $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x$  dan  $g(\sqrt{x}) = x$ , maka  $(f \circ g)(4) = \dots$
- A.  $-\frac{16}{15}$   
B.  $-\frac{1}{15}$   
C.  $-\frac{15}{16}$   
D.  $\frac{2}{3}$   
E. 1

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$g(\sqrt{x}) = x \rightarrow g(4) = 16$$

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x$$

harus bernilai 16

$$\frac{x}{x+1} = 16$$

$$x = 16x + 16$$

$$15x = -16$$

$$x = -\frac{16}{15}$$

$$\text{Diperoleh } f(16) = -\frac{16}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } (f \circ g)(4) &= f(g(4)) \\ &= f(16) \\ &= -\frac{16}{5} \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

5. Jika fungsi  $f$  dan  $g$  mempunyai invers dan memenuhi  $g(x-2) = f(x+2)$ , maka  $g^{-1}(x) = \dots$
- A.  $f^{-1}(x) + 4$   
B.  $4 - f^{-1}(x)$   
C.  $f^{-1}(x + 4)$   
D.  $-f^{-1}(x) - 4$   
E.  $f^{-1}(x) - 4$

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$g(x-2) = f(x+2) \text{ identik dengan}$$

$$g \circ m = f \circ n, \text{ maka :}$$

$$(g \circ m)^{-1}(x) = (f \circ n)^{-1}(x)$$

$$(m^{-1} \circ g^{-1})(x) = (n^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$\begin{aligned}
 g^{-1}(x) &= (m \circ n^{-1} \circ f^{-1})(x) \\
 &= m \circ (x - 2) \circ f^{-1}(x) \\
 &= m \circ (f^{-1}(x) - 2) \\
 &= (f^{-1}(x) - 2) - 2 \\
 &= f^{-1}(x) - 4
 \end{aligned}$$

-----**Jawaban: E**

6. Jika  $f(x+2) = \frac{2}{x}$ , untuk  $x \neq 0$ , maka  $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = \dots$

- A.  $x$   
 B.  $\frac{2x+2}{x}$   
 C.  $\frac{x}{2}$   
 D.  $\frac{x-2}{3x+2}$   
 E.  $\frac{x+1}{2x+2} + 2$

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$f(x+2) = \frac{2}{x} \rightarrow f^{-1}\left(\frac{2}{x}\right) = x+2$$

$$\text{Diperoleh } f^{-1}(x) = \frac{2}{x} + 2$$

$$\text{Sehingga } (f^{-1} \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f^{-1}(x))$$

$$= f^{-1}\left(\frac{2}{x} + 2\right)$$

$$= \frac{2}{\frac{2}{x} + 2} + 2$$

$$= \frac{\frac{x}{3x+2}}{x+1}$$

-----**Jawaban: D**

7. Jika fungsi  $f$  mempunyai invers dan grafiknya berupa garis lurus dengan gradient positif, serta memenuhi  $f(x) - f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + 3$ , maka  $f(x) + f^{-1}(x) = \dots$

- A.  $\frac{1}{2}x + 3$   
 B.  $\frac{3}{2}x + 1$   
 C.  $2x + 2$   
 D.  $\frac{5}{2}x + 1$   
 E.  $\frac{5}{2}x + 3$

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\text{Misalkan } f(x) = ax + b \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

$$f(x) - f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + 3$$

$$\begin{aligned}
 (ax+b) - \left(\frac{x-b}{a}\right) &= \frac{3}{2}x + 3 \\
 \left(\frac{a^2x}{a} + \frac{b}{a}\right) - \left(\frac{x-b}{a}\right) &= \frac{3}{2}x + 3 \\
 \left(\frac{a^2-1}{a}\right)x + \frac{2b}{a} &= \frac{3}{2}x + 3
 \end{aligned}$$

Dengan mengidentikkan bentuk, maka:

$$\frac{a^2-1}{a} = \frac{3}{2}$$

$$2a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$(2a+1)(a-2) = 0$$

$$a = -\frac{1}{2} \text{ (tm) atau } a = 2$$

$$\text{Untuk } a = 2 \rightarrow b = 3$$

$$\text{Diperoleh } f(x) = 2x + 3 \text{ dan } f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$\text{Sehingga } f(x) + f^{-1}(x)$$

$$= 2x + 3 + \left(\frac{x-3}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$$

-----**Jawaban: --**

8. Jika  $f^{-1}\left(\frac{x+5}{x-5}\right) = \frac{8}{x+5}$ , maka nilai  $a$  sehingga  $f(a) = -4$  adalah ....

- A. 2  
 B. 1  
 C. 0  
 D. -1  
 E. -2

(MATDAS SNMPTN 2013)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\text{Ingat! } f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}\left(\frac{x+5}{x-5}\right) = \frac{8}{x+5}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{8}{x+5}\right) = \frac{x+5}{x-5}$$

Dari persamaan di atas, maka:

$$\frac{x+5}{x-5} = -4$$

$$x+5 = 20-4x$$

$$5x = 15$$

$$x = 3$$

$$\text{Sehingga } a = \frac{8}{x+5} = \frac{8}{3+5} = 1$$

-----**Jawaban: B**

9. Diketahui  $f(x) = \frac{px+q}{x+2}$ ,  $q \neq 0$ . Jika  $f^{-1}$  menyatakan invers dari  $f$  dan  $f^{-1}(q) = -1$  maka  $f^{-1}(2q) = \dots$

- A.  $-3$   
B.  $-2$   
C.  $-\frac{3}{2}$   
D.  $\frac{3}{2}$   
E.  $3$

(TKPA SBMPTN 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

- $f(x) = \frac{px+q}{x+2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x+q}{x-p}$
- $f^{-1}(q) = -1$   

$$\frac{-2(q)+q}{(q)-p} = -1$$

$$-q = p - q$$

$$p = 0$$
 sehingga  $f^{-1}(x) = \frac{-2x+q}{x-(0)} = \frac{-2x+q}{x}$
- $f^{-1}(2q) = \frac{-2(2q)+q}{2q} = -\frac{3q}{2q} = -\frac{3}{2}$

Jawaban: C

10. Jika  $f(x) = \frac{x+2011}{x-1}$ , maka  $(f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x) = \dots$

- A.  $\frac{x+2011}{x-1}$   
B.  $\frac{x-1}{x+2011}$   
C.  $\frac{x+1}{x-2011}$   
D.  $\frac{x+1}{x-2011}$   
E.  $\frac{x-1}{-x+2011}$

(MATDAS SNMPTN 2011)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} & (f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x) \\ &= f(f(f(f(f(x)))))) \\ &= f\left(f\left(f\left(f\left(\frac{x+2011}{x-1}\right)\right)\right)\right) \\ &= f\left(f\left(f\left(\frac{\left(\frac{x+2011}{x-1}\right)+2011}{\left(\frac{x+2011}{x-1}\right)-1}\right)\right)\right) \\ &= f\left(f\left(f\left(\frac{x+2011+2011x-2011}{x+2011-x+1}\right)\right)\right) \\ &= f\left(f\left(f\left(\frac{2012x}{2012}\right)\right)\right) \\ &= f(f(f(x))) \\ &= f\left(f\left(\frac{x+2011}{x-1}\right)\right) \\ &= f\left(\frac{\left(\frac{x+2011}{x-1}\right)+2011}{\left(\frac{x+2011}{x-1}\right)-1}\right) \\ &= f\left(\frac{x+2011+2011x-2011}{x+2011-x+1}\right) \\ &= f\left(\frac{2012x}{2012}\right) \\ &= f(x) \\ &= \frac{x+2011}{x-1} \end{aligned}$$

Jawaban: A



## - BAB 9 - Limit

### Rangkuman Materi

#### A. Limit Fungsi Aljabar

##### 1. Nilai limit di $x = a$

Langkah-langkah untuk menghitung nilai  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  adalah

- Substitusi  $x = a$  ke  $f(x)$  sehingga diperoleh nilai  $f(a)$
- Jika  $f(a) = \frac{0}{0}$  (bentuk tak tentu), maka  $f(x)$  harus diubah sedemikian rupa sehingga menjadi bentuk tentu ( $\frac{p}{q}, \frac{0}{k} = 0, \frac{k}{0} = \infty$ ), dengan cara
  - Menghilangkan faktor  $(x - a)$  dari pembilang dan penyebut
  - Apabila terdapat bentuk akar, maka terlebih dulu dikalikan sekawan agar bentuk akar hilang, kemudian disederhanakan.
  - Menentukan turunan dan penyebut sehingga diperoleh bentuk tentu

##### 2. Nilai limit tak hingga

Dapat diselesaikan dengan membagi pangkat tertinggi. Rumus dasar  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ , untuk  $n$  bilangan bulat positif.

###### a) Model 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots}{px^n + qx^{n-1} \pm \dots} = \begin{cases} \infty & \text{jika } m > n \\ \frac{a}{p} & \text{jika } m = n \\ 0 & \text{jika } m < n \end{cases}$$

###### b) Model 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} = \begin{cases} \infty & \text{jika } a > p \\ \frac{b - q}{2\sqrt{a}} & \text{jika } a = p \\ 0 & \text{jika } a < p \end{cases}$$

atau

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} - \sqrt[n]{px^n + qx^{n-1} + \dots} = \begin{cases} \infty & \text{jika } a > p \\ \frac{b - q}{n \cdot \sqrt[n]{(a)^{n-1}}} & \text{jika } a = p \\ 0 & \text{jika } a < p \end{cases}$$

---

## B. Limit Fungsi Trigonometri

---

Rumus - rumus yang digunakan untuk menyelesaikan limit fungsi trigonometri adalah

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = 1$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

---

## C. Teorema Limit

---

1.  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  dengan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  dengan k adalah konstanta
5.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$
6. Jika  $f(x) = k$ , maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$  dengan k adalah konstanta
7. Jika  $f(x) = x$ , maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$

---

## D. Kontinuitas Fungsi

---

Fungsi  $f(x)$  dikatakan kontinu di titik  $x = x_0$ , jika:

1.  $f(x_0)$  terdefiniskan
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  ada
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

## Soal dan Pembahasan

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + x\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 1} = \dots$

- A. 6
- B. 7
- C. 8
- D. 9
- E. 10

(MATDAS SPMB 2008)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + x\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} \\ &= 3 + 4 \\ &= 7 \end{aligned}$$

-----Jawaban: B

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \dots$

- A.  $\frac{1}{4}$
- B.  $\frac{1}{2}$
- C. 1
- D. 2
- E. 4

(MATDAS SPMB 2007)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \sqrt{4} + 2 = 4 \end{aligned}$$

-----Jawaban: E

3. Nilai dari  $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - t - 6}{4 - \sqrt{5t+1}}$  adalah ....

- A. -8
- B. -4
- C. 8
- D. 4
- E. 0

(UM ITS 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - t - 6}{4 - \sqrt{5t+1}} &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - t - 6}{4 - \sqrt{5t+1}} \cdot \frac{4 + \sqrt{5t+1}}{4 + \sqrt{5t+1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t^2 - t - 6)(4 + \sqrt{5t+1})}{16 - (5t+1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t-3)(t+2)(4 + \sqrt{5t+1})}{15 - 5t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t-3)(t+2)(4 + \sqrt{5t+1})}{5(3-t)} \\ &= \frac{-(3+2)(4+4)}{5} \\ &= -8 \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \dots$

- A. 0
- B.  $\frac{1}{9}$
- C.  $\frac{2}{9}$
- D.  $\frac{1}{9}$
- E.  $\frac{3}{4}$

(TNBK 2010)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{((\sqrt[3]{x})^3 - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{((\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1))^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)^2 (x + \sqrt{x} + 1)^2} \\ &= \frac{1}{(1+1+1)^2} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

-----Jawaban: B

5. Nilai dari  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{7+\sqrt[4]{x}}-3} = \dots$

- A. 24
- B. 20
- C. 15
- D. 12
- E. 10

(MATDAS UM UNDIP 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{7+\sqrt[4]{x}}-3} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{7+\sqrt[4]{x}}-3} \cdot \frac{\sqrt{7+\sqrt[4]{x}}+3}{\sqrt{7+\sqrt[4]{x}}+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{7+\sqrt[4]{x}}+3)}{(7+\sqrt[4]{x})-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{7+\sqrt[4]{x}}+3)}{\sqrt[4]{x}-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt[4]{x}-2)(\sqrt[4]{x}+2)(\sqrt{7+\sqrt[4]{x}}+3)}{\sqrt[4]{x}-2} \\ &= (2+2)(\sqrt{7+2}+3) \\ &= 4 \cdot 6 = 24 \end{aligned}$$

-----Jawaban: A

6.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}\pi} \frac{1-2\sin x \cos x}{\sin x - \cos x} = \dots$

- A.  $\frac{1}{2}$
- B.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- C. 1
- D. 0
- E. -1

(MATDAS SPMB 2008)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}\pi} \frac{1-2\sin x \cos x}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}\pi} \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}\pi} \sin x - \cos x \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

-----Jawaban: D

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+3x} - x = \dots$

- A. -1
- B. 0
- C.  $\frac{3}{2}$
- D. 3
- E.  $\infty$

(MATDAS SIMAK UI 2010)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+3x} - x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-0}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

-----Jawaban: C

8. Diketahui bahwa

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)g(x)-3g(x)+f(x)-3}{(f(x)-3)(x-5)} \text{ terdefinisi.}$$

Nilai dari  $g(5) = \dots$

- A. 3
- B. 2
- C. 1
- D. 0
- E. -1

(MATDAS SIMAK UI 2013)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)g(x)-3g(x)+f(x)-3}{(f(x)-3)(x-5)} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(g(x)+1)(f(x)-3)}{(f(x)-3)(x-5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{g(x)+1}{x-5} \end{aligned}$$

Karena  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)g(x)-3g(x)+f(x)-3}{(f(x)-3)(x-5)}$  terdefinisi, maka bernilai  $\frac{0}{0}$

Sehingga  $g(5)+1=0 \rightarrow g(5)=-1$ .

-----Jawaban: E

9. Jika a dan b adalah bilangan bulat, serta

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-b}{2-x} = a, \text{ maka } b-a = \dots$$

- A. -5
- B. -3
- C. -1
- D. 2
- E. 5

(TKDU SBMPTN 2016)



**Pembahasan CERDAS:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - b}{2 - x} = a$$

- Jika  $x = 2$  disubstitusikan ke  $\frac{x^2 - x - b}{2 - x}$ , maka hasilnya  $\frac{0}{0}$   
Sehingga  $2^2 - 2 - b = 0 \rightarrow b = 2$
- Menggunakan dalil L'Hopital kita turunkan pembilang dan penyebut dari  $\frac{x^2 - x - b}{2 - x}$  yaitu  $\frac{2x - 1}{-1}$ . Lalu substitusikan  $x = 2$ , maka  $\frac{2 \cdot 2 - 1}{-1} = a \rightarrow a = -3$

Jadi, nilai  $b - a = 2 - (-3) = 5$

-----**Jawaban: E**

10. Jika  $f(x) = x^2 + ax + b$  dengan  $f(2) = 0$  dan  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x+1) - f(x)}{x - 2} = 2$ , maka  $b = \dots$

- A. -6
- B. -5
- C. 0
- D. 5
- E. 6

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$f(2) = 0$$

$$4 + 2a + b = 0$$

$$2a + b = -4 \dots (i)$$

$$\text{Jika } x = 2 \text{ disubstitusikan ke } \frac{f(x+1) - f(x)}{x - 2},$$

$$\text{maka hasilnya } \frac{0}{0}$$

$$f(3) - f(2) = 0$$

$$9 + 3a + b - 0 = 0$$

$$3a + b = -9 \dots (ii)$$

Eliminasikan (i) dan (ii)

$$3a + b = -9$$

$$2a + b = -4$$

$$a = -5 \rightarrow b = 6$$

Jadi, nilai  $b = 6$ .

-----**Jawaban: E**



## - BAB 10 - Turunan

### Rangkuman Materi

#### A. Aturan Turunan Fungsi

1.  $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$
2.  $f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$
3.  $f(x) = ku \rightarrow f'(x) = k \cdot u'$
4.  $f(x) = u \pm v \rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
5.  $f(x) = u \cdot v \rightarrow f'(x) = u'v + uv'$
6.  $f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
7.  $f(x) = f(u) \rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot u'$
8.  $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$
9.  $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
10.  $f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

#### B. Turunan Fungsi Trigonometri

1.  $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$
2.  $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$
3.  $f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
4.  $f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$
5.  $f(x) = \sec x \rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
6.  $f(x) = \csc x \rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

#### C. Aplikasi Turunan

1. Persamaan Garis Singgung  
Rumus persamaan garis singgung suatu kurva di titik  $(x_1, y_1)$   
 $(y - y_1) = m(x - x_1)$ , dengan gradien  $(m) = f'(x_1)$

2. Fungsi Naik Turun

Fungsi dikatakan naik jika  $f'(x) > 0$

Fungsi dikatakan turun jika  $f'(x) < 0$

3. Stasioner

Suatu fungsi mencapai stasioner saat  $f'(x) = 0$ . Jenis Stasioner :

- Minimum  $f'(x) > 0$
- Maksimum  $f'(x) < 0$
- Belok  $f'(x) = 0$

## Soal dan Pembahasan

1. Turunan fungsi  $y = \frac{2}{\sqrt{(3x^2+5)^3}}$  adalah

- $y' = \dots$
- $\frac{-3}{\sqrt{(3x^2+5)^5}}$
  - $\frac{-18x}{\sqrt{(3x^2+5)^5}}$
  - $\frac{-3}{\sqrt{3x^2+5}}$
  - $\frac{-18x}{\sqrt{3x^2+5}}$
  - $\frac{18x}{\sqrt{3x^2+5}}$

(MATDAS SPMB 2007)

**Pembahasan CERDAS:**

$$y = \frac{2}{\sqrt{(3x^2+5)^3}} \Leftrightarrow y = 2(3x^2+5)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y' = 2 \left( -\frac{3}{2} \right) (3x^2+5)^{-\frac{5}{2}} (6x)$$

$$= \frac{-18x}{\sqrt{(3x^2+5)^5}}$$

-----**Jawaban: B**

2. Diberikan  $f(x) = \cos\left(\frac{2x+1}{x}\right)$ . Hasil diferensial  $f(x)$  adalah ....

- $f'(x) = -\sin\left(\frac{2x+1}{x}\right)$
- $f'(x) = -\frac{1}{x} \sin\left(\frac{2x+1}{x}\right)$
- $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x}\right)$
- $f'(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{2x+1}{x}\right)$
- $f'(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x}\right)$

(UM ITS 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

- Misalkan  $p = \frac{2x+1}{x} = \frac{u}{v}$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{2x - (2x+1)1}{x^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

- $f(x) = \cos\left(\frac{2x+1}{x}\right)$
- $f(x) = \cos p$
- $\frac{f(x)}{dp} = -\sin p$
- $f'(x) = \frac{df(x)}{dp} \cdot \frac{dp}{dx}$
- $= -\sin p \left( -\frac{1}{x^2} \right)$
- $= \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x}\right)$

-----**Jawaban: E**

3. Turunan pertama dari fungsi  $y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$  adalah ....

- $\frac{-1}{(\cos x + \sin x)^2}$
- $\frac{-2}{(\cos x + \sin x)^2}$
- $\frac{-3}{(\cos x + \sin x)^2}$
- $\frac{-1}{\cos^2 x - \sin^2 x}$
- $\frac{-2}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

(MATDAS SPMB 2008)

**Pembahasan CERDAS:**

$$y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{u}{v}$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(-\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x + \cos x)^2 - (\cos x - \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) - (\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x)}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-1 - 2 \sin x \cos x - 1 + 2 \sin x \cos x}{(\cos x + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-2}{(\cos x + \sin x)^2}$$

**Jawaban: B**

4. Diketahui  $f(0) = 1$  dan  $f'(0) = 2$ . Jika  $g(x) = \frac{1}{(2f(x)-1)^3}$ , maka  $g'(0) = \dots$
- A. -12  
B. -6  
C. 6  
D. 8  
E. 12

(TKDU SMBPTN 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

$$g(x) = \frac{1}{(2f(x)-1)^3} = (2(f(x)-1))^{-3}$$

$$g'(x) = (-3)(2(f(x)-1))^{-4} \cdot (2)(f'(x))$$

$$= (-6)(f'(x))(2(f(x)-1))^{-4}$$

$$g'(0) = (-6)(f'(0))(2(f(0)-1))^{-4}$$

$$= (-6)(2)(2(1)-1)^{-4}$$

$$= -12$$

**Jawaban: A**

5. Fungsi  $f(x) = x^4 - 2x^2 + ax + a$  mempunyai nilai minimum  $b$  di  $x = 1$ . Nilai  $a + b = \dots$
- A. 2  
B. 1  
C. 0

- D. -1  
E. -2

(TKPA SBMPTN 2014)

**Pembahasan CERDAS:**Syarat  $f(x)$  minimum (stasioner):

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 - 4x + a = 0$$

Substitusikan  $x = 1$  ke  $f'(x) = 0$ 

$$4(1)^2 - 4(1) + a = 0$$

$$a = 0$$

Diperoleh  $f(x) = x^4 - 2x^2$  $f(x)$  mempunyai nilai minimum  $b$  di

$$x = 1 \rightarrow f(1) = b$$

$$1^4 - 2(1) = b$$

$$b = -1$$

Jadi, nilai  $a + b = 0 + (-1) = -1$ **Jawaban: D**

6. Jika  $m$  dan  $n$  bilangan real dan fungsi  $f(x) = mx^3 + 2x^2 - nx + 5$  memenuhi  $f'(1) = f'(-5) = 0$ , maka  $3m - n = \dots$
- A. -6  
B. -4  
C. -2  
D. 2  
E. 4

(MATDAS SBMPTN 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

$$f(x) = mx^3 + 2x^2 - nx + 5$$

$$f'(x) = 3mx^2 + 4x - n$$

$$\bullet f'(1) = 0$$

$$3m(1)^2 + 4(1) - n = 0$$

$$3m - n = -4$$

$$\bullet f'(-5) = 0$$

$$3m(-5)^2 + 4(-5) - n = 0$$

$$75m - n = 20$$

Jadi, nilai  $3m - n$  adalah -4.**Jawaban: B**

7. Untuk  $x \geq 1$ , nilai maksimum fungsi  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 7$  adalah ....
- A. 3  
B. 6  
C. 7  
D. 11  
E. 23

(MATDAS UM UGM 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 7$$

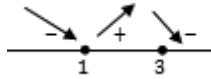
$$\text{Syarat maksimum } f'(x) = 0$$

$$-3x^2 + 12x - 9 = 0$$

$$-3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$-3(x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \text{ atau } x = 3$$



$f(x)$  maksimum di  $x = 3$  sehingga  $f(3) = 7$

-----**Jawaban: C**

8. Jika  $(a, b)$  adalah titik minimum grafik fungsi  $f(x) = 7 - \sqrt{(25 - x^2)}$ , maka nilai  $a^2 + b^2$  adalah ....

- A. 4
- B. 5
- C. 8
- D. 10
- E. 13

(MATDAS SNMPTN 2009)

**Pembahasan CERDAS:**

$$f(x) = 7 - \sqrt{(25 - x^2)}$$

$$f'(x) = -\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Agar minimum, maka  $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 = a$  sehingga

$$y = b = 7 - \sqrt{25 - x^2} = 7 - 5 = 2$$

$$\text{Jadi, } a^2 + b^2 = 0^2 + 2^2 = 4$$

-----**Jawaban: A**

9. Kurva  $y = 3x - \frac{3}{x^2}$  memotong sumbu  $x$  di titik P. Persamaan garis singgung kurva di titik P adalah ....

- A.  $x - 9y - 9 = 0$
- B.  $x - 9y + 9 = 0$
- C.  $9x - y - 9 = 0$
- D.  $9x - y + 9 = 0$
- E.  $9x + y - 9 = 0$

(MATDAS UM UGM 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

- Kurva  $y = 3x - \frac{3}{x^2}$  memotong sumbu

$$x \rightarrow y = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{3}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{3}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ diperoleh titik } P(1, 0).$$

- Gradien ( $m$ ) =  $y' = 3 + 6x^{-3}$ , melalui titik  $P(1, 0)$ , maka diperoleh  $m = 9$ .

- Persamaan garis dengan  $m = 9$  dan melalui titik  $P(1, 0)$  adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 9(x - 1)$$

$$y = 9x - 9$$

$$9x - y - 9 = 0$$

-----**Jawaban: C**

10. Volume sebuah bola adalah fungsi dari luas permukaannya. Jika luas permukaan sebuah bola tersebut adalah  $x$ , maka laju perubahan volume bola terhadap luas permukaannya adalah ....

- A.  $\frac{1}{4}\sqrt{\pi x}$
- B.  $\frac{1}{\pi}\sqrt{\pi x}$
- C.  $\frac{1}{4\pi}\sqrt{\pi x}$
- D.  $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi x}$
- E.  $\frac{1}{3\pi}\sqrt{\pi x}$

(MATDAS UM UNDIP 2010)

**Pembahasan CERDAS:**

- Luas permukaan bola adalah  $x$ , maka  $x = 4\pi r^2 \rightarrow r^2 = \frac{x}{4\pi}$

- Fungsi luas permukaan bola = volume bola, maka

$$y = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$y = \frac{4}{3}\pi \frac{x}{4\pi} r$$

$$y = \frac{x}{3}$$

$$y = \frac{x \sqrt{x}}{3 \cdot 2\sqrt{\pi}}$$

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{\pi}}$$

Laju perubahan volume bola terhadap luas permukaannya

$$y' = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{6\sqrt{\pi}} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{x} \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\pi}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\pi x}$$

-----**Jawaban: C**





## - BAB 11 - Garis dan Program Linier

### Rangkuman Materi

#### A. Persamaan Garis

1. Persamaan garis yang melalui titik  $A(x_1, y_1)$  dan  $B(x_2, y_2)$ ,  
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis yang melalui titik  $A(0, a)$  dan  $B(b, 0)$ ,  
$$ax + by = ab.$$

2. Membuat Grafik dari Persamaan Garis

Jika diketahui persamaan garis maka grafik dapat dibuat dengan menentukan

- a) Titik potong terhadap sumbu X berarti  $y = 0$
  - b) Titik potong terhadap sumbu Y berarti  $x = 0$
3. Menentukan Titik Potong Dua Persamaan Garis  
Eliminasi merupakan cara termudah menentukan titik potong dari dua persamaan garis.

#### B. Sistem Pertidaksamaan Linier Dua Variabel

Pertidaksamaan linier dua variabel dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$ax + by > c, \quad ax + by < c, \\ ax + by \geq c, \text{ atau } ax + by \leq c$$

Langkah-langkah untuk menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan linier dua variabel, yaitu:

1. Gambarlah garis  $ax + by = c$
2. Ambil sembarang titik  $P(x_1, y_1)$  yang terletak di luar garis  $ax + by = c$
3. Substitusikan titik tersebut ke dalam pertidaksamaan
4. Apabila pertidaksamaan benar, maka daerah yang memuat titik  $P(x_1, y_1)$  adalah himpunan penyelesaiannya. Jika pertidaksamaan salah, maka daerah lain yang tidak memuat titik  $P(x_1, y_1)$  adalah himpunan penyelesaiannya.

#### C. Program Linier dan Model Matematika

Program linier adalah cara untuk mencari nilai maksimum dan minimum bentuk linier yang dibatasi oleh sistem pertidaksamaan linier. Langkah-langkah menyelesaikan masalah program linier, yaitu

1. Tentukan variabel model matematikanya (misal  $x$  dan  $y$ )
2. Tentukan jenis masalah (maksimum atau minimum)

3. Merumuskan masalah tersebut ke dalam model matematika yaitu fungsi objektif dan kendalanya
4. Menggambar grafik sistem pertidaksamaan
5. Tentukan daerah penyelesaian
6. Menganalisa nilai objektif

Nilai optimum fungsi objektif dapat ditentukan dengan metode:

**1. Uji Titik pojok**

- a) Gambar daerah penyelesaian yang memenuhi SPtLDV.
- b) Tentukan titik-titik pojok pada daerah penyelesaian SPtLDV.
- c) Substitusikan titik tersebut ke fungsi objektif sehingga diperoleh nilai optimum.

**2. Garis Selidik**

- a) Gambar daerah penyelesaian yang memenuhi SPtLDV
- b) Gambar garis-garis yang sejajar dengan garis selidik fungsi objektif yang memotong daerah penyelesaian.  
Misal fungsi objektif  $f(x,y) = ax + by + c$ , maka garis selidik  $ax + by + c = 0$ .
- c) Tentukan nilai optimum fungsi objektif

Titik Pojok yang dilalui Garis Selidik	Gradien Garis selidik	
	Negatif	Positif
Paling kiri	Minimum*	Maksimum*
Paling kanan	Maksimum*	Minimum*

\*= nilai fungsi objektif

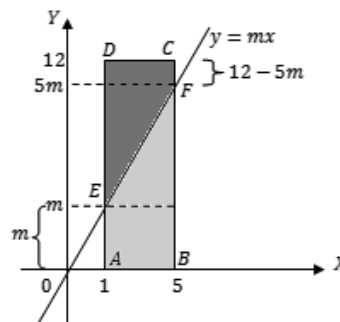
## Soal dan Pembahasan

1. Suatu garis yang melalui titik  $(0,0)$  membagi persegipanjang dengan titik-titik sudut  $(1,0)$ ,  $(5,0)$ ,  $(1,12)$  dan  $(5,12)$  menjadi dua bagian yang sama luas. Gradien garis tersebut adalah ....

- A.  $\frac{1}{2}$
- B. 1
- C. 2
- D.  $\frac{12}{5}$
- E. 3

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

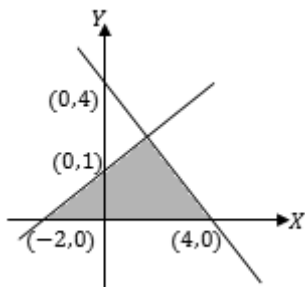


Karena garis lurus  $y = mx$  membagi persegi panjang menjadi dua sama luas, maka kedua trapesium ABFE dan EFCD adalah dua bangun yang kongruen, sehingga  $m = 12 - 5m \rightarrow m = 2$ .

**Jawaban: C**



2. Pada daerah di bawah ini, daerah yang diarsir memenuhi sistem pertidaksamaan ....



- A.  $y \geq 0, 2y - x \leq 1, x + y \leq 4$   
 B.  $y \geq 0, 2y - x \leq 2, x + y \leq 4$   
 C.  $y \geq 0, 2y - x \geq 2, x + y \leq 4$   
 D.  $y \geq 0, 2y + x \leq 2, x + y \geq 4$   
 E.  $y \geq 0, 2y + x \leq 2, x + y \leq 4$

(MATDAS UM UGM 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

- Garis melalui titik  $(-2, 0)$  dan  $(0, 1)$  adalah  $x - 2y = -2 \rightarrow 2y - x = 2$ .  
Ambil sembarang titik dan dibuktikan daerah yang diarsir adalah daerah yang benar,  
 $(0, 0) \rightarrow 2y - x = 2(0) - 0 = 0 \leq 2$  (benar).  
Jadi, pertidaksamaannya  $2y - x \leq 2$ .
- Garis melalui titik  $(4, 0)$  dan  $(0, 4)$  adalah  $4x + 4y = 16 \rightarrow x + y = 4$ .  
Ambil sembarang titik dan dibuktikan daerah yang diarsir adalah daerah yang benar,  
 $(0, 0) \rightarrow x + y = 0 + 0 = 0 \leq 4$  (benar).  
Jadi, pertidaksamaannya  $x + y \leq 4$ .
- Daerah arsiran berada di atas sumbu X, maka  $y \geq 0$ .  
Jadi, pertidaksamaan yang memenuhi adalah  $y \geq 0, 2y - x \leq 2, x + y \leq 4$ .

-----**Jawaban: B**

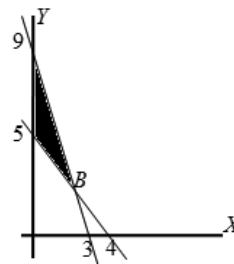
3. Nilai maksimum dari  $z = -3x + 2y$  yang memenuhi syarat  $3x + y \leq 9; 5x + 4y \geq 20; x \geq 0$  adalah ....
- A. 10  
B. 14

- C. 18  
D. 20  
E. 24

(MATDAS SNMPTN 2008)

**Pembahasan CERDAS:**

Daerah penyelesaiannya:



Titik B dapat diperoleh dengan cara eliminasi.

- Titik B perpotongan garis  $3x + y \leq 9$  dan  $5x + 4y \geq 20$

$$\begin{array}{rcl} 3x + y = 9 & | \times 4 | & 12x + 4y = 36 \\ 5x + 4y = 20 & | \times 1 | & 5x + 4y = 20 - \\ \hline 7x & & = 16 \\ x = \frac{16}{7} & \rightarrow & y = \frac{15}{7} \end{array}$$

$(x, y)$	$z = -3x + 2y$
$(0, 5)$	10
$(0, 9)$	18 $\rightarrow$ maksimum
$(\frac{16}{7}, \frac{15}{7})$	$-\frac{18}{7}$

-----**Jawaban: C**

4. Jika titik  $(x, y)$  memenuhi  $x^2 \leq y \leq x + 6$ , maka nilai maksimum  $x + y$  adalah ....
- A. 5  
B. 6  
C. 7  
D. 9  
E. 12

(TKDU SBMPTN 2014)

**Pembahasan CERDAS:**

- Jika  $x^2 \leq y \leq x + 6$  maka akan berlaku pula  
 $x^2 \leq x + 6 \rightarrow x^2 - x - 6 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3 \text{ artinya,}$$

Nilai  $x$  terkecil adalah  $-2$  dan

Nilai  $x$  terbesar adalah  $3$  ... (i)

- $x^2 \leq y \leq x + 6$  (semua ruas ditambah  $x$ )

$$x^2 + x \leq x + y \leq 2x + 6 \text{ artinya,}$$

nilai minimum  $x + y$  adalah  $x^2 + x$

dan

nilai maksimum  $x + y$  adalah  $2x + 6$  ...

(ii)

Jadi, dari persamaan (i) dan (ii), maka nilai maksimum  $x + y$  adalah  $2(3) + 6 = 12$

**Jawaban: E**

5. Luas suatu area peternakan adalah  $200 \text{ m}^2$ . Untuk membuat sebuah kandang ayam, rata-rata diperlukan tempat seluas  $10 \text{ m}^2$  dan untuk kandang kambing, rata-rata diperlukan  $20 \text{ m}^2$ . Area peternakan tersebut tidak mampu menampung lebih dari 12 kandang ayam dan kandang kambing. Hasil dari sebuah kandang ayam adalah Rp110.000,00/hari dan hasil dari sebuah kandang kambing adalah Rp200.000,00/hari. Jika di suatu hari tidak ada ayam dan kambing mati, maka hasil dari area pertanian tersebut dalam sehari akan maksimum dengan nilai ....

- A. Rp1.600.000,00
- B. Rp2.000.000,00
- C. Rp2.040.000,00
- D. Rp2.200.000,00
- E. Rp2.322.000,00

#### Pembahasan CERDAS:

Misalkan: ayam =  $x$ , kambing =  $y$

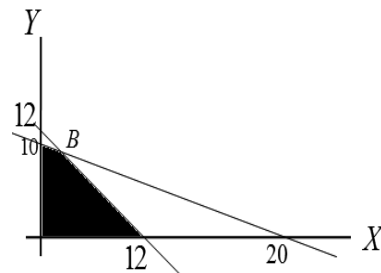
	Luas ( $\text{m}^2$ )	Daya Tampung	Hasil/hari
$x$	10	$x$	110.000
$y$	20	$y$	200.000
	200	12	

Berdasarkan tabel, diperoleh model matematika:

Memaksimumkan  $110.000x + 200.000y$  dengan kendala

$$(i) \quad 10x + 20y \leq 200 \rightarrow x + 2y \leq 20$$

$$(ii) \quad x + y \leq 12$$



Titik B dapat diperoleh dengan cara eliminasi.

Berdasarkan gambar diperoleh,

( $x, y$ )	$110.000x + 200.000y$
A (12,0)	1.320.000
C (0,10)	2.000.000
B (4,8)	2.040.000 $\rightarrow$ hasil maksimum

**Jawaban: C**

6. Seorang penjahit akan membuat 2 model pakaian. Dia mempunyai persediaan kain batik 40 meter dan kain polos 15 meter. Model A memerlukan 1 meter kain batik dan 1,5 meter kain polos, sedang model B memerlukan 2 meter kain batik dan 0,5 meter kain polos. Maksimum banyak pakaian yang mungkin dapat dibuat adalah ....

- A. 10
- B. 20
- C. 22
- D. 25
- E. 30

(TKDU SBMPTN 2014)

#### Pembahasan CERDAS:

Misalkan:  $x$  = model A dan  $y$  = model B (panjang kain dalam satuan meter)

Model	Kain Batik	Kain Polos
A ( $x$ )	1	1,5
B ( $y$ )	2	0,5
Persediaan	40	15

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh model matematika:

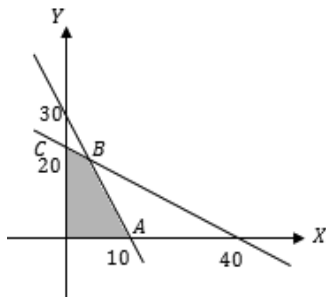
Memaksimumkan  $f(x, y) = x + y$

dengan kendala:

(i)  $x + 2y \leq 40$

(ii)  $1,5x + 0,5y \leq 15 \rightarrow 3x + y \leq 30$

Daerah penyelesaian:



Titik B dapat diperoleh dengan cara eliminasi.

$(x, y)$	$f(x, y) = x + y$
A (10,0)	10
B (4,18)	22 → maksimum
C (0,20)	20

-----**Jawaban: C**

7. Seorang pedagang khusus menjual produk A dan produk B. Produk A dibeli seharga Rp2.000,00 per unit, dijual dengan laba Rp800,00. Produk B dibeli seharga Rp4.000,00 per unit, dijual dengan laba Rp600,00. Jika ia mempunyai modal Rp1.600.000,00 dan gudangnya mampu menampung paling banyak 500 unit, maka keuntungan terbesar diperoleh bila ia membeli ....

- 300 unit produk A dan 200 unit produk B
- 200 unit produk A dan 300 unit produk B
- 300 unit produk A dan 300 unit produk B
- 500 unit produk A saja
- 500 unit produk B saja

(MATDAS SPMB 2007)

### Pembahasan CERDAS:

Misalkan: produk A =  $x$ , produk B =  $y$

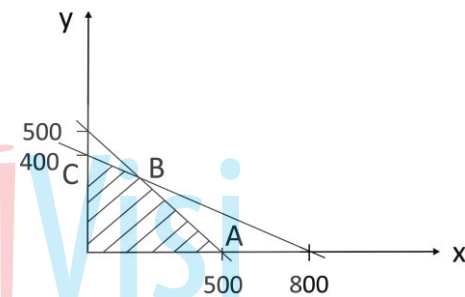
	Modal	Banyak produk	Laba
$x$	2000	$x$	800
$y$	4000	$y$	600
	1.600.000	500	

Berdasarkan tabel, diperoleh model matematika:

Memaksimumkan  $800x + 600y$  dengan kendala

(i)  $2000x + 4000y \leq 1.600.000 \rightarrow x + 2y \leq 800$

(ii)  $x + y \leq 500$



Titik B dapat diperoleh dengan cara eliminasi.

Berdasarkan gambar diperoleh,

$(x, y)$	$800x + 600y$
A (500,0)	400.000 → untung besar
C (0,400)	240.000
B (200,300)	340.000

-----**Jawaban: D**

8. Untuk dapat diterima di suatu pendidikan, seseorang harus lulus tes dengan nilai Matematika lebih dari 7, nilai Bahasa Inggris lebih dari 5, dan jumlah kedua nilai ini lebih dari 13. Seorang peserta tes mempunyai nilai matematika  $x$  dan nilai Bahasa Inggris  $y$  sehingga  $2x + 3y = 30$ . Ia akan diterima pada pendidikan tersebut jika  $x$  dan  $y$  memenuhi ....

- $7 < x < \frac{15}{2}$  atau  $5 < y < \frac{16}{3}$
- $7 < x < 8$  atau  $5 < y < \frac{11}{2}$

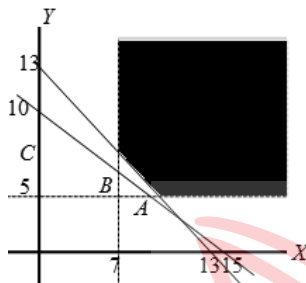
- C.  $7 < x < \frac{15}{2}$  atau  $\frac{11}{2} < y < 6$   
 D.  $\frac{15}{2} < x < 8$  atau  $\frac{16}{3} < y < \frac{11}{2}$   
 E.  $\frac{15}{2} < x < 8$  atau  $\frac{11}{2} < y < 6$

(MATDAS SNMPTN 2008)

**Pembahasan CERDAS:**

Misalkan, nilai Matematika =  $x$  dan nilai Bahasa Inggris =  $y$

- (i)  $x > 7$   
 (ii)  $y > 5$   
 (iii)  $x + y \geq 13$   
 (iv)  $2x + 3y \geq 30$



Titik A  $(\frac{15}{2}, 5)$  dan titik B  $(7, \frac{16}{3})$

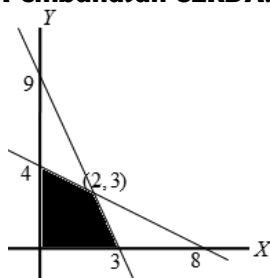
-----**Jawaban: A**

9. Fungsi  $f(x, y) = cx + 4y$  dengan kendala:  $3x + y \leq 9$ ,  $x + 2y \leq 8$ ,  $x \geq 0$ , dan  $y \geq 0$  mencapai maksimum di  $(2, 3)$  jika...

- A.  $c \leq -12$  atau  $c \geq -2$   
 B.  $c \leq -2$  atau  $c \geq -12$   
 C.  $2 \leq c \leq 12$   
 D.  $-2 \leq c \leq 12$   
 E.  $2 \leq c \leq 14$

(MATDAS SNMPTN 2011)

**Pembahasan CERDAS:**



Dari gambar terlihat 3 titik berada dalam himpunan penyelesaian yaitu  $(3, 0)$ ,  $(0, 4)$ , dan satu titik lagi yaitu yang mencapai maksimum  $(2, 3)$ . Titik maksimum berada pada perpotongan dua garis:

$$3x + y = 9 \rightarrow m_1 = \frac{3}{1} = 3 \text{ dan}$$

$$x + 2y = 8 \rightarrow m_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Fungsi objektifnya } cx + 4y \rightarrow m = \frac{c}{4}$$

Oleh karena titik maksimum berada pada perpotongan dua garis, maka berlaku

$$m_2 \leq m < m_1$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c}{4} \leq 3$$

$$2 \leq c \leq 12$$

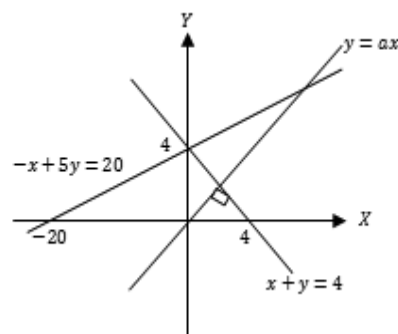
-----**Jawaban: C**

10. Jika daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan  $x + y \geq 4$ ,  $ax - y \leq 0$ ,  $-x + 5y \leq 20$ ,  $y \geq 0$  berbentuk bidang segitiga siku-siku dengan siku-siku pada titik potong garis  $x + y = 4$  dan  $ax - y = 0$ , maka maksimum  $f = 3x + 2y$  dengan kendala sistem pertidaksamaan di atas adalah ....

- A. 8  
 B. 10  
 C. 15  
 D. 17  
 E. 25

(MATDAS UM UGM 2015)

**Pembahasan CERDAS:**



$$\text{Garis } g_1 \equiv x + y = 4 \rightarrow m_1 = -1$$

$$\text{Garis } g_2 \equiv y = ax \rightarrow m_2 = a$$

Karena  $g_1 \perp g_2$ , maka

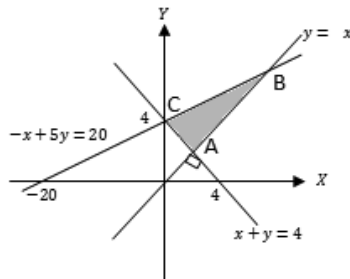
$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\Leftrightarrow -1 \cdot a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

Diperoleh  $g_2 \equiv y = x$

Sehingga daerah penyelesaiannya adalah segitiga ABC



- Titik A adalah perpotongan garis  $x + y = 4$  dan  $y = x$ . Dengan cara substitusi diperoleh  $x = 2$  dan  $y = 2$ .

- Titik B adalah perpotongan garis  $-x + 5y = 20$  dan  $y = x$ . Dengan cara substitusi diperoleh  $x = 5$  dan  $y = 5$ .
- Titik C adalah perpotongan garis  $x + y = 4$  dan  $-x + 5y = 20$ . Dengan cara substitusi diperoleh  $x = 0$  dan  $y = 4$ .

Berdasarkan gambar di samping diperoleh

$(x, y)$	$f = 3x + 2y$
A(2,2)	$3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$
B(5,5)	$3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 25 \rightarrow \max$
C(0,4)	$3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8$

-----**Jawaban: E**





## - BAB 12 - Matriks dan Transformasi

### Rangkuman Materi

#### A. Operasi Aljabar pada Matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan yang dinyatakan dalam baris dan kolom.

##### 1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua buah matriks atau lebih dapat dijumlahkan atau dikurangi jika berordo sama. Cara operasinya dengan menjumlahkan atau mengurangi elemen yang seletak.

##### 2. Perkalian Matriks

###### a) Perkalian skalar

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak & bk \\ ck & dk \end{pmatrix}$$

###### b) Perkalian dua matriks

Matriks A dapat dikalikan dengan matriks B dengan syarat kolom A = baris B. Jika sudah memenuhi syarat maka elemen baris A dikali dengan elemen kolom B, seperti berikut

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

#### B. Transpose, Determinan, dan Invers Matriks

##### 1. Transpose Matriks

Transpose dari matriks A adalah  $A^t$  atau  $A^T$ . Matriks  $A^T$  adalah matriks baru yang diperoleh dengan mengubah baris pada matriks awal menjadi kolom dan kolom pada matriks awal menjadi baris.

Misal:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

##### 2. Determinan Matriks

Jika  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , maka determinan matriks  $A \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ .

Determinan dapat digunakan dalam aturan Cramer. Misal diberikan sistem persamaan

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ maka } x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

##### 3. Invers Matriks

Jika  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , maka invers matriks  $A \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

Matriks A dikatakan singular jika  $|A| = 0$ , artinya matriks A tidak mempunyai invers. Sedangkan matriks A dikatakan nonsingular jika  $|A| \neq 0$  artinya matriks A mempunyai invers.

Sifat-sifat invers matriks:

- a)  $(A^{-1})^{-1} = A$
- b)  $AA^{-1} = A^{-1}A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- c)  $I.A = A.I = A$
- d)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

### C. Transformasi oleh Matriks

Jika titik  $A(x, y)$  ditransformasikan oleh matriks  $M$  sehingga memiliki bayangan  $A'(x', y')$ , maka berlaku

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

di mana  $M^{-1}$  merupakan invers dari matriks  $M$ .

### D. Translasi (Pergeseran)

Translasi (pergeseran) adalah transformasi yang menggeser setiap titik dengan jarak dan arah tertentu. Jika titik  $A(x, y)$  ditranslasikan oleh  $M = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , maka bayangannya adalah titik  $A'(x' = x + a, y' = y + b)$ .

### E. Refleksi (Pencerminan)

Refleksi (pencerminan) adalah transformasi yang merefleksikan setiap titik menggunakan sifat bayangan cermin. Matriks pencerminan dapat dituliskan sebagai  $M = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$  dengan  $\alpha$  merupakan sudut antara cermin dan sumbu  $X$  positif. Berikut ini tabel matriks dari beberapa pencerminan dengan titik asalnya adalah  $A(x, y)$ .

Cermin	Matriks $M$	Bayangan $A'(x', y')$
Sumbu $x$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(x, -y)$
Sumbu $y$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(-x, y)$
Garis $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(y, x)$
Garis $y = -x$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$(-y, -x)$
Garis $x = h$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-h \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}$	$(2h - x, y)$
Garis $y = k$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$	$(x, 2k - y)$
Pusat $O(0,0)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(-x, -y)$
Titik $(h, k)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$	$(2h - x, 2k - y)$

## F. Rotasi (Perputaran)

Rotasi (perputaran) adalah transformasi yang memutar setiap titik dengan pusat dan arah tertentu. Matriks rotasi dapat dituliskan sebagai  $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  dengan  $\theta$  merupakan sudut perputaran. Jika perputaran searah jarum jam maka sudut  $\theta$  bernilai negatif. Jika perputaran berlawanan arah jarum jam maka sudut  $\theta$  bernilai positif.

1. Jika titik  $A(x, y)$  dirotasikan sebesar  $\theta$  berlawanan arah jarum jam dengan pusat  $O(0,0)$ , maka bayangannya adalah  $A'(x', y')$  atau dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Jika titik  $A(x, y)$  dirotasikan sebesar  $\theta$  berlawanan arah jarum jam dengan pusat  $P(a, b)$ , maka bayangannya adalah  $A'(x', y')$  atau dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

## G. Dilatasi (Perubahan Skala)

Dilatasi (perubahan skala) adalah transformasi yang memperbesar atau memperkecil suatu objek, tetapi bentuknya tetap. Dilatasi ditentukan oleh pusat dilatasi  $P$  dan faktor skala  $k$ .

1. Jika titik  $A(x, y)$  didilatasikan dengan pusat  $O(0,0)$  dan faktor skala  $k$ , maka bayangannya adalah  $A'(x', y')$  atau dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. Jika titik  $A(x, y)$  didilatasikan dengan pusat  $P(a, b)$  dan faktor skala  $k$ , maka bayangannya adalah  $A'(x', y')$  atau dapat dituliskan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

## Soal dan Pembahasan

1. Jika  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  dengan  $b^2 \neq 2a^2$ , maka  $x + y = \dots$

- A. -2
- B. -1
- C. 0
- D. 1
- E. 2

(TKDU SBMPTN 2014)

### Pembahasan CERDAS:

Misal,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

$$|A| = a \cdot 2a - b \cdot b = 2a^2 - b^2.$$

$x + y$  dapat dicari dengan determinasi, yaitu

$$x + y = \frac{\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{ab - ab}{2a^2 - b^2} = 0$$

-----Jawaban: C

2. Jika  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 2 \\ c & 2 \end{pmatrix}$  dan determinan matriks  $AB$  adalah 3, maka nilai  $c - b$  adalah ....

- A. -2
- B. -1
- C. 0
- D. 1
- E. 2

(TKDU SBMPTN 2013)



**Pembahasan CERDAS:**

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 2 \\ c & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+b-c & 3 \\ -b+c & 0 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = 3$$

$$\begin{vmatrix} a+b-c & 3 \\ -b+c & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$0 - 3(-b+c) = 3$$

$$-3(c-b) = 3$$

$$c-b = -1$$

-----**Jawaban: B**

3. Jika  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  dan  $\det(A) = 2$ , maka  $\det(BA^{-1})$  adalah ....

- A. 8  
B. 6  
C. 4  
D. 2  
E. 1

(MATDAS SNMPTN 2012)

**Pembahasan CERDAS:**

$$|AB| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A||B| = 2 \cdot 2 = 0.0$$

$$2 \cdot |B| = 4$$

$$|B| = 2.$$

Sehingga

$$\det(BA^{-1}) = |BA^{-1}|$$

$$= |B| \cdot \frac{1}{|A|}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1$$

-----**Jawaban: E**

4. Jika  $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$  merupakan matriks yang mempunyai invers, maka jumlah semua nilai  $a$  yang mungkin sehingga  $\det\left(-\frac{1}{2}A\right) = \det(A^{-1})$  adalah ....

- A. 2  
B. 4  
C. 6  
D. 8  
E. 10

(TKDU SBMPTN 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\det\left(-\frac{1}{2}A\right) = \det(A^{-1})$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 |A| = \frac{1}{|A|}$$

$$\frac{1}{4}(2a-6) = \frac{1}{2a-6}$$

$$(2a-6)^2 = 4$$

$$4a^2 - 24a + 36 = 16$$

$$4a^2 - 24a + 20 = 0$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$(a-5)(a-1) = 0$$

$$a = 5 \text{ atau } a = 1$$

$$\text{Jumlah semua nilai } a \text{ yang mungkin} = 5 + 1 = 6$$

-----**Jawaban: C**

5. Jika matriks  $A = \begin{pmatrix} 2a & -4 \\ -4 & 2a \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} 2b & b \\ -4 & b \end{pmatrix}$  mempunyai invers, maka semua bilangan real  $a$  yang memenuhi  $\det(BAB^{-1}) > 0$  adalah ....

- A.  $a < -4$  atau  $a > 4$   
B.  $a < -2$  atau  $a > 2$   
C.  $-2 < a < 2$   
D.  $0 < a < 2$   
E.  $a > 2$

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

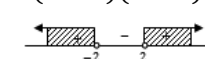
$$|BAB^{-1}| > 0$$

$$|A| > 0$$

$$|A| > 0$$

$$4a^2 - 16 > 0$$

$$4(a-2)(a+2) > 0$$



$$\text{Jadi, } a < -2 \text{ atau } a > 2$$

-----**Jawaban: B**

6. Jika  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  dan  $A^2 - xA + yI = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , maka  $x + y = \dots$

- A. 9  
B. 14  
C. 19  
D. 23  
E. 25

(SIMAK UI 2013 Matematika Dasar)

**Pembahasan CERDAS:**

Jika  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ , maka

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad A^2 - xA + yI &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x & 3x \\ 2x & 5x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 22 - 4x + y & 27 - 3x \\ 18 - 2x & 31 - 5x + y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $27 - 3x = 0 \rightarrow x = 9$
- $22 - 4x + y = 0 \rightarrow 22 - 36 + y = 0 \rightarrow y = 14$

Jadi,  $x + y = 9 + 14 = 23$

-----**Jawaban: D**

7. Jika grafik fungsi  $y = x^2 - (9 + a)x + 9a$  diperoleh dari grafik  $y = x^2 - 2x - 3$  melalui pencerminan terhadap garis  $x = 4$ , maka  $a = \dots$

- A. 7
- B. 5
- C. 3
- D. -5
- E. -7

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$y = x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{M_{x=4}} y = x^2 - (9 + a)x + 9a$$

$$x' = 2(4) - x \rightarrow x = 8 - x'$$

$$y' = y$$

Substitusikan  $x = 8 - x'$  dan  $y = y'$  ke garis  $y = x^2 - 2x - 3$

$$y' = (8 - x')^2 - 2(8 - x') - 3$$

$$y' = x'^2 - 16x' + 64 - 16 + 2x' - 3$$

$$y' = x'^2 - 14x' + 45$$

Diperoleh bayangan  $y = x^2 - 14x + 45$  identik dengan  $y = x^2 - (9 + a)x + 9a$ , sehingga  $9a = 45 \rightarrow a = 5$

-----**Jawaban: B**

8. Titik  $(2a, -a)$  diputar  $90^\circ$  berlawanan arah jarum jam dengan pusat perputaran titik  $(1, 1)$ . Jika hasil rotasi adalah  $(2 + a, -2)$  maka  $a = \dots$

- A. 2
- B. 1
- C. 0
- D. -1
- E. -2

**Pembahasan CERDAS:**

Rotasi  $90^\circ$  berlawanan arah jarum jam mempunyai matriks  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dengan pusat perputaran  $(1, 1)$ , maka

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 + a \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a - 1 \\ -a - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 + a \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + 1 \\ 2a - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 + a \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + 2 \\ 2a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } -2 = 2a \rightarrow a = -1$$

-----**Jawaban: D**

9. Transformasi  $T$  merupakan komposisi pencerminan terhadap garis  $y = 5x$  dilanjutkan pencerminan terhadap garis  $y = -\frac{x}{5}$ . Matriks penyajian  $T$  adalah ....

- A.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- B.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- C.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- D.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- E.  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

**Pembahasan CERDAS:**

Dikarenakan pencerminan terhadap garis  $y = 5x$  tegak lurus dengan pencerminan terhadap garis  $y = -\frac{1}{5}x$ , maka terbentuk sudut  $\alpha = 90^\circ$  sedemikian sehingga ini sama artinya dengan rotasi sebesar  $2\alpha = 180^\circ$ . Jadi, matriks transformasinya adalah

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

-----Jawaban: B

10. Parabola  $y = ax^2 + bx + c$  puncaknya  $(p, q)$ , dicerminkan terhadap garis  $y = q$  menghasilkan parabola  $y = kx^2 + lx + m$ . Nilai  $a + b + c + k + l + m$  adalah ....

- A. q
- B. 2p
- C. p
- D. 2q
- E. p + q

**Pembahasan CERDAS:**

- $y = ax^2 + bx + c$  puncaknya  $(p, q)$ .
- Pencerminkan terhadap garis  $y = q$  mempunyai matriks  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

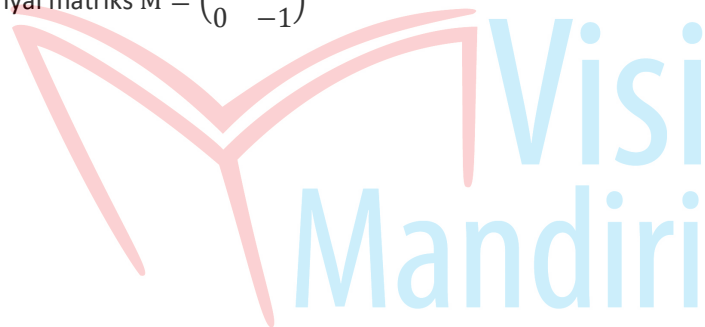
$$\begin{aligned} \bullet \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= M \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ q - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2q - y \end{pmatrix} \\ &\rightarrow x = x' \text{ dan } y = 2q - y' \end{aligned}$$

- Jadi, hasil pencerminan  $y = ax^2 + bx + c$  adalah

$$\begin{aligned} 2q - y' &= ax'^2 + bx' + c \\ y' &= -ax'^2 - bx' + 2q - c \\ y &= -ax^2 - bx + 2q - c \equiv y = kx^2 + lx + m \\ &\text{sehingga diperoleh} \\ k &= -a; l = -b; m = 2q - c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi, } a + b + c + k + l + m &= a + b + c - a - b + 2q - c \\ &= 2q \end{aligned}$$

-----Jawaban: D





## - BAB 13 - Barisan dan Deret

### Rangkuman Materi

#### A. Barisan dan Deret

1. Barisan

Barisan adalah himpunan bilangan-bilangan yang diurutkan menurut aturan tertentu. Barisan suku ke-1 sampai suku ke-n dapat dituliskan  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_{n-1}, U_n$ .

2. Deret

Deret adalah penjumlahan dari suatu barisan yang berurutan. Secara umum dapat dituliskan

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{n-1} + U_n = \sum_{i=1}^n U_i$$

3. Hubungan antara barisan dan deret

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

#### B. Barisan dan Deret Aritmetika

1. Barisan Aritmetika

adalah suatu barisan bilangan yang selisih/beda antara dua suku yang berurutan selalu sama.

$$b = U_n - U_{n-1}$$

Rumus suku ke-  $n$  dari barisan aritmetika adalah  $U_n = a + (n - 1)b$

dengan  $U_n$  = suku ke -  $n$

$a$  = suku pertama

$b$  = beda

2. Deret Aritmetika

Jumlah  $n$  suku pertama dari deret aritmetika dirumuskan:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b)$$

dengan  $S_n$  = jumlah  $n$  suku pertama

$U_n$  = suku ke -  $n$

$a$  = suku pertama

$b$  = beda

3. Rata-Rata Aritmetika

Jika

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

maka  $\bar{x}n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  sehingga  $n\bar{x} = U_{x_1} + U_{x_2} + \dots + U_{x_n}$

4. Sisipan

Jika antara dua suku disisipkan  $m$  bilangan sehingga membentuk barisan aritmetika baru, maka:

	BA Lama	BA Baru
Suku pertama	$a$	$a$
Suku terakhir	$k$	$k$
Banyaknya suku	$n$	$n' = n + (n - 1)m$
Beda	$b$	$b' = \frac{b}{m + 1}$
Jumlah suku		$\frac{S_n}{S'_n} = \frac{n}{n'}$

5. Memisalkan bilangan yang membentuk aritmetika

a) Jika banyak bilangan ganjil (misalkan beda =  $q$ )

- 3 bilangan  $\rightarrow (p - q), p, (p + q)$
- 5 bilangan  $\rightarrow (p - 2q), (p - q), p, (p + q), (p + 2q)$
- dan seterusnya

b) Jika banyak bilangan genap (misalkan beda =  $2q$ )

- 4 bilangan  $\rightarrow (p - 3q), (p - q), (p + q), (p + 3q)$
- 6 bilangan  $\rightarrow (p - 5q), (p - 3q), (p - q), (p + q), (p + 3q), (p + 5q)$
- dan seterusnya

c) Jika bilangan tidak diketahui

Misalkan  $a, (a + b), (a + 2b), (a + 3b), \dots$

### C. Barisan dan Deret Geometri

1. Barisan Geometri

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang perbandingan/rasio dua suku yang berurutan selalu sama, yaitu  $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$ . Rumus suku ke -  $n$  dari barisan geometri adalah  $U_n = ar^{n-1}$

dengan:  $U_n$  = Suku ke -  $n$

$a$  = suku pertama

$r$  = rasio

2. Deret Geometri

Jumlah  $n$  suku pertama dari deret geometri dirumuskan:

$$S_n = \frac{a}{1 - r} (1 - r^n) = \frac{a}{r - 1} (r^n - 1)$$

dengan:  $S_n$  = jumlah  $n$  suku pertama

$a$  = suku pertama

$r$  = rasio

3. Rata-Rata Geometri

Jika

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

maka  $\bar{x}n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  sehingga  $(U_{\bar{x}})^n = U_{x_1} \cdot U_{x_2} \cdot \dots \cdot U_{x_n}$

4. Sisipan

Jika antara dua suku disisipkan  $m$  bilangan sehingga membentuk barisan geometri baru, maka:

	BG Lama	BG Baru
Suku pertama	$a$	$a$
Suku terakhir	$k$	$k$
Banyaknya suku	$n$	$n' = n + (n - 1)m$
Beda	$r$	$r' = \sqrt[m+1]{r}$
Jumlah suku	$\frac{S_n}{S_{n'}} = \frac{n}{n'}$	

5. Memisalkan bilangan yang membentuk barisan geometri

a) Jika banyak bilangan ganjil (misalkan rasio =  $q$ )

- 3 bilangan  $\rightarrow \frac{p}{q}, p, pq$
- 5 bilangan  $\rightarrow \frac{p}{q^2}, \frac{p}{q}, p, pq, pq^2$
- Dan seterusnya

b) Jika banyak bilangan genap (misalkan rasio =  $q^2$ )

- 4 bilangan  $\rightarrow \frac{p}{q^3}, \frac{p}{q}, pq, pq^3$
- 6 bilangan  $\rightarrow \frac{p}{q^5}, \frac{p}{q^3}, \frac{p}{q}, pq, pq^3, pq^5$
- Dan seterusnya

c) Jika bilangan tidak diketahui

Misalkan  $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$

#### D. Deret Tak Hingga (Konvergen)

1. Barisan geometri tak hingga akan mempunyai nilai yang konvergen (nilainya memusat) jika:  $-1 < r < 1$  dengan  $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ .

2. Kasus  $S_{\text{ganjil}}$  dan  $S_{\text{genap}}$

a)  $S_\infty = S_{\text{genap}} + S_{\text{ganjil}}$  dan  $r = \frac{S_{\text{genap}}}{S_{\text{ganjil}}}$

b)  $S_{\text{genap}} = U_2 + U_4 + U_6 + \dots = \frac{ar}{1-r^2}$

c)  $S_{\text{ganjil}} = U_1 + U_3 + U_5 + \dots = \frac{a}{1-r^2}$

3. Kasus Bola Memantul

Jika bola dijatuhkan dari ketinggian  $h_0$  kemudian memantul dengan tinggi pantulan  $r = \frac{m}{n}$  dari ketinggian sebelumnya

a) Jumlah seluruh lintasan yang dilalui bola dari awal hingga berhenti

$$L = 2S_\infty - h_0 \text{ atau } L = h_0 \cdot \frac{n+m}{n-m}$$

b) Jumlah seluruh lintasan yang dilalui bola dari pantulan ke- $n$  hingga berhenti

$$L_n = \frac{2h_0 r^n}{1-r}$$

## Soal dan Pembahasan

1. Misalkan  $U_k$  dan  $S_k$  berturut-turut menyatakan suku ke- $k$  dan jumlah  $k$  suku pertama suatu barisan aritmetika. Jika  $U_2 - U_4 + U_6 - U_8 + U_{10} - U_{12} + U_{14} - U_{16} + U_{18} = 20$ , maka  $S_{19} = \dots$
- A. 630  
B. 380  
C. 210  
D. 105  
E. 21

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} (U_2 + U_6 + U_{10} + U_{14} + U_{18}) - \\ (U_4 + U_8 + U_{12} + U_{16}) &= 20 \\ 5U_{10} - 4U_{10} &= 20 \\ U_{10} &= 20 \\ S_{19} &= \frac{19}{2}(U_1 + U_{19}) \\ &= \frac{19}{2}(2U_{10}) \\ &= 19(20) \\ &= 380 \end{aligned}$$

-----**Jawaban: B**

2. Diketahui  $a, b$ , dan  $c$  berturut-turut adalah suku ke-2, ke-4, dan ke-6 barisan aritmetika. Jika  $\frac{a+b+c}{b+1} = 4$ , maka nilai  $b$  adalah ....
- A. -4  
B. -2  
C. 1  
D. 2  
E. 4

(TKDU SBMPTN 2013)

**Pembahasan CERDAS:**

- $a, b$ , dan  $c \rightarrow BA$   
Maka berlaku  $2b = a + c$
- $\frac{a+b+c}{b+1} = 4$   

$$\Leftrightarrow \frac{(a+c)+b}{b+1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2b+b}{b+1} = 4$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3b &= 4b + 4 \\ \Leftrightarrow b &= -4 \end{aligned}$$

-----**Jawaban: A**

3. Suku ke 3, 5, dan 8 suatu deret aritmetika berturut-turut adalah  $\frac{3x+1}{2}$ ,  $2x+2$ ,  $4x+7$ . Jika  $U_n$  menyatakan suku ke  $n$  barisan tersebut, maka suku ke  $2n$  adalah ....
- A.  $5 + 3n$   
B.  $2 + 6n$   
C.  $2U_n$   
D.  $3 + 2U_n$   
E.  $3n + U_n$

(MATDAS UM UGM 2013)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad U_5 &= 2x + 2 \rightarrow a + 4b = 2x + 2 \\ \text{(ii)} \quad U_8 &= 4x + 7 \rightarrow a + 7b = 4x + 7 \\ \text{(iii)} \quad U_3 &= \frac{3x+1}{2} \rightarrow a + 2b = \frac{3x+1}{2} \end{aligned}$$

Eliminasikan (i) dan (ii)

$$a + 7b = 4x + 7$$

$$a + 4b = 2x + 2$$

$$5b = 2x + 5 \dots \text{(iv)}$$

Eliminasikan (i) dan (iii)

$$a + 4b = 2x + 2$$

$$a + 2b = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$2b = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$4b = x + 3 \dots \text{(v)}$$

Eliminasikan (iv) dan (v)

$$5b = 2x + 5 \quad | \times 1 | \quad 5b = 2x + 5$$

$$4b = x + 3 \quad | \times 2 | \quad 8b = 2x + 6$$

$$3b = 1$$

$$b = \frac{1}{3}$$

Sehingga diperoleh  $x = -\frac{5}{3}$  dan  $a = -\frac{8}{3}$

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$= -\frac{8}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}n - 3$$

$$U_{2n} = a + (2n-1)b$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{8}{3} + (2n-1) \cdot \frac{1}{3} \\
 &= \frac{2}{3}n - 3 \\
 &= 2\left(\frac{1}{3}n - 3\right) + 3 \\
 &= 2Un + 3
 \end{aligned}$$

Jadi,  $U_{2n} = 2Un + 3$

-----**Jawaban: D**

4. Jika suku pertama barisan aritmetika adalah  $-2$  dengan beda  $3$ ,  $S_n$  adalah jumlah  $n$  suku pertama deret aritmetika tersebut dan  $S_{n+2} - S_n = 65$ , maka nilai  $n$  adalah ....

- A. 11  
B. 12  
C. 13  
D. 14  
E. 15

(MATDAS SNMPTN 2012)

**Pembahasan CERDAS:**

Barisan Aritmetika  $a = -2$ ,  $b = 3$

$$S_{n+2} - S_n = 65$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)}{2} (2a + ((n+2)-1)b) -$$

$$\frac{n}{2} (2a + (n-1)b) = 65$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)}{2} (2a + (n+1)b) -$$

$$\frac{n}{2} (2a + (n-1)b) = 65$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)}{2} (2(-2) + (n+1)3) -$$

$$\frac{n}{2} (2(-2) + (n-1)3) = 65$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)}{2} (3n-1) - \frac{n}{2} (3n-7) = 65$$

$$\Leftrightarrow (n+2)(3n-1) - n(3n-7) = 130$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 5n - 2 - 3n^2 + 7n = 130$$

$$\Leftrightarrow 12n = 132$$

$$\Leftrightarrow n = 11$$

-----**Jawaban: A**

5. Jika diketahui bahwa  $x = \frac{1}{2013} - \frac{2}{2013} + \frac{3}{2013} - \frac{4}{2013} + \dots - \frac{2012}{2013}$ . Nilai  $x$  yang memenuhi adalah ....

- A.  $-\frac{1007}{2013}$

- B.  $-\frac{1006}{2013}$   
C.  $\frac{1}{2013}$   
D.  $\frac{1006}{2013}$   
E.  $\frac{1007}{2013}$

(MATDAS SIMAK UI 2013)

**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2013} - \frac{2}{2013} + \frac{3}{2013} - \frac{4}{2013} + \dots \\
 &\quad - \frac{2012}{2013} \\
 &= \left( \frac{1}{2013} + \frac{3}{2013} + \dots + \frac{2011}{2013} \right) - \\
 &\quad \left( \frac{2}{2013} + \frac{4}{2013} + \dots + \frac{2012}{2013} \right) \\
 &= \left( \frac{1+3+\dots+2011}{2013} \right) - \\
 &\quad \left( \frac{2+4+\dots+2012}{2013} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{1006}{2}(1+2011)}{2013} \right) - \\
 &\quad \left( \frac{\frac{1006}{2}(2+2012)}{2013} \right) \\
 &= \frac{503 \cdot 2012}{2013} - \frac{503 \cdot 2014}{2013} \\
 &= \frac{503}{2013} (2012 - 2014) \\
 &= \frac{503}{2013} (-2) \\
 &= -\frac{1006}{2013}
 \end{aligned}$$

-----**Jawaban: B**

6. Jika  $a$  adalah suku pertama,  $r$  adalah rasio, dan  $S_n = 5^{n+2} - 25$  adalah jumlah  $n$  suku pertama deret geometri, maka nilai  $a + r = \dots$

- A. 95  
B. 105  
C. 125  
D. 225  
E. 500

(MATDAS SNMPTN 2012)



**Pembahasan CERDAS:**

$$\begin{aligned}
 S_n &= 5^{n+2} - 25 \\
 &= 5^2 \cdot 5^n - 5^2 \\
 &= 25 \cdot 5^n - 25
 \end{aligned}$$

Dilihat dari bentuk  $S_n$  deret geometri

$$S_n = \left(\frac{a}{r-1}\right)r^n - \left(\frac{a}{r-1}\right)$$

- $r = 5$
- $\frac{a}{r-1} = 25 \rightarrow a = 100$

Jadi,  $a + r = 100 + 5 = 105$

-----**Jawaban: B**

7. Jika  $k$  adalah bilangan real positif, serta  $k + 3, k + 1$ , dan  $k$  adalah berturut-turut suku ketiga, keempat, dan kelima suatu barisan geometri, maka jumlah dua suku pertama barisan tersebut adalah ....

- A. 12  
B. 16  
C. 20  
D. 24  
E. 28

(TKDU SBMPTN 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

$k + 3, k + 1$ , dan  $k \rightarrow$  barisan geometri

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow (k + 1)^2 = (k + 3) \cdot k \\
 &\Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 = k^2 + 3k \\
 &\Leftrightarrow k = 1
 \end{aligned}$$

Diperoleh :

$$U_3 = k + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$U_4 = k + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$U_5 = k = 1$$

Sehingga :

$$r = \frac{U_4}{U_3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Substitusikan  $r = \frac{1}{2}$  ke  $U_3 = 4$

$$\Leftrightarrow ar^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow a \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}a = 4$$

$$\Leftrightarrow a = 16$$

$$S_2 = U_1 + U_2 = a + ar$$

$$= 16 + 16 \left(\frac{1}{2}\right) = 24$$

Jadi, jumlah suku pertama dan suku kedua adalah 24.

-----**Jawaban: D**

8. Diketahui deret geometri tak hingga  $U_1 + U_2 + U_3 + \dots$  Jika rasio deret tersebut adalah  $r$  dengan  $-1 < r < 1$  dan

$$U_1 + U_3 + U_5 + \dots = \frac{2}{3}U_1 +$$

$$(U_2 + U_4 + U_6 + \dots), \text{ maka nilai } r^2 = \dots$$

- A.  $\frac{1}{9}$   
B.  $\frac{1}{4}$   
C.  $\frac{1}{3}$   
D.  $\frac{1}{2}$   
E. 1

(TKDU SBMPTN 2013)

**Pembahasan CERDAS:**

$$U_1 + U_3 + U_5 + \dots = \frac{2}{3}U_1 +$$

$$(U_2 + U_4 + U_6 + \dots)$$

$$\Leftrightarrow S_{\text{ganjil}} = \frac{2}{3}U_1 + (S_{\text{genap}})$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1-r^2} = \frac{2}{3}a + \left(\frac{ar}{1-r^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{1-r^2} - \frac{ar}{1-r^2} = \frac{2}{3}a$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(1-r)}{(1-r)(1+r)} = \frac{2}{3}a$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+r} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2r = 3$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\text{Jadi, } r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

-----**Jawaban: B**

9. Tiga buah bilangan dengan jumlah 42 membentuk barisan geometri. Jika suku tengah dikalikan dengan  $-\frac{5}{3}$  maka akan terbentuk barisan aritmetika. Maksimum dari bilangan-bilangan tersebut adalah ....

- A. 48  
B. 50  
C. 52  
D. 54  
E. 56

(UM UGM 2015)

**Pembahasan CERDAS:**

- Misalkan  $\frac{p}{q}, p, pq \rightarrow$  barisan geometri

$$\frac{p}{q} + p + pq = 42$$

$$p + pq + pq^2 = 42q$$

$$pq^2 + p = 42q - pq$$

- $\frac{p}{q}, -\frac{5}{3}p, pq \rightarrow$  barisan aritmetika

$$2\left(-\frac{5}{3}p\right) = \frac{p}{q} + pq$$

$$-10pq = 3(p + pq^2)$$

$$-10pq = 3(42q - pq)$$

$$-10pq = 126q - 3pq$$

$$126q + 7pq = 0$$

$$7q(18 + p) = 0$$

$$q = 0 \text{ atau } p = -18$$

- Untuk  $p = 18$

$$-18q^2 - 18 = 42q + 18q$$

$$18q^2 + 60q + 18 = 0$$

$$6q^2 + 20q + 6 = 0$$

$$(3q + 1)(2q + 6) = 0$$

$$q = -\frac{1}{3} \text{ atau } q = -3$$

Diperoleh

$$pq = -18\left(-\frac{1}{3}\right) = 6$$

$$pq = -18(-3) = 54$$

Jadi, maksimum bilangan tersebut adalah 54.

-----**Jawaban: D**

10. Pada suatu barisan geometri dengan  $r > 1$ , diketahui dua kali jumlah empat suku pertama adalah tiga kali jumlah dua suku genap pertama. Jika diantara suku-suku tersebut disisipkan empat bilangan dengan cara: antara suku kedua dan ketiga disisipkan satu bilangan, dan antara suku ketiga dan keempat disisipkan tiga bilangan, maka akan terbentuk barisan

aritmetika dengan beda  $r$ . Jumlah bilangan yang disisipkan adalah ....

- A. 14
- B. 24
- C. 28
- D. 32
- E. 42

**Pembahasan CERDAS:**

- Misalkan barisan geometri :

$$U_1, U_2, U_3, U_4$$

Disisipkan empat bilangan  $a, b, c, d$  membentuk barisan aritmetika:

$$U_1, U_2, a, U_3, b, c, d, U_4$$

- Dua kali jumlah empat suku pertama adalah tiga kali jumlah dua suku genap pertama

$$2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) = 3(U_2 + U_4)$$

$$2(a + ar + ar^2 + ar^3)$$

$$= 3(ar + ar^3)$$

$$2a(1 + r + r^2 + r^3) = 3a(r + r^3)$$

$$2 + 2r + 2r^2 + 2r^3 = 3r + 3r^3$$

$$r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0$$

$$(r^2 + 1)(r - 2) = 0$$

$$r^2 = -1 \text{ (tm) } \vee r = 2$$

- Barisan geometri

$$U_3 = ar^2 = a(2)^2 = 4a \dots (1)$$

Barisan aritmetika

$$U_3 = a + 3r = a + 6 \dots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh  $a = 2$

- Barisan geometri yang dimaksud: 2, 4, 8, 16, ...  
Barisan aritmatika yang dimaksud: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...
- Jadi, jumlah bilangan yang disisipkan  $6 + 10 + 12 + 14 = 42$ .

-----**Jawaban: E**



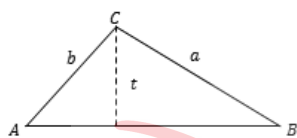
## - BAB 14 - Geometri

### Rangkuman Materi

#### A. Bangun Datar

Menghitung keliling dan luas bangun datar

##### 1. Segitiga



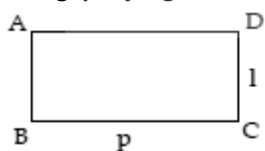
$$K = AB + BC + CA$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot \text{alas} \cdot \text{tinggi}$$

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

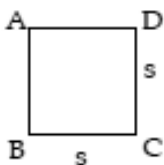
##### 2. Persegi panjang



$$K = 2(p + l)$$

$$L = pl$$

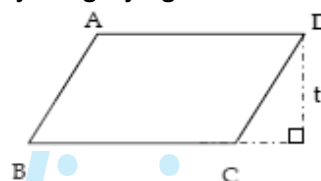
##### 3. Persegi



$$K = 4s$$

$$L = s^2$$

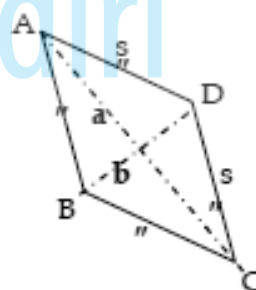
##### 4. Jajaran genjang



$$K = AB + BC + CD + DA$$

$$L = a t$$

##### 5. Belah ketupat

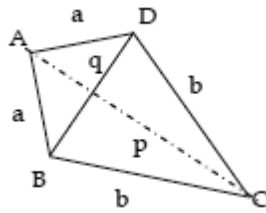


$$K = AB + BC + CD + DA$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot \text{diagonal 1} \cdot \text{diagonal 2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

## 6. Layang-layang

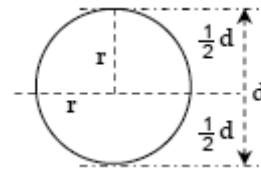


$$K = AB + BC + CD + DA$$

$$L = \frac{1}{2} \times \text{diagonal 1} \times \text{diagonal 2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot p \cdot q$$

## 8. Lingkaran

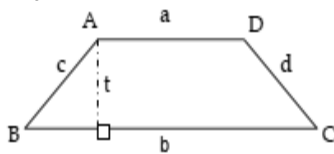


$$d = 2r$$

$$K = 2\pi r = \pi d$$

$$L = \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi d^2$$

## 7. Trapesium



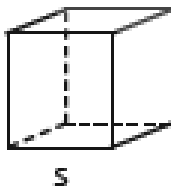
$$K = AB + BC + CD + DA$$

$$L = \frac{1}{2} (a + b) \cdot t$$

## B. Bangun Ruang

### 1. Menghitung luas permukaan dan volume bangun ruang

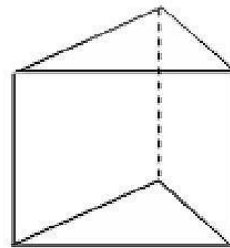
a) Kubus



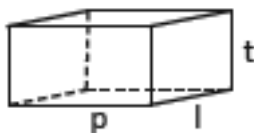
$$L_{\text{kubus}} = 6s^2$$

$$V_{\text{kubus}} = s^3$$

c) Prisma



b) Balok



$$L_{\text{balok}} = 2(pl + pt + lt)$$

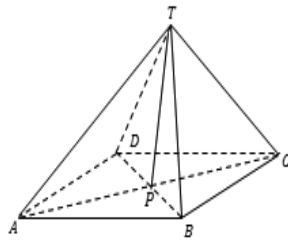
$$V_{\text{balok}} = plt$$

$$L_{\text{prisma}} = 2 \cdot L_{\text{alas}} + L_{\text{selimut}}$$

$$= 2 \cdot L_{\text{alas}} + K_{\text{alas}} \cdot t$$

$$V_{\text{prisma}} = L_{\text{alas}} \cdot t$$

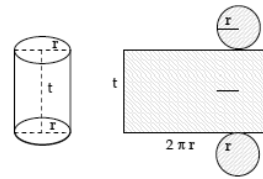
d) Limas beraturan



$$L_{\text{limas}} = L_{\text{ABCD}} + 2L_{\text{BCT}} + 2L_{\text{ABT}}$$

$$V_{\text{limas}} = \frac{1}{3} \cdot \text{ABCD} \cdot TP$$

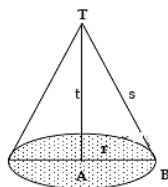
f) Tabung



$$\text{Luas tabung} = 2\pi r t + 2\pi r^2$$

$$\text{Volume tabung} = \pi r^2 t$$

e) Kerucut

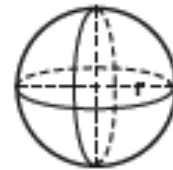


$$s = \text{garis pelukis} = \sqrt{r^2 + t^2}$$

$$\text{Luas selimut kerucut} = \pi r s$$

$$\text{Luas kerucut} = \pi r^2 + \pi r s$$

$$\text{Volume kerucut} = \frac{1}{3} \pi r^2 t$$



$$\text{Luas} = 4\pi r^2$$

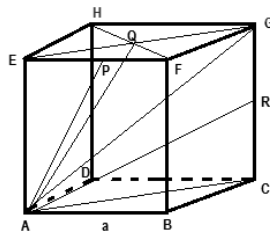
$$\text{Volume} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

## 2. Jarak

Jarak antara dua unsur ruang adalah panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan kedua unsur ruang tersebut.

a) Jarak titik dengan titik

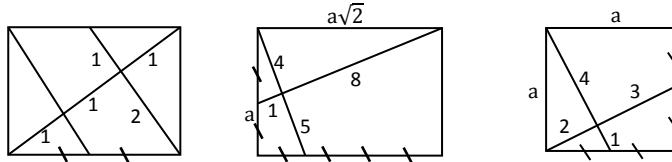
Yaitu panjang garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut.



Garis	Keterangan	Jarak
AC	Diagonal sisi	$a\sqrt{2}$
AG	Diagonal ruang	$a\sqrt{3}$
AP	Jarak titik A ke tengah garis sisi terdekat	$\frac{a}{2}\sqrt{5}$
AQ	Jarak titik A ke titik diagonal sisi di seberangnya	$\frac{a}{2}\sqrt{6}$
AR	Jarak titik A ke tengah sisi bidang diagonal	$\frac{3}{2}a$

b) Jarak titik dengan garis

Jarak titik A dan garis g adalah panjang ruas garis AB dimana B merupakan proyeksi A ke garis g. Perbandingan-perbandingan istimewa pada segiempat:



c) Jarak titik dengan bidang

Jarak antara titik A dengan bidang adalah panjang ruas garis AB dimana B merupakan proyeksi titik A pada bidang.

d) Jarak garis dengan garis

Menentukan jarak antara garis g dan garis h yaitu dengan membuat garis yang tegak lurus dengan kedua garis.

e) Jarak bidang dengan bidang

Menentukan jarak bidang  $\alpha$  dan  $\beta$  yaitu dengan cara menarik garis AB di mana A di bidang  $\alpha$  dan B di bidang  $\beta$  serta AB tegak lurus bidang  $\alpha$  dan  $\beta$ .

### 3. Sudut

a) Sudut antara garis dengan garis

Sudut antara garis dengan garis adalah sudut terkecil yang dibentuk oleh kedua garis.

b) Sudut antara garis dengan bidang.

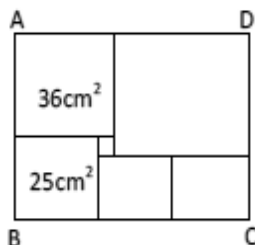
Sudut antara garis dengan bidang adalah sudut antara garis dan bayangannya bila garis tersebut diproyeksikan pada bidang.

c) Sudut antara bidang dengan bidang

Sudut antara bidang dengan bidang adalah sudut yang dibentuk oleh dua garis yang tegak lurus garis potong pada bidang  $\alpha$  dan  $\beta$ .

## Soal dan Pembahasan

1. Persegi panjang ABCD disusun dari 6 persegi. Dua persegi diketahui luasnya seperti dalam gambar berikut. Perbandingan luas daerah persegi terkecil dengan terbesar di dalam persegi panjang ABCD adalah ...



A. 1 : 7

B. 1 : 16

C. 1 : 45

D. 1 : 49

E. 1 : 64

(MATDAS SNMPTN 2009)

**Pembahasan CERDAS:**

Persegi dengan luas  $36 \text{ cm}^2 \rightarrow r = 6$

Persegi dengan luas  $25 \text{ cm}^2 \rightarrow r = 5$

Rusuk persegi terkecil

$= (6 - 5) \text{ cm} = 1 \text{ cm} \rightarrow L = 1^2 = 1 \text{ cm}^2$

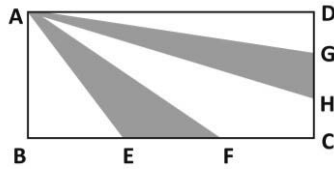
Rusuk persegi terbesar

$= (6+1) \text{ cm} = 7 \text{ cm} \rightarrow L = 7^2 = 49 \text{ cm}^2$

Jadi, perbandingannya 1 : 49

-----Jawaban: D

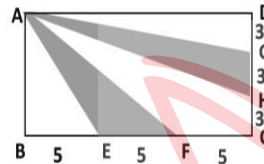
2. Diketahui persegi panjang BE = panjang EF = panjang FC = 5 cm dan panjang DG = panjang GH = panjang HC = 3 cm, maka luas daerah yang diarsir adalah ... cm<sup>2</sup>



- A. 22,5  
B. 45  
C. 60  
D. 67,5  
E. 90

(TKDU SBMPTN 2015)

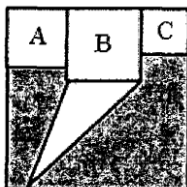
**Pembahasan CERDAS:**



Luas segitiga AEF  
 $= \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 9 = 22,5$   
 Luas segitiga AGH  
 $= \frac{1}{2} \cdot GH \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15 = 22,5$   
 Luas daerah yang diarsir  
 $= L_{AEF} + L_{AGH} = 22,5 + 22,5 = 45$

-----**Jawaban: B**

3. Bangun berikut adalah suatu persegi. Jika luas persegi A, B, dan C berturut-turut adalah 16, 36, dan 9, maka luas daerah yang diarsir adalah ....

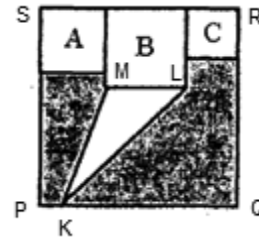


- A. 61  
B. 80  
C. 82

- D. 87  
E. 88

(MATDAS SNMPTN 2011)

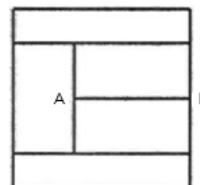
**Pembahasan CERDAS:**



Luas persegi A = 16  $\rightarrow r = 4$   
 Luas persegi B = 36  $\rightarrow r = 6$   
 Luas persegi C = 9  $\rightarrow r = 3$   
 Diperoleh rusuk persegi PQRS = 4 + 6 + 3  
 $= 13$  dan luas PQRS =  $13^2 = 169$ .  
 Perhatikan segitiga KLM, diketahui alas = rusuk persegi B = 6 dan tinggi = rusuk persegi PQRS - rusuk B = 13 - 6 = 7, luas segitiga KLM =  $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = 21$   
 Luas daerah yang diarsir  
 $= L_{PQRS} - (L_A + L_B + L_C + L_{KLM})$   
 $= 169 - (16 + 36 + 9 + 21)$   
 $= 169 - 82$   
 $= 87$

-----**Jawaban: D**

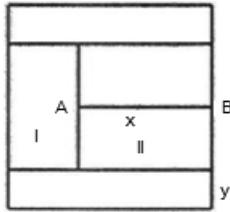
4. Jika suatu persegi dengan panjang sisi satu satuan dibagi menjadi 5 persegi panjang dengan luas yang sama seperti ditunjukkan pada gambar, maka panjang garis AB adalah ....



- A.  $\frac{3}{5}$   
B.  $\frac{2}{5}$   
C.  $\frac{2}{3}$   
D.  $\frac{1}{3}$   
E.  $\frac{1}{5}$

(MATDAS SNMPTN 2012)

**Pembahasan CERDAS:**



Luas I = luas II

$$\frac{1}{2}(1-x)(1-2y) = \frac{1}{2}(x)\left(\frac{1}{2}-y\right)$$

$$(1-x)(1-2y) = x\left(\frac{1}{2}-y\right)$$

$$(1-x)(1-2y) = x\left(\frac{1-2y}{2}\right)$$

$$1-x = \frac{x}{2}$$

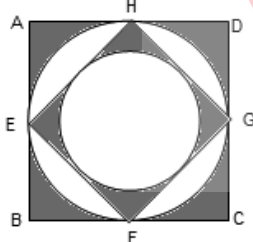
$$2-2x = x$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Jadi, panjang ruas garis AB =  $x = \frac{2}{3}$

-----**Jawaban: B**

5. Persegi ABCD mempunyai panjang sisi 4 cm seperti pada gambar. Luas daerah yang diarsir adalah ... cm<sup>2</sup>



- A.  $24 - 2\pi$   
B.  $28 - 8\pi$   
C.  $20 - 6\pi$   
D.  $24 - 4\pi$   
E.  $24 - 6\pi$

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**

Luas daerah yang diarsir

$$= (L_{ABCD} - L_{\text{lingk besar}}) + (L_{EFGH} - L_{\text{lingk kecil}})$$

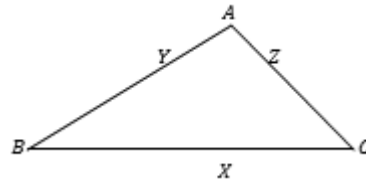
$$= (4^2 - \pi(2)^2) + ((2\sqrt{2})^2 - \pi(\sqrt{2})^2)$$

$$= 16 - 4\pi + 8 - 2\pi$$

$$= 24 - 6\pi$$

-----**Jawaban: E**

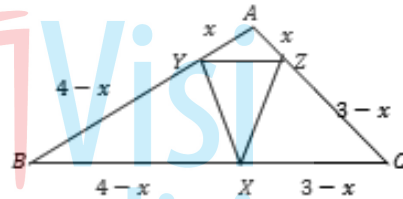
6. Titik X,Y,Z terletak pada segitiga ABC dengan  $AZ = AY$ ,  $BZ = BX$ , dan  $CX = CY$  seperti padagambar. Jika AB, AC, dan BC berturut-turut adalah 4 cm, 3 cm, dan 5 cm, maka luas segitiga ZAY adalah ... cm<sup>2</sup>



- A.  $\frac{1}{2}$   
B. 1  
C.  $\frac{3}{2}$   
D. 2  
E. 3

(TKDU SBMPTN 2016)

**Pembahasan CERDAS:**



Berdasarkan gambar diperoleh

$$BX + XC = 5$$

$$\Leftrightarrow (4-x) + (3-x) = 5$$

$$\Leftrightarrow 7 - 2x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Sehingga luas ZAY} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

-----**Jawaban: A**

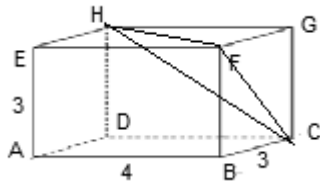
7. Balok ABCD.EFGH mempunyai panjang rusuk AB = 4 cm, BC = 3 cm, dan AE = 3 cm. Bidang CFH memotong balok menjadi 2 bagian dengan perbandingan volumenya adalah ....

- A. 1 : 3  
B. 1 : 5  
C. 1 : 6  
D. 2 : 3  
E. 3 : 5

(MATDAS SNMPTN 2010)



**Pembahasan CERDAS:**



Volume I = Volume H.CFG

$$= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \right) 4 = 6$$

Volume balok =  $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Volume II = Volume balok – volume I

$$= 36 - 6$$

$$= 30$$

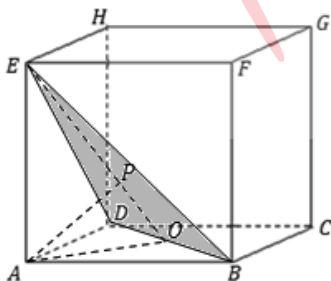
Jadi, volume I : volume II =  $6 : 30 = 1 : 5$

-----**Jawaban: B**

8. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm. Jarak titik A ke bidang BDE adalah ....

- A.  $2\sqrt{3}$   
 B.  $3\sqrt{3}$   
 C.  $4\sqrt{3}$   
 D.  $2\sqrt{6}$   
 E.  $3\sqrt{6}$

**Pembahasan CERDAS:**



Jarak A ke bidang BDE adalah AP

$$AO = \frac{1}{2} a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$OE = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 6^2} = \sqrt{18 + 36}$$

$$= \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Lihat  $\triangle AOE$

Dengan membandingkan luasnya

$$\frac{1}{2} \cdot AO \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot OE \cdot AP$$

$$\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot AP$$

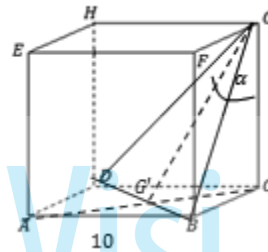
$$AP = \frac{3\sqrt{2} \cdot 6}{3\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$$

-----**Jawaban: A**

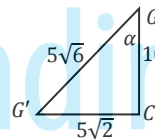
9. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 10 cm. kosinus sudut antara garis GC dan bidang BDG adalah ....

- A.  $\frac{1}{3}\sqrt{6}$   
 B.  $\frac{1}{3}\sqrt{6}$   
 C.  $\frac{1}{3}\sqrt{6}$   
 D.  $\frac{1}{3}\sqrt{6}$   
 E.  $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

**Pembahasan CERDAS:**



sudut antara garis GC dan bidang BDG adalah  $\alpha$



$$\cos \alpha = \frac{10}{5\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

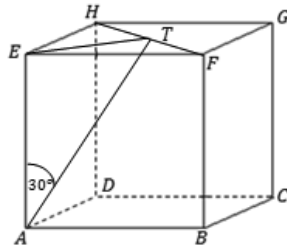
-----**Jawaban: B**

10. Sebuah prisma ABCD.EFGH memiliki alas berbentuk persegi. Titik T adalah titik tengah diagonal HF. Jika  $\angle EAT = \frac{\pi}{6}$  dan volume prisma tersebut  $4\sqrt{6}$ , maka tinggi prisma adalah ....

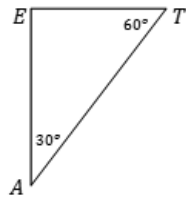
- A.  $\sqrt{6}$   
 B.  $\sqrt{3}$   
 C.  $\sqrt{2}$   
 D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 E.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(UM UGM 2014)

**Pembahasan CERDAS:**



Misalkan sisi alas =  $a$   
Lihat  $\triangle AET$



Dengan menggunakan aturan sin

$$\frac{ET}{\sin 30^\circ} = \frac{AE}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{AE}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$AE = \frac{a}{2}\sqrt{6}$$

Sehingga,

$$V_{\text{prisma}} = L_{\text{alas}} \cdot t$$

$$4\sqrt{6} = a \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{6}$$

$$a^3 = 8$$

$$a = 2$$

Jadi, alas = 2 dan tinggi =  $\sqrt{6}$

-----**Jawaban: A**

