Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

# Tarea 3

10 de octubre de 2020

$2^{o}$ semestre 2020 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

---

## Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 14 de septiembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas). Se habilitara un buzon distinto para cada pregunta para facilitar la correcion.
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada problema debe entregarse en un archivo independiente de las demas preguntas.
  - Los archivos que debe entregar son un archivo `PDF` por cada pregunta a su solución con nombre `numalumno-P1.pdf` y `numalumno-P2.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno-P1.zip` y `numalumno-P2.zip`, conteniendo el archivo `numalumno-P1.tex` y `numalumno-P2.tex`,respectivamente, que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

# Problemas

## Problema 1 - Teoría de Conjuntos

a) Ocupando la definición de suma vista en clases:

1. $sum(m, 0) = m$
2. $sum(m, \sigma(n)) = \sigma(sum(m, n))$

Es trivial concluir que el 0 es elemento neutro.

b) Ocupando la definición de multiplicación:

1. $mult(m, 0) = 0$
2. $mult(m, \sigma(n)) = sum(m, mult(m, n))$

notemos que

$$\begin{aligned} mult(m, 1) &= mult(m, \sigma(0)) \\ &= sum(m, mult(m, 0)) \\ &= sum(m, 0) = m \end{aligned}$$

Por lo que 1 es elemento neutro de la multiplicación

c) Queremos demostrar que

$$mult(a, sum(m, n)) = sum(mult(a, m), mult(a, n))$$

para cualquier $a, m, n$.

Por inducción estructural:

**BI**: Para $n = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} mult(a, sum(m, 0)) &= mult(a, m) \\ &= sum(mult(a, m), 0)) \\ &= sum(mult(a, m), mult(a, 0)) \end{aligned}$$

por lo que el caso base se cumple.

**HI**: Supongamos que se cumple que

$$mult(a, sum(m, n)) = sum(mult(a, m), mult(a, n))$$

**TI**: demostrar que tambien se cumple que

$$\begin{aligned} mult(a, sum(m, \sigma(n))) &= sum(mult(a, m), mult(a, \sigma(n)) \\ &= sum(mult(a, m), sum(a, mult(a, n))) \end{aligned}$$

Partiremos por el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} mult(a, sum(m, \sigma(n))) &= mult(a, \sigma(sum(m, n))) \\ &= sum(a, mult(a, sum(m, n))) \\ &\overset{\text{HI}}{\equiv} sum(a, sum(mult(a, m), mult(a, n))) \\ &= sum(mult(a, m), sum(a, mult(a, n))) \text{ por asociatividad} \end{aligned}$$

con lo que se demuestra la tesis de inducción, y la suma es distributiva con la multiplicación.

## Problema 2 - Relaciones

a) Para demostrar que la relación es de equivalencia demostraremos que es refleja, simetrica y transitiva.

   1) $X \sim_n X \iff n+1 \mid x+nx$ lo cual es trivial ya que podemos escribir $x+nx$ como $x(n+1))$, y $n+1$ siempre divide a $x(n+1)$

   2) Para demostrar simetría debemos demostrar que $X \sim_n Y \implies Y \sim_n X$

   $$\begin{aligned}(n+1)k &= x+ny \\ &= x+(n+1)y-y \\ (n+1)(k-y) &= x-y\end{aligned}$$

   ahora si nos fijamos en $Y \sim_n X$, tenemos que

   $$\begin{aligned}y+nx &= y+(n+1)x-x \\ &= (n+1)x+(n+1)(y-k) \\ &= (n+1)(x+y-k)\end{aligned}$$

   por lo que $(n+1) \mid x+ny \implies (n+1) \mid y+nx$ y la relación es simetrica.

   3) La relación es transitiva si $X \sim_n Y \wedge Y \sim_n Z \implies X \sim_n Z$.

   Para demostrar que la relación es transitiva haremos algo similar.

   Sabemos que $n+1 \mid x+ny$ y que $n+1 \mid y+nz$. Factorizando de igual manera que en la demostración anterior:

   $$(n+1)(k-y) = x-y \text{ y } (n+1)(c-z) = y-z$$

   Si tenemos la ecuación $x+nz$, podemos escribirla como $x+(n+1)z-z$, y reemplazando por las ecuaciones anteriores, nos queda finalmente $(n+1)(k-y)+y+(n+1)z-y+(n+1)(c-z)$, factorizando por $(n+1)$, nos queda $(n+1)(k-y+c)$, entonces $x+nz$ es multiplo de $(n+1)$, por lo que se cumple la implicancia y la relación es de equivalencia.

b) Para probar equivalencia se debe demostrar que la relación es refleja, simetrica y transitiva.

   1) Para demostrar que es refleja, tenemos que

   $$X \sim X \iff (X \cup X - X \cap X) \subseteq S$$

lo cual solo lo satisface el conjunto vacío. Por definición,

$$\emptyset \subseteq S$$

2) Para demostrar que es simetrica, tenemos que

$$X \sim Y \iff (X \cup Y - X \cap Y) \subseteq S$$

pero por asociatividad de los operadores $\cap$ y $\cup$, también tenemos que

$$X \sim Y \iff (Y \cup X - Y \cap X) \subseteq S$$

o sea,

$$Y \sim X \iff (Y \cup X - Y \cap X) \subseteq S$$

3) Para demostrar transitividad, se debe probar que para $X$, $Y$, $Z$ cualquieras,

$$X \sim Y \land Y \sim Z \implies X \sim Z$$

se cumple.

en el lado izquierdo tenemos que para un $x$ cualquiera en $\mathcal{U}$, se que cumple que

$(x \in X \land x \notin Y \lor x \notin X \land x \in Y) \lor (x \in Y \land x \notin Z \lor x \notin Y \land x \in Z)$

para que $X \sim Y \land X \sim Z$ sea cierto (excluimos el caso $x \in X \land x \in Z$ pues no nos sirve).

tenemos que demostrar que lo de la derecha es verdadero.

Para el mismo $x$, si $x \in X \land x \notin Z$ podemos ver que si $x \in Y$, se cumple pues $x \in Y \land x \notin Z$, por lo que $1 \implies 1$, y si $x \in Y$ también se cumple pues $x \in Y \land x \notin Z$, por lo que de nuevo $1 \implies 1$.

Para el caso $x \notin X \land x \in Z$, podemos ver que si $x \in Y$ se cumple, ya que $x \notin X \land x \in Y$, y similarmente si $x \notin Y$, entonces $x \notin Y \land x \in Z$.

Para todos los casos donde se cumple el lado izquierdo, el lado derecho también se cumple. Por lo que podemos decir que el lado izquierdo implica el derecho.

El único caso donde no se cumple es para algun $x$ que pertenezca a $X$ y a $Z$, pero ese caso no nos sirve pues por definición del operador $\sim$ no puede ocurrir.