Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 4

6 de octubre de 2020

2º semestre 2020 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 19 de octubre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada problema debe entregarse en un archivo independiente de las demas preguntas.
  - Los archivos que debe entregar son un archivo `PDF` por cada pregunta con su solución con nombre `numalumno-P1.pdf` y `numalumno-P2.pdf` , junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo los archivos `numalumno-P1.tex` y `numalumno-P2.tex` que compilan su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1 - Relaciones de orden

Para demostrar que la relación R es de orden parcial, debemos demostrar que es una relación refleja, no simétrica y transitiva.

a) Si tomamos el conjunto de pares ordenados $(a_i, ..., a_n)$, tenemos que $(a_1, ..., a_n)R(a_1, ..., a_n)$ se cumple si y solo si se cumple $a_i R_i b_i \ \forall \in 1, ..., n$ por como está definida la relación. Como sabemos que Ri es de orden parcial, entonces lo segundo se cumple, por lo tanto R es una relación refleja.

b) Tomando los conjuntos de pares ordenados $(a_1, ..., a_n)$ y $(b_1, ..., b_n)$, tenemos que $(a_1, ..., a_n)R(b_1, ..., b_n) \not\equiv (b_1, ..., b_n)R(a_1, ..., a_n)$ se cumple si y solo si $a_i R_i b_i \not\equiv b_i R_i a_i$ se cumple, por definición de R. Como sabemos que R_i es una relación de orden parcial, es antisimétrica, por lo que $a_i R_i b_i$ no es simétrica con $b_i R_i a_i$, por lo que R es entonces antisimétrica también.

c) Si tomamos $(a_1, ..., a_n)$, $(b_1, ..., b_n)$, $(c_1, ..., c_n)$, para que R sea transitiva se tiene que cumplir que $(a_1, ..., a_n)R(b_1, ..., b_n) \wedge (b_1, ..., b_n)R(c_1, ..., c_n) \implies (a_1, ..., a_n)R(b_1, ..., b_n)$. Como sabemos que R_i es de orden parcial, es transitiva, por lo que $a_i R_i b_i \wedge b_i R_i c_i \implies a_i R_i c_i$ se cumple, por lo tanto $(a_1, ..., a_n)R(b_1, ..., b_n) \wedge (b_1, ..., b_n)R(c_1, ..., c_n) \implies (a_1, ..., a_n)R(b_1, ..., b_n)$ también se cumple. De esa manera R es transitiva, refleja y antisimétrica, por lo tanto es de orden parcial.

Problema 2 - Funciones y cardinalidad

a) Si definimos $C \in S$ como el conjunto de máxima cardinalidad posible de números no consecutivos, este será de tamaño n. Está definido de tal manera que no podemos añadir otro elemento en $S \setminus C$ a C, pues dejaría de ser no consecutivo. Ahora intentamos armar el conjunto X a partir de C, de manera que X sea no consecutivo. Como $|X| = n + 1$, no podemos mapear cada elemento de C a X, por el principio del palomar (pues no existe una función sobreyectiva desde C a X), por lo tanto nos faltaría agregar un elemento al conjunto X para que su cardinalidad sea $n + 1$. Pero como ya no quedan elementos del conjunto C, debemos agregar elementos de $S \setminus C$, con lo que X dejaría de ser no consecutivo, y tendría almenos un par de números consecutivos.