Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 1

10 de octubre de 2020

2º semestre 2020 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

Ramón Echeverría - 19638485

Respuestas

Problema 1.a

Demostraremos por inducción simple que $b_n = 3 \cdot 2^n \cdot n!$:

BI: nuestro caso base es $n = 0$:

$$3 \cdot 2^0 \cdot 0! = 3 = b_0$$

HI: supongamos que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple que $b_n = 3 \cdot 2^n \cdot n!$.

TI: demostraremos que lo anterior también se cumple para $n + 1 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2 \cdot (n+1) \cdot b_n \\ &= 2 \cdot (n+1) \cdot 3 \cdot 2^n \cdot n! \\ &= 3 \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)! \end{aligned}$$

así, queda demostrado que se cumple para todo n $\in \mathbb{N}$.

Problema 1.b

Demostraremos que todo $x \in P$ tiene factorizacion p-prima ocupando inducción fuerte:

BI: el primer elemento del conjunto P es el 2, el cual por ser p-primo tiene factorización p-prima.

HI: supongamos que $\forall\, k < x, k \in P$, se cumple que k tiene factorización p-prima. Demostraremos que $x \in P$ también tiene factorización p-prima:

x puede ser escrito como $2 \cdot a$ con $a \geq 2$

así, para a:

(1) si $a \notin P$, x es p-primo por lo tanto posee factorización p-prima.

(2) si $a \in P$, por nuestra HI sabemos que a posee factorización p-prima. Así, x posee factorización p-prima también.

Problema 2.a

Para definir la función *size* con inducción estructural, partiremos por el caso base:

- Sea un conjunto A, para $x \in A$, definimos $size(x) = 1$

  Sea el mismo conjunto A, con $x \in A$ y sea R_A remolino:

- $size(R - x) = size(R) + 1$
- $size(x - R) = size(R) + 1$
- $size\begin{pmatrix} R \\ | \\ x \end{pmatrix} = size(R) + 1$
- $size\begin{pmatrix} x \\ | \\ R \end{pmatrix} = size(R) + 1$

Problema 2.b

Para la demostración primero definiremos la función originCount(R), la que nos retornará el numero de origenes de un A-remolino.

Sea A un conjunto cualquiera, $x \in A$ y R_A remolino:

- $originCount(x) = 1$
- $originCount(R - x) = originCount(R) + 1$
- $originCount\begin{pmatrix} R \\ | \\ x \end{pmatrix} = originCount(R) + 1$
- $originCount\begin{pmatrix} x \\ | \\ R \end{pmatrix} = originCount(R) + 1$

Ahora haremos la demostración ocupando inducción simple.

Sea A un conjunto cualquiera, $x \in A$ y R_A remolino:

BI: $size(x) = 1 = originCount(x)$.

HI: supondremos que se cumple para R, es decir, $size(R) = originCount(R)$

TI:

- $size(R - x) = size(R) + 1 \overset{\text{HI}}{=} originCount(R) + 1 = originCount(R - x)$
- $size(x - R) = size(R) + 1 \overset{\text{HI}}{=} originCount(R) + 1 = originCount(x - R)$
- $size\begin{pmatrix} x \\ | \\ R \end{pmatrix} = size(R) + 1 \overset{\text{HI}}{=} originCount(R) + 1 = originCount\begin{pmatrix} x \\ | \\ R \end{pmatrix}$
- $size\begin{pmatrix} R \\ | \\ x \end{pmatrix} = size(R) + 1 \overset{\text{HI}}{=} originCount(R) + 1 = originCount\begin{pmatrix} R \\ | \\ x \end{pmatrix}$

Queda demostrado que $size(R) = originCount(R)$, por lo tanto el número de origenes es igual a la función $size(R)$.