Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 2

10 de octubre de 2020

2º semestre 2020 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 14 de septiembre a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas). Se habilitara un buzon distinto para cada pregunta para facilitar la correcion.
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada problema debe entregarse en un archivo independiente de las demas preguntas.
  - Los archivos que debe entregar son un archivo `PDF` por cada pregunta a su solución con nombre `numalumno-P1.pdf` y `numalumno-P2.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno-P1.zip` y `numalumno-P2.zip`, conteniendo el archivo `numalumno-P1.tex` y `numalumno-P2.tex`,respectivamente, que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1 - Lógica proposicional

Dado $\alpha, \beta \in L(P)$, considere el siguiente conectivo binario:

$$\sigma(\alpha \sim \beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\alpha) = 0 \text{ y } \sigma(\beta) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) ¿Es $\sim$ conmutativo? Demuestre.

b) ¿Es $\sim$ asociativo? Demuestre.

c) ¿Es $\sim$ funcionalmente completo? Demuestre.

Respuestas:

a) Para probar que $\sim$ es conmutativo compararemos las tablas de verdad de $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \alpha$:

	α	β	$\alpha \sim \beta$	$\beta \sim \alpha$
σ_1:	0	0	1	1
σ_2:	0	1	0	0
σ_3:	1	0	0	0
σ_4:	1	1	0	0

Como $\alpha \sim \beta \equiv \beta \sim \alpha$ el conectivo es conmutativo.

b) Para probar que $\sim$ no es asociativo, basta encontrar un caso: tomemos $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 1$:

$$\alpha \sim (\beta \sim \gamma) = 1$$

$$(\alpha \sim \beta) \sim \gamma = 0$$

Por lo que el conectivo no es asociativo.

c) Se puede demostrar que el conectivo es funcionalmente completo si se encuentra una forma logicamente equivalente de escribir un conjunto funcionalmente completo ocupando solo el conectivo $\sim$. Sea el conjunto funcionalmente completo $C = \{\neg, \vee\}$, demostraremos que todo conectivo en C puede ser escrito usando conectivos en $C' = \{\sim\}$ de forma inductiva:

BI: Si $\varphi = p$ con $p \in P$, se cumple trivialmente.

HI: Supongamos que $\varphi \equiv \varphi'$, $\psi \equiv \psi'$ con $\varphi, \psi \in L(P)$ que ocupan solo conectivos en C, y φ', ψ' ocupan solo conectivos C'

TI: Aplicaremos el paso inductivo para definir θ formula que ocupa solo conectivos en C y escribiremos una formula logicamente equivalente con conectivos en C':

i. $\theta = \neg\varphi \overset{\text{HI}}{\equiv} \neg\varphi' \equiv \varphi' \sim \varphi'$

ii. $\theta = \varphi \vee \psi \overset{\text{HI}}{\equiv} \varphi' \vee \psi' \equiv (\varphi' \sim \psi') \sim (\varphi' \sim \psi')$

Por lo que queda demostrado que todo conectivo en C' puede ser escrito ocupando solo conectivos en C', y como C es funcionalmente completo, C' también lo es.

Problema 2 - Lógica de predicados

Considere las siguientes fórmulas:

- $\varphi_1 = \forall x \; R(x, x)$
- $\varphi_2 = \forall x, y \; R(x, y) \rightarrow R(y, x)$
- $\varphi_3 = \forall x, y, z \; (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)$
- $\varphi_4 = \forall x, y, z \; (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(z, x)$

Demuestre que para toda interpretación $\mathcal{I}$, se cumple que:

$$\mathcal{I} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \text{ si y solo si } \mathcal{I} \models \varphi_1 \wedge \varphi_4$$

Respuesta

Para demostrar la doble implicancia nos basta demostrar que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_4$. Para esto armaremos la tabla de verdad para $\sigma(varphi_1) = 1$, pues cuando $\sigma(varphi_1) = 0$ se cumple trivialmente:

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$	$\varphi_1 \wedge \varphi_4$
σ_1:	1	0	0	0	0	0
σ_2:	1	0	0	1	0	1
σ_3:	1	0	1	0	0	0
σ_4:	1	1	0	0	0	0
σ_5:	1	1	0	1	0	1
σ_6:	1	1	1	0	1	0
σ_7:	1	0	1	1	0	1
σ_8:	1	1	1	1	1	1

Lo que queda ahora es demostrar que los casos donde las valuaciones son distintas no se pueden dar. Estos son (2), (5), (6) y (7).

(2) y (7): Si $\sigma(\varphi_2) = 0$, eso quiere decir que hay al menos un caso donde la función R no es conmutativa, es decir $R(x, y) \neq R(y, x)$, esto quiere decir que $\exists(x, y)$ tal que $R(y, x) = 0$ cuando $R(x, y) = 1$. Si nos fijamos en φ_4, y escogemos un valor de $(z, x) = (y, x)$ tal que como $R(x, y) = 0$, $R(z, x) = 0$ y $R(x, z) = 1$, nos queda la variable y libre. Esto quiere decir que en algún momento $y = z$ por definicion del operador $\forall$. Entonces nos quedaría:

$$R(x, z) \wedge R(z, z) \implies R(z, x)$$

Como tenemos que $\sigma(\varphi_1) = 1$ por lo que $R(z, z) = 1$, encontramos un caso donde $\varphi_4 = 1 \wedge 1 \implies 0$, por lo que φ_4 no puede ser 1 si $\sigma(varphi_1) = 1$ y $\sigma(\varphi_2) = 0$.

(5) y (6): Si $\sigma(\varphi_1) = 1$ y $\sigma(\varphi_2) = 1$, se tiene que cumplir $R(x, y) = R(y, x)$ pues por contradicción si $\exists(x, y)$ tal que $R(x, y) \neq R(y, x)$, por definición del operador $\forall$ sucederá que

$R(x, y) = 1$ y $R(y, x) = 0$ para algún x, y, lo cual no puede suceder pues $\sigma(\varphi_2) = 1$.

Usando la propiedad de conmutatividad cuando $\sigma(\varphi_2) = 1$, sabemos que $R(x, z) = R(z, x)$, por lo que φ_3 y φ_4 son lógicamente equivalentes, por lo que no puede suceder que tengan valuaciones distintas.

Así, hemos demostrado que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ y $\varphi_1 \wedge \varphi_4$ tienen la misma tabla de verdad, por lo que son lógicamente equivalentes y la doble implicancia se cumple trivialmente.