Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Tarea 1

17 de agosto de 2020

2º semestre 2020 - Profesores G. Diéguez - F. Suárez

Requisitos

- La tarea es individual. Los casos de copia serán sancionados con la reprobación del curso con nota 1,1.
- **Entrega**: Hasta las 23:59:59 del 28 de agosto a través del buzón habilitado en el sitio del curso (Canvas).
  - Esta tarea debe ser hecha completamente en LaTeX. Tareas hechas a mano o en otro procesador de texto **no serán corregidas**.
  - Debe usar el template LaTeX publicado en la página del curso.
  - Cada solución de cada problema debe comenzar en una nueva hoja. ***Hint:*** Utilice `\newpage`
  - Los archivos que debe entregar son el archivo `PDF` correspondiente a su solución con nombre `numalumno.pdf`, junto con un `zip` con nombre `numalumno.zip`, conteniendo el archivo `numalumno.tex` que compila su tarea. Si su código hace referencia a otros archivos, debe incluirlos también.
- El no cumplimiento de alguna de las reglas se penalizará con un descuento de 0.5 en la nota final (acumulables).
- No se aceptarán tareas atrasadas.
- Si tiene alguna duda, el foro de Canvas es el lugar oficial para realizarla.

Problemas

Problema 1

a) Considere la siguiente recursión definida para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} b_0 &= 3 \\ b_n &= 2 \cdot n \cdot b_{n-1} \end{aligned}$$

Demuestre por inducción que $b_n = 3 \cdot 2^n \cdot n!$

b) Sea $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par, } x > 0\}$. Dados $n, m \in \mathbb{P}$, decimos que m es un p-factor de n si existe $k \in \mathbb{P}$ tal que $k \cdot m = n$. Además, decimos que $q \in \mathbb{P}$ es un p-primo si no tiene p-factores.

Demuestre por inducción que todo elemento de $\mathbb{P}$ tiene factorización p-prima (*i.e.* puede ser expresado como un producto de p-primos).

Problema 2

Dado un conjunto A, definimos el conjunto de los A-remolinos $\mathcal{R}_A$ como el menor conjunto que cumple las siguientes reglas:

1. $\forall x \in A, x \in \mathcal{R}_A$
2. $\forall x, y \in A$
   - $x \text{ — } y \in \mathcal{R}_A$, $y \text{ — } x \in \mathcal{R}_A$
   - $\begin{array}{c} x \\ | \\ y \end{array} \in \mathcal{R}_A$, $\begin{array}{c} y \\ | \\ x \end{array} \in \mathcal{R}_A$

   Para las siguientes reglas considere que $R \in \mathcal{R}_A$ y que $x, y \in A$.
3. Sea un A-remolino de la forma $R \text{ — } x$. Todos los siguientes son A-remolinos:

$$R \text{ — } x \text{ — } y \qquad \begin{array}{ccc} R & \text{—} & x \\ & & | \\ & & y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & y \\ & & | \\ R & \text{—} & x \end{array}$$

4. Sea un A-remolino de la forma $x \text{ — } R$. Todos los siguientes son A-remolinos:

$$y \text{ — } x \text{ — } R \qquad \begin{array}{ccc} x & \text{—} & R \\ | & & \\ y & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} y & & \\ | & & \\ x & \text{—} & R \end{array}$$

5. Sea un A-remolino de la forma $\begin{array}{c} R \\ | \\ x \end{array}$. Todos los siguientes son A-remolinos:

$$\begin{array}{c} R \\ | \\ x \\ | \\ y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & & \\ | & & \\ x & \text{—} & y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & R \\ & & | \\ y & \text{—} & x \end{array}$$

6. Sea un A-remolino de la forma $\begin{array}{c} x \\ | \\ R \end{array}$. Todos los siguientes son A-remolinos:

$$\begin{array}{c} y \\ | \\ x \\ | \\ R \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \text{—} & y \\ | & & \\ R & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} y & \text{—} & x \\ & & | \\ & & R \end{array}$$

A modo de ejemplo, el siguiente es un $\mathbb{N}$-remolino:

$$R \quad = \quad \begin{array}{ccccccccc}
 & & 3 & \text{—} & 2 & & 4 & & 100 \\
 & & | & & & & | & & | \\
8 & \text{—} & 3 & & & & 0 & \text{—} & 3 \\
 & & | & & & & | & & \\
 & & 27 & \text{—} & 1 & \text{—} & 1 & & \\
 & & | & & | & & & & \\
 & & 4 & & 5 & & & &
\end{array}$$

a) Defina la función $size : \mathcal{R}_A \to \mathbb{N}$, la que recibe un A-remolino y retorna el número de elementos de A que contiene. En el caso del ejemplo anterior, $size(R) = 13$.

b) Considere la siguiente definición inductiva para el *origen* de un A-remolino:

$origin : \mathcal{R}_A \to A$

1. $\forall x \in A, origin(x) = x$
2. $\forall x, y \in A$
   - $origin(x \text{ — } y) = x$, $origin(y \text{ — } x) = x$
   - $origin\begin{pmatrix} x \\ | \\ y \end{pmatrix} = x$, $origin\begin{pmatrix} y \\ | \\ x \end{pmatrix} = x$

   Para las siguientes reglas considere que $R \in \mathcal{R}_A$ y que $x \in A$.
3. $origin(R \text{ — } x) = origin(R)$.
4. $origin(x \text{ — } R) = origin(R)$.
5. $origin\begin{pmatrix} R \\ | \\ x \end{pmatrix} = origin(R)$.
6. $origin\begin{pmatrix} x \\ | \\ R \end{pmatrix} = origin(R)$.

Note que con esta definición, un A-remolino puede tener múltiples orígenes.

Demuestre que el número de orígenes de un A-remolino R es igual a $size(R)$.