KdV 方程在可测集上的两点时刻能观测不等式

汇报人: 王允磊

指导老师: 王明

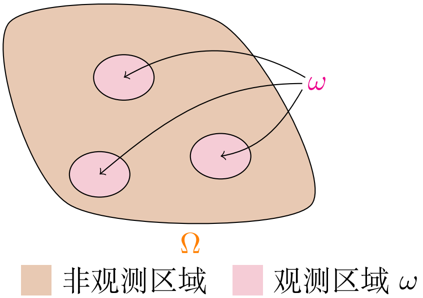
学院: 数学与物理学院

2021-11-22

从反问题到能观测不等式

反问题是指根据事物表现出来的现象或信息, 来推断事物本身特性的一类问题, 常见于光学, 声学和地质探测等问题中.

例如在地质勘探中, 为了获得某片区域的地质信息, 我们会打一些探测井, 通过这些探测井的信息, 从而得到整个区域的信息.



我们设全部区域为 Ω, 探测井所在区域为 ω, 每个时刻和每个位置所提供的信息为 $u(t,x)$.

那么许多反问题可以归结为下述的能观测不等式:

$$\int_{\Omega} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq C \int_0^T \int_{\omega} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

研究对象和内容

我们所研究的对象是 Korteweg-de Vries (KdV) 方程

$$\partial_t + \partial_x^3 u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R})$$

的解 $u(t,x)$ 并对它建立能观测不等式.

这里全空间 $\Omega = \mathbb{R}$, 我们的目标是使得该不等式的

(1) 观测时间 $[0,T]$ 和

(2) 观测区域 ω

越小越好.

研究现状

我们用 $B_r = \{x : |x| \leq r\}$ 表示半径为 r 的球, $\mathbb{R}\backslash B_r = \{x : |x| > r\}$ 表示半径为 r 的球外.

1. B. Y. Zhang[SIMA,1992] 和 J, Bourgain[IMRN,1997] 证明了 KdV 方程的解在两个不同时刻 $\omega = \mathbb{R}\backslash B_r$ 区域为零时, 解恒为零, 即 $u(t,x) \equiv 0$. 这是定性结果, 没有建立定量的不等式.
2. L. Roiser-B. Y. Zhang[JDE,2009] 证明了 $\omega = \mathbb{R}\backslash B_r$ (观测区域为球外) 的情形的能观测不等式, 观测时间是任意一个 $[0, T]$ 的时间段.
3. Kenig[JFA,2007] 证明了在任意一段时间内, 解存在某种指数衰减性时, 解恒为零. 这依然是定性结果.

研究现状: 两点时刻能观测不等式

Ze Li-Ming Wang[SIMA,2021] 更进一步, 证明了任意两个不同时刻球外的能观测不等式:

$E = B_{r_1}, F = B_{r_2}, r_1, r_2 > 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x \le C \left(\int_{\mathbb{R}\setminus E} |u(t_1,x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}\setminus F} |u(t_2,x)|^2 \,\mathrm{d}x \right).$$

可以看到这一新结果不仅使得观测时间变成了:(1)t_1 和 t_2 两个时刻 (而非一段时间),(2) 也得到了观测区域为球外的能观测不等式 (定量结果). 这样的不等式被称作两点时刻能观测不等式.

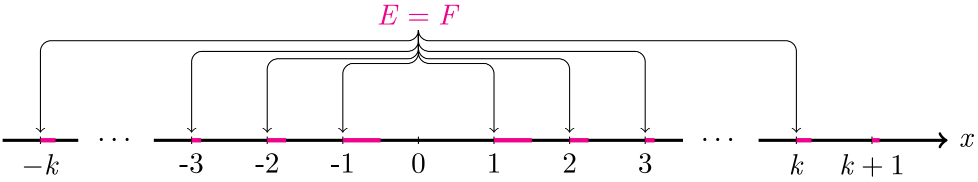
主要结果 I

观测时间取两点时刻已经是最优情况, 我们的目标就是使得非观测区域 E 和 F 越大越好.

E 和 F 均为测度有限可测集

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq C \left(\int_{\mathbb{R}\setminus E} |u(t_1,x)|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}\setminus F} |u(t_2,x)|^2 \, \mathrm{d}x \right).$$

举例: $E = F = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}, k\neq 0} \left[k, k+\frac{1}{2k^2}\right]$, 该集合是无界的, 大致分布如下图所示:



α 密度集

下一步是去除测度有限的限制, 为了达到这一目的, 我们引入了 α 密度集的概念:

定义: α 密度集

给定一个大于 0 的常数 α, 一个可测集称为α 密度集, 如果其满足如下的 α 指数衰减条件

$$\varlimsup_{x\to\infty} |A \cap [x, x+1]| \lesssim |x|^{-\alpha}.$$

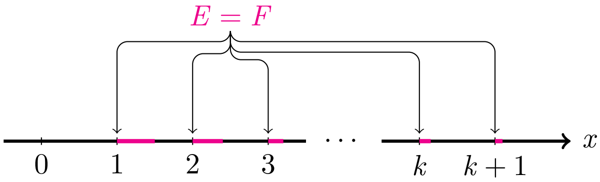
有了这一定义, 我们便可以描述我的第二个主要结果.

主要结果 II

E 和 F 均为同时包含在 (c,∞) 或者 $(-\infty,c$ 上的 $\alpha>5/6$ 密度集, 其中 c 为任意常数

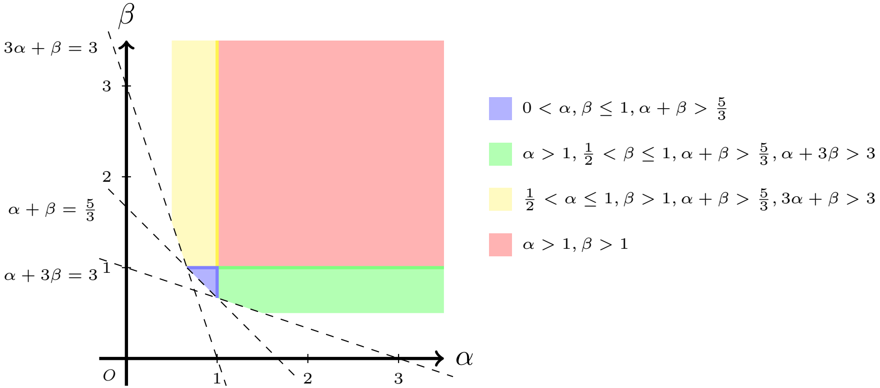
$$\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x \le C\left(\int_{\mathbb{R}\setminus E} |u(t_1,x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}\setminus F} |u(t_2,x)|^2 \,\mathrm{d}x\right).$$

举例: $E=F=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left[k,k+\frac{1}{2k^{5.1/6}}\right]$, 该集合测度是无限的, 分布如下图所示:



主要结果 II

实际上, E 和 F 所满足的密度条件可以放得更宽, 可以表示为下图的有色区域:



总结与展望

我们的主要工作是得到了线性 KdV 方程两个新的能观测不等式, 具体地说, 就是得到了非观测区域 E 和 F 取

(1) 具有有限测度的可测集 (突破了有界的限制)

(2) 具有某种密度条件且处在同一半轴的可测集 (突破了测度有限的限制)

两种情况下的两点时刻能观测不等式.

关于这个方向有许多有待解决的问题, 例如计算出更加精确的控制常数 C, 或者去除处在同一半轴的限制等等, 这些是接下来需要考虑的问题!

The End!