

# 初识椭圆偏微分方程

王 允 磊



2020-06-02

# 目录

## 1 椭圆偏微分方程

## 2 弱解和正则性

## 3 正则性举例：内正则性

## 4 解的有界性

# 拉普拉斯方程

设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^n$  中的开集, 则在该区域上满足

$$-\Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

的方程就叫做拉普拉斯方程.

这里的  $u$  可以对应现实世界的化学浓度, 热平衡台下的温度分布, 经典引力势能和电磁势能. 以热平衡态的温度场为例, 因为达到了热平衡, 所以温度分布  $u$  不再随时间的变换, 只是位置的函数. 根据热传导定律, 热量的流动速度  $\mathbf{F}$  和温度梯度  $\nabla u$  成正比:

$$\mathbf{F} = -a\nabla u \quad (a > 0).$$

如果区域内没有产生热量的热源, 那么在平衡态下通过一个区域  $V$  表面的热量总和应该为零 (即传导进  $V$  的和传导出外的热量应该相等):

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \nu dS = 0,$$

再利用高斯公式可得

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dx = 0,$$

所以

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \Delta u = 0.$$

# 泊松方程

当热平衡区域有恒定的热源时, 我们可以用函数  $f$  来表示, 则

$$\Delta u = f,$$

这样的方程便叫做泊松方程. 这样的例子很多, 比如经典的引力场方程:

$$\Delta \Phi = 4\pi G\rho.$$

# 一般二阶线性偏微分方程

一般的二阶线性偏微分方程可以写成

$$-\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} + c(x)u(x) = f(x).$$

上式可以简写为

$$-\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^n b^i \partial_i u + cu = f.$$

如果利用爱因斯坦记号, 则方程还可简写为

$$-a^{ij} \partial_{ij}^2 u + b^i \partial_i u + cu = f.$$

如果某一项中有两个相同的上标下标, 就默认对该指标作求和运算.

# 椭圆偏微分方程

根据偏微分方程的二阶系数  $a^{ij}$ , 我们可以对椭圆进行分类.

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \cdots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \cdots & a^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1} & a^{n2} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix}$$

如果上述矩阵在求解区域内的任意一点都是正定矩阵, 那么相应的方程被称为椭圆偏微分方程.

进一步, 如果矩阵还满足: 存在  $c_0 > 0$  使得

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega,$$

则称其为一致椭圆方程.

# 经典解和强解

记  $L = -a^{ij}\partial_{ij}^2 + b^i\partial_i + c$ ,  $Lu = f$ .

若  $u \in C^2(\Omega)$  并且满足

$$Lu = f,$$

则称其为方程的经典解.

若  $u$  可测,

$$Lu(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in \Omega,$$

则称其为方程的强解.



# 弱解

考虑

$$Lu = -\partial_j (a^{ij} \partial_i u) + b^i \partial_i u + cu = f$$

其中

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega) \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

若

$$\int_{\Omega} (a^{ij} \partial_i u \partial_j v + b^i \partial_i uv + cuv) dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

则称  $u$  为  $Lu = f$  的弱解.

# 一般的一致椭圆方程弱解定义

$$Lu = -\partial_i(a^{ij}(x)\partial_j u + b^i(x)u) + c^i(x)\partial_i u + d(x)u. \quad (1)$$

存在  $\lambda > 0$  使得

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

并且  $L$  的系数满足

$$\sum |a^{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2} \sum (|b^i(x)|^2 + |c^i(x)|^2) + \lambda^{-1}|d(x)| \leq \nu^2. \quad (3)$$

方程  $Lu = g + \partial_i f^i$  的弱解定义为

$$\mathcal{L}(u, v) := \int_{\Omega} \{(a^{ij}\partial_j u + b^i u)\partial_i v + (c^i\partial_i u + du)v\} dx = \int_{\Omega} (-f^i\partial_i v + gv) dx,$$

其中  $v \in C_0^1(\Omega)$ .

# 弱最大值原理

## 定理 1(弱最大值原理)

设  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  满足  $Lu \leq 0 (\geq 0)$  (积分意义上), 并且  $L$  的系数满足

$$\int_{\Omega} (-dv - b^i \partial_i v) dx \leq 0, \quad \forall v \geq 0, v \in C_0^1(\Omega). \quad (4)$$

则

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad \left( \inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^- \right). \quad (5)$$

证明: 设  $u \in W^{1,2}(\Omega), v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , 则  $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$ , 以及  $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$ .

不等式  $\mathcal{L}(u, v) \leq 0$  的形式为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((a^{ij} \partial_j u + b^i u) \partial_i v + (c^i \partial_i u + du) v) dx &\leq 0. \\ \int_{\Omega} (a^{ij} \partial_j u \partial_i v - (b^i - c^i) v \partial_i u) dx &\leq \int_{\Omega} (-duv - b^i \partial_i(uv)) dx \leq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $v \geq 0$  是使得  $uv \geq 0$  的任意  $W_0^{1,2}(\Omega)$  函数.

如果  $b^i - c^i = 0$ , 则

$$\int_{\Omega} a^{ij} \partial_j u \partial_i v dx \leq 0,$$

令  $v = \max(u - l, 0)$ ,  $l = \sup_{\partial\Omega} u^+$ , 则

$$\int_{\{x \in \Omega: u(x) > v(x)\}} a^{ij} \partial_j u \partial_i u dx \leq 0.$$

但是  $a^{ij} \partial_j \partial_i u \geq \lambda |\nabla u|^2$ , 必然得到  $\nabla u(x) = 0, x \in \{x \in \Omega : u(x) > v(x)\}$ , 所以该情况下定理成立.

对于一般情形, 假设  $l \leq k < \sup_{\Omega} u$ , 并设  $v = (u - k)^+$ . (如果这样的  $k$  不存在则我们的证明已经完成.)

$$\nabla v = \begin{cases} \nabla u & u > k, \\ 0 & u \leq k. \end{cases}$$

从式 (6) 可得

$$\int_{\Omega} a^{ij} \partial_j v \partial_i v dx \leq 2\lambda v \int_{\Gamma} v |\partial v| dx,$$

其中  $\Gamma = \text{supp} \nabla v \subset \text{supp} v$ . 再由一致椭圆条件 (2) 得

$$\int_{\Omega} a^{ij} \partial_j v \partial_i v dx \leq 2\nu \int_{\Gamma} v |\nabla v| dx \leq 2\nu \|\nu\|_{2;\Gamma} \|\nabla v\|_2,$$

从而

$$\|\nabla v\|_2 \leq 2\nu \|v\|_{2;\Gamma}.$$

再利用  $n \geq 3, p = 2$  ( $n=2$  的情形类似, 只是用的不等式不一样) 的 Sobolev 不等式以及 Hölder 不等式可得

$$\|v\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C \|v\|_{2;\Gamma} \leq C |\text{supp} \nabla v|^{\frac{1}{n}} \|v\|_{\frac{2n}{n-2}}.$$

进而有

$$|\text{supp} \nabla v| \geq C^{-n}.$$

这些不等式与  $k$  的选取没有关系, 所以当  $k \rightarrow \sup_{\Omega} u$  的时候不等式仍然成立.

这说明  $u$  一定在一个测度大于 0 的集合上达到最大值, 并且在这个集合上有  $\nabla u = 0$ . 这与  $\text{supp} \nabla v > 0$  矛盾.  $\square$

由弱最大值原理可以得到满足条件 (1),(2),(3) 和 (4) 的  $Lu = 0$  的解的唯一性.

# 弱解的存在性

## 定理 2

设  $L$  满足 (1), (2), (3) 和 (4), 那么对任意的  $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$  和  $g, f^i \in L^2(\Omega)$ , 广义 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu = g + \partial_i f^i & x \in \Omega \\ u = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解存在且唯一.

令  $w = u - \varphi$ , 则

$$\begin{aligned} Lw &= Lu - L\varphi \\ &= g - c^i \partial_i \varphi - d\varphi + \partial_i (f^i + a^{ij} \partial_j \varphi + b^i \varphi) \\ &= \widehat{g} + \partial_i \widehat{f}^i. \end{aligned}$$

# Lax-Milgram 定理

## 定理 3(Lax-Milgram 定理)

设  $B$  是希尔伯特空间  $H$  上的一个双线性算子, 并且满足

$$|B(x, y)| \leq K\|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in H \quad (7)$$

以及对某个  $v > 0$  有

$$B(x, x) \geq v\|x\|^2, \quad \forall x \in H. \quad (8)$$

则对任意的一个有界线性泛函  $F \in H^*$ , 存在唯一的  $f \in H$  使得

$$B(x, f) = F(x), \quad \forall x \in H.$$

证明: 由 Riesz 表示定理可知, 对一个固定的  $f \in H$ , 存在唯一的  $g$  使得

$$B(x, f) = (x, g), \quad \forall x \in H.$$



我们把以上述方式作的从  $f$  到  $g$  的映射记作  $T$ . 则上式可写成

$$B(x, f) = (x, Tf), \quad \forall x \in H.$$

由双线性算子的第一个性质可得

$$(x, Tf) \leq K\|x\|\|f\| \Rightarrow \|Tf\| \leq K\|f\|.$$

在利用  $B$  的第二个性

$$v\|f\| \leq B(f, f) = (f, Tf) \leq \|f\|\|Tf\| \Rightarrow v\|f\| \leq \|Tf\|.$$

所以  $T$  是双射, 具有有界的你算子  $T^{-1}$ . 则

$$F(x) = (x, g) = B(x, T^{-1}g),$$

令  $f = T^{-1}g$  即可得到  $F(x) = B(x, f)$ . □

# 弱解存在性的证明

定理 2 的证明: 利用 Lax-Milgram 定理, 设  $H = W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $F(v) = \int_{\Omega} (-f^i \partial_i v + gv) dx$ ,  $v \in H$ . 令  $\mathbf{g} = (g, f^1, \dots, f^n)$ , 则

$$|F(v)| \leq \|g\|_2 \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

剩下的只要说明  $\mathcal{L}(u, v)$  满足条件 (7) 和 (8) 即可. 但  $\mathcal{L}(u, v)$  不一定满足条件 (8), 不过我们可以用一种迂回的方案来解决这个问题.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, u) &= \int_{\Omega} (a^{ij} \partial_j u \partial_i u + (b^i + c^i) u \partial_i u + du^2) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \left( \lambda |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} |\nabla u|^2 - 2\lambda v^2 u^2 \right) dx \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - 2\lambda v^2 \int_{\Omega} u^2 dx. \end{aligned}$$

定义新的算子  $L_\sigma u = Lu + \sigma u$ , 根据上面的计算, 只要  $\sigma$  足够大, 相应的新的  $\mathcal{L}_\sigma(u, v) = \mathcal{L}(u, v) + \sigma(u, v)$  就可以满足条件 (8).  
则

$$\mathcal{L}_\sigma(u, v) - \sigma(u, v) = F(v),$$

进一步可以简记为

$$L_\sigma u - \sigma Iu = F.$$

注意这里的映射  $L_\sigma$  是从  $H$  到  $H^*$  的映射, 是将  $u \in H$  映射成泛函  $\mathcal{L}_\sigma(u, \cdot) \in H^*$ , 同理  $I$  是将  $u \in H$  映射成  $(u, \cdot) \in H^*$ .

由 Lax-Milgram 定理, 映射  $L_\sigma : u \rightarrow f, \mathcal{L}_\sigma(u, v) = f(v)$  是一一对应的可逆算子. 所以

$$u - \sigma L_\sigma^{-1} Iu = L_\sigma^{-1} F.$$

再用到  $I = I_1 I_2, I_2 : H \rightarrow L^2(\Omega)$  是紧算子,  $I_2 : L^2(\Omega) \rightarrow H^*$  以及  $L_\sigma^{-1}$  连续, 得到  $T = \sigma L_\sigma^{-1} I$  为紧算子.

再由下面的 Fredholm Alternative 以及  $Lu = 0$  解的唯一性即可完成证明. □

### 定理 4(Fredholm Alternative)

设  $H$  为 Hilbert 空间,  $T$  是  $H$  到自身的紧算子, 则要么

$$x - Tx = 0$$

有一个非平凡的解  $x \in H$ , 要么对任意的  $y \in H$ , 方程

$$x - Tx = y$$

都有唯一确定的解, 并且  $(I - T)^{-1}$  有界.

证明: 略. □

# 为什么需要弱解

从定义可以看出, 弱解相比于经典解需要的条件更弱. 本质上, 是因为经典情形下  $Lu = f$  中的算子  $L$  的作用空间从  $X$  (例如, 至少是在  $C^2(\Omega)$  中) 变成了更大的空间  $Y$ . 在空间  $Y$  上的算子  $L_Y$  具有更好的性质, 在这个空间上更加容易讨论解的存在性问题.

尽管我们很多时候可以得到弱解  $u \in Y$ , 但是最终需要的还是  $X$  中解的存在性, 这需要我们找到某些条件, 使得  $u \in X$ , 这样的条件就是正则性 (因为正则性可以使得函数更加光滑, 所以正则性就是对函数光滑性的一种刻画).

这种正则性往往是一种先验估计, 即假设解存在, 然后就可以利用正则性得到解的存在性.

# 内正则性

为了简化证明, 下述的内正则性定理的  $L$  算子作了简化, 满足 (1) 的最一般情形的证明除了多几项平凡的估计, 没有区别.

## 定理 5(内正则性)

令

$$Lu = -a^{ij}\partial_{ij}^2 u + b^i\partial_i u + cu = f.$$

设  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  是一致椭圆偏微分方程  $Lu = f$  在开集  $\Omega$  上的弱解, 其系数  $a^{ij}, b^i, i, j = 1, \dots, n$  在  $\Omega$  上一致 Lipschitz 连续, 系数  $c$  在  $\Omega$  上本性有界,  $f \in L^2(\Omega)$ . 那么对于任意的  $\Omega' \subset\subset \Omega$ , 我们有  $u \in W^{2,2}(\omega')$  并且

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}), \quad (9)$$

其中  $C$  只与方程系数和  $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$  有关.

# $L = -\Delta$ 情形

该情形下

$$\Delta u = -f \in L^2(\Omega).$$

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} = \|u\|_{L^2(\Omega')} + \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega')} + \sum_{|\alpha|=2} \|\partial_\alpha u\|_{L^2(\Omega')}.$$

因为上面的前两项都在不等式右边出现了, 所以只要证明第三项小于等于  $\|f\|_{L^2}$  的常数倍即可, 而这可以利用之前证明过的不等式  $\|\partial_{ij}^2 u\|_{L^2} \leq C \|\Delta u\|_{L^2}$ .

# 一般情形

一般情形的证明有两个关键点：

- ① 证明  $u \in W^{2,2}(\Omega')$ .
- ② 对  $\sum_{\alpha=2} \|\partial_\alpha u\|_{L^2(\Omega')}$  进行估计.

在证明之前，首先引入差商的概念：

## 定义

函数  $u$  在  $x$  点处关于  $e_i$  方向步长为  $h$  的差商是

$$\Delta_i^h u(x) := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, h \neq 0.$$

有时候如果一个讨论或者陈述对任意的  $i = 1, \dots, n$  都成立的话，也可以简写为  $\Delta^h u(x)$ .



# 两个引理

## 引理 1

设  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . 那么对任意的  $\Omega' \subset\subset \Omega, h < \text{dist}(\Omega', \Omega)$ , 我们有  $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$ , 并且

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}$$

证明: 设  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ ,

$$\Delta^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h \partial_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi.$$

利用 Hölder 不等式可得

$$|\Delta^h u(x)|^p \leq \frac{1}{h} \int_0^h |\partial_i u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)|^p d\xi,$$

从而

$$\int_{\Omega'} |\Delta^h u|^p dx \leq \frac{1}{h} \int_0^h \int_{B_h(\Omega')} |\partial_i u|^p dx d\xi \leq \int_{\Omega} |\partial_i u|^p dx,$$

其中  $B_h(\Omega') = \{x : \text{dist}(x, \Omega') < h\}$ . □

## 引理 2

设  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $\Omega' \subset\subset \Omega$ , 假设存在一个常数  $K$  使得  $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$  并且对所有的  $0 < h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$  都有  $\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K$ . 则弱导数  $\partial_i u$  存在并且满足  $\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$ .

证明: 由  $L^p(\Omega')$  中有界子集的弱紧性可知, 存在一个收敛到 0 的序列  $\{h_m\}$  以及一个函数  $v \in L^p(\Omega)$ ,  $\|v\|_p \leq K$ , 对所有的  $\varphi \in C_0^1(\Omega)$  有

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta^{h_m} u dx \rightarrow \int_{\Omega} \varphi v dx.$$

对  $h_m < \text{dist}(\text{supp} \varphi, \partial\Omega)$ , 我们有

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta^{h_m} u dx = - \int_{\Omega} u \Delta^{-h_m} \varphi dx \rightarrow - \int_{\Omega} u \partial_i \varphi dx.$$

所以

$$\int_{\Omega} \varphi v dx = - \int_{\Omega} u \partial_i \varphi dx$$

即  $u$  的弱导数存在且  $v = \partial_i u$ .

□

# 内正则性的证明

证明: 回顾弱解的定义, 弱解  $u$  满足

$$\int_{\Omega} (a^{ij} \partial_j u \partial_i v + b^i \partial_i u v + c u v) dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

定义  $g = -b^i \partial_i u - c u + f$ , 则上式可写成

$$\int_{\Omega} a^{ij} \partial_j u \partial_i v dx = \int_{\Omega} g v dx.$$

对  $|2h| < \text{dist}(\text{supp } v, \partial\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \Delta^h (a^{ij} \partial_j u) \partial_i v dx = - \int_{\Omega} a^{ij} \partial_j u \partial_i \Delta^{-h} v dx = - \int_{\Omega} g \Delta^{-h} v dx.$$

因为

$$\Delta^h (a^{ij} \partial_j u)(x) = a^{ij}(x + h e_k) \Delta^h \partial_j u(x) + \Delta^h a^{ij}(x) \partial_j u(x),$$

所以

$$\int_{\Omega} a^{ij}(x + he_k) \partial_j \Delta^h u \partial_i v dx = - \int_{\Omega} (\Delta^h a^{ij} \partial_j u \partial_i v + g \Delta^{-h} v) dx.$$

回顾  $g$  的定义以及利用引理 1 可得

$$\int_{\Omega} a^{ij}(x + he_k) \partial_j \Delta^h u \partial_i v dx \leq C (\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2) \|\nabla v\|_2.$$

令  $\eta \in C_0^1(\Omega)$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $v = \eta^2 \Delta^h u$ , 利用一致椭圆函数系数的性质可得

$$\begin{aligned} c_0 \int_{\Omega} |\eta \nabla \Delta^h u|^2 dx &\leq \int_{\Omega} \eta^2 a^{ij}(x + he_k) \Delta^h \partial_i u \Delta^h \partial_j u dx \\ &= \int_{\Omega} a^{ij}(x + he_k) \partial_j \Delta^h u (\partial_i v - 2 \Delta^h u \eta \partial_i \eta) dx \\ &\leq C (\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2) (\|2 \eta \nabla \eta \Delta^h u + \eta^2 \Delta^h \nabla u\|_2) \\ &\quad + C' \|\eta \nabla \Delta^h u\|_2 \|\Delta^h u \nabla \eta\|_2 \\ &\leq C (\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2) (2 \|\nabla \eta \Delta^h u\|_2 + \|\eta \nabla \Delta^h u\|_2) \\ &\quad + C' \|\eta \nabla \Delta^h u\|_2 \|\Delta^h u \nabla \eta\|_2. \end{aligned}$$

利用引理 1 以及对上式的第二项用平均不等式可得

$$\begin{aligned}\|\eta \Delta^h \nabla u\|_2 &\leq C (\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2 + \|\Delta^h u \nabla \eta\|_2) \\ &\leq C \left(1 + \sup_{\Omega} |\nabla \eta|\right) (\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2).\end{aligned}$$

令  $\eta(x) = 1, x \in \Omega' \subset\subset \Omega, |\nabla \eta| \leq 2/d', d' = \text{dist}(\partial\Omega, \Omega')$ . 利用引理 2 可得  $\nabla u \in W^{1,2}(\Omega')$ . □

# 正则性 + 泛函 $\Rightarrow$ 性质更好的解的存在唯一性

准确地说, 就是内正则性 (硬分析), 再加上前面的存在唯一性定理 2 (由泛函分析这样的软分析得到), 就可以得到更好的解的存在唯一性:

## 定理 6

设

$$Lu = a^{ij}(x)\partial_{ij}^2 u + b^i(x)\partial_i u + c(x)u = f$$

满足一致椭圆条件, 系数  $a^{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ ,  $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ ,  $c \leq 0$ . 则对任意的  $f \in L^2(\Omega)$  以及  $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ , 存在唯一的解  $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap W_{loc}^{2,2}(\Omega)$  满足  $Lu = f$  并且  $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .

# 全局正则性

上面的内正则性的内, 就是指我们只能得到局部的  $\Omega' \subset\subset \Omega$  的结果. 本质上是因为取局部的时候就可以不需要考虑边界条件的任意性. 所以为了将这个局部的正则性变成全局正则性, 必然要对边界条件进行限制, 更加规则的边界加上内正则性就可以得到下面的全局正则性:

## 定理 7(全局正则性)

假设在定理 5 的基础上, 设边界  $\partial\Omega$  属于  $C^2$  类, 并且存在一个函数  $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$  满足  $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , 则我们有  $u \in W^{2,2}(\Omega)$  并且

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega)}). \quad (10)$$

证明: 略.

□



# 弱解有界性

有界性就是通过系数, 函数  $f$  以及边界条件来估计  $\sup_U u$  或者  $\sup_U (-u)$  的上界, 下面就是一个局部有界性的定理范例:

## 定理 8

设  $a^{ij} \in L^\infty(B_1)$  并且  $c \in L^q(B_1), q > \frac{n}{2}$ , 一致椭圆方程的下解  $Lu \leq 0$  定义为

$$\int_{B_1} a^{ij} \partial_i u \partial_j \varphi + cu\varphi \leq \int_{B_1} f\varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^1(B_1), \varphi \geq 0.$$

若  $f \in L^q(B_1)$ , 则  $u^+ \in L_{\text{loc}}^\infty(B_1)$ , 并且对任意  $\theta \in (0, 1)$  和任意  $p > 0$  都有

$$\sup_{B_\theta} u^+ \leq C \left\{ \frac{1}{(1-\theta)^{\frac{n}{p}}} \|u^+\|_{L^p(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)} \right\}$$

其中  $C = C(n, \lambda, \Lambda, p, q)$  为一个大于 0 的常数.

定理 8 的证明用到的方法叫 Nash-Moser 迭代, 考虑函数  $f \in C[0, 1]$ , 如果我们对  $|\int_0^1 |f(x)|^\gamma dx|^\frac{1}{\gamma}$  可以作估计, 那么如何过渡到对  $\sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$  的估计呢? 考虑极限

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} |\int_0^1 |f(x)|^\gamma dx|^\frac{1}{\gamma} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

这里的迭代就是知里面的  $\gamma \rightarrow \infty$  过程, 具体通过建立不等式

$$\left( \int_{B_r} |u^+|^{\gamma\chi} \right)^\frac{1}{\chi} \leq C \int_{B_R} |u^+|^\gamma, r < R$$

然后不停地迭代使用上述不等式以达到  $\gamma \rightarrow \infty$  的目的.