泛函分析习题参考答案

November 22, 2019

一共是 18 次作业, 这里缺最后两次作业, 因为没有检查过, 所以可能会有一些错误, 可以参考一下

Contents

1 2019-09-03

Exercise *p63 8(a)*

Solution: 仅验证三角不等式

$$
\begin{aligned}
\rho(x,y) =& \sum_{j=0}^{k} \max_{a\le t\le b} \left|x^{(j)} - y^{(j)}\right| \\
\le& \sum_{j=0}^{k} \left(\left|\max_{a\le t\le b} x^{(j)} - z^{(j)}\right| + \left|z^{(j)} - y^{(j)}\right| \right) \\
\le& \sum_{j=0}^{k} \left(\max_{a\le t\le b} \left|x^{(j)} - z^{(j)}\right| + \max_{a\le t\le b} \left|z^{(j)} - y^{(j)}\right| \right) \\
=& \rho(x,z) + \rho(z,y).
\end{aligned}
$$

□

Exercise *p64 10(a)*

Solution: 仅验证三角不等式

$$
\begin{aligned}
\overline{\rho}(x,y) =& \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \\
=& 1 - \frac{1}{1+\rho(x,y)} \\
\le& 1 - \frac{1}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)} \\
=& \frac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{1+\rho(x,y)+\rho(z,y)} \\
=& \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)} + \frac{\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)} \\
\le& \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} + \frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)} \\
=& \overline{\rho}(x,z) + \overline{\rho}(z,y).
\end{aligned}
$$

□

2 2019-09-05

Exercise 构造无穷多个开区间使得它们的交为 $(0,1]$.

Solution: $\mathcal{O}_n = \left(0, 1+\frac{1}{n}\right)$,$n = 1, 2, \cdots$. □

Exercise 利用 *p18* 三个等价命题的语言改写结论：有理多项式在 (a,b) 上稠密.

Solution:

a. 对于任给的 $f(x) \in C[a,b]$ 以及任给的 $\epsilon > 0$, 存在有理多项式 $p(x)$ 使 $\max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.

b. 对于任给的 $\epsilon > 0$, 以每个有理多项式为中心, 以 ϵ 为半径的全部开球的并包含 $C[a,b]$.

c. 对于任给的 $f(x) \in C[a,b]$, 存在有理多项式序列 $p_n(x)$ 收敛于 $f(x)$.

□

3 2019-09-10

Exercise *p63 4*

Solution: $\forall \epsilon > 0, \exists x', y' \in F$ s.t.

$$|f(x) - \rho(x, x')| < \frac{\epsilon}{4}$$

$$|f(y) - \rho(y, y')| < \frac{\epsilon}{4}.$$

由定义知,

$$\rho(y, y') - \frac{\epsilon}{4} < f(y) \le \rho(y, x') \le \rho(x, x') + \rho(x, y).$$

则有

$$\rho(y, y') - \rho(x, x') < \frac{\epsilon}{4} + \rho(x, y).$$

由 x 和 y 的对称性同理可得

$$\rho(x, x') - \rho(y, y') < \frac{\epsilon}{4} + \rho(x, y).$$

综合上面两个式子可得

$$|\rho(x, x') - \rho(y, y')| < \frac{\epsilon}{4} + \rho(x, y).$$

取 $\delta = \frac{\epsilon}{4}$, 当 $\rho(x, y) < \delta$ 时, 有

$$|\rho(x, x') - \rho(y, y')| < \frac{\epsilon}{2}.$$

所以

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - \rho(x, x')| + |\rho(x, x') - \rho(y, y')| + |\rho(y, y') - f(y)| < \epsilon.$$

□

Exercise *p63 7*

Solution: 任取一个 $y \in T(x)$, 因为 A 在 X 中稠密, 所以存在序列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. 由 T 的连续性可得 $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = T(x) = y$, 所以在 $T(A)$ 中有序列 $\{T(x_n)\}$ 收敛到 y, 由 y 的任意性可知 $T(A)$ 在 $T(X)$ 中稠密. □

Exercise *p65 16*

Solution:

a. 设 x 为 A 的一个聚点, 则存在 A 中的一个点列 $\{x_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

因为 A 完备, 所以 $x \in A$. 也就是说 A 中的聚点包含于 A, 即 A 为闭集.

b. 设 $\{x_n\}$ 为 A 中的柯西列, 因为 X 完备, 所以存在 $x \in X$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

又因为 A 是闭集, 所以 $x \in A$. 所以 A 按照 X 的距离定义下是完备的距离空间.

□

4 2019-09-12

Exercise *p65 18*

Solution:

a. 若 B 是第一类型的集, 则存在可数稀疏集合序列 $\{B_n\}$ 使得

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

则

$$A = A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A).$$

$\{B_n \cap A\}$ 也是稀疏集, 所以 A 可以写成可数稀疏集的并, 自然也是稀疏集.

b. 这是上面的逆否命题, 所以和前面等价.

□

Exercise *p65 23*

Solution: 设 A 为准紧集, $\overline{A}$ 为相应的闭包. 我们需要证明任给一个 $\overline{A}$ 中的点列 $\{x_n\}$ 都存在子列收敛于 $\overline{A}$ 中. 对每一个点 x_n, 都可以在 A 中找到一个点 y_n 使得 $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. 因为 $\{y_n\}$ 是准紧急 A 中的点列, 所以 $\{y_n\}$ 中有子序列 $\{y_{k_n}\}$ 收敛到全空间 X 中的一个点, 记为 x_0. 因为 $\overline{A}$ 是 A 的闭包, 所以 $x_0 \in \overline{A}$. 因此任给 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N_1, 当 $k_n \geq N_1$ 时

$$\rho(y_{k_n}, x_0) < \frac{\epsilon}{2}.$$

另一方面, 当 $k_n \geq n > N_2 = \lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil$ 时, 有

$$\rho(y_{k,n}, x_{k_n}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

综上所述, 当 $k_n \geq \max\{N_1, N_2\}$ 时, 有

$$\rho(x_{k_n}, x_0) \leq \rho(x_{k_n}, y_{k_n}) + \rho(y_{k_n}, x_0) < \epsilon.$$

即子列 $\{x_{k_n}\}$ 收敛到 $\overline{A}$ 中的点 x_0. □

5 2019-09-17

Exercise *p66 25*

Solution: 若 $\bigcap_{n=1}^{\infty} = \emptyset$, 则 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X\backslash F_n)$, 由有限覆盖定理知存在 $\{X\backslash F_{n_k}\}_{k=1}^{l}$ 使得 $X = \bigcup_{k=1}^{l}(X\backslash F_{n_k})$, 则 $\bigcap_{k=1}^{l} F_{n_k} = \emptyset$. 而由条件可知 $\bigcap_{k=1}^{l} F_{n_k} = F_{n_l} \neq \emptyset$, 矛盾. □

Exercise *p66 27*

Solution: 由 $\rho(F_1, F_2) = 0$ 知存在序列 $\{x_n, y_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0.$$

不妨设 F_1 为闭集, F_2 为紧集, 则 $\{y_n\}$ 中有收敛的子序列, 不妨设收敛的子序列是 $\{y_{k_n}\}$, 收敛到的点设为 y_0. 由

$$\rho(x_{k_n}, y_0) \leq \rho(x_{k_n}, y_{k_n}) + \rho(y_{k_n}, y_0)$$

可知 $\lim_{n\to\infty} \rho(x_{k_n}, y_0) = 0$. 因为 F_1 是闭集, 所以 $y_0 \in F_1$. 综上所述, 我们得到了点 $y_0 \in F_1 \cap F_2$, 即 $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. □

6 2019-09-19

Exercise *p66 26*

Solution: 由定义可以知道存在序列 $\{(x_n, y_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(F_1, F_2)$. 因为 F_1 是紧的, 所以 $\{x_n\}$ 中有收敛的子列 $\{x'_n\}$ 收敛到某个点 $x_0 \in F_1$. 因为 F_2 是紧的, 所以 $\{y'_n\}$ 中有收敛的子列 $\{y''_n\}$ 收敛到某个点 $y_0 \in F_2$. 通过上述过程以及 $\rho(x, y)$ 的连续性可知

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x''_n, y''_n) = \rho(x_0, y_0).$$

□

Exercise *p66 32*

Solution: 不妨设 $\{f_n\}$ 为单调增序列, 即 $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$. 对任给的 $\epsilon > 0$, 定义集合

$$\mathcal{O}_{n,\epsilon} = \{x : f(x) - f_n(x) < \epsilon\}.$$

由逐点收敛的条件可知 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{n,\epsilon}$, 其中 $\mathcal{O}_{1,\epsilon} \subset \mathcal{O}_{2,\epsilon} \subset \cdots \subset \mathcal{O}_{n,\epsilon} \subset \cdots$. 由 X 紧知存在有限个集合族 $\{\mathcal{O}_{n_k,\epsilon}\}_{k=1}^{l}$ 使得 $X = \bigcup_{k=1}^{l} \mathcal{O}_{n_k,\epsilon} = \mathcal{O}_{n_l,\epsilon}$. 即任给 $\epsilon > 0$, 存在与 x 无关的正整数 n_l, 当 $n \geq n_l$ 时, 有 $f(x) - f_n(x) < \epsilon$. □

7 2019-09-24

Exercise *p66 28*

Solution: 因为 l^p 是完备的度量空间, 所以准紧性与全有界性等价 (本章定理 4.2). 所以下面都是证明全有界性和两个条件的等价关系.

充分性: 设 (a), (b) 成立, 由 (b) 知, 任给 $\epsilon > 0$ 存在 $N > 0$, 当 $m > N$ 时, 对一切 $x \in A$ 都有

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n|^p < \frac{\epsilon}{2}.$$

固定 N, 设集合 B 是 A 中的元素在 N 处截断后的集合, 也就是把 A 中元素 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N, \xi_{N+1}, \cdots)$ 变为 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N, 0, 0, \cdots)$. 这样得到的 B 由 (a) 知有界, 但是 R^N 中的有界集一定是准紧集, 所以 B 存在一个 $\frac{\epsilon}{2}$-网, 设该 $\frac{\epsilon}{2}$-网为 $C = \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}\right\}$. 则对任给 $\epsilon > 0$, 以及人给的 $x \in A$, 存在 N 以及 $x^{(i)} \in C$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\xi_n - x_n^{(i)}\right|^p = \sum_{n=1}^{N} \left|\xi_n - x_n^{(i)}\right|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n - 0|^p < \epsilon.$$

所以 C 是 A 的一个 ϵ-网, 即 A 全有界.

必要性: 由 A 准紧知任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\frac{\epsilon}{2}$-网 $C = \left\{x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(l)}\right\}$. 因为 C 中只有有限个元素, 所以存在正整数 N, 使得对任意 $x^{(i)} \in C$ 都有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|x_n^{(i)}\right|^p < \epsilon/2.$$

则任给 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots) \in A$, 在 $\frac{\epsilon}{2}$-网中选取某个 $x^{(i)}$, 对 $m > N$ 有

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n|^p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n|^p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\xi - x_n^{(i)}\right|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|x_n^{(i)}\right|^p < \epsilon.$$

这样我们就证明了 (b), (a) 对于全有界集是显然的. □

Exercise 设 $0 < \alpha \leq 1$, 定义集合 A 为

$$A = \left\{x \in C[a,b] : \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + max_{t' \neq t''} \frac{|x(t') - x(t'')|}{|t' - t''|^{\alpha}} \leq M\right\}.$$

证明 A 在 $C[a,b]$ 中准紧.

Solution: 设 $\{x_n\}$ 为 A 中的一个函数序列, 由 A 的定义可知 $\{x_n\}$ 有界. 又由定义可知对任意 A 中的函数都有 $|x(t') - x(t'')| \leq M\,|t' - t''|^{\alpha}$, 所以 $\{x_n\}$ 等度连续, 所以由定理 5.1 知 A 准紧. □

8 2019-09-26

Exercise *p67 33*

Solution: 参见 54 页例 2, 这是例 2 中 $K(t,s) = 1$ 的特殊情形. □

Exercise *p67 36*

Solution: 对 $Ax=b$ 变形可得 $b-(A-I)x=x$, 令 $T(x)=b-(A-I)x$, 则问题变为证明 T 有唯一的不动点.

$$\begin{aligned}\|T(x)-T(y)\| &= \|(A-I)(x-y)\| \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}-\delta_{ij}\right)\left(x_j-y_j\right)\right|^2} \\ &\le \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}-\delta_{ij}\right|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|x_j-y_j\right|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}-\delta_{ij}\right|^2}\|x-y\|.\end{aligned}$$

其中第三行用到了 Cauchy-Schwartz 不等式. 由条件知系数小于 1, 所以 T 是欧式空间到自身的压缩变换, 再用不动点定理即可得到结论. $\square$

9 2019-10-08

Exercise *p120 2*

Solution: 要证明其为完备的巴拿赫空间, 就是要证明该范数下空间是完备的. 设 $\{x_n\}$ 为该范数下的基本列, 则由该范数的定义易得 $\{x_n(a)\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的基本列, 所以存在极限 x_a. 还可以从该范数定义中得到 $x_n'(t)$ 在 $L^1[a,b]$ 中也是基本列, 所以由 $L^1[a,b]$ 空间的完备性可知存在 $y(t)\in L^1[a,b]$ 使得

$$\int_a^b \left|x_n'(t)-y(t)\right| \mathrm{d}t \to 0 \quad n\to\infty.$$

令 $x(t)=x_a+\int_a^t y(s)\mathrm{d}s$, 则

$$\|x(t)-x_n(t)\|_{L^1}=|x_a-x_n(a)|+\int_a^b \left|x_n'(t)-y(t)\right| \mathrm{d}t \to 0 \quad n\to\infty.$$

完备性得证.

下证可分性. 设 A_0 为 A 中 $x(a)=0$ 的所有元素构成的集合, 则

$$A=\overline{\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(r+A_0)}.$$

所以我们仅仅需要证明 A_0 可分即可. 作映射 $f: x\mapsto x'$, 该映射是 A_0 到 $L^1[a,b]$ 的单射且保范, 所以由 $L^1[a,b]$ 的可分性立即得到 A_0 可分. $\square$

Exercise *p121 7*

Solution: 设 $\{x_n\}$ 为 c_0 中的基本列, 则任给 $\epsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n,m>N$ 时, 有

$$\|x_n-x_m\|=\sup_{k\ge 1}\left|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}\right|<\epsilon.$$

由此可得对任意的正整数 k 都有 $\left|\xi_k^{(m)}-\xi_n^{(n)}\right|<\epsilon$, 所以对每一个固定的 k, $\left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列, 设其收敛到 $\xi_k^{(0)}$. 则对任给的 $\epsilon>0$, 对上个式子中的 m 取极限可得

$$\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(0)}\right|\leq\epsilon.$$

接下来我们说明 $x^{(0)}=\left(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots,\xi_k^{(0)},\cdots\right)$ 是属于 c_0 的. 固定 n, 以及给定的 ϵ, 由 $x^{(n)}\in c_0$ 知存在正整数 M,$k>M$ 时满足 $\left|\xi_k^{(n)}\right|<\epsilon$. 则

$$\left|\xi_k^{(0)}\right|\leq\left|\xi_k^{(0)}-\xi_k^{(n)}\right|+\left|\xi_k^{(n)}\right|<2\epsilon.$$

所以 $x^{(0)}\in c_0$. 即 c_0 为巴拿赫空间.

下证可分性. 令 $\eta^{(n)}=(0,\cdots,1(\text{第 n 个分量}),\cdots,0,\cdots)$, 则 $\{\eta\}$ 构成一个完备正交基且可列, 所以 c_0 可分. □

10 2019-10-10

Exercise *p121 11*

Solution: 由 $\operatorname{dist}(x,K)$ 的定义可以知道存在序列 $\{y_n\}\subset K$ 使得

$$\operatorname{dist}(x,K)=\lim_{n\to\infty}\rho(x,y_n)=\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|.$$

因为 K 是紧集, 所以 $\{y_n\}$ 中有收敛到 K 中点的子序列 $\{y_{k_n}\}$, 设收敛点为 y_0, 则 $\|y_{k_n}-y_0\|\to 0$. 由此可得

$$\operatorname{dist}(x,K)=\lim_{n\to\infty}\|x-y_{k_n}\|=\|x-y_0\|.$$

□

Exercise *p121 13*

Solution: 令 $\alpha_n=\sum_{k=1}^n x_k$, 则

$$\|\alpha_{n+p}-\alpha_n\|=\|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_k\|\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\|x_k\|.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ 收敛, 所以当 $n\to\infty$ 时, 上式右边趋于 0. 也就是对任给 $\epsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$,p 为任意正整数时, 有 $\|\alpha_{n+p}-\alpha_n\|=\sum_{k=n+1}^{n+p}\|x_k\|<\epsilon$. 所以 $\{\alpha_n\}$ 为基本列, 由空间完备性知存在 $x\in E$ 使得

$$x=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_n.$$

再由范数的连续性和 $\|\alpha_n\|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|=M$ 可得

$$\|x\|=\lim_{n\to\infty}\|\alpha_n\|\leq M.$$

□

11 2019-10-15

Exercise *p122 20*

Solution: 容易验证 H 是一个线性空间, 并且 $\|x\|_H$ 是该线性空间的一个范数.

由定理 3.1 知, 要证明给出的范数可以定义内积, 只要验证下述等式成立

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

其中 $x,y\in H$. 可以通过令 $x\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ 和 $y\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nt+\beta_n\sin nt)$, 代入上面等式验证即可.

本题的关键是要证明 H 在范数 $\|\cdot\|_H$ 下的完备性. 设 $\{x_n\}$ 为 H 中的一个基本列, 设

$$x_n\sim\frac{a_{0,n}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{k,n}\cos kt+b_{k,n}\sin kt\right).$$

我们可以作空间 H 到 $L^2[0,2\pi]$ 的保范映射 $f:x\mapsto x'$, 其中 $x'\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nt+b_n'\sin nt)$,$a_n'=\sqrt{n}a_n,b_n'=\sin\sqrt{n}b_n$. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(a_n^2+b_n^2\right)<\infty.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n'^2+b_n'^2\right)<\infty.$$

也就是说我们定义的映射确实是落在了 $L^2[0,2\pi]$ 中, 并且是保范的. 另一方面, 对于 $L^2[a,b]$ 中的每个函数 x' 我们都可以通过上述过程的逆过程找到一个 H 中的函数 x 使得它的像是 x'. 这说明 H 与 $L^2[0,2\pi]$ 同构, 而 $L^2[0,2\pi]$ 完备, 所以 H 完备. □

Exercise *p122 21*

Solution: 若 (α_{ij}) 是正定矩阵, 则正定二次型 $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$, 内积的其它性质可由二次型的双线性性得到.

反之, 若 $(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}x_iy_j$ 是一个内积, 那么可知 $(x,x)\geq 0$ 且 $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$, 这说明 (α_{ij}) 是一个正定矩阵. □

12 2019-10-17

Exercise *p123 23*

Solution: 必要性,$\|x+\alpha y\|^2=(x+\alpha y,x+\alpha y)=\|x\|^2+\|y\|^2\geq\|x\|^2$.

充分性, 若 $y=0$, 显然. 下设 $y\neq 0$. 平方条件可得

$$\overline{\alpha}(x,y)+\alpha(y,x)+|\alpha|^2\|y\|^2\geq 0.$$

令 $\alpha=-\frac{\overline{(y,x)}}{\|y\|^2}$, 代入上式可得

$$-\frac{(x,y)\overline{(x,y)}}{\|y\|^2}\geq 0\Rightarrow(x,y)=0.$$

□

Exercise *p123 24*

Solution: 必要性显然, 只证充分性. 条件平方展开可得

$$\|x\|^2 + \overline{\alpha}(x,y) + \alpha(y,x) + |\alpha|^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\alpha}(x,y) - \alpha(y,x) + |\alpha|^2 \|y\|^2$$

$$\overline{\alpha}(x,y) + \alpha(y,x) = 0.$$

令 $\alpha = (x,y)$ 即可. □

Exercise *p123 28*

Solution: 假设存在一个规范正交系不是线性无关的, 那么该规范正交系中存在 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 线性相关. 也就是说, 存在不全为零的系数 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0.$$

由规范正交系的的定义可知对任意的 $j = 1, 2, \cdots, n$, 有 $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, e_j) = \lambda_j$, 从而结合上式可得 $\lambda_j = 0$, 由 j 的任意性知所有系数等于零, 这与假设矛盾. □

13 2019-10-22

Exercise *p218 1*

Solution: 充分性:

$$\|Tx\| = \max_{a \le t \le b} |\alpha(t)x(t)| \le \max_{a \le t \le b} |\alpha(t)| \max_{a \le t \le b} |x(t)| = \|\alpha\|\|x\|.$$

必要性: 令 $x(t) = 1$, 则 $(Tx)(t) = \alpha(t) \in C[a,b]$. □

Exercise *p219 5*

Solution: 因为

$$\|T\| = \sup_{\|\xi\|=1} |\alpha_n \xi_n| \le \sup_{n \ge 1} |\alpha_n|.$$

所以 T 是有界算子. 令 $x = (1, 1, \cdots, 1, \cdots)$, 则 $\|x\| = 1$, 从而

$$\|T\| > \|Tx\| = \sup_{n \ge 1} |\alpha_n|.$$

综合两个不等式可得

$$\|T\| = \sup_{n \ge 1} |\alpha_n|.$$

□

14 2019-10-24

Exercise *p219 7*

Solution:

$$\begin{aligned}\|S_nT_n - ST\| \leq& \|S_n(T_n - T)\| + \|(S_n - S)T\| \\ \leq& \|S_n\|\|T_n - T\| + \|S_n - S\|\|T\| \\ \to& 0 \quad (n \to \infty)\,.\end{aligned}$$

□

Exercise *p219 8*

Solution:

$$\begin{aligned}\|T_nx_n - Tx\| \leq& \|T_n(x_n - x)\| + \|(T_n - T)x\| \\ \leq& \|T_n\|\|x_n - x\| + \|T_n - T\|\|x\| \\ \to& 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

□

Exercise *p220 15*

Solution: 任给 $y \in E_1$, 由 T 是满映射可知存在 $x \in E$ 使得 $T(x) = y$, 因为 D 在 E 中稠密, 存在 $\{x_n\} \subset E$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, 又由 T 的连续性得 $y = T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n)$, 而 $\{T(x_n)\} \subset T(D)$, 所以由 y 的任意性知 $T(D)$ 在 E_1 中稠密. □

15 2019-10-29

Exercise *p220 13(a)*

Solution: 一方面,

$$\sup_{t\in[0,1]} |(Tx)(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} x(t) \int_0^1 |\sin \pi(t-s)|\, \mathrm{d}s = \frac{2}{\pi} \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|\,.$$

另一方面, 令 $x(t) = 1$,

$$\sup_{t\in[0,1]} |(Tx)(t)| \geq |T(x)(0)| = \left|\int_0^1 \sin \pi s \mathrm{d}s\right| = \frac{2}{\pi}.$$

综上 $\|T\| = \frac{2}{\pi}$. □

Exercise *p220 17*

Solution: 由定理 3.2 可知, 存在正实数 M 使得 T_n, S_n, T, S 的范数都不超过 M. 对任意给定的 $x \in E$, 有

$$\begin{aligned}\|S_nT_nx - STx\| \leq& \|S_nT_nx - S_nTx\| + \|S_nTx - STx\| \\ \leq& \|S_n\|\|T_nx - Tx\| + \|S_n(Tx) - S(Tx)\| \\ \to& 0 \quad (n \to \infty)\,.\end{aligned}$$

□

16 2019-10-31

Exercise *p220 20*

Solution: 取函数 $g_n = [g]_n$, 这里 $[g]_n$ 表示当 $|x| > n$ 或者 $|g(x)| > n$ 时取函数值为零, 显然 g_n 逐点收敛到 g. 定义 L^p 上的线性泛函

$$T_n f = \int_F g_n f.$$

其中 $f \in L^p$. 由赫尔德不等式

$$|T_n f| \leq \|g_n\|_q \|f\|_p.$$

也就是说 $\|T_n\| \leq \|g_n\|_q$ 另一方面令 $f = \operatorname{sgn} \frac{(g_n)|g_n|^{q-1}}{\|g_n\|_q^{q-1}}$, 容易验证 $f \in L^p$ 并且 $\|f\|_p = 1$, 此时

$$\|T_n\| \geq |T_n f| = \|g_n\|_q.$$

所以 $\|T_n\| = \|g_n\|_q$. 另一方面, 对每个固定的 x 都有

$$|T_n f| \leq \int_F |gf|.$$

(这里用到了可积性在函数与其取绝对值的函数之间是等价的) 从而由共鸣定理可知 $\{\|T_n\|\}$ 一致有界. 再由控制收敛定理得

$$\int |g|^q = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|^q < \infty.$$

□

Exercise *p220 23*

Solution: 令 $\eta_j = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_j, 0, \cdots)$. 定义算子 $T_j = sum_{n=1}^{j} \eta_n \xi_n$. 对任意 $x \in l$, 以及 j, 都有

$$|T_j x| \leq |Tx| < \infty.$$

从而由共鸣定理得 $\{\|T_j\|\}$ 一致有界. 又因为 $\|T_j\| = \sup_{1\leq i\leq j} |\eta_i|$, 所以 $\{\eta_n\}$ 有界. □