偏微分方程理论作业

王允磊

2020 年 4 月 25 日

目录

1 Sobolev 空间

习题 1. 若 $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明 Hölder 不等式:

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

证明: 由不等式的齐次对称性, 不妨令 $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. 设 $\theta = \frac{1}{p}$, 则 $1-\theta = \frac{1}{q}$. 令 $F = |f|^p, G = |g|^q$. 则需要被证明的不等式转化为

$$\int_X F^\theta G^{1-\theta} \mathrm{d}\mu \leq 1. \tag{1}$$

由 $\ln x$ 函数的凸性可得

$$F^\theta(x) G^{1-\theta}(x) \leq \theta F(x) + (1-\theta) G(x).$$

对上式积分便得到 (1) 式. □

习题 2. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 证明 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n), 2 \leq p \leq \infty$.

证明: 令 q 满足
$$1+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{q},$$
其中 $1\leq q\leq 2$. 则由 Young 不等式可得
$$\|e^{-|x|^2}*f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq\|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$
而
$$\|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-q|x|^2}\mathrm{d}x<\infty,$$
且 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 所以 $e^{-|x|^2}*f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

习题 3. 设
$$\phi(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & -1<x<1,\\ 0, & |x|\geq 1.\end{cases}$$
求证: $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

证明: 设
$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$
当 $x>0$ 时, 求导得
$$\begin{aligned}f'(x)=&\frac{1}{x^2}f(x)\\ f''(x)=&\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)f(x)\\ f'''(x)=&\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right)f(x)\\ &\cdots.\end{aligned}$$
从上述几个导数易知可以归纳证明得到当 $x>0$ 时有
$$f^{(k)}(x)=P_{2k}(x^{-1})f(x),$$
其中 P_{2k} 是次数为 $2k$ 的多项式. 由多项式和 e 指数的增长速率关系可得
$$\lim_{x\to 0^+}f^{(k)}(x)=\lim_{x\to+\infty}P_{2k}(x)e^{-x}=0.$$
所以对任意的 $n>0$, 都有 $\lim_{x\to 0^+}f^{(n)}(x)=0$. 再利用分析学中的一个定理:

定理. 设 f 是在 $x=a$ 处连续的函数,$f'(x)$ 在 $x=a$ 的一个去心领域上处处存在且

$$\lim_{x\to a} f'(x)$$

存在, 则 $f'(a)$ 存在且

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x).$$

证明: 根据导数定义

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

由中值定理 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_x)$,$a<\xi_x<x$. 所以

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(\xi_x)=\lim_{x\to a} f'(x).$$

□

把该定理用到上面定义的函数上就得到函数 f 在 $x=0$ 处任意阶右导数都存在且

$$f_+^{(n)}(0)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

而当 $|x|\le 1$ 时, 由

$$\begin{aligned}\phi(x)=&f(1-x^2)\\ \phi'(x)=&-2xf'(1-x^2)\\ \phi''(x)=&-2f'(1-x^2)+4x^2f''(1-x^2)\\ &\cdots\end{aligned}$$

知

$$\phi_-^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

另一方面, 由 $|x|\ge 1$ 时 $\phi(x)=0$ 知

$$\phi_+^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

所以 $x=1$ 时

$$\phi^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

$x=-1$ 时同理.

$\square$

习题 4. 若 $1 \leq q \leq 2$, 证明对任意 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.$$

证明: 设 $x=(x_1,x_2)$. 因为 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, 所以 u 可以写成

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t,x_2)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x_2} u(x_1,t)\mathrm{d}t.$$

进而有

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i u|\mathrm{d}x_i \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u|\mathrm{d}x_i, x \in \mathbb{R}^2.$$

那么

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}|\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x_1\int_{\mathbb{R}}|\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x_2\\ &=\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用平均不等式 (下式第二行到第三行) 可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|\partial_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}+\|\partial_2 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\right)\\ &\leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

对于 $1<q<2$ 的情况, 可以利用插值不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\theta}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\theta} \quad 0<\theta<1$$

得到.

$\square$

习题 5. 设 $f(x)=x^{\frac{1}{4}}\ x\in[0,1]$, 则 $f\in C^{0,\frac{1}{4}}$, 但是 $f\notin C^{0,\mu},\mu>\frac{1}{4}$.

证明: 根据 $C^{0,\mu}$ 的定义, 我们需要计算范数

$$\|f\|_{C^{0,\mu}[0,1]}:=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|+[f]_{\mu,[0,1]},$$

其中半范数

$$[f]_{\mu,[0,1]}:=\sup_{x,y\in[0,1],x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\mu}}.$$

$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|=1$, 所以只要计算半范数 $[f]_{\mu,[0,1]}$. 实际上我们可以证明一个一般结论: 对于任意的 $f(x)=x^{\alpha}$,$0<\alpha<1$, 我们都有 $f\in C^{0,\alpha}$. 为了证明这个一般结论, 我们需要下述引理建立的不等式

Lemma 1.1. 设 $x>0$,$0<\alpha<1$, 则

$$(x+1)^{\alpha}\leq x^{\alpha}+1.$$

证明: 令 $g(x)=(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}-1$, 则

$$g'(x)=\alpha\left(\frac{1}{(x+1)^{1-\alpha}}-\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)\leq 0.$$

又因为 $g(0)=0$, 所以 $g(x)\leq g(0)=0$, 不等式得证. □

那么由引理中的不等式可得对 $a,b>0$ 有

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}+1\right)^{\alpha}&\leq\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}+1\\(a+b)^{\alpha}&\leq a^{\alpha}+b^{\alpha}.\end{aligned}$$

(上式对 $a=0$ 或 $b=0$ 时是显然的.) 令 $a=x-y,b=y,x>y$ 可得

$$x^{\alpha}\leq(x-y)^{\alpha}+y^{\alpha}.$$

所以当 $x>y$ 时, 有

$$x^{\alpha}-y^{\alpha}\leq(x-y)^{\alpha}$$

特别地, 当 $\mu = \frac{1}{4}$ 且 $x > y$ 时,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| =& |x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}| \\ \leq& |x - y|^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

$x < y$ 的情况同理. 上述不等式说明

$$[f]_{\frac{1}{4},[0,1]} \leq 1 < \infty.$$

所以 $f \in C^{0,\frac{1}{4}}$. 对于 $\mu > \frac{1}{4}$ 的情形, 我们有

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\mu}} \overset{令y=0}{\geq} \sup_{x \in (0,1]} \frac{f(x)}{x^{\mu}} = \sup_{x \in (0,1]} x^{\frac{1}{4} - \mu} = \infty.$$

所以 $f \notin C^{0,\mu}, \mu > \frac{1}{4}$. □

习题 6. 设 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, 说明 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 但是 $u \notin L^{\infty}(\Omega)$. 其中

$$u(x) = \ln \ln(1 + \frac{1}{|x|}), \quad |x| < 1, \quad , |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

证明: 对 $u(x)$ 求偏导可得

$$\begin{aligned}\partial_1 u =& -\frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{|x|})} \frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}} \frac{x_1}{|x|^3}, \\ \partial_2 u =& -\frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{|x|})} \frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}} \frac{x_2}{|x|^3}.\end{aligned}$$

从而

$$|\partial_i u| = \left| \frac{1}{|x| \ln(1 + \frac{1}{|x|})} \frac{1}{|x| + 1} \frac{x_i}{|x|} \right| \leq \frac{1}{|x| \ln(1 + \frac{1}{|x|})}. \tag{3}$$

利用不等式 $\ln(1 + x) \leq x$ 可得

$$|u(x)| \leq \ln \frac{1}{|x|} = -\ln |x|.$$

则利用该不等式以及极坐标来表示积分,$r = |x|, 0 < 1 < r$, 可得

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \int_{\Omega} r \ln^2 r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_0^1 r \ln^2 r \mathrm{d}r < \infty.$$

另一方面, 利用 (3) 式得

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega |\partial_i u|^2 \mathrm{d}x \le \int_\Omega \left(\frac{1}{r\ln(1+\frac{1}{r})}\right)^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{r\ln^2(1+\frac{1}{r})}\mathrm{d}r.$$

由 $-\mathrm{d}\left(\ln(1+\frac{1}{r})\right) = \frac{1}{r^2+r}\mathrm{d}r$, 令 $\ln(1+\frac{1}{r}) = u$ 得

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)} \le 2\pi\int_{\ln 2}^\infty \frac{r+1}{u^2}\mathrm{d}u \le 4\pi\int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u < \infty.$$

综上可知,$u \in W^{1,2}(\Omega)$.

由 u 在去心邻域 $\Omega\backslash 0$ 上的连续性以及 $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \infty$ 知显然有 $u \notin L^\infty(\Omega)$. $\square$