

# KdV 方程在可测集上的两点时刻能观测不等式

汇报人: 王允磊

指导老师: 王明

学院: 数学与物理学院

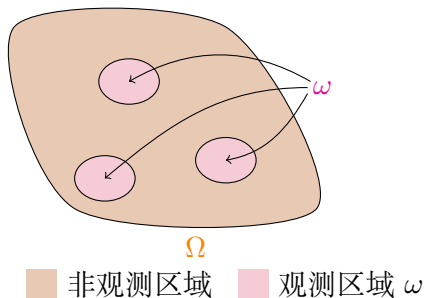


2021-11-22

# 从反问题到能观测不等式

反问题是指根据事物表现出来的现象或信息, 来推断事物本身特性的一类问题, 常见于光学, 声学 and 地质探测等问题中.

例如在地质勘探中, 为了获得某片区域的地质信息, 我们会打一些探测井, 通过这些探测井的信息, 从而得到整个区域的信息.



我们设全部区域为  $\Omega$ , 探测井所在区域为  $\omega$ , 每个时刻和每个位置所提供的信息为  $u(t, x)$ . 那么许多反问题可以归结为下述的能观测不等式:

$$\int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx \leq C \int_0^T \int_{\omega} |u(t, x)|^2 dx dt$$

# 研究对象和内容

我们所研究的对象是 Korteweg-de Vries (KdV) 方程

$$\partial_t + \partial_x^3 u = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R})$$

的解  $u(t, x)$  并对它建立能观测不等式.

这里全空间  $\Omega = \mathbb{R}$ , 我们的目标是使得该不等式的

(1) 观测时间  $[0, T]$  和

(2) 观测区域  $\omega$

越小越好.

# 研究现状

我们用  $B_r = \{x : |x| \leq r\}$  表示半径为  $r$  的球,  $\mathbb{R} \setminus B_r = \{x : |x| > r\}$  表示半径为  $r$  的球外.

- ① B. Y. Zhang[SIMA,1992] 和 J. Bourgain[IMRN,1997] 证明了 KdV 方程的解在两个不同时刻  $\omega = \mathbb{R} \setminus B_r$  区域为零时, 解恒为零, 即  $u(t, x) \equiv 0$ . 这是定性结果, 没有建立定量的不等式.
- ② L. Roiser-B. Y. Zhang[JDE,2009] 证明了  $\omega = \mathbb{R} \setminus B_r$  (观测区域为球外) 的情形的能观测不等式, 观测时间是任意一个  $[0, T]$  的时间段.
- ③ Kenig[JFA,2007] 证明了在任意一段时间内, 解存在某种指数衰减性时, 解恒为零. 这依然是定性结果.

## 研究现状: 两点时刻能观测不等式

Ze Li-Ming Wang[SIMA,2021] 更进一步, 证明了任意两个不同时刻球外的能观测不等式:

$$E = B_{r_1}, F = B_{r_2}, r_1, r_2 > 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx \leq C \left( \int_{\mathbb{R} \setminus E} |u(t_1, x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R} \setminus F} |u(t_2, x)|^2 dx \right).$$

可以看到这一新结果不仅使得观测时间变成了:(1)  $t_1$  和  $t_2$  两个时刻 (而非一段时间),(2) 也得到了观测区域为球外的能观测不等式 (定量结果). 这样的不等式被称作**两点时刻能观测不等式**.

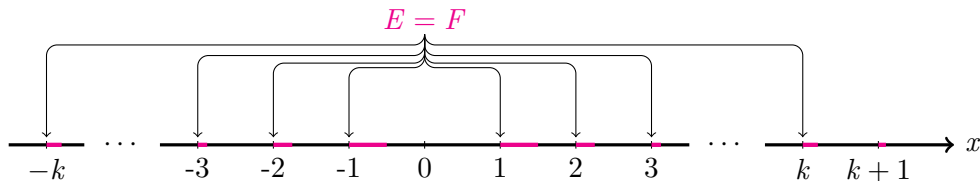
# 主要结果 I

观测时间取两点时刻已经是最优情况, 我们的目标就是使得非观测区域  $E$  和  $F$  越大越好.

$E$  和  $F$  均为测度有限可测集

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx \leq C \left( \int_{\mathbb{R} \setminus E} |u(t_1, x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R} \setminus F} |u(t_2, x)|^2 dx \right).$$

举例:  $E = F = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} [k, k + \frac{1}{2k^2}]$ , 该集合是**无界**的, 大致分布如下图所示:



# $\alpha$ 密度集

下一步是去除测度有限的限制, 为了达到这一目的, 我们引入了  $\alpha$  密度集的概念:

定义:  $\alpha$  密度集

给定一个大于 0 的常数  $\alpha$ , 一个可测集称为  $\alpha$  密度集, 如果其满足如下的  $\alpha$  指数衰减条件

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} |A \cap [x, x+1]| \lesssim |x|^{-\alpha}.$$

有了这一定义, 我们便可以描述我的第二个主要结果.

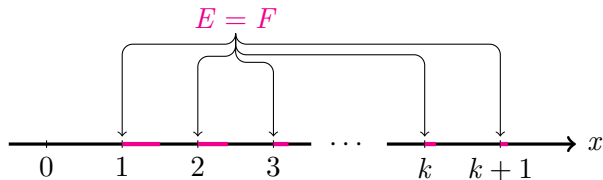


## 主要结果 II

$E$  和  $F$  均为同时包含在  $(c, \infty)$  或者  $(-\infty, c)$  上的  $\alpha > 5/6$  密度集, 其中  $c$  为任意常数

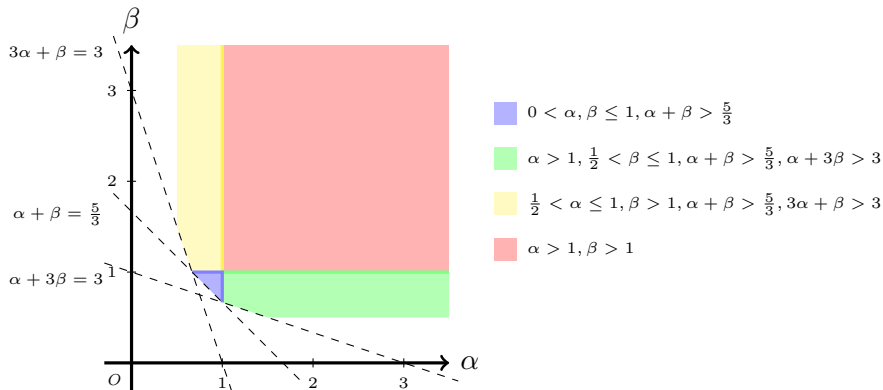
$$\int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx \leq C \left( \int_{\mathbb{R} \setminus E} |u(t_1, x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R} \setminus F} |u(t_2, x)|^2 dx \right).$$

举例:  $E = F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[ k, k + \frac{1}{2k^{5.1/6}} \right]$ , 该集合测度是无限的, 分布如下图所示:



## 主要结果 II

实际上,  $E$  和  $F$  所满足的密度条件可以放得更宽, 可以表示为下图的有色区域:



# 总结与展望

我们的主要工作是得到了线性 KdV 方程两个新的能观测不等式, 具体地说, 就是得到了非观测区域  $E$  和  $F$  取

- (1) 具有有限测度的可测集 (突破了有界的限制)
- (2) 具有某种密度条件且处在同一半轴的可测集 (突破了测度有限的限制)

两种情况下的两点时刻能观测不等式.

关于这个方向有许多有待解决的问题, 例如计算出更加精确的控制常数  $C$ , 或者去除处在同一半轴的限制等等, 这些是接下来需要考虑的问题!

The End!