偏微分方程理论作业

王允磊

2020 年 5 月 11 日

目录

1 Sobolev 空间

习题 1. 若 $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明 Hölder 不等式:

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

证明: 由不等式的齐次对称性, 不妨令 $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. 设 $\theta = \frac{1}{p}$, 则 $1-\theta = \frac{1}{q}$. 令 $F = |f|^p, G = |g|^q$. 则需要被证明的不等式转化为

$$\int_X F^\theta G^{1-\theta} \mathrm{d}\mu \le 1. \tag{1}$$

由 $\ln x$ 函数的凸性可得

$$F^\theta(x) G^{1-\theta}(x) \le \theta F(x) + (1-\theta) G(x).$$

对上式积分便得到 (1) 式. □

习题 2. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 证明 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n), 2 \le p \le \infty$.

证明: 令 q 满足

$$1+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{q},$$

其中 $1\le q\le 2$. 则由 Young 不等式可得

$$\|e^{-|x|^2}*f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\le\|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$

而

$$\|e^{-|x|^2}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-q|x|^2}\mathrm{d}x<\infty,$$

且 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 所以 $e^{-|x|^2}*f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

习题 3. 设

$$\phi(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & -1<x<1,\\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$$

求证: $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

证明: 设

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当 $x>0$ 时, 求导得

$$\begin{aligned}f'(x)=&\frac{1}{x^2}f(x)\\ f''(x)=&\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)f(x)\\ f'''(x)=&\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right)f(x)\\ &\cdots\end{aligned}$$

从上述几个导数易知可以归纳证明得到当 $x>0$ 时有

$$f^{(k)}(x)=P_{2k}(x^{-1})f(x),$$

其中 P_{2k} 是次数为 $2k$ 的多项式. 由多项式和 e 指数的增长速率关系可得

$$\lim_{x\to 0^+}f^{(k)}(x)=\lim_{x\to+\infty}P_{2k}(x)e^{-x}=0.$$

所以对任意的 $n>0$, 都有 $\lim_{x\to 0^+}f^{(n)}(x)=0$. 再利用分析学中的一个定理:

定理 1.1. 设 f 是在 $x=a$ 处连续的函数,$f'(x)$ 在 $x=a$ 的一个去心领域上处处存在且

$$\lim_{x\to a} f'(x)$$

存在, 则 $f'(a)$ 存在且

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x).$$

证明: 根据导数定义

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

由中值定理 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_x)$,$a<\xi_x<x$. 所以

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(\xi_x)=\lim_{x\to a} f'(x).$$

□

把该定理用到上面定义的函数上就得到函数 f 在 $x=0$ 处任意阶右导数都存在且

$$f_+^{(n)}(0)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

而当 $|x|\le 1$ 时, 由

$$\begin{aligned}\phi(x)=&f(1-x^2)\\ \phi'(x)=&-2xf'(1-x^2)\\ \phi''(x)=&-2f'(1-x^2)+4x^2f''(1-x^2)\\ &\cdots\end{aligned}$$

知

$$\phi_-^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

另一方面, 由 $|x|\ge 1$ 时 $\phi(x)=0$ 知

$$\phi_+^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

所以 $x=1$ 时

$$\phi^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

$x=-1$ 时同理.

$\square$

习题 4. 若 $1 \le q \le 2$, 证明对任意 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \le \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.$$

证明: 设 $x=(x_1,x_2)$. 因为 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, 所以 u 可以写成

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t,x_2)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x_2} u(x_1,t)\mathrm{d}t.$$

进而有

$$|u(x)| \le \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i u|\mathrm{d}x_i \le \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u|\mathrm{d}x_i, x \in \mathbb{R}^2.$$

那么

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2\mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x_1 \int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用平均不等式 (下式第二行到第三行) 可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left(\|\partial_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_2 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\right) \\ &\le \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \le \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

对于 $1<q<2$ 的情况, 可以利用插值不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2} \le \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\theta} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\theta} \quad 0<\theta<1$$

得到.

$\square$

习题 5. 设 $f(x)=x^{\frac{1}{4}}\ x\in[0,1]$, 则 $f\in C^{0,\frac{1}{4}}$, 但是 $f\notin C^{0,\mu},\mu>\frac{1}{4}$.

证明: 根据 $C^{0,\mu}$ 的定义, 我们需要计算范数

$$\|f\|_{C^{0,\mu}[0,1]} := \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|+[f]_{\mu,[0,1]},$$

其中半范数

$$[f]_{\mu,[0,1]} := \sup_{x,y\in[0,1],x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\mu}}.$$

$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|=1$, 所以只要计算半范数 $[f]_{\mu,[0,1]}$. 实际上我们可以证明一个一般结论: 对于任意的 $f(x)=x^{\alpha}$,$0<\alpha<1$, 我们都有 $f\in C^{0,\alpha}$. 为了证明这个一般结论, 我们需要下述引理建立的不等式

引理 1.2. 设 $x>0$,$0<\alpha<1$, 则

$$(x+1)^{\alpha}\leq x^{\alpha}+1.$$

证明: 令 $g(x)=(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}-1$, 则

$$g'(x)=\alpha\left(\frac{1}{(x+1)^{1-\alpha}}-\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)\leq 0.$$

又因为 $g(0)=0$, 所以 $g(x)\leq g(0)=0$, 不等式得证. □

那么由引理中的不等式可得对 $a,b>0$ 有

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^{\alpha}\leq\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}+1$$
$$(a+b)^{\alpha}\leq a^{\alpha}+b^{\alpha}.$$

(上式对 $a=0$ 或 $b=0$ 时是显然的.) 令 $a=x-y,b=y,x>y$ 可得

$$x^{\alpha}\leq(x-y)^{\alpha}+y^{\alpha}.$$

所以当 $x>y$ 时, 有

$$x^{\alpha}-y^{\alpha}\leq(x-y)^{\alpha}$$

特别地, 当 $\mu=\frac{1}{4}$ 且 $x>y$ 时,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|=&|x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}|\\ \le&|x-y|^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

$x<y$ 的情况同理. 上述不等式说明

$$[f]_{\frac{1}{4},[0,1]}\le 1<\infty.$$

所以 $f\in C^{0,\frac{1}{4}}$. 对于 $\mu>\frac{1}{4}$ 的情形, 我们有

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\mu}}\overset{令y=0}{\ge}\sup_{x\in(0,1]}\frac{f(x)}{x^{\mu}}=\sup_{x\in(0,1]}x^{\frac{1}{4}-\mu}=\infty.$$

所以 $f\notin C^{0,\mu},\mu>\frac{1}{4}$. □

习题 6. 设 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^2:|x|<1\}$, 说明 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ 但是 $u\notin L^{\infty}(\Omega)$. 其中

$$u(x)=\ln\ln(1+\frac{1}{|x|}),\quad |x|<1,\quad ,|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

证明: 对 $u(x)$ 求偏导可得

$$\begin{aligned}\partial_1 u=&-\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{|x|})}\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}\frac{x_1}{|x|^3},\\ \partial_2 u=&-\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{|x|})}\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}\frac{x_2}{|x|^3}.\end{aligned}$$

从而

$$|\partial_i u|=\left|\frac{1}{|x|\ln(1+\frac{1}{|x|})}\frac{1}{|x|+1}\frac{x_i}{|x|}\right|\le\frac{1}{|x|\ln(1+\frac{1}{|x|})}.\tag{3}$$

利用不等式 $\ln(1+x)\le x$ 可得

$$|u(x)|\le\ln\frac{1}{|x|}=-\ln|x|.$$

则利用该不等式以及极坐标来表示积分,$r=|x|,0<r<1$, 可得

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)}=\int_{\Omega}|u(x)|^2\mathrm{d}x\le\int_{\Omega}r\ln^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=2\pi\int_0^1 r\ln^2 r\mathrm{d}r<\infty.$$

另一方面, 利用 (3) 式得

$$\|\partial_i u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\partial_i u|^2 \mathrm{d}x \le \int_\Omega \left(\frac{1}{r\ln(1+\frac{1}{r})}\right)^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{r\ln^2(1+\frac{1}{r})}\mathrm{d}r.$$

由 $-\mathrm{d}\left(\ln(1+\frac{1}{r})\right) = \frac{1}{r^2+r}\mathrm{d}r$, 令 $\ln(1+\frac{1}{r}) = u$ 得

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)} \le 2\pi\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{r+1}{u^2}\mathrm{d}u \le 4\pi\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u < \infty.$$

综上可知,$u \in W^{1,2}(\Omega)$.

由 u 在去心邻域 $\Omega\backslash 0$ 上的连续性以及 $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \infty$ 知显然有 $u \notin L^\infty(\Omega)$. □

2 Fourier 分析

习题 7. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 定义 Fourier 变换

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(1) 若 $f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, 则 $\widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

(2) 若 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, 则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f\overline{g}\mathrm{d}x =& (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\widehat{\overline{g}}\mathrm{d}\xi;\\ \widehat{fg} =& (2\pi)^{-1}\widehat{f} * \widehat{g}.\end{aligned}$$

证明:

(1) 根据 Fourier 变换的定义可得

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) =& \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\mathrm{d}x\\ =& (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \qquad .\\ =& (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4}$$

剩下的问题就是求 $\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2}\mathrm{d}x$, 可以通过计算 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的方法同样求得

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

代入 (4) 中可得

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

(2) 因为 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 若式子右边存在, 则

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\widehat{\overline{g}}\mathrm{d}\xi \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\mathrm{d}x\right)\overline{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi}g(y)\mathrm{d}y\right)}\mathrm{d}\xi \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{iy\xi}\overline{g}(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x-y)}\mathrm{d}\xi\right)\overline{g}(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} 2\pi\delta(x-y)\overline{g}(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
=&\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1}\widehat{f}*\widehat{g} \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi-\zeta)\widehat{g}(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi-\zeta)}f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\zeta}g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\zeta \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(y-x)\zeta}\mathrm{d}\zeta\right)g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\left(\int_{\mathbb{R}}(2\pi)\delta(y-x)g(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
=&\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
=&\widehat{fg}.
\end{aligned}$$

$\square$