偏微分方程理论作业

王允磊

2020 年 6 月 2 日

目录

1 Sobolev 空间

习题 1. 若 $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明 Hölder 不等式:

$$\|fg\|_{L^1} \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

证明: 由不等式的齐次对称性, 不妨令 $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. 设 $\theta = \frac{1}{p}$, 则 $1-\theta = \frac{1}{q}$. 令 $F = |f|^p, G = |g|^q$. 则需要被证明的不等式转化为

$$\int_X F^\theta G^{1-\theta} \mathrm{d}\mu \le 1. \tag{1}$$

由 $\ln x$ 函数的凸性可得

$$F^\theta(x) G^{1-\theta}(x) \le \theta F(x) + (1-\theta) G(x).$$

对上式积分便得到 (1) 式. □

习题 2. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 证明 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n), 2 \le p \le \infty$.

证明: 令 q 满足

$$1+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{q},$$

其中 $1 \leq q \leq 2$. 则由 Young 不等式可得

$$\|e^{-|x|^2} * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$

而

$$\|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q|x|^2}\mathrm{d}x<\infty,$$

且 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 所以 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

习题 3. 设

$$\phi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & -1<x<1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

求证: $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

证明: 设

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x>0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

当 $x>0$ 时, 求导得

$$\begin{aligned} f'(x)= & \frac{1}{x^2} f(x) \\ f''(x)= & \left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right) f(x) \\ f'''(x)= & \left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right) f(x) \\ & \cdots \end{aligned}$$

从上述几个导数易知可以归纳证明得到当 $x>0$ 时有

$$f^{(k)}(x)=P_{2k}(x^{-1}) f(x),$$

其中 P_{2k} 是次数为 $2k$ 的多项式. 由多项式和 e 指数的增长速率关系可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(k)}(x)=\lim_{x \rightarrow+\infty} P_{2k}(x) e^{-x}=0.$$

所以对任意的 $n>0$, 都有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x)=0$. 再利用分析学中的一个定理:

定理 1.1. 设 f 是在 $x=a$ 处连续的函数,$f'(x)$ 在 $x=a$ 的一个去心领域上处处存在且

$$\lim_{x\to a} f'(x)$$

存在, 则 $f'(a)$ 存在且

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x).$$

证明*:* 根据导数定义

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

由中值定理 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_x)$,$a<\xi_x<x$. 所以

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(\xi_x)=\lim_{x\to a} f'(x).$$

□

把该定理用到上面定义的函数上就得到函数 f 在 $x=0$ 处任意阶右导数都存在且

$$f_+^{(n)}(0)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

而当 $|x|\le 1$ 时, 由

$$\begin{aligned}\phi(x)=&f(1-x^2)\\ \phi'(x)=&-2xf'(1-x^2)\\ \phi''(x)=&-2f'(1-x^2)+4x^2f''(1-x^2)\\ &\cdots\end{aligned}$$

知

$$\phi_-^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

另一方面, 由 $|x|\ge 1$ 时 $\phi(x)=0$ 知

$$\phi_+^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

所以 $x=1$ 时

$$\phi^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

$x=-1$ 时同理.

$\square$

习题 4. 若 $1 \le q \le 2$, 证明对任意 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \le \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.$$

证明: 设 $x=(x_1,x_2)$. 因为 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, 所以 u 可以写成

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t,x_2)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x_2} u(x_1,t)\mathrm{d}t.$$

进而有

$$|u(x)| \le \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i u| \mathrm{d}x_i \le \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u| \mathrm{d}x_i, x \in \mathbb{R}^2.$$

那么

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 \mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(x)| \mathrm{d}x_1 \int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x)| \mathrm{d}x_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用平均不等式 (下式第二行到第三行) 可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} =& \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ \le& \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ \le& \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| \mathrm{d}x\right) \\ \le& \frac{1}{2}\left(\|\partial_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_2 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\right) \\ \le& \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \le \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

对于 $1<q<2$ 的情况, 可以利用插值不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2} \le \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\theta} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\theta} \quad 0<\theta<1$$

得到.

$\square$

习题 5. 设 $f(x)=x^{\frac{1}{4}}\ x\in[0,1]$, 则 $f\in C^{0,\frac{1}{4}}$, 但是 $f\notin C^{0,\mu},\mu>\frac{1}{4}$.

证明: 根据 $C^{0,\mu}$ 的定义, 我们需要计算范数

$$\|f\|_{C^{0,\mu}[0,1]}:=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|+[f]_{\mu,[0,1]},$$

其中半范数

$$[f]_{\mu,[0,1]}:=\sup_{x,y\in[0,1],x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\mu}}.$$

$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|=1$, 所以只要计算半范数 $[f]_{\mu,[0,1]}$. 实际上我们可以证明一个一般结论: 对于任意的 $f(x)=x^{\alpha}$,$0<\alpha<1$, 我们都有 $f\in C^{0,\alpha}$. 为了证明这个一般结论, 我们需要下述引理建立的不等式

引理 1.2. 设 $x>0$,$0<\alpha<1$, 则

$$(x+1)^{\alpha}\leq x^{\alpha}+1.$$

证明: 令 $g(x)=(x+1)^{\alpha}-x^{\alpha}-1$, 则

$$g'(x)=\alpha\left(\frac{1}{(x+1)^{1-\alpha}}-\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)\leq 0.$$

又因为 $g(0)=0$, 所以 $g(x)\leq g(0)=0$, 不等式得证. □

那么由引理中的不等式可得对 $a,b>0$ 有

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^{\alpha}\leq\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}+1$$
$$(a+b)^{\alpha}\leq a^{\alpha}+b^{\alpha}.$$

(上式对 $a=0$ 或 $b=0$ 时是显然的.) 令 $a=x-y,b=y,x>y$ 可得

$$x^{\alpha}\leq(x-y)^{\alpha}+y^{\alpha}.$$

所以当 $x>y$ 时, 有

$$x^{\alpha}-y^{\alpha}\leq(x-y)^{\alpha}$$

特别地, 当 $\mu=\frac{1}{4}$ 且 $x>y$ 时,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| =&|x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}|\\ \leq&|x-y|^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

$x<y$ 的情况同理. 上述不等式说明

$$[f]_{\frac{1}{4},[0,1]}\leq 1<\infty.$$

所以 $f\in C^{0,\frac{1}{4}}$. 对于 $\mu>\frac{1}{4}$ 的情形, 我们有

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\mu}}\overset{\text{令}y=0}{\geq}\sup_{x\in(0,1]}\frac{f(x)}{x^{\mu}}=\sup_{x\in(0,1]}x^{\frac{1}{4}-\mu}=\infty.$$

所以 $f\notin C^{0,\mu},\mu>\frac{1}{4}$. □

习题 6. 设 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^2:|x|<1\}$, 说明 $u\in W^{1,2}(\Omega)$ 但是 $u\notin L^{\infty}(\Omega)$. 其中

$$u(x)=\ln\ln(1+\frac{1}{|x|}),\quad |x|<1,\quad ,|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

证明: 对 $u(x)$ 求偏导可得

$$\begin{aligned}\partial_1 u=&-\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{|x|})}\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}\frac{x_1}{|x|^3},\\ \partial_2 u=&-\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{|x|})}\frac{1}{1+\frac{1}{|x|}}\frac{x_2}{|x|^3}.\end{aligned}$$

从而

$$|\partial_i u|=\left|\frac{1}{|x|\ln(1+\frac{1}{|x|})}\frac{1}{|x|+1}\frac{x_i}{|x|}\right|\leq\frac{1}{|x|\ln(1+\frac{1}{|x|})}. \tag{3}$$

利用不等式 $\ln(1+x)\leq x$ 可得

$$|u(x)|\leq\ln\frac{1}{|x|}=-\ln|x|.$$

则利用该不等式以及极坐标来表示积分,$r=|x|,0<r<1$, 可得

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)}=\int_{\Omega}|u(x)|^2\mathrm{d}x\leq\int_{\Omega}r\ln^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=2\pi\int_0^1 r\ln^2 r\mathrm{d}r<\infty.$$

另一方面, 利用 (3) 式得

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}^2=\int_\Omega|\partial_i u|^2\mathrm{d}x\le\int_\Omega\left(\frac{1}{r\ln(1+\frac{1}{r})}\right)^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=2\pi\int_0^1\frac{1}{r\ln^2(1+\frac{1}{r})}\mathrm{d}r.$$

由 $-\mathrm{d}\left(\ln(1+\frac{1}{r})\right)=\frac{1}{r^2+r}\mathrm{d}r$, 令 $\ln(1+\frac{1}{r})=u$ 得

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}\le 2\pi\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{r+1}{u^2}\mathrm{d}u\le 4\pi\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u<\infty.$$

综上可知,$u\in W^{1,2}(\Omega)$.

由 u 在去心邻域 $\Omega\backslash 0$ 上的连续性以及 $\lim_{|x|\to\infty}u(x)=\infty$ 知显然有 $u\notin L^\infty(\Omega)$. □

2 Fourier 分析

习题 7. 设 $f\in L^1(\mathbb{R})$, 定义 Fourier 变换

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}f(x)\mathrm{d}x,\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

(1) 若 $f(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 则 $\widehat{f}(\xi)=e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

(2) 若 $f,g\in L^1(\mathbb{R})$, 则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}f\overline{g}\mathrm{d}x=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}\widehat{\overline{g}}\mathrm{d}\xi;\\ \widehat{fg}=&(2\pi)^{-1}\widehat{f}*\widehat{g}.\end{aligned}$$

证明:

(1) 根据 Fourier 变换的定义可得

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi)=&\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}f(x)\mathrm{d}x\\ =&(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\\ =&(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}\int_{\mathbb{R}}e^{-(x-i\xi)^2}\mathrm{d}x\end{aligned}\quad. \tag{4}$$

剩下的问题就是求 $\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2}\mathrm{d}x$, 可以通过计算 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的方法同样求得

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

代入 (4) 中可得

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

(2)

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\overline{\widehat{g}}\mathrm{d}\xi \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\mathrm{d}x\right)\overline{\widehat{g}}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\overline{\widehat{g}}(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x \\
=&\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\left((2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\widehat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi\right)}\mathrm{d}x \\
=&\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1}\widehat{f}*\widehat{g} \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi-\zeta)\widehat{g}(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi-\zeta)}f(x)\mathrm{d}x\right)g(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
=&\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\left((2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\zeta}g(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}\xi \\
=&\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
=&\widehat{fg}.
\end{aligned}$$

□

习题 8.

(1) 若 $|\widehat{f}(\xi)| \le e^{-|\xi|}, \xi \in \mathbb{R}$, 求证 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(2) 若 $1 \le p \le 2$, 且对于任意 $f \in L^p$ 有不等式

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

求证: q 必须满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证明: (1) 这是 Paley-Wiener 定理的特殊情况, 只要在定理中取 $a=\frac{1}{2}$, 则 $e^{\frac{1}{2}|\xi|}|\widehat{f}|\leq e^{-\frac{1}{2}|\xi|}$, 所以 $e^{\frac{1}{2}|\xi|}\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R})$, 从而 f 在带形区域 $\left\{(x+iy):x\in\mathbb{R},|y|\leq\frac{1}{2}\right\}$ 解析, 当然有 $f\in C^\infty$, 命题得证.

(2) 假设对于所有的 $f\in L^p$ 都有

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})}\leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \tag{5}$$

用 $\varphi(x)=f(\lambda x),\lambda\neq 0$ 代替 $f(x)$ 可得

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L^q(\mathbb{R})}\leq C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}. \tag{6}$$

其中

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

对新的函数计算相应的范数:

$$\begin{aligned}\|\widehat{\varphi}\|_{L^q(\mathbb{R})}&=\left(\frac{1}{\lambda^q}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right|^q\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\frac{1}{\lambda^{q-1}}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right|^q\mathrm{d}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{q-1}{q}}\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}&=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(\lambda x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p}}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(\lambda x)|^p\,\mathrm{d}\left(\lambda x\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p}}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

上述两个结果代入不等式 (6) 可得

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})}\leq\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{q-1}{q}}C\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

如果指数 $\frac{1}{p}-\frac{q-1}{q}$ 不等于 0, 例如当它大于 0 的时候, 取 $\lambda\to\infty$, 不等式右边便趋于 0, 这是不可能的 (小于 0 时就令 $\lambda\to 0$). 所以指数只能等于 0. 所以

$$\frac{1}{p}-\frac{q-1}{q}=0,$$

整理可得

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1.$$

□

习题 9.

(1) 对于给定函数 $w(x)\in C_0^\infty$, 定义

$$(Tf)(x)=\int_{\mathbb{R}}f(y)w(x-y)\mathrm{d}y, x\in\mathbb{R}, f\in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

证明 T 是平移不变算子.

(2) 设 $1<p<\infty$, 利用 Mihlin-Hormander 乘子定理证明

$$\|\partial_1\partial_2 f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\le C\|(\partial_1^2+\partial_2^2)f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},\quad \forall f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

证明:

(1)

$$\begin{aligned}T(\tau_a f)=&Tf(x-a)\\=&\int_{\mathbb{R}}f(y-a)w(x-y)\mathrm{d}y\\=&\int_{\mathbb{R}}f(y)w(x-y-a)\mathrm{d}y\\=&\int_{\mathbb{R}}f(y)w(x-a-y)\mathrm{d}y\\=&(Tf)(x-a)\\=&\tau_a Tf,\quad ,\forall a\in\mathbb{R}, f\in C_0^\infty(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

其中第四个等号是利用 $y+a$ 代替 a 并利用了函数具有紧支集的性质.

(2) 令 $g=(\partial_1^2+\partial_2^2)f$, 则需要证明的不等式等价于

$$\|\partial_1\partial_2(\partial_1^2+\partial_2^2)^{-1}g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \le C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

因为 $\partial_1\partial_2(\partial_1^2+\partial_2^2)^{-1}g$ 的傅里叶变换为 $\xi_1\xi_2(\xi_1^2+\xi_2^2)^{-1}$, 因此只需说明 $m=\xi_1\xi_2(\xi_1^2+\xi_2^2)^{-1}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. 根据 Mihlin-Hörmander 乘子定理, 只需要证明

$$|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \le C_\alpha|\xi|^{-|\alpha|}$$

对所有的 $|\alpha|\le 2$ 成立.

1. $\alpha=0$.
   因为
   $$\frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}\le\frac{1}{2}=\frac{1}{2}|\xi|^0,$$
   所以该情况下定理要求的条件成立.

2. $\alpha=1$, $\partial_\xi^\alpha=\partial_1$.
   $\partial_1 m(\xi)=\frac{\xi_2^3-\xi_1^2\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}, |\xi|^{-1}=(\xi_1^2+\xi_2^2)^{-1/2}$, 我门要验证
   $$\frac{|\xi_2^3-\xi_1^2\xi_2|}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}\le C_1\frac{1}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^{\frac{1}{2}}},$$
   其中 C_1 是某个确定的常数. 也就是要证明
   $$|\xi_2||\xi_2^2-\xi_1^2|\le C_1(\xi_1^2+\xi_2^2)^{\frac{3}{2}}. \tag{7}$$
   注意到
   $$|\xi_2|\le(\xi_1^2+\xi_2^2)^{\frac{1}{2}} \text{ 以及} |\xi_2^2-\xi_1^2|\le(\xi_2^2+\xi_1^2),$$
   代入 (7) 式的左边并取 $C_1=1$ 即可得到该不等式.

3. $\alpha=1, \partial_\xi^\alpha=\partial_2$.
   这与上一情况雷同, 只是指标互换, 验证同上.

4. $\alpha=2, \partial_\xi^\alpha=\partial_1^2$.
   $\partial_1^2 m(\xi)=\frac{2\xi_1^3\xi_2-6\xi_1\xi_2^3}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^3}, |\xi|^{-2}=(\xi_1^2+\xi_2^2)^{-1}$, 我们要验证
   $$\frac{|2\xi_1^3\xi_2-6\xi_1\xi_2^3|}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^3}\le C_2\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2},$$

其中 C_2 是某个确定的常数. 也就是要证明

$$|2\xi_1\xi_2||\xi_1^2 - 3\xi_2^2| \le C_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2. \tag{8}$$

注意到

$$|2\xi_1\xi_2| \le \xi_1^2 + \xi_2^2 \text{ 以及} |\xi_1^2 - 3\xi_2^2| \le 3(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

代入 (8) 式的左边并取 $C_2 = 3$ 即可得到该不等式.

5. $\alpha = 2, \partial^\alpha = \partial_2^2$.
   这与上一情况相同, 只是指标互换, 验证同上.
6. $\alpha = 2, \partial^\alpha = \partial_1\partial_2$.
   $\partial_1\partial_2 m(\xi) = \frac{6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^3}, |\xi|^{-2} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}$, 我们要验证

$$\frac{|6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4|}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^3} \le C_3 \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2},$$

其中 C_3 是某个确定的常数. 也就是要证明

$$|6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4| \le (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2, \tag{9}$$

注意到

$$\begin{aligned} |6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4| =& |(\xi^2 + \xi_2^2)^2 - 8\xi_1^2\xi_2^2| \\ \le& (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + 8\xi_1^2\xi_2^2 \\ \le& 3(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2. \end{aligned}$$

代入 (9) 式的左边并取 $C_3 = 3$ 即可得到该不等式.

综上,Mihlin-Hörmander 乘子定理的所有条件都满足.

□

习题 10. 详细证明测不准原理

$$\|xf\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\partial_x f\|_{L^2(\mathbb{R})} \ge \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

证明: 由 $\widehat{\partial_x f}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$ 以及 Plancherel 定理可将要证明的不等式转化为

$$\|xf\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\xi\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

定义 $[A,B] = AB - BA$, $(\cdot,\cdot)$ 表示 L^2 中的内积

$$(f,g) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x.$$

定义 $D = i\partial_x$, 考虑

$$I = ([x,D]f, f)\,.$$

下面用两种方式估计 I.

一方面, 利用交换子的定义可得

$$\begin{aligned}
I =& (xDf,f) - (Dxf,f) \\
=& (Df,xf) - (xf,Df) \\
=& 2\mathrm{Im}\,(Df,xf) \\
\leq& 2\|Df\|_{L^2(R)}\|xf\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

最后一步用到了 Cauchy-Schwartz 不等式.

另一方面, 直接计算可得

$$\begin{aligned}
[x,D]f =& xDf - Dxf \\
=& xDf - Dxf = if.
\end{aligned}$$

因此

$$I = ([x,D]f,f) = i(f,f) = i\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

联合第一步可知

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\|\xi f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|xf\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

□