学校代码: 10491　　　　　　　　　研究生学号: 1201910835

中国地质大学
硕士学位论文

中国地质大学研究生学位论文 $\LaTeX\,2_\varepsilon$ 模板

姓　　　　名: 王允磊
学 科 专 业: 数学
指 导 教 师: 王明
培 养 单 位: 数学与物理学院

二〇二二年三月

A Dissertation Submitted to China University of Geosciences
For the Master Degree of Mathematics

CUGThesis $\LaTeX\,2_\varepsilon$ 模板

Master Candidate:	Yunlei Wang
Major:	Mathematics
Supervisor:	Ming Wang

China University of Geosciences
Wuhan 430074 P.R. China

中国地质大学（武汉）研究生学位论文原创性声明

本人郑重声明：本人所呈交的硕士学位论文《中国地质大学研究生学位论文 $\LaTeX\,2_\varepsilon$ 模板》，是本人在导师的指导下，在中国地质大学（武汉）攻读硕士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果，对论文的完成提供过帮助的有关人员已在文中说明并致以谢意。

本人所呈交的 硕士 学位论文没有违反学术道德和学术规范，没有侵权行为，并愿意承担由此而产生的法律责任和法律后果。

学位论文作者签名:

日　期:　　　　年　　月　　日

中国地质大学（武汉）研究生学位论文导师承诺书

本人郑重承诺：本人所指导的硕士学位论文《中国地质大学研究生学位论文 LaTeX 2_ε 模板》是在本人的指导下，研究生在中国地质大学（武汉）攻读硕士学位期间独立进行研究工作所取得的成果，论文由研究生独立完成。

研究生所呈交的硕士学位论文没有违反学术道德和学术规范，没有侵权行为，并愿意承担由此而产生的与导师相关的责任和后果。

指导老师（签字）：

日　期:　　　　年　月　日

中国地质大学（武汉）研究生学位论文使用授权书

本人授权中国地质大学（武汉）可采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存本学位论文；学校可向国家有关部门或机构送交本学位论文的电子版全文，编入有关数据库进行检索、下载及文献传递服务；同意在校园网内提供全文浏览和下载服务。

涉密论文解密后适用于本授权书。

学位论文作者签名:

日　期:　　　　年　　月　　日

作者简介

一、基本情况

姓名: 某某某　性别: 男　民族: 汉

出生年月: 1994-05-02　籍贯: 山西省朔州市

2013.09 – 2017.07　中国地质大学（武汉）工学学士;

2017.09 – 至今　中国地质大学（武汉）攻读硕士学位;

二、学术论文

1. X. X 研究 [J]. X 学报, 201X(1): 53-55.
2. X. X 分析 [J]. X 技术, 2005(5): 6-7.
3. ...

三、获奖、专利情况

1. X.X. 江苏省科技进步奖三等奖. 排名第二; (ps: 逗我呢?)
2. ...

四、研究项目

1. X 项目, 国家自然基金, 项目编号: XXX, 参加人员;
2. ...

摘　要

中文摘要

关键词： 关键字

Abstract

English Abstract

Keywords: Keywords

目录

插图

表格

第一章　引言

唯一延拓性是偏微分方程研究中的一个重要课题, 它刻画了一个方程的解在多大程度上由它的局部信息所确定. 对于这类问题, 人们首先聚焦于薛定谔方程的研究并得到了丰富多样的结果.

1.1　能观测不等式

考虑薛定谔方程

$$i\partial_t u + \Delta u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,1) \tag{1.1}$$

的解 $u(x,t)$, 我们由 $u(x,t)$ 在 $\hat{\omega} \times I$ 上为零可以推出 $u(x,t)$ 本身恒为零[1], 即

$$\text{当} u(x,t) \text{在} \hat{\omega} \times I \text{上为零时}, u \equiv 0,$$

这里 $I = (a,b) \subset (0,1)$ 是包含在 $(0,1)$ 中的任意非空的子区间, Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中具有解析边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $\hat{\omega}$ 是边界 $\partial\Omega$ 上满足几何控制条件的子集, $n \in \mathbb{N}^+ := \{1, 2, \cdots\}$. 这种唯一延拓性也可以等价地表述为:

当 $u(x,t)$ 在 $\hat{\omega} \times I$ 上给定时, 解函数 $u(x,t)$ 在全空间和时间轴上唯一确定.

对于 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 的情形, 我们不仅能建立开子集 $\omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的唯一延拓性, 还能进一步得到这一性质的定量描述:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,0)|^2 \,\mathrm{d}x \le C \int_0^T \int_\omega |u(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{1.2}$$

其中 C 是仅仅依赖于 T 和 ω 的正常数. 形如 (1.2) 的不等式便称为能观测不等式.

更一般地, 对于满足薛定谔方程

$$i\partial_t u + \Delta u + Vu = 0 \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,1) \tag{1.3}$$

(其中 V 是依赖时间和空间变量的满足一定条件的势函数, $n \in \mathbb{N}^+ := \{1, 2, \cdots\}$) 的解 $u(x,t)$, 我们由 $u(x,t)$ 在 $B_R^c(0) \times \{0,1\}$ 为零可以推出 $u(x,t)$ 本身恒为零[2], 即

$$\text{当} (x,t) \in B_R^c(0) \times \{0,1\} \text{时}, u(x,t) = 0 \Rightarrow u \equiv 0.$$

这里 $R > 0$, $B_R(0)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 里半径为 R 球心为原点的闭球, 并且 $B_R^c(0)$ 表示 $B_R(0)$ 在全空间 $\mathbb{R}^n$ 中的补空间. Escauriaza, Kenig 和 Ponce 证明了[3], 如果方程 (1.3) 的解 $u(x,t)$ 在给定某些位势条件下满足

$$\|e^{|x|^2/\alpha^2} u(x,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} + \|e^{|x|^2/\beta^2} u(x,1)\|_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})} < \infty,$$

并且 α,β 是满足 $\alpha\beta<4$ 的正常数, 则有 $u\equiv 0$. 上述结论在 $\alpha\beta=4$ 时并不成立. 对于没有外势的自由薛定谔方程, 同样的结果亦可见于[3]. 从已有的结果可以看到, 对于两点时刻的唯一延拓性我们知有定性的描述, 一个自然而然的问题便是: 我们能否得到像 (1.2) 式那样关于两点时刻的唯一延拓性的定量描述, 即所谓的两点时刻能观测不等式.

王更生, 王明和张与彪三位在 2019 年发表的文章中[4] 考虑了全空间自由薛定谔方程

$$\begin{cases} i\partial_t u+\Delta u=0, & (x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty),\\ u(x,0)=u_0(x)\in L^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}\right), \end{cases} \tag{1.4}$$

并对其建立了如下的两点时刻能观测不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)|^2\,\mathrm{d}x\le Ce^{Cr_1r_2\frac{1}{T-S}}\left(\int_{B^c_{r_1}(x')}|u(x,S)|^2\,\mathrm{d}x+\int_{B^c_{r_2}(x'')}|u(x,T)|^2\,\mathrm{d}x\right), \tag{1.5}$$

其中 $x',x''\in\mathbb{R}^n,0<S<T<\infty,r_1>0,r_2>0$, C 是不依赖于任何变量的正常数. 这一结果有着突破性的意义. 在此之前, 人们并没有意识到对于两点时刻的唯一延拓性可以建立定量的描述, 即能观测不等式. 不仅如此, 该不等式中的常数估计对于全空间上的自由薛定谔方程是最优的.

为了便于后续的说明, 我们给出全空间傅立叶变换的符号以及定义式

$$\widehat{f}(\xi)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

对于薛定谔方程, 不论是定性的唯一延拓性还是定量的能观测不等式, 它们的证明都依赖于全空间自由薛定谔方程解满足的关系式[5]

$$(2it)^{\frac{n}{2}}\,e^{-i|x|^2/4t}u(x,t)=\left(e^{i|\cdot|^2/4t}u_0\right)^\wedge\left(\frac{x}{2t}\right). \tag{1.6}$$

上面的 (1.6) 式说明 $e^{-i|x|^2/4t}u(x,t)$ 是经过缩放后的函数 $e^{i|y|^2/4t}u_0(y)$ 的傅立叶变换, 这让我们可以将薛定谔方程的两点能观测不等式转换为调和分析中的不确定性原理. 实际上, 定性的两点唯一延拓性利用了与哈代不确定性原理的等价性, 而能观测不等式则利用了与另一种不确定性原理, 即与定理1.1.1的等价性[6].

定理 1.1.1. *给定 $\mathbb{R}^n$ 上测度有限的可测子集 S,Σ, 则对于任意的函数 $f\in L^2\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}\right)$ 我们有不等式*

$$\int_{\mathbb{R}^n_x}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\le C\left(n,S,\Sigma\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n_x\setminus S}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n_\xi\setminus\Sigma}|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right)$$

成立, 其中 $C=C(n)$ 并且

$$C(n,S,\Sigma):=Ce^{C\min\left\{|S||\Sigma|^{1/n}w(\Sigma),|\Sigma|^{1/n}w(S)\right\}}. \tag{1.7}$$

这里 $w(\cdot)$ 表示平均宽度.

1.2 KdV 方程能观测不等式

因为 Korteweg-de Vries 方程 (以下均简称 KdV 方程) 也是一种重要的色散方程, 所以一个自然的想法是寻找 KdV 方程的两点时刻能观测不等式. 遗憾的是, 对于 KdV 方程, 我们无法找到类似薛定谔方程 (1.6) 式那样简洁的变换关系式, 从而无法使用类似的方法将其等价为某种不确定性原理. 考虑线性 KdV 方程

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u = 0, \quad u(x,0) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}). \tag{1.8}$$

黎泽和王明在 2021 年用解析的方法证明了线性 KdV 方程的两点能观测不等式[7], 即定理1.2.1.

定理 1.2.1. *存在一个常数 $C>0$, 使得对于任意的 $r_1, r_2, t > 0$ 以及所有关于方程 (1.8) 的解 $u(x,t) \in C\left([0,\infty); L^2(\mathbb{R})\right)$ 都有*

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x \le C e^{Ct^{-\frac{4}{3}}(r_1^4 + r_2^4)} \left(\int_{|x|\ge r_1} |u_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{|x|\ge r_2} |u(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x \right). \tag{1.9}$$

该定理的证明依赖于具有紧支集初值函数在 KdV 方程下定量的解析光滑效应以及关于解析函数的一个定量唯一延拓不等式.

1.3 这是一级标题

1.3.1 这是二级标题

致谢

参考文献

[1] LEBEAU G. Contrôle de l'équation de Schrödinger[J]. Journal de mathématiques pures et appliquées, 1992, 71(3) : 267 – 291.

[2] IONESCU A D, KENIG C E. Uniqueness properties of solutions of Schrödinger equations[J]. Journal of Functional Analysis, 2006, 232(1) : 90 – 136.

[3] ESCAURIAZA L, KENIG C E, PONCE G, et al. The sharp Hardy uncertainty principle for Schrödinger evolutions[J/OL]. Duke Mathematical Journal, 2010, 155(1) : 163 – 187.
https://doi.org/10.1215/00127094-2010-053.

[4] WANG G, WANG M, ZHANG Y. Observability and unique continuation inequalities for the Schrödinger equation[J]. Journal of European Mathematical Society, 2019, 21(11) : 3513 – 3572.

[5] ESCAURIAZA L, KENIG C, PONCE G, et al. Convexity properties of solutions to the free Schrödinger equation with Gaussian decay[J]. Mathematical Research Letters, 2008, 15(5) : 957 – 971.

[6] JAMING P. Nazarov's uncertainty principles in higher dimension[J/OL]. Journal of Approximation Theory, 2007, 149(1) : 30 – 41.
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021904507000755.

[7] LI Z, WANG M. Observability Inequality at Two Time Points for KdV Equations[J/OL]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2021, 53(2) : 1944 – 1957.
https://doi.org/10.1137/20M1312538.

附录 A　这是附录 A