偏微分方程理论作业

王允磊

2020 年 4 月 19 日

目录

1 Sobolev 空间

习题 1. 若 $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明 Hölder 不等式:

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

证明: 由不等式的齐次对称性, 不妨令 $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. 设 $\theta = \frac{1}{p}$, 则 $1-\theta = \frac{1}{q}$. 令 $F = |f|^p, G = |g|^q$. 则需要被证明的不等式转化为

$$\int_X F^\theta G^{1-\theta} \mathrm{d}\mu \leq 1. \tag{1}$$

由 $\ln x$ 函数的凸性可得

$$F^\theta(x)G^{1-\theta}(x) \leq \theta F(x) + (1-\theta)G(x).$$

对上式积分便得到 (1) 式. □

习题 2. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 证明 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n), 2 \leq p \leq \infty$.

证明: 令 q 满足

$$1+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{q},$$

其中 $1 \leq q \leq 2$. 则由 Young 不等式可得

$$\|e^{-|x|^2} * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$

而

$$\|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q|x|^2}\mathrm{d}x<\infty,$$

且 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 所以 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

习题 3. 设

$$\phi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & -1<x<1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

求证: $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

证明: 设

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x>0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

当 $x>0$ 时, 求导得

$$\begin{aligned} f'(x)=&\frac{1}{x^2}f(x) \\ f''(x)=&\left(\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^3}\right)f(x) \\ f'''(x)=&\left(\frac{1}{x^6}-\frac{6}{x^5}+\frac{6}{x^4}\right)f(x) \\ &\cdots. \end{aligned}$$

从上述几个导数易知可以归纳证明得到当 $x>0$ 时有

$$f^{(k)}(x)=P_{2k}(x^{-1})f(x),$$

其中 P_{2k} 是次数为 $2k$ 的多项式. 由多项式和 e 指数的增长速率关系可得

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x)=\lim_{x\to+\infty} P_{2k}(x)e^{-x}=0.$$

所以对任意的 $n>0$, 都有 $\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x)=0$. 再利用分析学中的一个定理:

定理. 设 f 是在 $x=a$ 处连续的函数,$f'(x)$ 在 $x=a$ 的一个去心领域上处处存在且

$$\lim_{x\to a} f'(x)$$

存在, 则 $f'(a)$ 存在且

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(x).$$

证明: 根据导数定义

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

由中值定理 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi_x)$,$a<\xi_x<x$. 所以

$$f'(a)=\lim_{x\to a} f'(\xi_x)=\lim_{x\to a} f'(x).$$

□

把该定理用到上面定义的函数上就得到函数 f 在 $x=0$ 处任意阶右导数都存在且

$$f_+^{(n)}(0)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

而当 $|x|\le 1$ 时, 由

$$\begin{aligned}\phi(x)=&f(1-x^2)\\ \phi'(x)=&-2xf'(1-x^2)\\ \phi''(x)=&-2f'(1-x^2)+4x^2f''(1-x^2)\\ &\cdots\end{aligned}$$

知

$$\phi_-^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

另一方面, 由 $|x|\ge 1$ 时 $\phi(x)=0$ 知

$$\phi_+^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

所以 $x=1$ 时

$$\phi^{(n)}(1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

$x=-1$ 时同理.

$\square$

习题 4. 若 $1 \le q \le 2$, 证明对任意 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \le \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.$$

证明: 设 $x=(x_1,x_2)$. 因为 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, 所以 u 可以写成

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t,x_2)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x_2} u(x_1,t)\mathrm{d}t.$$

进而有

$$|u(x)| \le \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i u|\mathrm{d}x_i \le \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u|\mathrm{d}x_i, x\in\mathbb{R}^2.$$

那么

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|u(x)|^2\mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}|\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x_1\int_{\mathbb{R}}|\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x_2\\ &=\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用平均不等式可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le\frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_1 u(x)|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}|\partial_2 u(x)|\mathrm{d}x\right)\\ &\le\frac{1}{2}\left(\|\partial_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}+\|\partial_2 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\right)\\ &\le\|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\le\|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

$\square$