

泛函分析习题参考答案

89hao

2019 年 12 月 29 日

这是中国地质大学 (武汉)2019 秋季学期本科生泛函分析课程作业答案. 一共是 18 次作业, 作业参考用书是实变函数与泛函分析概要 (第四版) 第二册 (郑维行王声望), 可能会有一些错误, 仅供参考

目录

1 2019-09-03	2
2 2019-09-05	3
3 2019-09-10	3
4 2019-09-12	4
5 2019-09-17	5
6 2019-09-19	6
7 2019-09-24	6
8 2019-09-26	7
9 2019-10-08	8
10 2019-10-10	9
11 2019-10-15	10
12 2019-10-17	11
13 2019-10-22	12

14	2019-10-24	12
15	2019-10-29	13
16	2019-10-31	14
17	2019-11-05	14
18	2019-11-07	15

1 2019-09-03

习题 p63 8(a)

解: 仅验证三角不等式

$$\begin{aligned}
 \rho(x, y) &= \sum_{j=0}^k \max_{a \leq t \leq b} |x^{(j)} - y^{(j)}| \\
 &\leq \sum_{j=0}^k \left(\left| \max_{a \leq t \leq b} x^{(j)} - z^{(j)} \right| + |z^{(j)} - y^{(j)}| \right) \\
 &\leq \sum_{j=0}^k \left(\max_{a \leq t \leq b} |x^{(j)} - z^{(j)}| + \max_{a \leq t \leq b} |z^{(j)} - y^{(j)}| \right) \\
 &= \rho(x, z) + \rho(z, y).
 \end{aligned}$$

□

习题 p64 10(a)

解: 仅验证三角不等式

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}(x, y) &= \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} \\
 &= 1 - \frac{1}{1 + \rho(x, y)} \\
 &\leq 1 - \frac{1}{1 + \rho(x, z) + \rho(z, y)} \\
 &= \frac{\rho(x, z) + \rho(z, y)}{1 + \rho(x, y) + \rho(z, y)} \\
 &= \frac{\rho(x, z)}{1 + \rho(x, z) + \rho(z, y)} + \frac{\rho(z, y)}{1 + \rho(x, z) + \rho(z, y)} \\
 &\leq \frac{\rho(x, z)}{1 + \rho(x, z)} + \frac{\rho(z, y)}{1 + \rho(z, y)} \\
 &= \bar{\rho}(x, z) + \bar{\rho}(z, y).
 \end{aligned}$$

□

2 2019-09-05

习题 构造无穷多个开区间使得它们的交为 $(0, 1]$.

解: $\mathcal{O}_n = (0, 1 + \frac{1}{n}), n = 1, 2, \dots$.

□

习题 利用 *p18* 三个等价命题的语言改写结论: 有理多项式在 (a, b) 上稠密.

解:

- 对于任给的 $f(x) \in C[a, b]$ 以及任给的 $\epsilon > 0$, 存在有理多项式 $p(x)$ 使 $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| < \epsilon$.
- 对于任给的 $\epsilon > 0$, 以每个有理多项式为中心, 以 ϵ 为半径的全部开球的并包含 $C[a, b]$.
- 对于任给的 $f(x) \in C[a, b]$, 存在有理多项式序列 $p_n(x)$ 收敛于 $f(x)$.

□

3 2019-09-10

习题 *p63* 4

解: $\forall \epsilon > 0, \exists x', y' \in F$ s.t.

$$|f(x) - \rho(x, x')| < \frac{\epsilon}{4}$$

$$|f(y) - \rho(y, y')| < \frac{\epsilon}{4}.$$

由定义知,

$$\rho(y, y') - \frac{\epsilon}{4} < f(y) \leq \rho(y, x') \leq \rho(x, x') + \rho(x, y).$$

则有

$$\rho(y, y') - \rho(x, x') < \frac{\epsilon}{4} + \rho(x, y).$$

由 x 和 y 的对称性同理可得

$$\rho(x, x') - \rho(y, y') < \frac{\epsilon}{4} + \rho(x, y).$$

综合上面两个式子可得

$$|\rho(x, x') - \rho(y, y')| < \frac{\epsilon}{4} + \rho(x, y).$$

取 $\delta = \frac{\epsilon}{4}$, 当 $\rho(x, y) < \delta$ 时, 有

$$|\rho(x, x') - \rho(y, y')| < \frac{\epsilon}{2}.$$

所以

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \rho(x, x')| + |\rho(x, x') - \rho(y, y')| + |\rho(y, y') - f(y)| < \epsilon.$$

□

习题 p63 7

解: 任取一个 $y = T(x)$, 因为 A 在 X 中稠密, 所以存在序列 $\{x_n\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 由 T 的连续性可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = T(x) = y$, 所以在 $T(A)$ 中有序列 $\{T(x_n)\}$ 收敛到 y , 由 y 的任意性可知 $T(A)$ 在 $T(X)$ 中稠密. □

习题 p65 16

解:

- a. 设 x 为 A 的一个聚点, 则存在 A 中的一个点列 $\{x_n\}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

因为 A 完备, 所以 $x \in A$. 也就是说 A 中的聚点包含于 A , 即 A 为闭集.

- b. 设 $\{x_n\}$ 为 A 中的柯西列, 因为 X 完备, 所以存在 $x \in X$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

又因为 A 是闭集, 所以 $x \in A$. 所以 A 按照 X 的距离定义下是完备的距离空间.

□

4 2019-09-12

习题 p65 18

解:

- a. 若 B 是第一类型的集, 则存在可数稀疏集合序列 $\{B_n\}$ 使得

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

则

$$A = A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A).$$

$\{B_n \cap A\}$ 也是稀疏集, 所以 A 可以写成可数稀疏集的并, 自然也是稀疏集.

- b. 这是上面的逆否命题, 所以和前面等价.

□

习题 p65 23

解: 设 A 为准紧集, \bar{A} 为相应的闭包. 我们需要证明任给一个 \bar{A} 中的点列 $\{x_n\}$ 都存在子列收敛于 \bar{A} 中. 对每一个点 x_n , 都可以在 A 中找到一个点 y_n 使得 $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. 因为 $\{y_n\}$ 是准紧集 A 中的点列, 所以 $\{y_n\}$ 中有子序列 $\{y_{k_n}\}$ 收敛到全空间 X 中的一个点, 记为 x_0 . 因为 \bar{A} 是 A 的闭包, 所以 $x_0 \in \bar{A}$. 因此任给 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N_1 , 当 $k_n \geq N_1$ 时

$$\rho(y_{k_n}, x_0) < \frac{\epsilon}{2}.$$

另一方面, 当 $k_n \geq n > N_2 = \lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil$ 时, 有

$$\rho(y_{k_n}, x_{k_n}) < \frac{\epsilon}{2}.$$

综上所述, 当 $k_n \geq \max\{N_1, N_2\}$ 时, 有

$$\rho(x_{k_n}, x_0) \leq \rho(x_{k_n}, y_{k_n}) + \rho(y_{k_n}, x_0) < \epsilon.$$

即子列 $\{x_{k_n}\}$ 收敛到 \bar{A} 中的点 x_0 .

□

5 2019-09-17

习题 p66 25

解: 若 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, 则 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n)$, 由有限覆盖定理知存在 $\{X \setminus F_{n_k}\}_{k=1}^l$ 使得 $X = \bigcup_{k=1}^l (X \setminus F_{n_k})$, 则 $\bigcap_{k=1}^l F_{n_k} = \emptyset$. 而由条件可知 $\bigcap_{k=1}^l F_{n_k} = F_{n_l} \neq \emptyset$, 矛盾.

□

习题 p66 27

解: 由 $\rho(F_1, F_2) = 0$ 知存在序列 $\{x_n, y_n\}$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0.$$

不妨设 F_1 为闭集, F_2 为紧集, 则 $\{y_n\}$ 中有收敛的子序列, 不妨设收敛的子序列是 $\{y_{k_n}\}$, 收敛到的点设为 y_0 . 由

$$\rho(x_{k_n}, y_0) \leq \rho(x_{k_n}, y_{k_n}) + \rho(y_{k_n}, y_0)$$

可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_{k_n}, y_0) = 0$. 因为 F_1 是闭集, 所以 $y_0 \in F_1$. 综上所述, 我们得到了点 $y_0 \in F_1 \cap F_2$, 即 $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. \square

6 2019-09-19

习题 p66 26

解: 由定义可以知道存在序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(F_1, F_2)$. 因为 F_1 是紧的, 所以 $\{x_n\}$ 中有收敛的子列 $\{x'_n\}$ 收敛到某个点 $x_0 \in F_1$. 因为 F_2 是紧的, 所以 $\{y'_n\}$ 中有收敛的子列 $\{y''_n\}$ 收敛到某个点 $y_0 \in F_2$. 通过上述过程以及 $\rho(x, y)$ 的连续性可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x''_n, y''_n) = \rho(x_0, y_0).$$

\square

习题 p66 32

解: 不妨设 $\{f_n\}$ 为单调增序列, 即 $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$. 对任给的 $\epsilon > 0$, 定义集合

$$\mathcal{O}_{n, \epsilon} = \{x : f(x) - f_n(x) < \epsilon\}.$$

由逐点收敛的条件可知 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_{n, \epsilon}$, 其中 $\mathcal{O}_{1, \epsilon} \subset \mathcal{O}_{2, \epsilon} \subset \cdots \subset \mathcal{O}_{n, \epsilon} \subset \cdots$. 由 X 紧知存在有限个集合族 $\{\mathcal{O}_{n_k, \epsilon}\}_{k=1}^l$ 使得 $X = \bigcup_{k=1}^l \mathcal{O}_{n_k, \epsilon} = \mathcal{O}_{n_l, \epsilon}$. 即任给 $\epsilon > 0$, 存在与 x 无关的正整数 n_l , 当 $n \geq n_l$ 时, 有 $f(x) - f_n(x) < \epsilon$. \square

7 2019-09-24

习题 p66 28

解: 因为 l^p 是完备的度量空间, 所以准紧性与全有界性等价 (本章定理 4.2). 所以下面都是证明全有界性和两个条件的等价关系.

充分性: 设 (a), (b) 成立, 由 (b) 知, 任给 $\epsilon > 0$ 存在 $N > 0$, 当 $m > N$ 时, 对一切 $x \in A$ 都有

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n|^p < \frac{\epsilon}{2}.$$

固定 N , 设集合 B 是 A 中的元素在 N 处截断后的集合, 也就是把 A 中元素 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, \xi_{N+1}, \dots)$ 变为 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, 0, 0, \dots)$. 这样得到的 B 由 (a) 知有界, 但是 R^N 中的有界集一定是准紧集, 所以 B 存在一个 $\frac{\epsilon}{2}$ -网, 设该 $\frac{\epsilon}{2}$ -网为 $C = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(l)}\}$. 则对任给 $\epsilon > 0$, 以及人给的 $x \in A$, 存在 N 以及 $x^{(i)} \in C$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - x_n^{(i)}|^p = \sum_{n=1}^N |\xi_n - x_n^{(i)}|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n - 0|^p < \epsilon.$$

所以 C 是 A 的一个 ϵ -网, 即 A 全有界.

必要性: 由 A 准紧知任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\frac{\epsilon}{2}$ -网 $C = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(l)}\}$. 因为 C 中只有有限个元素, 所以存在正整数 N , 使得对任意 $x^{(i)} \in C$ 都有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n^{(i)}|^p < \epsilon/2.$$

则任给 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in A$, 在 $\frac{\epsilon}{2}$ -网中选取某个 $x^{(i)}$, 对 $m > N$ 有

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\xi_n|^p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n|^p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi - x_n^{(i)}|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n^{(i)}|^p < \epsilon.$$

这样我们就证明了 (b), (a) 对于全有界集是显然的. □

习题 设 $0 < \alpha \leq 1$, 定义集合 A 为

$$A = \left\{ x \in C[a, b] : \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{t' \neq t''} \frac{|x(t') - x(t'')|}{|t' - t''|^\alpha} \leq M \right\}.$$

证明 A 在 $C[a, b]$ 中准紧.

解: 设 $\{x_n\}$ 为 A 中的一个函数序列, 由 A 的定义可知 $\{x_n\}$ 有界. 又由定义可知对任意 A 中的函数都有 $|x(t') - x(t'')| \leq M |t' - t''|^\alpha$, 所以 $\{x_n\}$ 等度连续, 所以由定理 5.1 知 A 准紧. □

8 2019-09-26

习题 p67 33

解: 参见 54 页例 2, 这是例 2 中 $K(t, s) = 1$ 的特殊情形. \square

习题 p67 36

解: 对 $Ax = b$ 变形可得 $b - (A - I)x = x$, 令 $T(x) = b - (A - I)x$, 则问题变为证明 T 有唯一的不动点.

$$\begin{aligned}\|T(x) - T(y)\| &= \|(A - I)(x - y)\| \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \delta_{ij})(x_j - y_j) \right|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - \delta_{ij}|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - \delta_{ij}|^2} \|x - y\|.\end{aligned}$$

其中第三行用到了 Cauchy-Schwartz 不等式. 由条件知系数小于 1, 所以 T 是欧氏空间到自身的压缩变换, 再用不动点定理即可得到结论. \square

9 2019-10-08

习题 p120 2

解: 要证明其为完备的巴拿赫空间, 就是要证明该范数下空间是完备的. 设 $\{x_n\}$ 为该范数下的基本列, 则由该范数的定义易得 $\{x_n(a)\}$ 为 \mathbb{R} 上的基本列, 所以存在极限 x_a . 还可以从该范数定义中得到 $x'_n(t)$ 在 $L^1[a, b]$ 中也是基本列, 所以由 $L^1[a, b]$ 空间的完备性可知存在 $y(t) \in L^1[a, b]$ 使得

$$\int_a^b |x'_n(t) - y(t)| dt \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

令 $x(t) = x_a + \int_a^t y(s) ds$, 则

$$\|x(t) - x_n(t)\|_{L^1} = |x_a - x_n(a)| + \int_a^b |x'_n(t) - y(t)| dt \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

完备性得证.

下证可分性. 设 A_0 为 A 中 $x(a) = 0$ 的所有元素构成的集合, 则

$$A = \mathbb{R} \times A_0.$$

若 A_0 可分, 则 A_0 中存在可数稠密子集 S , 从而 $\mathbb{Q} \times S$ 也可数, 则有 $A = \overline{\mathbb{Q} \times S}$ 是可数稠密集合并. 所以我们仅仅需要证明 A_0 可分即可. 作

映射 $f: x \mapsto x'$, 该映射是 A_0 到 $L^1[a, b]$ 的单射且保范, 所以由 $L^1[a, b]$ 的可分性立即得到 A_0 可分. \square

习题 p121 7

解: 设 $\{x_n\}$ 为 c_0 中的基本列, 则任给 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n, m > N$ 时, 有

$$\|x_n - x_m\| = \sup_{k \geq 1} |\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(n)}| < \epsilon.$$

由此可得对任意的正整数 k 都有 $|\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(n)}| < \epsilon$, 所以对每一个固定的 k , $\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列, 设其收敛到 $\xi_k^{(0)}$. 则对任给的 $\epsilon > 0$, 对上个式子中的 m 取极限可得

$$|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(0)}| \leq \epsilon.$$

接下来我们说明 $x^{(0)} = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots, \xi_k^{(0)}, \dots)$ 是属于 c_0 的. 固定 n , 以及给定的 ϵ , 由 $x^{(n)} \in c_0$ 知存在正整数 $M, k > M$ 时满足 $|\xi_k^{(n)}| < \epsilon$. 则

$$|\xi_k^{(0)}| \leq |\xi_k^{(0)} - \xi_k^{(n)}| + |\xi_k^{(n)}| < 2\epsilon.$$

所以 $x^{(0)} \in c_0$. 即 c_0 为巴拿赫空间.

下证可分性. 令 $\eta^{(n)} = (0, \dots, 1(\text{第 } n \text{ 个分量}), \dots, 0, \dots)$, 则 $\{\eta\}$ 构成一个完备正交基且可列, 所以 c_0 可分. \square

10 2019-10-10

习题 p121 11

解: 由 $\text{dist}(x, K)$ 的定义可以知道存在序列 $\{y_n\} \subset K$ 使得

$$\text{dist}(x, K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\|.$$

因为 K 是紧集, 所以 $\{y_n\}$ 中有收敛到 K 中点的子序列 $\{y_{k_n}\}$, 设收敛点为 y_0 , 则 $\|y_{k_n} - y_0\| \rightarrow 0$. 由此可得

$$\text{dist}(x, K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_{k_n}\| = \|x - y_0\|.$$

\square

习题 p121 13

解: 令 $\alpha_n = \sum_{k=1}^n x_k$, 则

$$\|\alpha_{n+p} - \alpha_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ 收敛, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上式右边趋于 0. 也就是对任给 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N, p$ 为任意正整数时, 有 $\|\alpha_{n+p} - \alpha_n\| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \epsilon$. 所以 $\{\alpha_n\}$ 为基本列, 由空间完备性知存在 $x \in E$ 使得

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

再由范数的连续性和 $\|\alpha_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = M$ 可得

$$\|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n\| \leq M.$$

□

11 2019-10-15

习题 p122 20

解: 容易验证 H 是一个线性空间, 并且 $\|x\|_H$ 是该线性空间的一个范数.

由定理 3.1 知, 要证明给出的范数可以定义内积, 只要验证下述等式成立

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

其中 $x, y \in H$. 可以通过令 $x \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ 和 $y \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$, 代入上面等式验证即可.

本题的关键是要证明 H 在范数 $\|\cdot\|_H$ 下的完备性. 设 $\{x_n\}$ 为 H 中的一个基本列, 设

$$x_n \sim \frac{a_{0,n}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k,n} \cos kt + b_{k,n} \sin kt).$$

我们可以作空间 H 到 $L^2[0, 2\pi]$ 的保范映射 $f: x \mapsto x'$, 其中 $x' \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nt + b'_n \sin nt)$, $a'_n = \sqrt{n}a_n, b'_n = \sqrt{n}b_n$. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) < \infty.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n'^2 + b_n'^2) < \infty.$$

也就是说我们定义的映射确实是落在了 $L^2[0, 2\pi]$ 中, 并且是保范的. 另一方面, 对于 $L^2[a, b]$ 中的每个函数 x' 我们都可以通过上述过程的逆过程找到一个 H 中的函数 x 使得它的像是 x' . 这说明 H 与 $L^2[0, 2\pi]$ 同构, 而 $L^2[0, 2\pi]$ 完备, 所以 H 完备. \square

习题 p122 21

解: 若 (α_{ij}) 是正定矩阵, 则正定二次型 $(x, x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$, 内积的其它性质可由二次型的双线性性得到.

反之, 若 $(x, y) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i y_j$ 是一个内积, 那么可知 $(x, x) \geq 0$ 且 $(x, x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$, 这说明 (α_{ij}) 是一个正定矩阵. \square

12 2019-10-17

习题 p123 23

解: 必要性, $\|x + \alpha y\|^2 = (x + \alpha y, x + \alpha y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2$.

充分性, 若 $y = 0$, 显然. 下设 $y \neq 0$. 平方条件可得

$$\bar{\alpha}(x, y) + \alpha(y, x) + |\alpha|^2 \|y\|^2 \geq 0.$$

令 $\alpha = -\frac{\overline{(y, x)}}{\|y\|^2}$, 代入上式可得

$$-\frac{(x, y)\overline{(x, y)}}{\|y\|^2} \geq 0 \Rightarrow (x, y) = 0.$$

\square

习题 p123 24

解: 必要性显然, 只证充分性. 条件平方展开可得

$$\|x\|^2 + \bar{\alpha}(x, y) + \alpha(y, x) + |\alpha|^2 \|y\|^2 = \|x\|^2 - \bar{\alpha}(x, y) - \alpha(y, x) + |\alpha|^2 \|y\|^2$$

$$\bar{\alpha}(x, y) + \alpha(y, x) = 0.$$

令 $\alpha = (x, y)$ 即可. \square

习题 p123 28

解: 假设存在一个规范正交系不是线性无关的, 那么该规范正交系中存在 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 线性相关. 也就是说, 存在不全为零的系数 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 使得

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0.$$

由规范正交系的定义可知对任意的 $j = 1, 2, \dots, n$, 有 $(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j) = \lambda_j$, 从而结合上式可得 $\lambda_j = 0$, 由 j 的任意性知所有系数等于零, 这与假设矛盾. \square

13 2019-10-22

习题 p218 1

解: 充分性:

$$\|Tx\| = \max_{a \leq t \leq b} |\alpha(t)x(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |\alpha(t)| \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| = \|\alpha\| \|x\|.$$

必要性: 令 $x(t) = 1$, 则 $(Tx)(t) = \alpha(t) \in C[a, b]$. \square

习题 p219 5

解: 因为

$$\|T\| = \sup_{\|\xi\|=1} |\alpha_n \xi_n| \leq \sup_{n \geq 1} |\alpha_n|.$$

所以 T 是有界算子. 令 $x = (1, 1, \dots, 1, \dots)$, 则 $\|x\| = 1$, 从而

$$\|T\| > \|Tx\| = \sup_{n \geq 1} |\alpha_n|.$$

综合两个不等式可得

$$\|T\| = \sup_{n \geq 1} |\alpha_n|.$$

\square

14 2019-10-24

习题 p219 7

解:

$$\begin{aligned} \|S_n T_n - ST\| &\leq \|S_n(T_n - T)\| + \|(S_n - S)T\| \\ &\leq \|S_n\| \|T_n - T\| + \|S_n - S\| \|T\| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

\square

习题 p219 8

解:

$$\begin{aligned}\|T_n x_n - Tx\| &\leq \|T_n(x_n - x)\| + \|(T_n - T)x\| \\ &\leq \|T_n\| \|x_n - x\| + \|T_n - T\| \|x\| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

□

习题 p220 15

解: 任给 $y \in E_1$, 由 T 是满映射可知存在 $x \in E$ 使得 $T(x) = y$, 因为 D 在 E 中稠密, 存在 $\{x_n\} \subset E$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 又由 T 的连续性得 $y = T(x) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n)$, 而 $\{T(x_n)\} \subset T(D)$, 所以由 y 的任意性知 $T(D)$ 在 E_1 中稠密. □

15 2019-10-29

习题 p220 13(a)

解: 一方面,

$$\sup_{t \in [0,1]} |(Tx)(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} x(t) \int_0^1 |\sin \pi(t-s)| ds = \frac{2}{\pi} \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|.$$

另一方面, 令 $x(t) = 1$,

$$\sup_{t \in [0,1]} |(Tx)(t)| \geq |T(x)(0)| = \left| \int_0^1 \sin \pi s ds \right| = \frac{2}{\pi}.$$

综上 $\|T\| = \frac{2}{\pi}$. □

习题 p220 17

解: 由定理 3.2 可知, 存在正实数 M 使得 T_n, S_n, T, S 的范数都不超过 M . 对任意给定的 $x \in E$, 有

$$\begin{aligned}\|S_n T_n x - STx\| &\leq \|S_n T_n x - S_n Tx\| + \|S_n Tx - STx\| \\ &\leq \|S_n\| \|T_n x - Tx\| + \|S_n(Tx) - S(Tx)\| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

□

16 2019-10-31

习题 p220 20

解: 取函数 $g_n = [g]_n$, 这里 $[g]_n$ 表示当 $|x| > n$ 或者 $|g(x)| > n$ 时取函数值为零, 显然 g_n 逐点收敛到 g . 定义 L^p 上的线性泛函

$$T_n f = \int_F g_n f.$$

其中 $f \in L^p$. 由赫尔德不等式

$$|T_n f| \leq \|g_n\|_q \|f\|_p.$$

也就是说 $\|T_n\| \leq \|g_n\|_q$ 另一方面令 $f = \operatorname{sgn}(g_n) \frac{|g_n|^{q-1}}{\|g_n\|_q^{q-1}}$, 容易验证 $f \in L^p$ 并且 $\|f\|_p = 1$, 此时

$$\|T_n\| \geq |T_n f| = \|g_n\|_q.$$

所以 $\|T_n\| = \|g_n\|_q$. 另一方面, 对每个固定的 x 都有

$$|T_n f| \leq \int_F |g f|.$$

(这里用到了可积性在函数与其取绝对值的函数之间是等价的) 从而由共鸣定理可知 $\{\|T_n\|\}$ 一致有界. 再由控制收敛定理得

$$\int |g|^q = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |g_n|^q < \infty.$$

□

习题 p220 23

解: 令 $\eta_j = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_j, 0, \dots)$. 定义算子 $T_j = \sum_{n=1}^j \eta_n \xi_n$. 对任意 $x \in l$, 以及 j , 都有

$$|T_j x| \leq |Tx| < \infty.$$

从而由共鸣定理得 $\{\|T_j\|\}$ 一致有界. 又因为 $\|T_j\| = \sup_{1 \leq i \leq j} |\eta_i|$, 所以 $\{\eta_n\}$ 有界. □

17 2019-11-05

习题 p221 26(b)

解:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_0^1 x(t) \operatorname{sgn}(t - \frac{1}{2}) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |x(t)| dt \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|. \end{aligned}$$

所以 $\|f\| \leq 1$.

另一方面, 令函数

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n(x - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

则 $\|x_n\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t)| = 1$. 那么我们就有

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq |f(x_n)| \\ &= \left| \left(\int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}^1 \right) x(t) \operatorname{sgn}(t - \frac{1}{2}) dt \right| \\ &\geq \left| \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} x(t) \operatorname{sgn}(t - \frac{1}{2}) dt + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}^1 x(t) \operatorname{sgn}(t - \frac{1}{2}) dt \right| \\ &\quad - \left| \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} x(t) \operatorname{sgn}(t - \frac{1}{2}) dt \right| \\ &\geq 1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

所以 $\|f\| = 1$. □

习题 p223 37

解:

$$|f(x)| = |x'(t_0)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = \|x\|.$$

□

18 2019-11-07

习题 p224 54(a)(d)

解:

- a. 由条件知 $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$, T 的伴随算子则是 $T^* : (L^2[0, 1])^* \rightarrow (L^2[0, 1])^*$. 设 $f \in (L^2[0, 1])^*$. 对任意的 $x(t) \in L^2[0, 1]$, 我们可以将 f 的具体表示形式写为

$$f(x) = \int_0^1 y(t)x(t)dt.$$

根据伴随算子的定义, $(T^*f)(x) = f(Tx)$, 所以

$$\begin{aligned}(T^*f)(x) &= f(Tx) = f\left(\int_0^t x(s)ds\right) \\ &= \int_0^1 y(t)\left(\int_0^t x(s)ds\right)dt \\ &= \int_0^1 x(s)\left(\int_s^1 y(t)dt\right)ds \quad (\text{互换积分顺序}) \\ &= \int_0^1 x(t)\left(\int_t^1 y(s)ds\right)dt \quad (\text{对调积分变量}).\end{aligned}$$

因为 f 可以和 y 视为同一 (他们是一一对应的), 所以也可以写成 $(T^*y)(t) = \int_t^1 y(s)ds$.

- d. 同样地, 设 $f(x) = \int_0^1 y(t)x(t)dt \in (L^2[0, 1])^*$. 则

$$\begin{aligned}(T^*f)(x) &= f(Tx) = f(\alpha(t)x(t)) \\ &= \int_0^1 y(t)\alpha(t)x(t)dt \\ &= \int_0^1 x(t)(\alpha(t)y(t))dt.\end{aligned}$$

这也就是说 $(T^*y)(t) = \alpha(t)y(t)$.

□