读 Terence Tao 的调和分析 Notes(MATH 247A) 所作笔记

Notes taken by 89hao

2020 年 4 月 11 日

目录

1 Lecture Notes 1 for 247A

1.1 什么是调和分析

第一份讲义介绍了这份讲义 (总共 6 个 note) 讲述的内容:

实变量调和分析理论 *(theory of real-variable harmonic analysis)* 以及研究该理论的基本工具

a. 什么是调和分析?

   关于某个定义域或者类似对象 (测度, 分布, 定义域的子集, 或者从一个定义域到另一个定义域的映射) 上的函数的定量 (quantitative) 研究.

b. 典型的例子?

   例如一个从某个 Banach 函数空间 V 到另一个空间 W 的算子 T, 这个算子并非定义在全空间 V 上而是定义在它的一个稠密子集上. 考虑这样一个定性 (qualitative) 问题: 能否将 T 连续拓展到整个空间 V 上? 实际上若 T 是线性的, 如果我们能够建立

$$\|Tf\|_W \leq C\|f\|_V$$

   这样一种定量关系, 那么就可以作一个唯一连续延拓. 这里就是把一个定性问题转化成了一个定量问题来研究, 这个定量问题就是调和分析中的一个典型问题.

从这个典型的例子可以知道: 不等式在调和分析中有着非常重要的地位, 甚至是核心的地位 (就我目前读这个讲义的感觉). 在介绍一些不等式的建立时,Tao 在脚注中说了一句非常经典的话, 来自于他自身的经验:

Algebra draws its power from modularity, abstraction and identities; analysis draws its power from robustness, physical intuition and estimates.

1.2 建立不等式的方法

对于 $1 \leq p \leq \infty$, 有下述三角不等式成立

Triangle inequality

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1}$$

证明这个不等式的时候, 我们会用到一些处理不等式的一般技巧.

a. 根据 f 和 g 在不等式两边的齐次性 (对称性的一种), 可以设 $\|f\|_p = 1-\theta$,$\|g\|_p = \theta$, $0 < \theta < 1$(θ =0 和 1 的情形是平凡的).

b. 再将 f 和 g 的范数归一化, 设 $F = \frac{f}{1-\theta}$,$G = \frac{g}{\theta}$. 则不等式转化为

$$\|(1-\theta)F + \theta G\|_p \leq 1,$$

其中 $\|F\|_p = 1, \|G\|_p = 1$.

c. 根据 $z \mapsto |z|^p$ 在 $p \geq 1$ 时的凸性可知

$$|(1-\theta)F(x) + \theta G(x)|^p \leq (1-\theta)|F(x)|^p + \theta|G(x)|^p.$$

对上式积分即可.

概括起来就是, 根据不等式的对称性, 把不等式的选取范围缩小, 限定在尽可能小的子集内, 实际就是空间中的商作用. 如有必要, 对函数进行归一化. 简化后的不等式往往更容易处理, 在几何上有一些直观的特性 (在这里就是凸性).

Hölder's inequality

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q, \tag{2}$$

其中 $0 < p, q, r \leq \infty, \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

这里除了总的齐次性之外, 每个函数各自单独也有齐次性 (separate homogeneity symmetry), 所以可以直接设 $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. 令 $F := |f|^p, G := |g|^q, \theta = \frac{r}{q}$, 则原不等式化为

$$\int_X F^{1-\theta} G^{\theta} \le 1, \text{ 其中} \int_X F = \int_X G = 1.$$

这里再次利用 $\ln x$ 的凸性可得逐点估计:

$$F^{1-\theta} G^{\theta} \le (1-\theta)F(x) + \theta G(x).$$

对上式进行积分即可.

Log-convexity of L^p norms

$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta}, \tag{3}$$

其中 $0 < p < q < \infty, 0 < \theta < 1, \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$.

用类似的方法证明这个不等式的时候, 需要注意到该不等式有关于 f 和 μ 的齐次对称性, 从而可以设 $\|f\|_p = \|f\|_q = 1$. 当然这个不等式可以由 Hölder 不等式简单推导得到 (实际上这两个不等式是等价的).

讲义还给出了 log-convexity 的一个不常见的证明, 这个证明没有用到任何的逐点凸性估计 (pointwise convexity estimate), 而是用到了 “分治-合并” 策略 (“divide and conquer” strategy) 以及非常优雅 (并且相当无赖) 的 “张量幂技巧”(“tensor power trick”). 仍然假设 $\|f\|_p = \|f\|_q = 1$, 我们将函数 f 分成宽广平坦函数和窄高函数

$$f = f1_{|f|\le 1} + f1_{|f|>1}.$$

进而

$$\|f\|_r^r = \int_{|f|\le 1} |f|^r + \int_{|f|>1} |f|^r.$$

当 $|f| \le 1$ 的时候, 由 $r > p$ 可得 $|f|^r \le |f|^p$; 当 $|f| > 1$ 的时候, 由 $r < q$ 可得 $|f|^r \le |f|^q$. 从而

$$\|f\|_r^r \le \int_X |f|^p + \int_X |f|^q = 2.$$

下面就是张量幂技巧的使用: 设 M 为一个正整数, 用测度空间 $(X^M, \mathcal{B}^{\oplus M}, \mu^{\oplus M})$ 代替 $(X, \mathcal{B}, \mu)$, 用函数 $f^{\oplus M}: X^M \to \mathbb{C}$ 代替函数 f, 其中

$$f^{\oplus M}(x_1, x_2, \cdots, x_M) := f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_M).$$

易知

$$\begin{aligned}\|f^{\oplus M}\|_{L^p(X^M)} = \|f\|_{L^p(X)}^M = 1;\\ \|f^{\oplus M}\|_{L^q(X^M)} = \|f\|_{L^q(X)}^M = 1;\\ \|f^{\oplus M}\|_{L^r(X^M)} = \|f\|_{L^r(X)}^M.\end{aligned}$$

再次利用前面的论证, 这次是应用到函数 $f^{\oplus M}$ 上, 得到

$$\|f^{\oplus M}\|_{L^r(X^M}^r \leq 2.$$

进而

$$\|f\|_{L^r(X)}^r \leq 2^{1/M}.$$

令 $M \to \infty$, 我们就得到了 $\|f\|_r \leq 1$.

1.3 一些简单但是重要的结论

1. 设 $\mu(X) < \infty$,f 是 X 上的函数, 则更高的 L^p 范数控制更低的范数:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, \tag{4}$$

其中 $0 < p \leq q \leq \infty$.

2. l^p 和与 L^p 和的可交换性:

$$\|\left(\sum_n |f_n|^p\right)^{1/p}\| = \left(\sum_n \|f\|_{L^p}^p\right)^{1/p}. \tag{5}$$

3. 对任意 $0 < p, q < \infty$:

$$\||f|^p\|_{L^q} = \|f\|_{L^{pq}}^p. \tag{6}$$

1.4 Lorentz Spaces

考虑 weak L^p 和 $\|\cdot\|_{L^p}$：

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \|\lambda\mu\left(\{|f| \geq \lambda\}\right)^{1/p}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})}$$
$$\|f\|_{L^p} = p^{1/p}\|\lambda\mu\left(\{|f| \geq \lambda\}\right)^{1/p}\|_{L^p(\mathbb{R}^+, \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})}.$$

由这两个式子可以让我们推广出一个新的拟范数 Lorentz norm $L^{p,q}(X,\mu)$,$0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$:

$$\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} := p^{1/q}\|\lambda\mu\left(\{|f| \geq \lambda\}\right)^{1/p}\|_{L^q(\mathbb{R}^+, \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})}.$$

除了 $L^{\infty,\infty} = L^\infty$ 这一特殊情况, Lorentz norms 中 p 都不会取 ∞. 对于 q 来说, 按照重要程度依次递减, 只会用到 $q = p, q = \infty, q = 1, q = 2$. 可以通过简单的计算知对于一个高 H 宽 W 的函数, 它的 $L^{p,q}$ norm 是 $(p/q)^{\frac{1}{q}} H W^{\frac{1}{p}}$, 其中 $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$.

定义 1.1.

a. 如果一个支撑为 E 的函数 f, 几乎处处满足 $|f(x)| \leq H$ 并且 $\mu(E) \leq W$, 则称 f 是一个高 H 宽 W 的 *sub-step function*.(因此 $|f| \leq H 1_E$.)

b. 如果函数 f 满足几乎处处 $|f(x)| \sim H$, 以及 $\mu(E) \sim W$, 则称 f 是一个高 H 宽 W 的 *quasi-step function* .(因此 $|f| \sim H 1_E$.)

注 1.1. 一个高 1 宽 W 的 sub-step function 按照二进制展开, 总能分解成真正的 step functions 的和:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f_k,$$

其中 f_k 是高 1 宽 H 的 step functions. 因此, 上述定义的两个函数类型都可以由 step function 逼近.

定理 1.2 (Characterisation of $L^{p,q}$). *设 f 为一个函数,$0 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty$, 设 $0 < A < \infty$. 那么下述 5 个在相差一个常数的情况下是等价的:*

a. $\|f\|_{L^{p,q}} \lesssim_{p,q} A$.

b. 存在一个分解 $f=\sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m$, 其中 f_m 是支撑互不相交, 高 2^m 宽 $0<W_m<\infty$ 的 *quasi-step function*, 并且

$$\|2^m W_m^{1/p}\|_{l^q_m(\mathbb{Z})} \lesssim_{p,q} A. \tag{7}$$

这里 l^q_m 中的下标 m 是表示 l^q *norm* 针对的变量.

c. 存在一个逐点界 $|f|\le\sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^m 1_{E_m}$, E_m 满足

$$\|2^m\mu(E_m)^{1/p}\|_{l^q_m(\mathbb{Z})} \lesssim_{p,q} A. \tag{8}$$

d. 存在一个分解 $f=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$, 其中 f_n 是支撑互不相交, 高 $0<H_n<\infty$ 宽 2^n 的 *quasi-step function*,H_n 关于 n 单调不增, 在 f_n 的支撑上有 $H_{n+1}\le|f_n|\le H_n$, 以及

$$\|H_n 2^{n/p}\|_{l^q_n(\mathbb{Z})} \lesssim_{p,q} A. \tag{9}$$

e. 一个逐点界 $|f|\le\sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n 1_{E_n}$, E_n 满足 $\mu(E_n)\lesssim_{p,q} 2^n$ 并且 (9) 式成立.

证明: 由齐次对称性可设 $A=1$.$(b)\Rightarrow(c)$ 和 $(d)\Rightarrow(e)$ 式显然的. 下面说明 $(a)\Rightarrow(b)$.

设

$$f_m := f 1_{2^{m-1}<|f|\le 2^m},$$

$$W_m := \mu\left(\left\{2^{m-1}<|f|\le 2^m\right\}\right).$$

这种分解方式被称为 “vertically dyadic layer cake decomposition”. 可以验证

$$2^m W_m^{1/p} \lesssim_{p,q} \|\lambda\mu\left(\{|f|>\lambda\}\right)^{1/p}\|_{L^q\left([2^{m-2},2^{m-1}],\frac{d\lambda}{\lambda}\right)}$$

然后再对上式进行 l^q 求和即可.

类似地, 为了得到 $(a)\Rightarrow(d)$, 定义

$$H_n := \inf\left\{\lambda : \mu\left(\{|f|>\lambda\}\right)\le 2^{n-1}\right\},$$

注意到这是一个关于 n 的单调不增序列, 当 $n\to\infty$ 时会趋于 0. 再定义

$$f_n := f 1_{H_n\ge|f|>H_{n+1}}.$$

该分解被称为 “horizontally dyadic layer cake decomposition”. 唯一需要验证的就是 (9) 式. 下述的估计方式被称为 “telescoping estimate”:

$$
\begin{aligned}
H_n 2^{n/p} =& (H_n^q 2^{nq/p})^{1/q} \\
=& \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(H_{n+k}^q - H_{n+k+1}^q\right) 2^{nq/p}\right)^{1/q} \\
\lesssim_{p,q}& \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kq/p} \|\lambda 2^{(n+k)/p}\|_{L^q([H_{n+k+1},H_{n+k}],\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})}^q\right)^{1/q} \\
\lesssim_{p,q}& \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kq/p} \|\lambda\mu\left(\{|f|\geq\lambda\}\right)^{1/p}\|_{L^q([H_{n+k+1},H_{n+k}])}^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

同样对上式进行 l^q 求和即可 (这里处理的是 $q<\infty$ 的情形, 对于 $q=\infty$ 的情形可以用类似的处理方法).

为了完成等价性的证明, 还要验证 $(c)\Rightarrow(a)$ 和 $(d)\Rightarrow(a)$. 首先假设 (c) 成立, 易知

$$
\mu\left(\{|f|>2^m\}\right)\leq\sum_{k=0}^{\infty}\mu\left(E_{m+k}\right)
$$

从而有

$$
\|\lambda\mu\left(\{|f|\geq\lambda\}\right)^{1/p}\|_{L^q((2^m,2^{m+1}],\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})}\lesssim_{p,q} 2^m\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu\left(E_{m+k}\right)\right)^{1/p}.
$$

对上式进行 l^q 求和之后, 我们只需要证明

$$
\|2^m\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu\left(E_{m+k}\right)\right)^{1/p}\|_{l_m^{q/p}}\lesssim_{p,q} 1.
$$

上式可改写为

$$
\|\sum_{k=0}^{\infty}2^{pm}\mu\left(E_{m+k}\right)\|_{l_m^{q/p}}\lesssim_{p,q} 1.
$$

但是依据假设我们有

$$
\|2^{pm}\mu\left(E_m\right)\|_{l_m^{q/p}}\lesssim_{p,q} 1
$$

所以通过对 m 平移 k 可得

$$
\|2^{pm}\mu\left(E_{m+k}\right)\|_{l_m^{q/p}}\lesssim_{p,q} 2^{-kp}.
$$

再进行求和以及三角不等式即可.

现在假设 (d) 成立. 对于任意的 $\lambda > 0$ 我们有

$$\mu(\{|f| > \lambda\}) \lesssim_{p,q} \sup\{2^n : H_n' \geq \lambda\}$$

其中 H_n' 是

$$H_n' := \sum_{k=0}^{\infty} H_{n+k}.$$

实际上, 如果对某个 n 有 $\mu(\{|f| > \lambda\}) > 2^{n-1}$, 那么易知 $H_n \geq \lambda$ 从而 $H_n' \geq \lambda$. 通过对下标 n 的平移和三角不等式可得 H_n' 有着和 (??) 式中 H_n 一样的限制, 因此

$$\|H_n' 2^{n/p}\|_{l_n^q(\mathbb{Z})} \lesssim_{p,q} 1.$$

这里以 $q < \infty$ 的情形为例:

$$\begin{aligned}
\|\lambda\mu(\{|f| \geq \lambda\})^{1/p}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^+, \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})} &\lesssim_{p,q} \int_0^\infty \lambda^{q-1} \sup\left\{2^{nq/p} : H_n' \geq \lambda\right\} \mathrm{d}\lambda \\
&\lesssim_{p,q} \sum_n \int_0^\infty \lambda^{q-1} 2^{nq/p} 1_{H_n' \geq \lambda} \mathrm{d}\lambda \\
&\sim_{p,q} \sum_n 2^{nq/p} (H_n')^q \\
&\lesssim 1.
\end{aligned}$$

□

这个定理说明, 如果一个函数 f 可以写成 $\sum_n f_n$, 其中 f_n 为高 H_n 宽 W_n 的 quasi-step function, 并且只要其中一个变化得足够块, 那么就有

$$\|\sum_n f_n\|_{L^{p,q}} \sim_{p,q} \|H_n W_n^{1/p}\|_{l_n^q}.$$

该定理的一个简单推论就是 Lorentz spaces 上的 Hölder 不等式.

定理 1.3 (Hölder inequality in Lorentz spaces). *设 $0 < p_1, p_2, p < \infty$, $0 < q_1, q_2, q \leq \infty$, 并且满足 $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ 和 $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, 则有*

$$\|fg\|_{L^{p,q}} \lesssim_{p_1,p_2,q_1,q_2} \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}},$$

前提是不等式右边有意义.

还有两个类似于 Riesz 表示定理的结论如下, 在证明 Marcinkiewicz 插值定理的时候会被用到.

定理 1.4 (Dual formulation of weak L^p). 设 $1 < p \leq \infty$, 对任意 $L^{p,\infty}(X, \mathrm{d}\mu)$ 中的函数 f 都有

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\mathrm{d}\mu)} \sim_p \sup\left\{\mu(E)^{-1/p'}\left|\int_X f1_E \mathrm{d}\mu\right| : 0 < \mu(E) < \infty\right\}. \tag{10}$$

定理 1.5 (Dual characterisation of $L^{p,q}$). 设 $1 < p < \infty$,$1 \leq q \leq \infty$, 对任意 $f \in L^{p,q}$ 都有

$$\|f\|_{L^{p,q}} \sim_{p,q} \sup\left\{\left|\int_X f\overline{g}\mathrm{d}\mu\right| : \|g\|_{L^{p',q'}} \leq 1\right\}. \tag{11}$$

1.5 Real Interpolation

这里开始讨论线性算子. 首先我们需要定义一些概念.

定义 1.6. 设 $0 < p, q \leq \infty$, T 是 sublinear operator, 则有如下定义

a. T 是 *strong-type* (p, q) (或者就简单地称为 *type* (p, q)), 如果其满足

$$\|Tf\|_{L^q(Y)} \lesssim_{T,p,q} \|f\|_{L^p(X)},$$

其中 f 是 L^p 中的任意函数, 或者是 L^p 的一个稠密子集中的任意函数.

b. 若 $q < \infty$, 称 T 是 *weak-type* (p, q), 如果其满足

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}(Y)} \lesssim_{T,p,q} \|f\|_{L^p(X)}. \tag{12}$$

c. 设 f 是任意的高 H 宽 W 的 sub-step function, 则称 T 是 *restricted strong-type* (p, q), 如果其满足

$$\|Tf\|_{L^q(Y)} \lesssim_{T,p,q} HW^{1/p}. \tag{13}$$

特别地, 我们有

$$\|T1_E\|_{L^q(Y)} \lesssim_{T,p,q} \mu(E)^{1/p}. \tag{14}$$

d. 若 $q<\infty$,f 是任意的高 H 宽 W 的 sub-step function, 则称 T 是 *restricted weak-type* (p,q), 如果其满足

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}(Y)} \lesssim_{T,p,q} HW^{1/p}. \tag{15}$$

特别地, 我们有

$$\|T1_E\|_{L^{q,\infty}(Y)} \lesssim_{T,p,q} \mu(E)^{1/p}. \tag{16}$$

在许多应用中, 我们需要的往往是 strong-type bounds. 在这里我们会用 *real interpolation method* 来从 weak-type 甚至是 restricted weak-type 得到 strong-type bounds.

首先我们假设

$$\langle |Tf|,|g|\rangle := \int_Y |Tf||g|\mathrm{d}\nu \tag{17}$$

是 well-defined 的, 其中 f,g 是拥有有限测度支撑的简单函数 (simple functions). 现在我们来看一个 indicator function 的例子 $\langle |T1_E|,1_F\rangle$, 其中 $E\subset X, F\subset Y$ 都具有有限测度. 假设 T 有 strong-type (p,q) bound,$0<p<\infty$,$1\leq q\leq\infty$, 也就是

$$\|Tf\|_{L^q(Y)} \lesssim_{p,q} A\|f\|_{L^p(X)}.$$

那么就有

$$\|T1_E\|_{L^q(Y)} \lesssim_{p,q} A\mu(E)^{1/p},$$

从而由 Hölder 不等式可得

$$\langle |T1_E|,1_F\rangle \lesssim_{p,q} \mu(E)^{1/p}\nu(F)^{1/q'}. \tag{18}$$

实际上, strong-type 这个限制过于强了, 只要是 restricted strong-type 就能得出上面的结论.

如果 $q>1$, 我们还可以把条件放宽到 restricted weak-type:

性质 1.7. *设 $0<p\leq\infty$,$1<q\leq\infty$,$A>0$. 设 T 是使得 (17) 式良定义的 sublinear operator. 则下面两个在相差一个隐含常数的情况下是等价的:*

- *T 是 restricted weak-type (p,q),$A>0$, 并满足*

$$\|Tf\|_{L^{q,\infty}} \lesssim_{p,q} AHW^{1/p}, \tag{19}$$

其中 f 是任意高 H 宽 W 的 sub-step function.

- 对于任意的 $E \subset X, F \subset Y$ 且测度有限的可测集，我们有限制

$$\langle |T1_E|, 1_F\rangle \lesssim_{p,q} A\mu(E)^{1/p}\nu(F)^{1/q'}.$$

这个性质的证明需要用到 (10) 式，以及注 1.1.

推论 1.8 (Baby real interpolation). 设 T 是使得 *(17)* 式有意义的 *sublinear operator*,$0 < p_0, p_1 \leq \infty$,$1 < q_0, q_1 \leq \infty$,$A_0, A_1 > 0$. T 是具有常数 A_i 的 *restricted weak-type* (p_i, q_i),$i = 0, 1$. 则 T 也是具有常数 A_θ 的 *restricted weak-type* $(p_\theta, q_\theta$, 其中 $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}; \quad \frac{1}{q_\theta} := \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}; \quad A_\theta := A_0^{1-\theta}A_1^\theta.$$

上面推论的证明实际上就是由 $X \lesssim Y_0$ 和 $X \lesssim Y_1$ 可以推出 $X \lesssim Y_\theta = Y_0^{1-\theta}Y_1^\theta$,$0 \leq \theta \leq 1$.

定理 1.9 (Marcinkiewicz interpolation theorem). 设 T 是一个 *sublinear operator* 而且 *(17)* 式是 *well-defined* 的. 设 $0 < p_0, p_1 \leq \infty$,$0 < q_0, q_1 \leq \infty$ 以及 $A_0, A_1 > 0$. 定义

$$\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}; \quad \frac{1}{q_\theta} := \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}; \quad A_\theta := A_0^{1-\theta}A_1^\theta.$$

设 T 是一个 *bound* 为 A_i 的 *restricted weak-type* (p_i, q_i),$i = 0, 1$. 假设 $p_0 \neq p_1, q_0 \neq p_1$. 那么对于 $0 < \theta < 1$ 以及 $1 \leq r \leq \infty$, 我们有

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta,r}(Y)} \lesssim_{p_0,p_1,q_0,q_1,r} A_\theta \|f\|_{L^{p_\theta,r}(X)},$$

其中 f 是任意拥有有限支撑的简单函数. 特别地，如果 $q_\theta \geq p_\theta$, 那么 T 是一个具有常数 *bound* $O_{p_0,p_1,q_1,\theta}(A_\theta)$ 的 *strong-type* (p_θ, q_θ).

Marcinkiewicz Interpolation Theorem 的证明所用的方法就叫作 real interpolation method. 这个方法的本质就是利用 dual characterisation, 用定理1.5分解函数, 对每一部分尽可能最优估计, 然后求和. 有时间我会另外写一个笔记专门写详细证明.

2 Lecture Notes 2 for 247A

这一个讲义主要讲解了 conplex interpolation method 以及如何利用该方法证明 Riesz-Thorin Interpolation Theorem.

2.1 Complex Interpolation

引理 2.1. 设 $1 \le p, q \le \infty$ 是一对共轭指数 *(即* $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$*)*. 如果 f 在所有有限测度集合 *(如果* $q = \infty$ 则需要要求 μ 是 *semifinite)* 上都可积并且

$$\sup_{\|g\|_p \le 1, g \text{ simple}} \left| \int fg \right| = M < \infty$$

则有 $f \in L^q$ 并且 $\|f\|_q = M$.

这个引理的证明需要用 Hölder 不等式以及选取一个特殊的函数来证明 $\|f\|_q \le M$.

证明: 首先我们考虑 $p > 1$ 以及 $q < \infty$ 的情形. 利用 Hölder 不等式可得

$$M \le \|f\|_q \|g\|_p \le \|f\|_q.$$

剩下需要证明不等式的 $\|f\|_q \le M$. 我们可以找到 L^q 中的一列简单函数 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 它们从下方逐点收敛到 f. 我们定义

$$g_n(x) = \frac{|f_n(x)|^{q-1} \cdot \operatorname{sgn} f}{\|f_n\|_q^{q-1}}.$$

计算可得

$$\|g_n\|_p^p = \frac{1}{\|f_n\|_q^{p(q-1)}} \int |f_n(x)|^{p(q-1)} = \frac{\|f\|_q^q}{\|f\|_q^q} = 1.$$

另一方面,

$$\int f_n g_n = \frac{\int |f_n|^q}{\|f_n\|_q^{q-1}} = \|f_n\|_q.$$

所以

$$\|f_n\|_q = \int f_n g_n \le M.$$

利用 Fatu 引理可得

$$\int |f|^q \le \liminf \int |f|^q \le M^q,$$

即 $\|f\|_q \leq M$.

接下来我们考虑 $p=1, q=\infty$ 的情况. 固定 $\epsilon > 0$ 设 $E = \{x | |f(x)| \geq M+\epsilon\}$. 因为 μ 是 semifinite, 如果 $\mu(E)$ 是正的, 那么就存在 $F \subset E$ 使得 $0 < \mu(F) < \infty$. 设 $g = \mu(F)^{-1} 1_F \operatorname{sgn} f$. 则 $\|g\|_1 = 1$ 并且

$$M \geq \int fg = \frac{1}{\mu(F)} \int_F |f| \geq M + \epsilon.$$

这显然是不可能的, 所以 $\mu(E) = 0$, 则 $f \in L^\infty$ 并且 $M \geq \|f\|_\infty$. 反向不等式仍然是由 Hölder 不等式得到. □

上一节中的 dual 性质证明方法和上述这个几乎一样.

引理 2.2 (Three Lines Lemma). *设 f 是一个在带状区域 $\{0 \leq \Re(z) \leq 1\}$ 上的复解析函数, 并且是至多 double-exponential 增长的, 即对于某个 $\delta > 0$, 有 $|f(z)| \lesssim_f e^{O_f\left(e^{(\pi-\delta)|z|}\right)}$. 若在 $\Re(z) = 0$ 处有 $|f(z)| \leq A$, 以及在 $\Re(z) = 1$ 处有 $|f(z)| \leq B$, 则对于带状区域中的任意的 z 有*

$$|f(z)| \leq A^{1-\Re(z)} B^{\Re(z)}.$$

有了这两个引理就可以得到 Riesz-Thorin Interpolation Theorem:

定理 2.3 (Riesz-Thorin Interpolation Theorem). *设 T 是一个线性算子, 并且*

$$\int_X Tfg \mathrm{d}\mu$$

对所有具有有限测度支撑的简单函数都是良定义的. 设 $0 < p_0, p_1 \leq \infty$,$1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$.$A_0, A_1 > 0$, 我们有

$$\|Tf\|_{L^{q_i}}(Y) \leq A_i \|f\|_{L^{p_i}}(X),$$

其中 f 是任意的具有有限测度支撑的简单函数,$i = 0, 1$. 则

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}(Y)} \leq A_\theta \|f\|_{L^{p_\theta}(X)},$$

其中 f 同上,$0 \leq \theta \leq 1$,$p_\theta, q_\theta, A_\theta$ 同第一节的定义一样.

适当定义

$$\Phi(z) = \int Tf_z g_z \mathrm{d}\nu$$

再用 Three Lines Lemma 即可得到.

2.2 Schur's Test

这里我们考虑积分算子 (integral operator) $T = T_K$, 其定义为

$$Tf(y) = T_k f(y) = \int_X K(x,y) f(x) \mathrm{d}\mu_X(x) \tag{20}$$

其中 $K : X \times Y \to \mathbb{C}$ 是某个可测函数, 被称为算子 T 的积分核 (integral kernel) 或者核 (kernel).

调和分析中一个基本的问题就是找到使得 T 是 strong-type (p,q) (或者 weak-type 或者 restricted-type) 的 K 需要满足的条件, 以及估计相应的常数. 一般来说, 这个问题是很困难的. 但是如果是从 L^1 映射到 Banach 空间, 或者从 Banach 空间映射到 L^∞, 问题会变得简单得多. 我们用 $L^p\,(1 \le p \le \infty)$ 空间来阐述这个事实:

性质 2.4. *(Mapping from L^1). 设 $1 \le q \le \infty$, $K : X \times Y \to \mathbb{C}$. 假设 $\|K(x,\cdot)\|_{L^q(Y)}$ 一致有界, 那么算子 (20) 是 strong-type $(1,q)$(并且对于所有的 $L^1(X)$ 绝对收敛), 并且*

$$\|T_K\|_{L^1(X)\to L^q(Y)} = \sup_{x\in X} \|K(x,\cdot)\|_{L^q(Y)}. \tag{21}$$

证明: 对任意的 $f \in L^1(X)$, 利用 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}
\| \int_X |K(x,y)||f(x)| \mathrm{d}\mu_X(x) \|_{L^q_y(Y)} \le & \int_X \| |K(x,\cdot)||f(x)| \|_{L^q_y(Y)} \mathrm{d}\mu_X(x) \\
\le & \int_X |f(x)| \mathrm{d}\mu_X(x) \sup_{x\in X} \| |K(x,\cdot)| \|_{L^q_y(Y)} \\
\le & \infty.
\end{aligned}$$

所以 $Tf(y)$ 对几乎所有的 y 都是绝对收敛的, 从三角不等式可得

$$\|T_K\|_{L^1(X)\to L^q(Y)} \le \sup_{x\in X} \|K(x,\cdot)\|_{L^q(Y)}.$$

为了得到反向不等式, 我们可以取 K 为一个 simple function; 事实上, 我们可以取 K 为一个 product simple function, 也就是说一个关于分别在 X 和 Y 上的 indicator functions 的张量积的线性组合. 在这种情况下我们可以将 X 分成有限多个正测度集, 对其中的每一个 K 都与 x 无关 (这里已经排除了测度为零的集).

对其中的一个集合, 记作 A, $\|K(x,\cdot)\|_{L^q(Y)}$ 可以达到. 如果我们用 $1_{A'}, A'\subset A$ 来测试 T_K, 我们就完成了证明. $\square$

还有一个对偶性质:

性质 2.5. *(Mapping into L^∞). 设 $1\le p\le\infty$,$K: X\times Y\to\mathbb{C}$. 假设 $\|K(\cdot,y)\|_{L^{p'}(X)}$ 一致有界, 那么算子 (20) 是 strong-type (p,∞) (并且对所有的 $L^p(X)$ 绝对收敛), 并且*

$$\|T_K\|_{L^p(X)\to L^\infty(Y)} = \sup_{y\in Y}\|K(\cdot,y)\|_{L^{p'}(X)}. \tag{22}$$

证明: 对任意 $f\in L^p(X)$,

$$\begin{aligned}\sup_{y\in Y}\left|\int_X |K(x,y)||f(x)|\mathrm{d}\mu_X(x)\right| &\le \sup_{y\in Y}\left|\|K(\cdot,y)\|_{L^{p'}(X)}\|f\|_{L^p(X)}\right| \\ &\le \sup_{y\in Y}\left|\|K(\cdot,y)\|_{L^{p'}(X)}\right|\|f\|_{L^p(X)}.\end{aligned}$$

反向不等式的证明也与性质2.4类似. $\square$

利用上面两个性质以及 Riesz-Thorin Theorem 我们可以得到:

定理 2.6 (Schur's Test). *设 $K: X\times Y\to\mathbb{C}$ 满足*

$$\int_X |K(x,y)|\mathrm{d}\mu_X(x)\le A \qquad a.e.\ y\in Y$$

以及

$$\int_Y |K(x,y)|\mathrm{d}\mu_Y(y)\le B \qquad a.e.\ x\in X.$$

那么对任意 $1\le p\le\infty$,(20) 中的算子 T_K 对所有的 $f\in L^p(X)$ 都是良定义的 (积分对几乎所有的 y 都是绝对可积的) 并且

$$\|T_K f\|_{L^p}(Y)\le A^{1/p'}B^{1/p}\|f\|_{L^p(X)}.$$

该定理也可以由不等式

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'}$$

来证明 (i.e., 利用 real convexity).

2.3 Young's Inequality