

习题解答

89hao

2019 年 12 月 23 日

习题 证明定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = x & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

的解存在唯一, 并说明解对初值的稳定性.

证明: 先对 (1) 中的方程进行因式分解

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial x}\right)u = u_{tt} - 4u_{xx} = 0. \quad (2)$$

令

$$v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial x}\right)u. \quad (3)$$

由 (2) 得

$$v_t(x, t) + 2v_x(x, t) = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

这是一维传输方程, 由 (1) 中的初始条件和 (3) 知 v 满足初始条件

$$v(x, 0) = x.$$

于是, 由传输方程的解可知

$$v(x, t) = x - 2t.$$

把 v 代入 (3) 得

$$u_t(x, t) - 2u_x(x, t) = x - 2t,$$

其中 $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

这是一个非齐次传输方程, 已知 $u(x, 0) = 0$, 用非齐次传输方程的解公式可得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t [x - 2(s - t) - 2s] \, ds \\ &= \int_0^t (x - 4s + 2t) \, ds \\ &= xt. \end{aligned} \quad (4)$$

代入原方程验证可知这是它的一个解, 另一方面由求解过程的每一步的唯一性知解一定唯一.

实际上如果把 (1) 换成更加一般的

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5)$$

那么同样按照前面的求解方法可得到一般情况的解

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(y) dy \quad (6)$$

该式子称为 d'Alembert(达朗贝尔) 公式. 下面考虑解对初值的稳定性问题, 设有下面两个初值问题

$$\begin{cases} u_{1,tt} - a^2 u_{1,xx} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u_1(x, 0) = \varphi_1(x), u_{1,t}(x, 0) = \psi_1(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2,tt} - a^2 u_{2,xx} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u_2(x, 0) = \varphi_2(x), u_{2,t}(x, 0) = \psi_2(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

令 $w = u_1 - u_2$, 则 $w(x, t)$ 满足问题

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ w(x, 0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), w_t(x, 0) = \psi_1(x) - \psi_2(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (7)$$

那么由达朗贝尔公式可以得到 $w(x, t)$ 的解, 进而得到解在 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t \in [0, T]$ 估计式

$$\sup_{x,t} |w(x, t)| \leq \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| + T \sup_x |\psi_1(x) - \psi_2(x)|.$$

所以, 在连续函数空间的范数意义下, 若初值变化很小, 相应的解变化也很小, 即解是稳定的. \square

习题 1. 利用 Green 函数表示

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in B_1 \subset \mathbb{R}^n, n > 2 \\ u|_{\partial B_1} = f(x) \end{cases} \quad (8)$$

的解.

2. 若 $f \in C(\partial B_1)$. 证明 1 中表示的解是古典解.

解: 1. 若已知单位球面上的格林函数 $G(x, y)$, 则由格林函数的定义可知问题的形式解为

$$u(y) = \int_{\partial B_1} u(x) \frac{\partial G}{\partial \nu} dS_x = \int_{\partial B_1} f(x) \frac{\partial G}{\partial \nu} dS_x. \quad (9)$$

把单位球面的格林函数代入上式化简后对换 x 和 y 得到

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\omega_n} \int_{\partial B_1} \frac{f(y)}{|x - y|^n} dS_y. \quad (10)$$

2. 定义函数

$$P(x, y) = \frac{1 - |x|^2}{n\omega_n |x - y|^n}. \quad (11)$$

上式称为单位球面上的 Poisson 核. 它满足性质

$$\int_{\partial B_1} P(x, y) dS_y = 1, x \in B_1. \quad (12)$$

(10) 可以写成

$$u(x) = \int_{\partial B_1} P(x, y) dS_y. \quad (13)$$

对固定的 $x \in B_1$, $P(x, y)$ 是关于 y 的有界函数, 而 $f \in C(\partial B_1)$, 所以 $u(x)$ 是有确切定义的. 因为 $P(x, y)$ 是关于 x 的调和函数, 函数 $f(y)\Delta_x P(x, y)$ 可积且关于 x 连续, 所以

$$\Delta u(x) = \int_{\partial B_1} f(y)\Delta_x P(x, y) dS_y = 0, x \in B_1. \quad (14)$$

即 u 在 B_1 内调和.

下面我们证明 u 可以连续地取到边值. 因为 f 在 ∂B_1 上连续, 所以一定有界, 即存在常数 $M > 0$ 使得 $|f(y)| \leq M, \forall y \in \partial B_1$. 利用 Poisson 核的性质 (12), 可得

$$\begin{aligned} |u(x) - f(x_0)| &\leq \int_{\partial B_1} P(x, y) |f(y) - f(x_0)| dS_y \\ &= \int_{|y-x_0|<\delta} P(x, y) |f(y) - f(x_0)| dS_y \\ &\quad + \int_{|y-x_0|>\delta} P(x, y) |f(y) - f(x_0)| dS_y \\ &< \varepsilon + 2M \frac{1 - |x|^2}{n\omega_n (\delta/2)^n} \cdot n\omega_n \\ &= \varepsilon + \frac{2M(1 - |x|^2)}{(\delta/2)^n} < 2\varepsilon, \text{ 当 } |x - x_0| \text{ 充分小.} \end{aligned}$$

□

由 ε 的任意性可知 $|u(x) - f(x_0)| \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow x_0, x \in B_1$. 即 $u \in C^2(B_1) \cap C(\overline{B_1})$.

习题 $P(x, y)$ 同上式定义, $x \in B_1, y \in \partial B_1$. 证明

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{\partial B_1 \setminus V_0} P(ry_0, y) dS_y = 0.$$

这里 V_0 为 $y_0 \in \partial B_1$ 的邻域.

证明: 取 $V_0 = B(y_0, \delta)$, 则对于 $y \in \partial B_1 \setminus V_0$ 有 $|y - y_0| \geq \delta$, 从而

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1 \setminus V_0} P(ry_0, y) dS_y &= \int_{\partial B_1 \setminus V_0} \frac{1 - r^2}{n\omega_n |ry_0 - y|^n} dS_y \\ &\leq \int_{\partial B_1 \setminus V_0} \frac{1 - r^2}{n\omega_n \delta^n} dS_y \\ &\leq \int_{\partial B_1} \frac{1 - r^2}{n\omega_n \delta^n} dS_y \\ &= \frac{1 - r^2}{\delta^n}. \end{aligned}$$

□

当 $r \rightarrow 1^-$ 时上式趋于 0.

习题 设 $u(x)$ 在 $B_R \setminus \{0\}$ 中调和, 其中 B_R 为 n 维空间中以 0 为心 R 为半径的开球, 在零点附近满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{n-2} u(x) = 0.$$

则可定义 $u(0)$ 使得 U 在 B_R 上调和.

证明: 取开球 B_r 使得 $r < R$, 可用前面得到的积分公式 (13) 制作一个在 ∂B_r 上等于 u 且在 B_r 内部调和的函数 $v(x)$, 我们只要证明在 $B_r \setminus \{0\}$ 中 $u = v$ 就可以了. 因为这时可以定义 $u(0) = v(0)$, 于是这个函数 u 在 B_R 中是调和的.

对任给的 $\varepsilon > 0$ 以及某 $\delta, 0 < \delta < r$, 考虑函数

$$w_\varepsilon = \varepsilon \left(|x|^{2-n} - r^{2-n} \right).$$

此函数在 $B_r \setminus \overline{B_\delta}$ 中是调和的, 在 ∂B_r 上等于 0. 由已知条件, 存在足够小的正数 δ 使得在 ∂B_δ 上成立

$$|u - v| \leq w_\varepsilon.$$

因此由最大最小值原理可得, 在 $B_r \setminus \overline{B_\delta}$ 中

$$|u - v| \leq w_\varepsilon.$$

固定 ε , 令 $\delta \rightarrow 0$ 使得 $|u - v| \leq w_\varepsilon$ 在 $B_r \setminus \{0\}$ 中成立, ε 可以任意小, 所以 $u = v$ 在 $B_r \setminus \{0\}$ 中成立. □