

# 偏微分方程理论作业

王允磊

2020 年 5 月 26 日

## 目录

|              |   |
|--------------|---|
| 1 Sobolev 空间 | 1 |
| 2 Fourier 分析 | 7 |

## 1 Sobolev 空间

习题 1. 若  $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 证明 Hölder 不等式:

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

证明: 由不等式的齐次对称性, 不妨令  $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$ . 设  $\theta = \frac{1}{p}$ , 则  $1 - \theta = \frac{1}{q}$ . 令  $F = |f|^p, G = |g|^q$ . 则需要被证明的不等式转化为

$$\int_X F^\theta G^{1-\theta} d\mu \leq 1. \quad (1)$$

由  $\ln x$  函数的凸性可得

$$F^\theta(x) G^{1-\theta}(x) \leq \theta F(x) + (1 - \theta) G(x).$$

对上式积分便得到 (1) 式. □

习题 2. 若  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , 证明  $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n), 2 \leq p \leq \infty$ .

证明: 令  $q$  满足

$$1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q},$$

其中  $1 \leq q \leq 2$ . 则由 Young 不等式可得

$$\|e^{-|x|^2} * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (2)$$

而

$$\|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q|x|^2} dx < \infty,$$

且  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , 所以  $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ . □

习题 3. 设

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

求证:  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

证明: 设

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当  $x > 0$  时, 求导得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} f(x) \\ f''(x) &= \left( \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) f(x) \\ f'''(x) &= \left( \frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4} \right) f(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

从上述几个导数易知可以归纳证明得到当  $x > 0$  时有

$$f^{(k)}(x) = P_{2k}(x^{-1})f(x),$$

其中  $P_{2k}$  是次数为  $2k$  的多项式. 由多项式和  $e$  指数的增长速率关系可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P_{2k}(x)e^{-x} = 0.$$

所以对任意的  $n > 0$ , 都有  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x) = 0$ . 再利用分析学中的一个定理:

**定理 1.1.** 设  $f$  是在  $x = a$  处连续的函数,  $f'(x)$  在  $x = a$  的一个去心邻域上处处存在且

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

存在, 则  $f'(a)$  存在且

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$

**证明:** 根据导数定义

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

由中值定理  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_x), a < \xi_x < x$ . 所以

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(\xi_x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$

□

把该定理用到上面定义的函数上就得到函数  $f$  在  $x = 0$  处任意阶右导数都存在且

$$f_+^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

而当  $|x| \leq 1$  时, 由

$$\phi(x) = f(1 - x^2)$$

$$\phi'(x) = -2xf'(1 - x^2)$$

$$\phi''(x) = -2f'(1 - x^2) + 4x^2 f''(1 - x^2)$$

...

知

$$\phi_-^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

另一方面, 由  $|x| \geq 1$  时  $\phi(x) = 0$  知

$$\phi_+^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

所以  $x = 1$  时

$$\phi^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$x = -1$  时同理.

□

**习题 4.** 若  $1 \leq q \leq 2$ , 证明对任意  $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.$$

**证明:** 设  $x = (x_1, x_2)$ . 因为  $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ , 所以  $u$  可以写成

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2) dt = \int_{-\infty}^{x_2} u(x_1, t) dt.$$

进而有

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i u| dx_i \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u| dx_i, x \in \mathbb{R}^2.$$

那么

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} dx \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(x)| dx_1 \int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x)| dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| dx \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| dx. \end{aligned}$$

利用平均不等式 (下式第二行到第三行) 可得

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| dx \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2} (\|\partial_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_2 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}) \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

对于  $1 < q < 2$  的情况, 可以利用插值不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^\theta \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\theta} \quad 0 < \theta < 1$$

得到.

□

**习题 5.** 设  $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$   $x \in [0, 1]$ , 则  $f \in C^{0, \frac{1}{4}}$ , 但是  $f \notin C^{0, \mu}, \mu > \frac{1}{4}$ .

**证明:** 根据  $C^{0, \mu}$  的定义, 我们需要计算范数

$$\|f\|_{C^{0, \mu}[0, 1]} := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + [f]_{\mu, [0, 1]},$$

其中半范数

$$[f]_{\mu, [0, 1]} := \sup_{x, y \in [0, 1], x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\mu}}.$$

$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 1$ , 所以只要计算半范数  $[f]_{\mu, [0, 1]}$ . 实际上我们可以证明一个一般结论: 对于任意的  $f(x) = x^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$ , 我们都有  $f \in C^{0, \alpha}$ . 为了证明这个一般结论, 我们需要下述引理建立的不等式

**引理 1.2.** 设  $x > 0, 0 < \alpha < 1$ , 则

$$(x + 1)^{\alpha} \leq x^{\alpha} + 1.$$

**证明:** 令  $g(x) = (x + 1)^{\alpha} - x^{\alpha} - 1$ , 则

$$g'(x) = \alpha \left( \frac{1}{(x + 1)^{1-\alpha}} - \frac{1}{x^{1-\alpha}} \right) \leq 0.$$

又因为  $g(0) = 0$ , 所以  $g(x) \leq g(0) = 0$ , 不等式得证. □

那么由引理中的不等式可得对  $a, b > 0$  有

$$\begin{aligned} \left( \frac{a}{b} + 1 \right)^{\alpha} &\leq \left( \frac{a}{b} \right)^{\alpha} + 1 \\ (a + b)^{\alpha} &\leq a^{\alpha} + b^{\alpha}. \end{aligned}$$

(上式对  $a = 0$  或  $b = 0$  时是显然的.) 令  $a = x - y, b = y, x > y$  可得

$$x^{\alpha} \leq (x - y)^{\alpha} + y^{\alpha}.$$

所以当  $x > y$  时, 有

$$x^{\alpha} - y^{\alpha} \leq (x - y)^{\alpha}$$

特别地, 当  $\mu = \frac{1}{4}$  且  $x > y$  时,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}| \\ &\leq |x - y|^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

$x < y$  的情况同理. 上述不等式说明

$$[f]_{\frac{1}{4}, [0,1]} \leq 1 < \infty.$$

所以  $f \in C^{0, \frac{1}{4}}$ . 对于  $\mu > \frac{1}{4}$  的情形, 我们有

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\mu} \stackrel{\text{令 } y=0}{\geq} \sup_{x \in (0,1]} \frac{f(x)}{x^\mu} = \sup_{x \in (0,1]} x^{\frac{1}{4}-\mu} = \infty.$$

所以  $f \notin C^{0, \mu}, \mu > \frac{1}{4}$ . □

**习题 6.** 设  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ , 说明  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  但是  $u \notin L^\infty(\Omega)$ . 其中

$$u(x) = \ln \ln(1 + \frac{1}{|x|}), \quad |x| < 1, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

**证明:** 对  $u(x)$  求偏导可得

$$\begin{aligned}\partial_1 u &= -\frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{|x|})} \frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}} \frac{x_1}{|x|^3}, \\ \partial_2 u &= -\frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{|x|})} \frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}} \frac{x_2}{|x|^3}.\end{aligned}$$

从而

$$|\partial_i u| = \left| \frac{1}{|x| \ln(1 + \frac{1}{|x|})} \frac{1}{|x| + 1} \frac{x_i}{|x|} \right| \leq \frac{1}{|x| \ln(1 + \frac{1}{|x|})}. \quad (3)$$

利用不等式  $\ln(1+x) \leq x$  可得

$$|u(x)| \leq \ln \frac{1}{|x|} = -\ln |x|.$$

则利用该不等式以及极坐标来表示积分,  $r = |x|, 0 < r < 1$ , 可得

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} r \ln^2 r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r \ln^2 r dr < \infty.$$

另一方面, 利用 (3) 式得

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 dx \leq \int_{\Omega} \left( \frac{1}{r \ln(1 + \frac{1}{r})} \right)^2 r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r \ln^2(1 + \frac{1}{r})} dr.$$

由  $-d(\ln(1 + \frac{1}{r})) = \frac{1}{r^2+r} dr$ , 令  $\ln(1 + \frac{1}{r}) = u$  得

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\pi \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{r+1}{u^2} du \leq 4\pi \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u^2} du < \infty.$$

综上所述,  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ .

由  $u$  在去心邻域  $\Omega \setminus 0$  上的连续性以及  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = \infty$  知显然有  $u \notin L^\infty(\Omega)$ .  $\square$

## 2 Fourier 分析

**习题 7.** 设  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , 定义 Fourier 变换

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(1) 若  $f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , 则  $\widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ .

(2) 若  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , 则

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f \bar{g} dx &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f \bar{g}} d\xi; \\ \widehat{fg} &= (2\pi)^{-1} \widehat{f} * \widehat{g}. \end{aligned}$$

**证明:**

(1) 根据 Fourier 变换的定义可得

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad . \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2} dx \end{aligned} \tag{4}$$

剩下的问题就是求  $\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2} dx$ , 可以通过计算  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$  的方法同样求得

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

代入 (4) 中可得

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

(2)

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f} \widehat{g} d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \right) \widehat{g}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \widehat{g}(\xi) d\xi \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\left( (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{g}(\xi) d\xi \right)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g}(x) dx \\ &= (2\pi)^{-1} \widehat{f} * \widehat{g} \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi - \zeta) \widehat{g}(\zeta) d\zeta \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi-\zeta)} f(x) dx \right) g(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) \left( (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\zeta} g(\zeta) d\zeta \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) g(x) dx \\ &= \widehat{fg}. \end{aligned}$$

□

### 习题 8.

(1) 若  $|\widehat{f}(\xi)| \leq e^{-|\xi|}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , 求证  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

(2) 若  $1 \leq p \leq 2$ , 且对于任意  $f \in L^p$  有不等式

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$



求证:  $q$  必须满足  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**证明:** (1) 这是 Paley-Wiener 定理的特殊情况, 只要在定理中取  $a = \frac{1}{2}$ , 则  $e^{\frac{1}{2}|\xi|}|\widehat{f}| \leq e^{-\frac{1}{2}|\xi|}$ , 所以  $e^{\frac{1}{2}|\xi|}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ , 从而  $f$  在带形区域  $\{(x+iy): x \in \mathbb{R}, |y| \leq \frac{1}{2}\}$  解析, 当然有  $f \in C^\infty$ , 命题得证.

(2) 假设对于所有的  $f \in L^p$  都有

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad (5)$$

用  $\varphi(x) = f(\lambda x), \lambda \neq 0$  代替  $f(x)$  可得

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (6)$$

其中

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

对新的函数计算相应的范数:

$$\begin{aligned} \|\widehat{\varphi}\|_{L^q(\mathbb{R})} &= \left( \frac{1}{\lambda^q} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \right|^q d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \frac{1}{\lambda^{q-1}} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \right|^q d\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \frac{1}{\lambda} \right)^{\frac{q-1}{q}} \|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \left( \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda x)|^p d(\lambda x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

上述两个结果代入不等式 (6) 可得

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq \left( \frac{1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{q-1}{q}} C \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

如果指数  $\frac{1}{p} - \frac{q-1}{q}$  不等于 0, 例如当它大于 0 的时候, 取  $\lambda \rightarrow \infty$ , 不等式右边便趋于 0, 这是不可能的 (小于 0 时就令  $\lambda \rightarrow 0$ ). 所以指数只能等于 0. 所以

$$\frac{1}{p} - \frac{q-1}{q} = 0,$$

整理可得

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

□

### 习题 9.

(1) 对于给定函数  $w(x) \in C_0^\infty$ , 定义

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)w(x-y)dy, x \in \mathbb{R}, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

证明  $T$  是平移不变算子.

(2) 设  $1 < p < \infty$ , 利用 Mihlin-Hormander 乘子定理证明

$$\|\partial_1 \partial_2 f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \|(\partial_1^2 + \partial_2^2)f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

证明:

(1)

$$\begin{aligned} T(\tau_a f) &= Tf(x-a) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y-a)w(x-y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)w(x-y-a)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)w(x-a-y)dy \\ &= (Tf)(x-a) \\ &= \tau_a Tf, \quad \forall a \in \mathbb{R}, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

其中第四个等号是利用  $y+a$  代替  $a$  并利用了函数具有紧支集的性质.

(2) 令  $g = (\partial_1^2 + \partial_2^2)f$ , 则需要证明的不等式等价于

$$\|\partial_1 \partial_2 (\partial_1^2 + \partial_2^2)^{-1} g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

因为  $\partial_1 \partial_2 (\partial_1^2 + \partial_2^2)^{-1} g$  的傅里叶变换为  $\xi_1 \xi_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}$ , 因此只需说明  $m = \xi_1 \xi_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ . 根据 Mihlin-Hörmander 乘子定理, 只需要证明

$$|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}$$

对所有的  $|\alpha| \leq 2$  成立.

1.  $\alpha = 0$ .

因为

$$\frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2} |\xi|^0,$$

所以该情况下定理要求的条件成立.

2.  $\alpha = 1, \partial_\xi^\alpha = \partial_1$ .

$\partial_1 m(\xi) = \frac{\xi_2^3 - \xi_1^2 \xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}, |\xi|^{-1} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2}$ , 我们要验证

$$\frac{|\xi_2^3 - \xi_1^2 \xi_2|}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} \leq C_1 \frac{1}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}},$$

其中  $C_1$  是某个确定的常数. 也就是要证明

$$|\xi_2| |\xi_2^2 - \xi_1^2| \leq C_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (7)$$

注意到

$$|\xi_2| \leq (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}} \text{ 以及 } |\xi_2^2 - \xi_1^2| \leq (\xi_2^2 + \xi_1^2),$$

代入 (7) 式的左边并取  $C_1 = 1$  即可得到该不等式.

3.  $\alpha = 1, \partial_\xi^\alpha = \partial_2$ .

这与上一情况雷同, 只是指标互换, 验证同上.

4.  $\alpha = 2, \partial_\xi^\alpha = \partial_1^2$ .

$\partial_1^2 m(\xi) = \frac{2\xi_1^3 \xi_2 - 6\xi_1 \xi_2^3}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^3}, |\xi|^{-2} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}$ , 我们要验证

$$\frac{|2\xi_1^3 \xi_2 - 6\xi_1 \xi_2^3|}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^3} \leq C_2 \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2},$$

其中  $C_2$  是某个确定的常数. 也就是要证明

$$|2\xi_1\xi_2||\xi_1^2 - 3\xi_2^2| \leq C_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2. \quad (8)$$

注意到

$$|2\xi_1\xi_2| \leq \xi_1^2 + \xi_2^2 \text{ 以及 } |\xi_1^2 - 3\xi_2^2| \leq 3(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

代入 (8) 式的左边并取  $C_2 = 3$  即可得到该不等式.

5.  $\alpha = 2, \partial^\alpha = \partial_2^2$ .

这与上一情况相同, 只是指标互换, 验证同上.

6.  $\alpha = 2, \partial^\alpha = \partial_1\partial_2$ .

$\partial_1\partial_2 m(\xi) = \frac{6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^3}, |\xi|^{-2} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}$ , 我们要验证

$$\frac{|6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4|}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^3} \leq C_3 \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2},$$

其中  $C_3$  是某个确定的常数. 也就是要证明

$$|6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4| \leq (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2, \quad (9)$$

注意到

$$\begin{aligned} |6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4| &= |(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 - 8\xi_1^2\xi_2^2| \\ &\leq (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + 8\xi_1^2\xi_2^2 \\ &\leq 3(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2. \end{aligned}$$

代入 (9) 式的左边并取  $C_3 = 3$  即可得到该不等式.

综上, Mihlin-Hörmander 乘子定理的所有条件都满足.

□