

偏微分方程理论作业

王允磊

2020 年 5 月 11 日

目录

1 Sobolev 空间	1
2 Fourier 分析	7

1 Sobolev 空间

习题 1. 若 $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明 Hölder 不等式:

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

证明: 由不等式的齐次对称性, 不妨令 $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. 设 $\theta = \frac{1}{p}$, 则 $1 - \theta = \frac{1}{q}$. 令 $F = |f|^p, G = |g|^q$. 则需要被证明的不等式转化为

$$\int_X F^\theta G^{1-\theta} d\mu \leq 1. \quad (1)$$

由 $\ln x$ 函数的凸性可得

$$F^\theta(x) G^{1-\theta}(x) \leq \theta F(x) + (1 - \theta) G(x).$$

对上式积分便得到 (1) 式. □

习题 2. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 证明 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n), 2 \leq p \leq \infty$.

证明: 令 q 满足

$$1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q},$$

其中 $1 \leq q \leq 2$. 则由 Young 不等式可得

$$\|e^{-|x|^2} * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (2)$$

而

$$\|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q|x|^2} dx < \infty,$$

且 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 所以 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

习题 3. 设

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

求证: $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

证明: 设

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时, 求导得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} f(x) \\ f''(x) &= \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) f(x) \\ f'''(x) &= \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4} \right) f(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

从上述几个导数易知可以归纳证明得到当 $x > 0$ 时有

$$f^{(k)}(x) = P_{2k}(x^{-1})f(x),$$

其中 P_{2k} 是次数为 $2k$ 的多项式. 由多项式和 e 指数的增长速率关系可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P_{2k}(x)e^{-x} = 0.$$

所以对任意的 $n > 0$, 都有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x) = 0$. 再利用分析学中的一个定理:

定理 1.1. 设 f 是在 $x = a$ 处连续的函数, $f'(x)$ 在 $x = a$ 的一个去心邻域上处处存在且

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

存在, 则 $f'(a)$ 存在且

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$

证明: 根据导数定义

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

由中值定理 $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_x), a < \xi_x < x$. 所以

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(\xi_x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$

□

把该定理用到上面定义的函数上就得到函数 f 在 $x = 0$ 处任意阶右导数都存在且

$$f_+^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

而当 $|x| \leq 1$ 时, 由

$$\phi(x) = f(1 - x^2)$$

$$\phi'(x) = -2xf'(1 - x^2)$$

$$\phi''(x) = -2f'(1 - x^2) + 4x^2 f''(1 - x^2)$$

...

知

$$\phi_-^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

另一方面, 由 $|x| \geq 1$ 时 $\phi(x) = 0$ 知

$$\phi_+^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

所以 $x = 1$ 时

$$\phi^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$x = -1$ 时同理.

□

习题 4. 若 $1 \leq q \leq 2$, 证明对任意 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.$$

证明: 设 $x = (x_1, x_2)$. 因为 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, 所以 u 可以写成

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2) dt = \int_{-\infty}^{x_2} u(x_1, t) dt.$$

进而有

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i u| dx_i \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u| dx_i, x \in \mathbb{R}^2.$$

那么

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} dx \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(x)| dx_1 \int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x)| dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| dx \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| dx. \end{aligned}$$

利用平均不等式 (下式第二行到第三行) 可得

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| dx \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2} (\|\partial_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_2 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}) \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

对于 $1 < q < 2$ 的情况, 可以利用插值不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^\theta \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\theta} \quad 0 < \theta < 1$$

得到.

□

习题 5. 设 $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ $x \in [0, 1]$, 则 $f \in C^{0, \frac{1}{4}}$, 但是 $f \notin C^{0, \mu}, \mu > \frac{1}{4}$.

证明: 根据 $C^{0, \mu}$ 的定义, 我们需要计算范数

$$\|f\|_{C^{0, \mu}[0, 1]} := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + [f]_{\mu, [0, 1]},$$

其中半范数

$$[f]_{\mu, [0, 1]} := \sup_{x, y \in [0, 1], x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\mu}}.$$

$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = 1$, 所以只要计算半范数 $[f]_{\mu, [0, 1]}$. 实际上我们可以证明一个一般结论: 对于任意的 $f(x) = x^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$, 我们都有 $f \in C^{0, \alpha}$. 为了证明这个一般结论, 我们需要下述引理建立的不等式

引理 1.2. 设 $x > 0, 0 < \alpha < 1$, 则

$$(x + 1)^{\alpha} \leq x^{\alpha} + 1.$$

证明: 令 $g(x) = (x + 1)^{\alpha} - x^{\alpha} - 1$, 则

$$g'(x) = \alpha \left(\frac{1}{(x + 1)^{1-\alpha}} - \frac{1}{x^{1-\alpha}} \right) \leq 0.$$

又因为 $g(0) = 0$, 所以 $g(x) \leq g(0) = 0$, 不等式得证. □

那么由引理中的不等式可得对 $a, b > 0$ 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} + 1\right)^{\alpha} &\leq \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} + 1 \\ (a + b)^{\alpha} &\leq a^{\alpha} + b^{\alpha}. \end{aligned}$$

(上式对 $a = 0$ 或 $b = 0$ 时是显然的.) 令 $a = x - y, b = y, x > y$ 可得

$$x^{\alpha} \leq (x - y)^{\alpha} + y^{\alpha}.$$

所以当 $x > y$ 时, 有

$$x^{\alpha} - y^{\alpha} \leq (x - y)^{\alpha}$$

特别地, 当 $\mu = \frac{1}{4}$ 且 $x > y$ 时,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}| \\ &\leq |x - y|^{\frac{1}{4}}.\end{aligned}$$

$x < y$ 的情况同理. 上述不等式说明

$$[f]_{\frac{1}{4}, [0,1]} \leq 1 < \infty.$$

所以 $f \in C^{0, \frac{1}{4}}$. 对于 $\mu > \frac{1}{4}$ 的情形, 我们有

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\mu} \stackrel{\text{令 } y=0}{\geq} \sup_{x \in (0,1]} \frac{f(x)}{x^\mu} = \sup_{x \in (0,1]} x^{\frac{1}{4}-\mu} = \infty.$$

所以 $f \notin C^{0, \mu}, \mu > \frac{1}{4}$. □

习题 6. 设 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, 说明 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 但是 $u \notin L^\infty(\Omega)$. 其中

$$u(x) = \ln \ln(1 + \frac{1}{|x|}), \quad |x| < 1, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

证明: 对 $u(x)$ 求偏导可得

$$\begin{aligned}\partial_1 u &= -\frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{|x|})} \frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}} \frac{x_1}{|x|^3}, \\ \partial_2 u &= -\frac{1}{\ln(1 + \frac{1}{|x|})} \frac{1}{1 + \frac{1}{|x|}} \frac{x_2}{|x|^3}.\end{aligned}$$

从而

$$|\partial_i u| = \left| \frac{1}{|x| \ln(1 + \frac{1}{|x|})} \frac{1}{|x| + 1} \frac{x_i}{|x|} \right| \leq \frac{1}{|x| \ln(1 + \frac{1}{|x|})}. \quad (3)$$

利用不等式 $\ln(1+x) \leq x$ 可得

$$|u(x)| \leq \ln \frac{1}{|x|} = -\ln |x|.$$

则利用该不等式以及极坐标来表示积分, $r = |x|, 0 < r < 1$, 可得

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq \int_{\Omega} r \ln^2 r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r \ln^2 r dr < \infty.$$

另一方面, 利用 (3) 式得

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\partial_i u|^2 dx \leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{r \ln(1 + \frac{1}{r})} \right)^2 r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r \ln^2(1 + \frac{1}{r})} dr.$$

由 $-d(\ln(1 + \frac{1}{r})) = \frac{1}{r^2+r} dr$, 令 $\ln(1 + \frac{1}{r}) = u$ 得

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\pi \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{r+1}{u^2} du \leq 4\pi \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u^2} du < \infty.$$

综上所述, $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

由 u 在去心邻域 $\Omega \setminus 0$ 上的连续性以及 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = \infty$ 知显然有 $u \notin L^\infty(\Omega)$. \square

2 Fourier 分析

习题 7. 设 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 定义 Fourier 变换

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(1) 若 $f(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, 则 $\widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

(2) 若 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f \bar{g} dx &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f \bar{g}} d\xi; \\ \widehat{fg} &= (2\pi)^{-1} \widehat{f} * \widehat{g}. \end{aligned}$$

证明:

(1) 根据 Fourier 变换的定义可得

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad . \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2} dx \end{aligned} \tag{4}$$

剩下的问题就是求 $\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2} dx$, 可以通过计算 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ 的方法同样求得

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

代入 (4) 中可得

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

(2)

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f} \widehat{g} d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx \right) \widehat{g}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \widehat{g}(\xi) d\xi \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\left((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{g}(\xi) d\xi \right)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx \\ &= (2\pi)^{-1} \widehat{f} * \widehat{g} \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi - \zeta) \widehat{g}(\zeta) d\zeta \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi-\zeta)} f(x) dx \right) g(\zeta) d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) \left((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\zeta} g(\zeta) d\zeta \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) g(x) dx \\ &= \widehat{fg}. \end{aligned}$$

□