习题解答

89hao

2019 年 12 月 29 日

习题 证明定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = x & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

的解存在唯一, 并说明解对初值的稳定性.

证明: 先对 (1) 中的方程进行因式分解

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - 4u_{xx} = 0. \tag{2}$$

令

$$v(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - 2\frac{\partial}{\partial x}\right) u. \tag{3}$$

由 (2) 得

$$v_t(x,t) + 2v_x(x,t) = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

这是一维传输方程, 由 (1) 中的初始条件和 (3) 知 v 满足初始条件

$$v(x,0) = x.$$

于是, 由传输方程的解可知

$$v(x,t) = x - 2t.$$

把 v 代入 (3) 得

$$u_t(x,t) - 2u_x(x,t) = x - 2t,$$

其中 $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$.
这是一个非齐次传输方程, 已知 $u(x,0) = 0$, 用非齐次传输方程的解公式可得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t [x - 2(s-t) - 2s] \,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t (x - 4s + 2t) \,\mathrm{d}s \\ &= xt. \end{aligned} \tag{4}$$

代入原方程验证可知这是它的一个解, 另一方面由求解过程的每一步的唯一性知解一定唯一.

实际上如果把 (1) 换成更加一般的

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & t>0, x\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x) & x\in R. \end{cases} \tag{5}$$

那么同样按照前面的求解方法可得到一般情况的解

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\mathrm{d}y \tag{6}$$

该式子称为 d'Alembert(达朗贝尔) 公式. 下面考虑解对初值的稳定性问题, 设有下面两个初值问题

$$\begin{cases} u_{1,tt}-a^2u_{1,xx}=0 & t>0, x\in\mathbb{R}, \\ u_1(x,0)=\varphi_1(x), u_{1,t}(x,0)=\psi_1(x) & x\in R, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2,tt}-a^2u_{2,xx}=0 & t>0, x\in\mathbb{R}, \\ u_2(x,0)=\varphi_2(x), u_{2,t}(x,0)=\psi_2(x) & x\in R. \end{cases}$$

令 $w=u_1-u_2$, 则 $w(x,t)$ 满足问题

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2u_{xx}=0 & t>0, x\in\mathbb{R}, \\ w(x,0)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x), w_t(x,0)=\psi_1(x)-\psi_2(x) & x\in R. \end{cases} \tag{7}$$

那么由达朗贝尔公式可以得到 $w(x,t)$ 的解, 进而得到解在 $x\in R$ 和 $t\in[0,T]$ 估计式

$$\sup_{x,t}|w(x,t)|\le\sup_x|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|+T\sup_x|\psi_1(x)-\psi_2(x)|.$$

所以, 在连续函数空间的范数意义下, 若初值变化很小, 相应的解变化也很小, 即解是稳定的. □

习题 *1. 利用 Green 函数表示*

$$\begin{cases} \Delta u=0, & x\in B_1\subset\mathbb{R}^n, n>2 \\ u|_{\partial B_1}=f(x) \end{cases} \tag{8}$$

的解.

2. 若 $f\in C(\partial B_1)$. 证明 1 中表示的解是古典解.

解: 1. 若已知单位球面上的格林函数 $G(x,y)$, 则由格林函数的定义可知问题的形式解为

$$u(y)=\int_{\partial B_1}u(x)\frac{\partial G}{\partial\nu}\mathrm{d}S_x=\int_{\partial B_1}f(x)\frac{\partial G}{\partial\nu}\mathrm{d}S_x. \tag{9}$$

把单位球面的格林函数代入上式化简后对换 x 和 y 得到

$$u(x)=\frac{1-|x|^{2}}{n\omega_{n}}\int_{\partial B_{1}}\frac{f(y)}{|x-y|^{n}}\mathrm{d}S_{y}. \tag{10}$$

2. 定义函数

$$P(x,y)=\frac{1-|x|^{2}}{n\omega_{n}|x-y|^{n}}. \tag{11}$$

上式称为单位球面上的 Poisson 核. 它满足性质

$$\int_{\partial B_{1}}P(x,y)\mathrm{d}S_{y}=1, x\in B_{1}. \tag{12}$$

(10) 可以写成

$$u(x)=\int_{\partial B_{1}}P(x,y)\mathrm{d}S_{y}. \tag{13}$$

对固定的 $x\in B_1$, $P(x,y)$ 是关于 y 的有界函数, 而 $f\in C\left(\partial B_1\right)$, 所以 $u(x)$ 是有确切定义的. 因为 $P(x,y)$ 是关于 x 的调和函数, 函数 $f(y)\Delta_x P(x,y)$ 可积且关于 x 连续, 所以

$$\Delta u(x)=\int_{\partial_{1}}f(y)\Delta_{x}P(x,y)\mathrm{d}S_{y}=0, x\in B_{1}. \tag{14}$$

即 u 在 B_1 内调和.

下面我们证明 u 可以连续地取到边值. 因为 f 在 ∂B_1 上连续, 所以一定有界, 即存在常数 $M>0$ 使得 $|f(y)|\leq M, \forall y\in\partial B_1$. 利用 Poisson 核的性质 (12), 可得

$$\begin{aligned}
|u(x)-f(x_0)| &\leq \int_{\partial B_1} P(x,y)\left|f(y)-f(x_0)\right|\mathrm{d}S_y\\
&=\int_{|y-x_0|<\delta} P(x,y)\left|f(y)-f(x_0)\right|\mathrm{d}S_y\\
&+\int_{|y-x_0|>\delta} P(x,y)|f(y)-f(x_0)|\mathrm{d}S_y\\
&<\varepsilon+2M\frac{1-|x|^2}{n\omega_n\left(\delta/2\right)^n}\cdot n\omega_n\\
&=\varepsilon+\frac{2M\left(1-|x|^2\right)}{\left(\delta/2\right)^n}<2\varepsilon, \text{当} |x-x_0| \text{充分小}..
\end{aligned}$$

□

由 ε 的任意性可知 $|u(x)\to f(x_0)|$, 当 $x\to x_0$, $x\in B_1$. 即 $u\in C^2\left(B_1\right)\cap C\left(\overline{B}_1\right)$.

习题 $P(x,y)$ 同上式定义, $x\in B_1, y\in\partial B_1$. 证明

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{\partial B_1\backslash V_0} P(ry_0,y)\mathrm{d}S_y=0.$$

这里 V_0 为 $y_0\in\partial B_1$ 的邻域.

证明: 取 $V_0=B\left(y_0,\delta\right)$, 则对于 $y\in\partial B_1\backslash V_0$ 有 $|y-y_0|\geq\delta$, 从而

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_1\backslash V_0} P(ry_0,y)\mathrm{d}S_y &= \int_{\partial B_1\backslash V_0}\frac{1-r^2}{n\omega_n\left|ry_0-y\right|^n}\mathrm{d}S_y\\
&\leq \int_{\partial B_1\backslash V_0}\frac{1-r^2}{n\omega_n\delta^n}\mathrm{d}S_y\\
&\leq \int_{\partial B_1}\frac{1-r^2}{n\omega_n\delta^n}\mathrm{d}S_y\\
&= \frac{1-r^2}{\delta^n}.
\end{aligned}$$

□

当 $r\to 1^-$ 时上式趋于 0.

习题 设 $u(x)$ 在 $B_R\backslash\{0\}$ 中调和, 其中 B_R 为 n 维空间中以 0 为心 R 为半径的开球, 在零点附近满足

$$\lim_{x\to 0}|x|^{n-2}u(x)=0.$$

则可定义 $u(0)$ 使得 U 在 B_R 上调和.

证明: 取开球 B_r 使得 $r<R$, 可用前面得到的积分公式 (13) 制作一个在 ∂B_r 上等于 u 且在 B_r 内部调和的函数 $v(x)$, 我们只要证明在 $B_r\backslash\{0\}$ 中 $u=v$ 就可以了. 因为这时可以定义 $u(0)=v(0)$, 于是这个函数 u 在 B_R 中是调和的.

对任给的 $\varepsilon>0$ 以及某 δ, $0<\delta<r$, 考虑函数

$$w_\varepsilon=\varepsilon\left(|x|^{2-n}-r^{2-n}\right).$$

此函数在 $B_r\backslash\overline{B_\delta}$ 中是调和的, 在 ∂B_r 上等于 0. 由已知条件, 存在足够小的正数 δ 使得在 ∂B_δ 上成立

$$|u-v|\leq w_\varepsilon.$$

因此由最大最小值原理可得, 在 $B_r\backslash\overline{B_\delta}$ 中

$$|u-v|\leq w_\varepsilon.$$

固定 ε, 令 $\delta\to 0$ 便得 $|u-v|\leq w_\varepsilon$ 在 $B_r\backslash\{0\}$ 中成立,ε 可以任意小, 所以 $u=v$ 在 $B_r\backslash\{0\}$ 中成立. □