初识椭圆偏微分方程

王 允 磊

2020-06-02

拉普拉斯方程

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则在该区域上满足

$$-\Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

的方程就叫做拉普拉斯方程.

这里的 u 可以对应现实世界的化学浓度, 热平衡台下的温度分布, 经典引力势能和电磁势能. 以热平衡态的温度场为例, 因为达到了热平衡, 所以温度分布 u 不再随时间的变换, 只是位置的函数. 根据热传导定律, 热量的流动速度 $\mathbf{F}$ 和温度梯度 ∇u 成正比:

$$\mathbf{F} = -a\nabla u \quad (a > 0).$$

如果区域内没有产生热量的热源, 那么在平衡态下通过一个区域 V 表面的热量总和应该为零 (即传导进 V 的和传导出去的热量应该相等):

$$\int_{\partial V}\mathbf{F}\cdot\nu\mathrm{d}S=0,$$

再利用高斯公式可得

$$\int_{V}\nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}x=0,$$

所以

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=0\Rightarrow\Delta u=0.$$

泊松方程

当热平衡区域有恒定的热源时, 我们可以用函数 f 来表示, 则

$$\Delta u = f,$$

这样的方程便叫做泊松方程. 这样的例子很多, 比如经典的引力场方程:

$$\Delta \Phi = 4\pi G\rho.$$

一般二阶线性偏微分方程

一般的二阶线性偏微分方程可以写成

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^i \partial x^j}+\sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i}+c(x)u(x)=f(x).$$

上式可以简写为

$$-\sum_{i=1}^{n} a^{ij}\partial_{ij}^2 u+\sum_{i=1}^{n} b^i\partial_i u+cu=f.$$

如果利用爱因斯坦记号, 则方程还可简写为

$$-a^{ij}\partial_{ij}^2 u+b^i\partial_i u+cu=f.$$

如果某一项中有两个相同的上标下标, 就默认对该指标作求和运算.

椭圆偏微分方程

根据偏微分方程的二阶系数 a^{ij}, 我们可以对椭圆进行分类.

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \cdots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \cdots & a^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1} & a^{n2} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix}$$

如果上述矩阵在求解区域内的任意一点都是正定矩阵, 那么相应的方程被称为椭圆偏微分方程.

进一步, 如果矩阵还满足: 存在 $c_0 > 0$ 使得

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega,$$

则称其为一致椭圆方程.

经典解和强解

记 $L = -a^{ij}\partial_{ij}^2 + b^i\partial_i + c$, $Lu = f$.

若 $u \in C^2(\Omega)$ 并且满足

$$Lu = f,$$

则称其为方程的经典解.

若 u 可测,

$$Lu(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in \Omega,$$

则称其为方程的强解.

弱解

考虑

$$Lu = -\partial_j\left(a^{ij}\partial_i u\right) + b^i\partial_i u + cu = f$$

其中

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega) \quad (i, j = 1, \cdots, n).$$

若

$$\int_\Omega (a^{ij} D_i u D_j v + b^i D_i u v + cuv)\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

则称 u 为 $Lu = f$ 的弱解.

弱最大值原理

为什么需要弱解

从定义可以看出，弱解相比于经典解需要的条件更弱. 本质上，是因为经典情形下 $Lu = f$ 中的算子 L 的作用空间从 X(例如，至少是在 $C^2(\Omega)$ 中) 变成了更大的空间 Y. 在空间 Y 上的算子 L_Y 具有更好的性质，在这个空间上更加容易讨论解的存在性问题.

尽管我们很多时候可以得到弱解 $u \in Y$, 但是最终需要的还是 X 中解的存在性，这需要我们找到某些条件，使得 $u \in X$, 这样的条件就是正则性 (因为正则性可以使得函数更加光滑，所以正则性就是对函数光滑性的一种刻画).

这种正则性往往是一种先验估计，即假设解存在，然后就可以利用正则性得到解的存在性.

内正则性

定理 1(内正则性)

令

$$Lu = -a_{ij}\partial_{ij}^2 u + b_i\partial_i u + cu = f.$$

设 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 是一致椭圆偏微分方程 $Lu = f$ 在开集 Ω 上的弱解, 其系数 $a_{ij}, b_i, i, j = 1, \cdots, n$ 在 Ω 上一致 Lipschitz 连续, 系数 $c_i, d, i = 1, \cdots, n$ 在 Ω 上本性有界,$f \in L^2(\Omega)$. 那么对于任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 我们有 $u \in W^{2,2}(\omega')$ 并且

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \le C\left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\right), \tag{1}$$

其中 C 只与方程系数和 $\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 有关.

$L = -\Delta$ 情形

该情形下

$$\Delta u = -f \in L^2(\Omega).$$

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} = \|u\|_{L^2(\Omega')} + \sum_{1\le i\le n} \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega')} + \sum_{|\alpha|=2} \|\partial_\alpha u\|_{L^2(\Omega')}.$$

因为上面的前两项都在不等式右边出现了，所以只要证明第三项小于等于 $\|f\|_{L^2}$ 的常数倍即可，而这可以利用之前证明过的不等式 $\|\partial_{ij}^2 u\|_{L^2} \le C\|\Delta u\|_{L^2}$.

一般情形

一般情形的证明有两个关键点:

1. 证明 $u \in W^{2,2}(\Omega')$.
2. 对 $\sum_{\alpha=2} \|\partial_\alpha u\|_{L^2(\Omega')}$ 进行估计.

在证明之前, 首先引入差商的概念:

定义

函数 u 在 x 点处关于 e_i 方向步长为 h 的差商是

$$\Delta_i^h u(x) := \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h}, h \neq 0.$$

有时候如果一个讨论或者陈述对任意的 $i = 1, \cdots, n$ 都成立的话, 也可以简写为 $\Delta^h u(x)$.

两个引理

引理 1

设 $u \in W^{1,p}(\Omega)$. 那么对任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega$,$h < \mathrm{dist}(\Omega', \Omega)$, 我们有 $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$, 并且

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}$$

引理 2

设 $u \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty, \Omega' \subset\subset \Omega$, 假设存在一个常数 K 使得 $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$ 并且对所有的 $0 < h < \mathrm{dist}(\Omega'.\Omega)$ 都有 $\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K$. 则弱导数 $\partial_i u$ 存在并且满足 $\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$.

内正则性的证明

Lax-Milgram 定理

正则性 + 泛函 ⇒ 存在唯一性实例

全局正则性

边界正则性

Schauder Approach

nihao