Semigroup Theory

王 允 磊

2020-06-21

半群及其基本性质

设 X 为实 Banach 空间, 考虑下面的常微分方程

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) \quad (t \geq 0) \\ u(0) = u, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, $u \in X$,A 是一个线性算子. 我们考虑上述方程解

$$u(t) : [0, \infty) \to X$$

的存在性和唯一性. 根据解和初值的依赖关系, 可以把解写成

$$u(t) := S(t)u \quad (t \geq 0).$$

这里 $S(t)$ 是一个从 X 到 X 的映射. 半群理论就是把解的存在性问题通过上述表示, 转化为 $S(t)$ 的存在性问题. 假设方程的解存在且唯一, 那么 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 肯定满足下述条件

$$S(0)u = u \quad (u \in X), \tag{2}$$

$$S(t+s)u = S(t)S(s)u = S(s)S(t)u \quad (t, s \geq 0, u \in X). \tag{3}$$

条件 (3) 是由解的唯一性给出. 另一方面, 我们还希望解随时间的变化具有连续性, 也就是

$$\text{映射}t \to S(t)u \text{ 是从}[0,\infty) \text{ 到}X \text{ 的连续映射.} \tag{4}$$

根据上面的分析, 我们给出半群的具体定义:

Definition

1. 一族从 X 到 X 的线性映射 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 被称为半群, 如果其满足条件 (2),(3) 和 (4).
2. 如果 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 还额外满足

$$\|S(t)\| \leq 1 \quad (t \geq 0), \tag{5}$$

则其被称为压缩半群.

生成元

Definition

定义

$$D(A) := \left\{ u \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ 在} X \text{ 中存在} \right\} \tag{6}$$

以及

$$Au := \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \quad (u \in D(A)). \tag{7}$$

我们称 $A : D(A) \to X$ 为半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 的 (无穷小) 生成元,$D(A)$ 为 A 的定义域.

从生成元的定义可以看出, 生成元相当于算子 $S(t)$ 的导数, 刻画的是算子本身随时间的变化率.

半群的微分性质

Theorem

设 $u \in D(A)$, 则

1. 对任意的 $t \geq 0$, 有 $S(t)u \in D(A)$.
2. 对任意的 $t \geq 0$, 有 $AS(t)u = S(t)Au$.
3. 对任意的 $t > 0$, 映射 $t \mapsto S(t)u$ 是可微的.
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t)u = AS(t)u \quad (t > 0)$.

性质 (1),(2) 和 (4) 的证明都可以根据定义经过简单的计算得到,(3) 其实就是 (4) 的推论.

生成元的性质

Theorem

1. 定义域 $D(A)$ 在 X 中稠密.
2. A 是闭算子.

证明:(1) 只需要说明 $u^t \in D(A), t > 0$, 其中 $u^t := \int_0^t S(s)u\,\mathrm{d}s$. 这是因为

$$\frac{u^t}{t} \to u \quad (t \to 0^+).$$

(2) 假设 $u_k \in D(A), k = 1, 2, \cdots$, 并且

$$u_k \to u, Au_k \to v. \tag{8}$$

我们需要证明 $u \in D(A)$ 并且 $v = Au$. 根据上一页半群的性质 (2) 和 (4), 我们有

$$S(t)u_k - u_k = \int_0^t S(s)Au_k\,\mathrm{d}s.$$

令 $k \to \infty$ 可得

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)v \, \mathrm{d}s.$$

因此

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S(s)v \, \mathrm{d}s = v.$$

根据定义可得 $u \in D(A), v = Au$.

预解集

Definition

1. 设 $\rho(A)$ 是所有满足
$$\lambda I - A : D(A) \to X$$
是一一映射且满射的实数 λ 的集合, $\rho(A)$ 称为 A 的预解集.
2. 若 $\lambda \in \rho(A)$, 则预解算子 $R_\lambda : X \to X$ 被定义为
$$R_\lambda u := (\lambda I - A)^{-1} u.$$

根据闭图像定理, 预解算子是有界线性算子. 易知
$$AR_\lambda u = R_\lambda Au \quad u \in D(A).$$

预解算子的性质

Theorem

1. 若 $\lambda, \mu \in \rho(A)$, 则有
$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)\, R_\lambda R_\mu \tag{9}$$
以及
$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda. \tag{10}$$
2. 若 $\lambda > 0$ 并且 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 是压缩半群, 则 $\lambda \in \rho(A)$,
$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \,\mathrm{d}t \quad (u \in X), \tag{11}$$
并且 $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$. 因此预解算子是该半群的拉普拉斯变换.

预解算子的性质: 证明

(1) 等式 (9) 成立是因为

$$
\begin{aligned}
(\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu &= (\mu I - A - \lambda I + A)\, R_\lambda R_\mu \\
&= (\mu I - A)\, R_\lambda R_\mu - R_\mu \\
&= R_\lambda(\mu I - A)R_\mu - R_\mu \\
&= R_\lambda - R_\mu .
\end{aligned}
$$

等式 (10) 可以由等式 (9) 直接得到.

(2) 因为 $\lambda > 0$ 以及 $\|S(t)\| \le 1$, 等式 (11) 右边由意义. 我们用 $\widetilde{R}_\lambda u$ 来表示右边的积分. 对任意的 $h > 0$ 以及 $u \in X$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{S(h)\widetilde{R}_\lambda u-\widetilde{R}_\lambda u}{h} =&\frac{1}{h}\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}[S(t+h)u-S(t)u]\,\mathrm{d}t\right\}\\
=&-\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(t-h)}S(t)u\,\mathrm{d}t\\
&+\frac{1}{h}\int_0^\infty (e^{-\lambda(t-h)}-e^{-\lambda t})S(t)u\,\mathrm{d}t\\
=&-e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}S(t)u\,\mathrm{d}t\\
&+\left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)\widetilde{R}_\lambda u-\widetilde{R}_\lambda u}{h}=-u+\lambda\widetilde{R}_\lambda u.
$$

根据 A 的定义可得 $A\widetilde{R}_\lambda u = -u + \lambda \widetilde{R}_\lambda u$, 也就是

$$(\lambda I - A)\,\widetilde{R}_\lambda u = u \quad (u \in X). \tag{12}$$

另一方面, 若 $u \in D(A)$,

$$\begin{aligned} A\widetilde{R}_\lambda u =& A\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\lambda t} A S(t) u \,\mathrm{d}t \\ =& \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) A u \,\mathrm{d}t = \widetilde{R}_\lambda A u. \end{aligned}$$

第二个等号利用了 A 是闭算子这一事实. 因此

$$\widetilde{R}_\lambda\,(\lambda I - A)\,u = u\,(u \in D(A))\,.$$

因为 $\lambda I - A$ 是一一映射且是满射, 所以结合上面的等式以及 (12) 可得

$$\widetilde{R}_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda. \tag{13}$$

Hille-Yosida 定理

Hille-Yosida 定理

Theorem (Hille-Yosida Theorem)

设 A 是闭且在 X 上稠密定义的线性算子. 则 A 是一个压缩半群的生成元当且仅当

$$(0,\infty) \subset \rho(A) \text{ 并且} \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}, \lambda > 0. \tag{14}$$

证明: 必要性由前一定理的性质 (2) 得到. 下证充分性. 设 A 是闭且在 X 上稠密定义的线性算子并且满足条件 (14). 我们需要构造一个压缩半群, 使得 A 是它的生成元.

定义

$$A_\lambda := -\lambda I + \lambda^2 R_\lambda = \lambda A R_\lambda.$$

下面说明证明的具体思路:

(1) 当 $\lambda \to \infty$ 时有

$$A_\lambda u \to Au, u \in D(A).$$

实际上, 因为 $\lambda R_\lambda u - u = AR_\lambda u = R_\lambda Au$, 所以

$$\|\lambda R_\lambda u - u\| \leq \|R_\lambda\| \|Au\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Au\| \to 0.$$

因此当 $\lambda \to \infty$ 时有 $\lambda R_\lambda u \to u, u \in D(A)$. 但是因为 $\|\lambda R_\lambda\| \leq 1$ 并且 $D(A)$ 稠密, 所以当 $\lambda \to \infty$ 时有

$$\lambda R_\lambda u \to u, u \in X. \tag{15}$$

设 $u \in D(A)$, 则

$$A_\lambda u = \lambda AR_\lambda u = \lambda R_\lambda Au.$$

再利用 (15) 即可.

(2) 定义

$$S_\lambda(t) := e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R_\lambda} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} R_\lambda^k.$$

根据 $\|R_\lambda\| \le \lambda^{-1}$ 可以推出 $\|S_\lambda(t)\| \le 1$, 简单的验证可知 A_λ 是压缩半群 $\{S_\lambda(t)\}_{t\ge 0}$ 的生成元且 $D(A) = X$.

(3) 根据预解算子的性质 $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$, 我们可以得到 $A_\lambda A_\mu = A_\mu A_\lambda$, 所以

$$A_\mu S_\lambda(t) = S_\lambda(t) A_\mu.$$

计算

$$\begin{aligned} S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u &= \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[S_\mu(t-s)S_\lambda(s)u]\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t S_\mu(t-s)S_\lambda(s)(A_\lambda u - A_\mu u)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{16}$$

再利用步骤 (1) 和 (2) 得到的结论, 可得当 $u \in D(A)$ 时, 有

$$\|S_\lambda(t)u - S_\mu(t)u\| \le t\|A_\lambda u - A_\mu u\| \to 0\,(\lambda, \mu \to \infty)\,.$$

因此对任意的 $u \in D(A), t \ge 0$, 我们可以定义

$$S(t) := \lim_{\lambda\to\infty} S_\lambda(t)u. \tag{17}$$

直接验证可得 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 是在 X 上的压缩半群.

(4) 最后我们要证明 A 是压缩半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 的生成元. 设 B 为其生成元. 注意到

$$S(t)u-u=\lim_{\lambda\to\infty}S_\lambda(t)u-u=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t S_\lambda(s)A_\lambda u\,\mathrm{d}s \tag{18}$$

以及当 $\lambda\to\infty$ 时有

$$\|S_\lambda(s)A_\lambda u-S(s)Au\|\leq\|S_\lambda(s)\|\|A_\lambda u-Au\|+\|(S_\lambda(s)-S(s))Au\|\to 0.$$

从而

$$S(t)u-u=\int_0^t S(s)Au\,\mathrm{d}s,\quad u\in D(A).$$

因此 $D(A)\subset D(B)$ 并且

$$Bu=\lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)u-u}{t}=Au,\quad u\in D(A).$$

当 $\lambda>0,\lambda\in\rho(A)\cap\rho(B)$ 时, 有

$$(\lambda I - B)\,(D(A)) = (\lambda I - A)\,(D\,(A)) = X.$$

从而 $(\lambda I - B)|_{D(A)}$ 是一一对应并且满射, 该事实立刻可以得到 $D(A) = D(B)$. 因此 $A = B$.

Hille-Yosida 定理的推广形式

Theorem

设 $\omega \in \mathbb{R}$. 一个半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 被称为 ω-压缩, 如果其满足 $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}(t \geq 0)$. 设 A 是闭且在 X 上稠密定义的线性算子, 则 A 是一个 ω-压缩半群的生成元当且仅当

$$(\omega, \infty) \subset \rho(A) \text{ 并且} \|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \lambda > \omega. \tag{19}$$

令 $\widetilde{S}(t) = e^{-\omega t} S(t)$, 则 $\left\{\widetilde{S}(t)\right\}_{t\geq 0}$ 是压缩半群. 如果 A 生成了 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, 则

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0+} \frac{\widetilde{S}(t)u - u}{t} &= \lim_{t\to 0+} \frac{e^{-\omega t} S(t)u - u}{t} \\
&= \lim_{t\to 0+} \frac{e^{-\omega t}(S(t)u - u) + (e^{-\omega t} - 1)u}{t} \\
&= (A - \omega I)u.
\end{aligned}$$

应用举例

二阶抛物 PDE

考虑下面的初边值问题

$$\begin{cases} u_t + Lu = 0 \text{ in } U_T \\ u = 0 \text{ on } \partial U \times [0, T] \\ u = g \text{ on } U \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{20}$$

这里 L 是散度形一致椭圆 PDE 算子, 系数光滑且不依赖于 t. 另外我们还要求 U 有光滑边界.

设 $X = L^2(U)$ 以及

$$D(A) := H_0^1(U) \cap H^2(U). \tag{21}$$

定义

$$Au := -Lu \quad u \in D(A). \tag{22}$$

二阶抛物 PDE 的半群

Theorem

由 (22) 式定义的算子 A 生成一个 $L^2(U)$ 上的 γ-压缩半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

证明: 我们需要验证 A 满足推广后的 Hille-Yosida 定理的条件.

(1) 显然由 (21) 式给出的 $D(A)$ 在 $L^2(U)$ 中稠密.

(2) 说明 A 是闭算子. 设 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(A)$ 并且在 $L^2(U)$ 中满足

$$u_k \to u, \quad Au_k \to f. \tag{23}$$

根据椭圆 PDE 的正则性定理, 对任意的 $k, l = 1, 2, \cdots$ 有

$$\|u_k - u_l\|_{H^2(U)} \leq C \left(\|Au_k - Au_l\|_{L^2(U)} + \|u_k - u_l\|_{L^2(U)} \right).$$

结合 (23) 式可得 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $H^2(U)$ 中的柯西列, 所以在 $H^2(U)$ 中有 $u_k \to u$, 因此 $u \in D(A)$,$Au_k \to Au$(这是因为在 $H^2(U)$ 上 $u_k \to u$),$f = Au$.

(3) 验证预解条件 (19)(其中的 ω 被 γ 代替). 在椭圆 PDE 中, 我们有能量估计

$$\beta\|u\|^2_{H_0^1(U)} \le B[u,u] + \gamma\|u\|^2_{L^2(U)}. \tag{24}$$

对 $\lambda \ge \gamma$, 考虑边值问题

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = f \text{ in } U \\ u = 0 \text{ in } \partial U. \end{cases} \tag{25}$$

该问题对任意的 $f \in L^2(U)$ 有唯一的弱解 $u \in H_0^1(U)$. 根据正则性理论,$u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$. 因此 $u \in D(A)$. 我们可以重写问题 (25) 为

$$\lambda u - Au = f. \tag{26}$$

因此当 $\lambda \ge \gamma$ 的时候,$(\lambda I - A) : D(A) \to X$ 是一一映射并且是满射. 所以 $\rho(A) \supset [\gamma, \infty)$.

(4) 考虑边值问题 (25) 的弱形式

$$B[u,v] + \lambda(u,v) = (f,v), \forall v \in H_0^1(U).$$

令 $v=u$, 并利用估计式 (24) 可得

$$(\lambda-\gamma)\|u\|_{L^2(U)}^2 \leq \|f\|_{L^2(U)}\|u\|_{L^2(U)}.$$

因此, 由 $u=R_\lambda f$ 可得

$$\|R_\lambda f\|_{L^2(U)} \leq \frac{1}{\lambda-\gamma}\|f\|_{L^2(U)}.$$

由 $f\in L^2(U)$ 的任意性可得

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda-\gamma} \quad (\lambda>\gamma)\,. \tag{27}$$

二阶双曲 PDE

考虑下面的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}+Lu=0 \text{ in } U_T \\ u=0 \text{ on } \partial U\times[0,T] \\ u=g, u_t=h \text{ on } U\times\{t=0\}. \end{cases} \tag{28}$$

通过设 $v:=u_t$, 把问题 (28) 转化为

$$\begin{cases} u_t=v, v_t+Lu=0 \text{ in } U_T \\ u=0 \text{ on } \partial U\times[0,T] \\ u=g, v=h \text{ on } U\times\{t=0\}. \end{cases} \tag{29}$$

$L=-\left(a^{ij}u_{x_i}\right)_{x_j}+cu$ 除了满足抛物 PDE 中的条件, 进一步设其满足 $c\geq 0, a^{ij}=a^{ji}(i,j=1,\cdots,n)$. 从而对于某个 $\beta>0$, 有

$$\beta\|u\|^2_{H^1_0(U)} \le B[u,u] \quad \forall u \in H^1_0(U). \tag{30}$$

取

$$X = H^1_0(U) \times L^2(U),$$

相应的范数定义为

$$\|(u,v)\| := (B[u,u] + \|v\|^2_{L^2(u)})^{1/2}. \tag{31}$$

定义

$$D(A) := [H^2(U) \cap H^1_0(U)] \times H^1_0(U)$$

并且设

$$A(u,v) := (v, -Lu) \quad \forall (u,v) \in D(A). \tag{32}$$

二阶双曲 PDE 的半群

Theorem

由 (32) 式定义的算子 A 生成一个 $H_0^1(U)\times L^2(U)$ 上的压缩半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

证明:

(1) 首先 A 的定义域显然在 $H_0^1(U)\times L^2(U)$ 中稠密.

(2) 为了说明 A 是闭线性算子, 设 $\{(u_k,v_k)\}_{k=1}^\infty\subset D(A)$ 且

$$(u_k,v_k)\to(u,v), A(u_k,v_k)\to(f,g),\ \text{in } H_0^1(U)\times L^2(U).$$

因为 $A(u_k,v_k)=(v_k,-Lu_k)$, 所以 $f=v$ 并且在 $L^2(U)$ 范数下 $Lu_k\to -g$. 和上一个证明一样, 可以得到在 $H^2(U)$ 中 $u_k\to u$ 以及 $g=-Lu$, 因此 $(u,v)\in D(A)$, $A(u,v)=(v,-Lu)=(f,g)$.

(3) 现在设 $\lambda>0$,$(f,g)\in X:=H_0^1(U)\times L^2(U)$ 并考虑方程

$$\lambda(u,v) - A(u,v) = (f,g). \tag{33}$$

这等价于下面的方程组

$$\begin{cases} \lambda u - v = f & \left(u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)\right) \\ \lambda v + Lu = g & \left(v \in H_0^1(U)\right). \end{cases} \tag{34}$$

由方程组 (34) 可以得到

$$\lambda^2 u + Lu = \lambda f + g \quad \left(u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)\right). \tag{35}$$

因为 $\lambda^2 > 0$, 由估计式 (30) 和这则性理论可得方程 (35) 有唯一的解 u. 再设 $v := \lambda u - f \in H_0^1(U)$, 我们就得到了方程 (33) 的唯一解 (u,v). 所以 $\rho(A) \supset (0,\infty)$.

(4) $(u,v) = R_\lambda(f,g)$, 从方程组 (34) 的第二个方程可得

$$\lambda\|v\|_{L^2}^2 + B[u,v] = (g,v)_{L^2}.$$

将 $v=\lambda u-f$ 代入可得

$$\begin{aligned}\lambda\left(\|v\|_{L^2}^2+B[u,u]\right)=&(g,v)_{L^2}+B[u,f]\\ \le&\left(\|g\|_{L^2}^2+B[f,f]\right)^{1/2}\left(\|v\|_{L^2}^2+B[u,u]\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

这里根据系数满足 $a^{ij}=a^{ji}$ 的假设, 用到了广义的 Cauchy-Schwarz 不等式. 根据范数定义 (31), 可得

$$\|(u,v)\|\le\frac{1}{\lambda}\|(f,g)\|.$$

进而

$$\|R_\lambda\|\le\frac{1}{\lambda}\quad(\lambda>0).$$

解的正则性

初始条件的正则性表示

对于抽象常微分方程 (1), 如果初始函数 u 正则性越高, 那么解的正则性一般也会提高. 如果没有特殊声明, 以下的讨论都是对抽象常微分方程 (1) 的讨论, 并且假定 A 是压缩算子的生成元.

Definition

定义

$$\begin{aligned} D(A^k) &:= \left\{u : u \in D(A^{k-1}), Au \in D(A^{k-1}), k \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \left\{u : A^j u \in X, j = 0, \cdots, k, A^0 u = u\right\} \end{aligned} \tag{36}$$

以及相应的范数

$$\|u\|_{D(A^k)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|A^j u\|^2\right)^{1/2}. \tag{37}$$

正则性定理

Theorem

设 $u \in D(A^k)$ 并且 A 为压缩半群的生成元. 则方程 (1) 的解 u 属于

$$\bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}\left([0,+\infty), D(A^j)\right).$$

证明: 我们利用归纳法证明该定理. 首先 $k=1$ 的情形肯定成立. 现在假设小于等于 $k-1$ 时的情形成立, 我们需要证明 k 的时候也成立. 考虑方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Av \\ v(0) = Au \in D(A^{k-1}), \end{cases} \tag{38}$$

其中 $u \in D(A^k)$. 根据归纳假设, 上述方程有唯一的解:

$$v(t) = S(t)Au \in \bigcap_{j=0}^{k-1} C^{k-1-j}\left([0,+\infty), D(A^j)\right). \tag{39}$$

令

$$\overline{u}(t) = u + \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = u + \int_0^t S(\tau)Au\,\mathrm{d}\tau. \tag{40}$$

显然

$$\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}t} = v(t) \in \bigcap_{j=0}^{k-1} C^{k-1-j}\left([0,+\infty), D(A^j)\right). \tag{41}$$

另一方面

$$\overline{u}(t) = u + \int_0^t AS(\tau)u\,\mathrm{d}\tau = u + \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau = u(t). \tag{42}$$

所以

$$Au(t) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \in \bigcap_{j=0}^{k-1} C^{k-1-j}\left([0,+\infty), D(A^j)\right). \tag{43}$$

非齐次方程

非齐次方程的解

Theorem

考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Au + f(t), \\ u(0) = u. \end{cases} \tag{44}$$

其中 A 是压缩半群的生成元. 假设 $f(t) \in C^1([0,+\infty), X)$, $u \in D(A)$, 则上述初值问题有唯一的经典解

$$u \in C^1([0,+\infty), X) \cap C([0,+\infty), D(A))$$

并可以表示为

$$u(t) = S(t)u + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{45}$$

证明: 因为 $S(t)u$ 满足齐次方程的解和非齐次方程的初值条件, 所以我们只需要证明

$$w(t)=\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

属于

$$C^1([0,+\infty),X)\cap C([0,+\infty),D(A))$$

并且满足非齐次方程. 考虑差商

$$\begin{aligned}\frac{w(t+h)-w(t)}{h}=&\frac{1}{h}\left(\int_0^h S(t+h-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau-\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\\=&\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\&+\frac{1}{h}\int_0^t\left(S(t+h-\tau)-S(t-\tau)\right)f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\\\rightarrow&S(0)f(t)+Aw(t)=f(t)+Aw(t)\quad(h\rightarrow 0).\end{aligned}\tag{46}$$

通过对积分变量 τ 的替换, 上式可以改写为

$$\begin{aligned}\frac{w(t+h)-w(t)}{h} =& \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(z)f(t+h-z)\,\mathrm{d}z \\ &+ \frac{1}{h}\int_0^t S(z)\left(f(t+h-z)-f(t-z)\right)\,\mathrm{d}z \\ \to& S(t)f(0)+\int_0^t S(z)f'(t-z)\,\mathrm{d}z \in C\left([0,+\infty),X\right).\end{aligned} \tag{47}$$

这说明 $w \in C^1\left([0,+\infty),X\right)$.

Corollary

若

$$f(t) \in C\left([0, +\infty), D(A)\right), \quad u \in D(A),$$

则通过 (45) 式给定的 $u(t)$ 是其经典解.

证明: 回忆之前半群的性质, 当函数属于 $D(A)$ 时, 其被半群作用后是关于时间可微的, 这条性质代替了前面定理中 $f(t)$ 的连续可微性, 其余证明一样.

Corollary

设

$$u \in D(A), \quad f \in C\left([0, +\infty), X\right)$$

以及对于任意的 $T > 0$, 都有

$$f' \in L^1\left([0, T], X\right).$$

则通过 (45) 式给定的 $u(t)$ 是其经典解.

温和解

当 u 不属于 $D(A)$ 或者 $f(t)$ 的性质不够强的时候, 我们依然可以定义解为 (45) 式的形式, 但此时的解不一定是经典解, 称其为温和解. 通过半群理论解决具体的方程问题, 不管是齐次还是非齐次, 线性还是半线性, 可以先给出温和解, 再证明温和解在一定条件下是经典解. 这和先给出弱解再证明弱解的正则性是类似的.

解析半群

为什么需要解析半群

之前讨论的半群又叫 C_0-半群或者强连续半群. 如果我们想提高解的正则性, 那么反映在半群上就是半群的性质变得更好. 解析半群便是起到这样的作用, 它可以为初值问题提供更高正则性的解.

解析半群的定义

Definition

设

$$\Delta = \{z : \phi_1 < \arg z < \phi_2\}, \quad \phi_1 < 0 < \phi_2.$$

设 $\{S(z)\}_{z\in\Delta}$ 是 X 上的有界线性算子集合. 若 $\{S(z)\}_{z\in\Delta}$ 满足下述条件

1. $z \to S(z)$ 在 Δ 上解析.
2. $S(0) = I$ 并且对任意的 $x \in X$, 有
$$\lim_{z\to 0, z\in\Delta} S(z)x = x.$$
3. 对任意的 $z_1, z_2 \in \Delta$ 有 $S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$.

则称 $\{S(z)\}_{z\in\Delta}$ 为 Δ 上的解析半群.

一个半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 是解析的, 如果其在 Δ 上的延拓是解析的.

Theorem (解析半群的性质)

设 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 是一致有界的 C_0-半群,$0 \in \rho(A)$, 则下面的陈述等价:

(1) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 可以被延拓为在区域

$$\Delta_\delta = \{z : |\arg z| < \delta\}$$

上的解析半群并且在每一个闭子区域 $\overline{\Delta}_{\delta'}, \delta' < \delta$ 上都一致有界.

(2) 存在常数 C 使得对任意 $\sigma > 0, \tau \neq 0$, 有

$$\|R_{\sigma+i\tau}\| = \|((\sigma + i\tau) I - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\tau|}. \tag{48}$$

(3) 存在 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ 以及 $M > 0$ 使得

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{\lambda : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\} \tag{49}$$

以及对任意的 $\lambda \in \Sigma, \lambda \neq 0$ 有

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{|\lambda|}. \tag{50}$$

(4) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 对任意 $t>0$ 都是可微的并且存在一个常数 C 使得

$$\|AS(t)\| \leq \frac{C}{t}, \quad \forall t>0. \tag{51}$$

类似于 Hille-Yosida 定理的一般形式, 我们也可以得到上述定理的的推广, 考虑 $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, 则相当于对谱点进行平移, 例如第三个条件就可以改写为

(3')

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{\lambda : |\arg(\lambda-\omega)| < \frac{\pi}{2}+\delta\right\} \cup \{\lambda=\omega\}. \tag{52}$$

以及

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{|\lambda-\omega|}. \tag{53}$$