偏微分方程理论作业

王允磊

2020 年 7 月 5 日

目录

1 Sobolev 空间

习题 1. 若 $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明 Hölder 不等式:

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

证明: 由不等式的齐次对称性, 不妨令 $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. 设 $\theta = \frac{1}{p}$, 则 $1-\theta = \frac{1}{q}$. 令 $F = |f|^p, G = |g|^q$. 则需要被证明的不等式转化为

$$\int_X F^\theta G^{1-\theta} \mathrm{d}\mu \leq 1. \tag{1}$$

由 $\ln x$ 函数的凸性可得

$$F^\theta(x)G^{1-\theta}(x) \leq \theta F(x) + (1-\theta)G(x).$$

对上式积分便得到 (1) 式. $\square$

习题 2. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 证明 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n), 2 \leq p \leq \infty$.

证明: 令 q 满足
$$1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q},$$
其中 $1 \leq q \leq 2$. 则由 Young 不等式可得
$$\|e^{-|x|^2} * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$
而
$$\|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q|x|^2} \mathrm{d}x < \infty,$$
且 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 所以 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

习题 3. 设
$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$
求证: $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

证明: 设
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
当 $x > 0$ 时, 求导得
$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{1}{x^2} f(x) \\ f''(x) =& \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) f(x) \\ f'''(x) =& \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4} \right) f(x) \\ & \cdots\cdot \end{aligned}$$
从上述几个导数易知可以归纳证明得到当 $x > 0$ 时有
$$f^{(k)}(x) = P_{2k}(x^{-1}) f(x),$$

其中 P_{2k} 是次数为 $2k$ 的多项式. 由多项式和 e 指数的增长速率关系可得

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = \lim_{x\to +\infty} P_{2k}(x)e^{-x} = 0.$$

所以对任意的 $n > 0$, 都有 $\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$. 再利用分析学中的一个定理:

定理 1.1. 设 f 是在 $x = a$ 处连续的函数,$f'(x)$ 在 $x = a$ 的一个去心领域上处处存在且

$$\lim_{x\to a} f'(x)$$

存在, 则 $f'(a)$ 存在且

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

证明*:* 根据导数定义

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

由中值定理 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_x)$,$a < \xi_x < x$. 所以

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(\xi_x) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

□

把该定理用到上面定义的函数上就得到函数 f 在 $x = 0$ 处任意阶右导数都存在且

$$f_+^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

而当 $|x| \leq 1$ 时, 由

$$\begin{aligned}
\phi(x) =& f(1 - x^2) \\
\phi'(x) =& -2xf'(1 - x^2) \\
\phi''(x) =& -2f'(1 - x^2) + 4x^2 f''(1 - x^2) \\
& \cdots
\end{aligned}$$

知

$$\phi_-^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

另一方面, 由 $|x| \geq 1$ 时 $\phi(x) = 0$ 知

$$\phi_{+}^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

所以 $x = 1$ 时

$$\phi^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$x = -1$ 时同理.

$\square$

习题 4. 若 $1 \leq q \leq 2$, 证明对任意 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.$$

证明: 设 $x = (x_1, x_2)$. 因为 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, 所以 u 可以写成

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x_2} u(x_1, t) \mathrm{d}t.$$

进而有

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i u| \mathrm{d}x_i \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u| \mathrm{d}x_i, x \in \mathbb{R}^2.$$

那么

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 \mathrm{d}x \leq & \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(x)| \mathrm{d}x_1 \int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x)| \mathrm{d}x_2 \\
= & \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

利用平均不等式 (下式第二行到第三行) 可得

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = & \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| \mathrm{d}x \right) \\
\leq & \frac{1}{2} \left(\|\partial_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_2 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \right) \\
\leq & \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

对于 $1 < q < 2$ 的情况, 可以利用插值不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\theta} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\theta} \quad 0 < \theta < 1$$

得到. □

习题 5. 设 $f(x) = x^{\frac{1}{4}}\ x \in [0,1]$, 则 $f \in C^{0,\frac{1}{4}}$, 但是 $f \notin C^{0,\mu}, \mu > \frac{1}{4}$.

证明: 根据 $C^{0,\mu}$ 的定义, 我们需要计算范数

$$\|f\|_{C^{0,\mu}[0,1]} := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + [f]_{\mu,[0,1]},$$

其中半范数

$$[f]_{\mu,[0,1]} := \sup_{x,y\in[0,1],x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^{\mu}}.$$

$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 1$, 所以只要计算半范数 $[f]_{\mu,[0,1]}$. 实际上我们可以证明一个一般结论: 对于任意的 $f(x) = x^{\alpha}$,$0 < \alpha < 1$, 我们都有 $f \in C^{0,\alpha}$. 为了证明这个一般结论, 我们需要下述引理建立的不等式

引理 1.2. 设 $x > 0$,$0 < \alpha < 1$, 则

$$(x+1)^{\alpha} \leq x^{\alpha} + 1.$$

证明: 令 $g(x) = (x+1)^{\alpha} - x^{\alpha} - 1$, 则

$$g'(x) = \alpha \left(\frac{1}{(x+1)^{1-\alpha}} - \frac{1}{x^{1-\alpha}} \right) \leq 0.$$

又因为 $g(0) = 0$, 所以 $g(x) \leq g(0) = 0$, 不等式得证. □

那么由引理中的不等式可得对 $a, b > 0$ 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} + 1\right)^{\alpha} &\leq \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} + 1 \\ (a+b)^{\alpha} &\leq a^{\alpha} + b^{\alpha}. \end{aligned}$$

(上式对 $a = 0$ 或 $b = 0$ 时是显然的.) 令 $a = x - y, b = y, x > y$ 可得

$$x^{\alpha} \leq (x-y)^{\alpha} + y^{\alpha}.$$

所以当 $x > y$ 时, 有

$$x^\alpha - y^\alpha \leq (x-y)^\alpha$$

特别地, 当 $\mu = \frac{1}{4}$ 且 $x > y$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| =& |x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}| \\ \leq & |x-y|^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

$x < y$ 的情况同理. 上述不等式说明

$$[f]_{\frac{1}{4},[0,1]} \leq 1 < \infty.$$

所以 $f \in C^{0,\frac{1}{4}}$. 对于 $\mu > \frac{1}{4}$ 的情形, 我们有

$$\sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\mu} \overset{令 y=0}{\geq} \sup_{x\in(0,1]} \frac{f(x)}{x^\mu} = \sup_{x\in(0,1]} x^{\frac{1}{4}-\mu} = \infty.$$

所以 $f \notin C^{0,\mu}, \mu > \frac{1}{4}$. □

习题 6. 设 $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, 说明 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 但是 $u \notin L^\infty(\Omega)$. 其中

$$u(x) = \ln\ln(1 + \frac{1}{|x|}), \quad |x| < 1, \quad , |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

证明: 对 $u(x)$ 求偏导可得

$$\begin{aligned} \partial_1 u =& -\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{|x|})} \frac{1}{1+\frac{1}{|x|}} \frac{x_1}{|x|^3}, \\ \partial_2 u =& -\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{|x|})} \frac{1}{1+\frac{1}{|x|}} \frac{x_2}{|x|^3}. \end{aligned}$$

从而

$$|\partial_i u| = \left| \frac{1}{|x|\ln(1+\frac{1}{|x|})} \frac{1}{|x|+1} \frac{x_i}{|x|} \right| \leq \frac{1}{|x|\ln(1+\frac{1}{|x|})}. \tag{3}$$

利用不等式 $\ln(1+x) \leq x$ 可得

$$|u(x)| \leq \ln \frac{1}{|x|} = -\ln|x|.$$

则利用该不等式以及极坐标来表示积分,$r=|x|, 0<r<1$, 可得

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2=\int_\Omega |u(x)|^2 \mathrm{d}x \le \int_\Omega r\ln^2 r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^1 r\ln^2 r\mathrm{d}r<\infty.$$

另一方面, 利用 (3) 式得

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}^2=\int_\Omega |\partial_i u|^2 \mathrm{d}x \le \int_\Omega \left(\frac{1}{r\ln(1+\frac{1}{r})}\right)^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{r\ln^2(1+\frac{1}{r})}\mathrm{d}r.$$

由 $-\mathrm{d}\left(\ln(1+\frac{1}{r})\right)=\frac{1}{r^2+r}\mathrm{d}r$, 令 $\ln(1+\frac{1}{r})=u$ 得

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)} \le 2\pi\int_{\ln 2}^\infty \frac{r+1}{u^2}\mathrm{d}u \le 4\pi\int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u<\infty.$$

综上可知,$u\in W^{1,2}(\Omega)$.

由 u 在去心邻域 $\Omega\backslash 0$ 上的连续性以及 $\lim_{|x|\to\infty} u(x)=\infty$ 知显然有 $u\notin L^\infty(\Omega)$. □

2 Fourier 分析

习题 7. 设 $f\in L^1(\mathbb{R})$, 定义 Fourier 变换

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\mathrm{d}x,\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

(1) 若 $f(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 则 $\widehat{f}(\xi)=e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

(2) 若 $f,g\in L^1(\mathbb{R})$, 则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f\overline{g}\mathrm{d}x =&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\overline{\widehat{g}}\mathrm{d}\xi;\\ \widehat{fg} =&(2\pi)^{-1}\widehat{f}*\widehat{g}.\end{aligned}$$

证明:

(1) 根据 Fourier 变换的定义可得

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi)=&\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\mathrm{d}x\\ =&(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \qquad .\\ =&(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{4}$$

剩下的问题就是求 $\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2}\mathrm{d}x$, 可以通过计算 $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的方法同样求得

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = (2\pi)^{\frac{1}{2}}.$$

代入 (4) 中可得

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

(2)

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\overline{\widehat{g}}\mathrm{d}\xi \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\mathrm{d}x\right)\overline{\widehat{g}}(\xi)\mathrm{d}\xi \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\overline{\widehat{g}}(\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x \\
=&\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\left((2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\widehat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi\right)}\mathrm{d}x \\
=&\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-1}\widehat{f}*\widehat{g} \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi-\zeta)\widehat{g}(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
=&(2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix(\xi-\zeta)}f(x)\mathrm{d}x\right)g(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
=&\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\left((2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\zeta}g(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}\xi \\
=&\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
=&\widehat{fg}.
\end{aligned}$$

□

习题 8.

(1) 若 $|\widehat{f}(\xi)| \le e^{-|\xi|}, \xi \in \mathbb{R}$, 求证 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(2) 若 $1 \le p \le 2$, 且对于任意 $f \in L^p$ 有不等式

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

求证: q 必须满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证明: (1) 这是 Paley-Wiener 定理的特殊情况, 只要在定理中取 $a=\frac{1}{2}$, 则 $e^{\frac{1}{2}|\xi|}|\widehat{f}|\leq e^{-\frac{1}{2}|\xi|}$, 所以 $e^{\frac{1}{2}|\xi|}\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R})$, 从而 f 在带形区域 $\left\{(x+iy):x\in\mathbb{R},|y|\leq\frac{1}{2}\right\}$ 解析, 当然有 $f\in C^\infty$, 命题得证.

(2) 假设对于所有的 $f\in L^p$ 都有

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})}\leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \tag{5}$$

用 $\varphi(x)=f(\lambda x),\lambda\neq 0$ 代替 $f(x)$ 可得

$$\|\widehat{\varphi}\|_{L^q(\mathbb{R})}\leq C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}. \tag{6}$$

其中

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\frac{1}{\lambda}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

对新的函数计算相应的范数:

$$\begin{aligned}\|\widehat{\varphi}\|_{L^q(\mathbb{R})}&=\left(\frac{1}{\lambda^q}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right|^q\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\frac{1}{\lambda^{q-1}}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right|^q\mathrm{d}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{q-1}{q}}\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R})}&=\left(\int_{\mathbb{R}}|f(\lambda x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p}}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(\lambda x)|^p\,\mathrm{d}\left(\lambda x\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p}}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

上述两个结果代入不等式 (6) 可得

$$\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R})}\leq\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{q-1}{q}}C\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

如果指数 $\frac{1}{p}-\frac{q-1}{q}$ 不等于 0, 例如当它大于 0 的时候, 取 $\lambda\to\infty$, 不等式右边便趋于 0, 这是不可能的 (小于 0 时就令 $\lambda\to 0$). 所以指数只能等于 0. 所以

$$\frac{1}{p}-\frac{q-1}{q}=0,$$

整理可得

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1.$$

$\square$

习题 9.

(1) 对于给定函数 $w(x)\in C_0^\infty$, 定义

$$(Tf)(x)=\int_{\mathbb{R}} f(y)w(x-y)\mathrm{d}y, x\in\mathbb{R}, f\in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

证明 T 是平移不变算子.

(2) 设 $1<p<\infty$, 利用 Mihlin-Hormander 乘子定理证明

$$\|\partial_1\partial_2 f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\leq C\|(\partial_1^2+\partial_2^2)f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)},\quad \forall f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

证明:

(1)

$$\begin{aligned}
T(\tau_a f)=&Tf(x-a)\\
=&\int_{\mathbb{R}} f(y-a)w(x-y)\mathrm{d}y\\
=&\int_{\mathbb{R}} f(y)w(x-y-a)\mathrm{d}y\\
=&\int_{\mathbb{R}} f(y)w(x-a-y)\mathrm{d}y\\
=&(Tf)(x-a)\\
=&\tau_a Tf,\quad ,\forall a\in\mathbb{R}, f\in C_0^\infty(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

其中第四个等号是利用 $y+a$ 代替 a 并利用了函数具有紧支集的性质.

(2) 令 $g=(\partial_1^2+\partial_2^2)f$, 则需要证明的不等式等价于

$$\|\partial_1\partial_2(\partial_1^2+\partial_2^2)^{-1}g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \le C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

因为 $\partial_1\partial_2(\partial_1^2+\partial_2^2)^{-1}g$ 的傅里叶变换为 $\xi_1\xi_2(\xi_1^2+\xi_2^2)^{-1}$, 因此只需说明 $m=\xi_1\xi_2(\xi_1^2+\xi_2^2)^{-1}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. 根据 Mihlin-Hörmander 乘子定理, 只需要证明

$$|\partial_\xi^\alpha m(\xi)|\le C_\alpha|\xi|^{-|\alpha|}$$

对所有的 $|\alpha|\le 2$ 成立.

1. $\alpha=0$.
   因为
   $$\frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1^2+\xi_2^2}\le\frac{1}{2}=\frac{1}{2}|\xi|^0,$$
   所以该情况下定理要求的条件成立.
2. $\alpha=1$, $\partial_\xi^\alpha=\partial_1$.
   $\partial_1 m(\xi)=\frac{\xi_2^3-\xi_1^2\xi_2}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}, |\xi|^{-1}=(\xi_1^2+\xi_2^2)^{-1/2}$, 我门要验证
   $$\frac{|\xi_2^3-\xi_1^2\xi_2|}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^2}\le C_1\frac{1}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^{\frac{1}{2}}},$$
   其中 C_1 是某个确定的常数. 也就是要证明
   $$|\xi_2||\xi_2^2-\xi_1^2|\le C_1(\xi_1^2+\xi_2^2)^{\frac{3}{2}}. \tag{7}$$
   注意到
   $$|\xi_2|\le(\xi_1^2+\xi_2^2)^{\frac{1}{2}}\text{ 以及}|\xi_2^2-\xi_1^2|\le(\xi_2^2+\xi_1^2),$$
   代入 (7) 式的左边并取 $C_1=1$ 即可得到该不等式.
3. $\alpha=1,\partial_\xi^\alpha=\partial_2$.
   这与上一情况雷同, 只是指标互换, 验证同上.
4. $\alpha=2,\partial_\xi^\alpha=\partial_1^2$.
   $\partial_1^2 m(\xi)=\frac{2\xi_1^3\xi_2-6\xi_1\xi_2^3}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^3}, |\xi|^{-2}=(\xi_1^2+\xi_2^2)^{-1}$, 我们要验证
   $$\frac{|2\xi_1^3\xi_2-6\xi_1\xi_2^3|}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^3}\le C_2\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2},$$

其中 C_2 是某个确定的常数. 也就是要证明

$$|2\xi_1\xi_2||\xi_1^2 - 3\xi_2^2| \leq C_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2. \tag{8}$$

注意到

$$|2\xi_1\xi_2| \leq \xi_1^2 + \xi_2^2 \text{ 以及} |\xi_1^2 - 3\xi_2^2| \leq 3(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

代入 (8) 式的左边并取 $C_2 = 3$ 即可得到该不等式.

5. $\alpha = 2, \partial^\alpha = \partial_2^2$.
   这与上一情况相同, 只是指标互换, 验证同上.
6. $\alpha = 2, \partial^\alpha = \partial_1\partial_2$.
   $\partial_1\partial_2 m(\xi) = \frac{6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4}{(\xi_1^2+\xi_2^2)^3}, |\xi|^{-2} = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1}$, 我们要验证

$$\frac{|6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4|}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^3} \leq C_3 \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2},$$

其中 C_3 是某个确定的常数. 也就是要证明

$$|6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4| \leq (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2, \tag{9}$$

注意到

$$\begin{aligned} |6\xi_1^2\xi_2^2 - \xi_1^4 - \xi_2^4| =& |(\xi^2 + \xi_2^2)^2 - 8\xi_1^2\xi_2^2| \\ \leq& (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + 8\xi_1^2\xi_2^2 \\ \leq& 3(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2. \end{aligned}$$

代入 (9) 式的左边并取 $C_3 = 3$ 即可得到该不等式.

综上,Mihlin-Hörmander 乘子定理的所有条件都满足.

$\square$

习题 10. 详细证明测不准原理

$$\|xf\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\partial_x f\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

证明: 由 $\widehat{\partial_x f}(\xi)=i\xi\widehat{f}(\xi)$ 以及 Plancherel 定理可将要证明的不等式转化为

$$\|xf\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\xi\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}\geq\frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

定义 $[A,B]=AB-BA$, $(\cdot,\cdot)$ 表示 L^2 中的内积

$$(f,g):=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x.$$

定义 $D=i\partial_x$, 考虑

$$I=([x,D]f,f)\,.$$

下面用两种方式估计 I.

一方面, 利用交换子的定义可得

$$\begin{aligned}I=&(xDf,f)-(Dxf,f)\\=&(Df,xf)-(xf,Df)\\=&2\mathrm{Im}\,(Df,xf)\\\leq&2\|Df\|_{L^2(R)}\|xf\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

最后一步用到了 Cauchy-Schwartz 不等式.

另一方面, 直接计算可得

$$\begin{aligned}[x,D]f=&xDf-Dxf\\=&xDf-Dxf=if.\end{aligned}$$

因此

$$I=([x,D]f,f)=i(f,f)=i\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

联合第一步可知

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\leq2\|\xi f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|xf\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

□

3 椭圆方程

习题 11. 设 $f\in L^2(\mathbb{R}^n),u\in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ 是方程

$$(1+\Delta)u=f,\quad x\in\mathbb{R}^n$$

的弱解. 证明: 对于任意有界开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, 有 $u\in W^{2,2}(\Omega)$.

证明: 根据弱解的定义, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \partial_i u \partial_i v \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} (u - f) v \mathrm{d}x \quad \forall v \in W_0^1(\mathbb{R}^n). \tag{10}$$

对任意的函数 $f(x)$, 定义在 x 点的 e^i 方向步长为 h 的差分为

$$\Delta_i^h f(x) := \frac{f(x + he^i) - f(x)}{h}.$$

则对任意的 $j = 1, 2, \cdots, n$, 设 Ω 是任意的有界开集, 设 $\Omega \subset\subset \Omega'$,$\Omega'$ 也是一个有界开集. 设 v 的支撑在 Ω' 中, 则有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_j^h \partial_i u \partial_i v \mathrm{d}x &= - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \partial_i u \partial_i \Delta_j^{-h} v \mathrm{d}x \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} (u - f) \Delta_j^{-h} v \mathrm{d}x \\ &\leq C(n) \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega')}.\end{aligned}$$

其中第二个等号是将 (10) 式中的 v 替换成 $\Delta_j^{-h} v$. 为了得到 u 的二阶弱导数的存在性, 设 $\eta \in C_0^1(\Omega')$ 并且满足 $0 \leq \eta \leq 1$, 令 $v = \eta^2 \Delta_k^h u$, 则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\eta \nabla \Delta_k^h u|^2 \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \eta^2 \Delta_k^h \partial_i u \Delta_k^h \partial_i u \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_k^h \partial_i u \left(\partial_i v - 2\Delta_k^h u \eta \partial_i \eta \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_k^h \partial_i u \partial_i v \mathrm{d}x - 2 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \Delta_k^h \partial_i u \Delta_k^h u \eta \partial_i \eta \mathrm{d}x \\ &\leq C(n) \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega')} \\ &\quad + 2\|\eta \nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')} \|\Delta_k^h u \nabla u\|_{L^2(\Omega')}.\end{aligned}$$

注意到

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega')} = \|2\eta \nabla \eta \Delta_k^h u + \eta^2 \nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')} \leq \|2\eta \nabla \eta \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')} + \|\eta \nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} |\eta \nabla \Delta_k^h u|^2 \mathrm{d}x \leq& C(n) \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \left(2\|\eta \Delta_k^h u \nabla \eta\|_{L^2(\Omega')} + \|\eta \nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')} \right) \\ &+ 2\|\eta \nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')} \|\Delta_k^h u \nabla \eta\|_{L^2(\Omega')}.\end{aligned}$$

注意到 $0 \leq \eta \leq 1$, 所以

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega'} |\eta \nabla \Delta_k^h u|^2 \mathrm{d}x \leq & C \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \|\Delta_k^h u \nabla \eta\|_{L^2(\Omega')} \\
& + C \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\Delta_k^h u \nabla \eta\|_{L^2(\Omega')}\right) \|\eta \nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')}.
\end{aligned}
$$

第一项小于等于 $C \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\Delta_k^h u \nabla \eta\|_{L^2(\Omega')}\right)^2$. 对第二项利用 Young 不等式 $ab \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{-q/p} b^q$ 可得

$$
\begin{aligned}
& C \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\Delta_k^h u \nabla \eta\|_{L^2(\Omega')}\right) \|\eta \nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')} \\
\leq & \varepsilon \|\eta \nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')}^2 \\
& + \frac{1}{\varepsilon} C^2 \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\Delta_k^h u \nabla \eta\|_{L^2(\Omega')}\right)^2.
\end{aligned}
$$

代入上面的不等式可得 (C 在不同的不等式中可以是不同的常数)

$$
\|\eta \nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')} \leq C \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\Delta_k^h u \nabla \eta\|_{L^2(\Omega')}\right)
$$

设 η 在 Ω 上为 1, 并且在 Ω' 上有 $\sup |\nabla \eta| \leq \frac{2}{d}$, 其中 $d = \operatorname{dist}(\Omega, \partial \Omega')$. 则由上述不等式可得

$$
\|\nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1 + \sup |\nabla \eta|) \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')}\right).
$$

上述式子对于 $|h| < d$ 的所有差分都成立, 所以由差分和微分的关系可得 $\|\Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega')} \sim \|\nabla u\|_{L^2(\Omega')} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, 所以

$$
\|\nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(1 + \sup |\nabla \eta|\right) \left(\|u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right).
$$

这说明对任意 $|h| < d$ 的差分,$\|\nabla \Delta_k^h u\|_{L^2(\Omega)}$ 都有共同的上界, 是有界集. 因为 Hilbert 空间的有界集必有弱收敛的子列, 所以根据弱导数的定义可知 ∇u 的弱导数必定存在. $\square$

习题 12. 设 $I = (0,1)$. 证明以下结论:

(1) 若 $u \in H^1(I)$, 则 $u_+ = \max(u(x), 0) \in H^1(I)$.

(2) 存在常数 $c > 0$, 使得对任意 $u \in H_0^1(I)$ 有

$$
\int_I |u|^2 \mathrm{d}x \leq c \int_I |\partial_x u|^2 \mathrm{d}x.
$$

证明:

(1) 因为 $u \in H^1(I)$, 所以 $u_+ \in L^2(I)$, 我们只需要证明 u_+ 存在一阶弱导数. 设函数序列 $\{u_n\}$ 依 $H^1(I)$ 中的范数收敛于 u, 并且 $u_n \in C^1(I)$. 设 $u_{n+} = \max(u_n(x), 0)$. 对任意的 $v \in C_0^\infty(I)$, 有

$$\begin{aligned}\int_I u_+ Dv \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_I u_{n+} Dv \mathrm{d}x \\ &= -\lim_{n\to\infty}\int_I Du_{n+} v \mathrm{d}x\end{aligned}$$

.

因为 $\{Du_{n+}\}$ 在 $L^2(I)$ 中有界, 所以必定存在弱收敛的子列, 这里不妨设该序列本身就弱收敛, 所以一定存在函数 w 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_I Du_{n+} v \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_I wv \mathrm{d}x,$$

进而

$$\int_I u_+ Dv \mathrm{d}x = -\int_I wv \mathrm{d}x.$$

所以 u_+ 的弱导数存在且 $u_+ = w$.

(2) 不妨令 $u \in C_0^1(I)$, 则

$$\begin{aligned}\int_I |u|^2 \mathrm{d}x &= \int_I \left|\int_0^x Du(y)\mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\leq \int_I \left(\int_0^x 1^2 \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^x |Du(y)|^2 \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &\leq \int_I x\mathrm{d}x \int_I |Du(y)|^2 \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_I |\partial_x u|^2 \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

4 抛物方程

习题 13. 简单叙述 Galerkin 方法的思路.

证明:

a. 首先 Galerkin 方法是寻求抽象微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f(t), \quad u(0) = u_0$$

的一个弱解, 这是一个常微分方程, 只是函数 u 的象的取值是无穷维的函数空间 H_0^1, 可以在该函数空间选择适当的基底, 先把函数投影到有限维子空间上, 把问题转化为常微分方程组来解决. 选择基底最简单的方式是通过计算算子 A 的特征函数.A 的特征函数能够组成一个基底需要满足一定的条件, 这样的条件由 Hilbert-Schimidt 定理给出.

b. 通过有限维投影, 例如 n 维, 我们把原问题转化为比较弱的求解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u, \phi_j) = \lambda_j(u, \phi_j) = (f(t), \phi_j) \quad j = 1, \cdots, n$$

常微分方程组的问题. 根据常微分方程组的解的存在唯一性定理可知, 该方程组有唯一的解 u_n. 也就是存在唯一的解满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_n + Au_n = P_n f(t).$$

c. 因为 $\{u_n\}$ 在 $L^2(0, T; H_0^1)$ 上一致有界, 因此存在弱收敛的子列, 不妨仍然记为 $\{u_n\}$, 使得

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } L^2(0, T; H_0^1).$$

类似可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_n}{\partial t} &\rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \text{ in } L^2(0, T; H^{-1}) \\
\Delta u_n &\rightharpoonup \Delta u \text{ in } L^2(0, T; H^{-1}) \\
P_n f &\rightharpoonup f \text{ in } L^2(0, T; H^{-1}).
\end{aligned}$$

d. 我们需要说明上述的弱极限就是我们要得到的弱解. 通过简单的极限操作可得

$$\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u, v \rangle + \langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle. \quad \forall v \in L^2(0, T; H_0^1).$$

以上说明了极限函数 u 使得方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f(t)$$

在 $L^2(0,T;H^{-1})$ 中成立. 由于弱极限 u 满足

$$\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1)}+\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^2(0,T;H^{-1})}\le C.$$

由向量值嵌入定理得 $u\in C([0,T],L^2(\Omega))$. 因此初值 $u(0,x)$ 在 $L^2(\Omega)$ 上有意义. 边界条件已经包含在算子 A 的定义域中. 所以弱极限就是我们要求的弱解. 弱解的唯一性则利用到了 A 的正定性质.

$\square$

5 半群理论

习题 14. 设 A 是 Banach 空间 X 上的压缩半群的生成元, 求证

(1) $D(A)$ 在 X 中稠密;

(2) A 是闭算子;

(3) 对任意 $\lambda>0$, 有 $\|(\lambda I-A)^{-1}\|\le\frac{1}{\lambda}$.

证明:

(1) 对任意的 $t>0,u\in X$, 定义

$$u^t:=\int_0^t S(t)u(t)\,\mathrm{d}t.$$

因为在 X 上有 $\frac{u(t)}{t}\to 0$, 我们只要证明对任意的 $t>0$, 都有 $u^t\in D(A)$ 即

可. 实际上,

$$
\begin{aligned}
\frac{S(h)u^t-u^t}{h}=&\frac{S(h)\int_0^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau-\int_0^t S(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{h}\\
=&\frac{1}{h}\int_0^t S(\tau+h)u\,\mathrm{d}\tau-\frac{1}{h}\int_0^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\\
=&\frac{1}{h}\int_h^{h+t} S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau-\frac{1}{h}\int_0^t S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\\
=&\frac{1}{h}\left(\int_h^{h+t}-\int_0^t\right)S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\\
=&\frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h}+\int_h^t-\int_0^t\right)S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\\
=&\frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h}-\int_0^h\right)S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\\
=&\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau-\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\,\mathrm{d}\tau\\
\to& S(t)u-u\quad(h\to 0)\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

这说明 $u^t\in D(A)$, 所以 $D(A)$ 在 X 中稠密.

a. 设 $u_k\in D(A)(l=1,2,\cdots)$ 并假设在 X 中

$$
u_k\to u, Au_k\to v. \tag{12}
$$

因为

$$
S(t)u_k-u_k=\int_0^t S(s)Au_k\,\mathrm{d}s.
$$

令 $k\to\infty$ 并利用 (12) 可得

$$
S(t)u-u=\int_0^t S(s)v\,\mathrm{d}s.
$$

因此

$$
\lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)u-u}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t S(s)v\,\mathrm{d}s=v.
$$

这说明 $u\in D(A)$ 并且 $v=Au$.

b. 设 $R_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$ 我们首先证明

$$
R_\lambda=\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,\mathrm{d}t\quad(u\in X)\,. \tag{13}
$$

因为 $\lambda > 0$ 以及 $\|S(t)\| \le 1$, 等式 (13) 右边有意义. 我们用 $\widetilde{R}_\lambda u$ 来表示右边的积分. 对任意的 $h>0$ 以及 $u \in X$, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{S(h)\widetilde{R}_\lambda u - \widetilde{R}_\lambda u}{h} =& \frac{1}{h}\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}[S(t+h)u - S(t)u]\,\mathrm{d}t\right\} \\
=& -\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(t-h)}S(t)u\,\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{h}\int_0^\infty (e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t})S(t)u\,\mathrm{d}t \\
=& -e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}S(t)u\,\mathrm{d}t \\
& + \left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{S(h)\widetilde{R}_\lambda u - \widetilde{R}_\lambda u}{h} = -u + \lambda\widetilde{R}_\lambda u.$$

根据 A 的定义可得 $A\widetilde{R}_\lambda u = -u + \lambda\widetilde{R}_\lambda u$, 也就是

$$(\lambda I - A)\,\widetilde{R}_\lambda u = u \quad (u \in X). \tag{14}$$

另一方面, 若 $u \in D(A)$,

$$\begin{aligned}
A\widetilde{R}_\lambda u =& A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\,\mathrm{d}t \\
=& \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)Au\,\mathrm{d}t = \widetilde{R}_\lambda Au.
\end{aligned}$$

第二个等号利用了 A 是闭算子这一事实. 因此

$$\widetilde{R}_\lambda\,(\lambda I - A)\,u = u\,(u \in D(A))\,.$$

因为 $\lambda I - A$ 是一一映射且是满射, 所以结合上面的等式以及 (14) 可得

$$\widetilde{R}_\lambda = (\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda. \tag{15}$$

因此

$$\|R_\lambda u\| \le \int_0^\infty e^{-\lambda t}u\,\mathrm{d}t\|u\| \le \frac{1}{\lambda}\|u\|.$$

□