初识椭圆偏微分方程

王 允 磊

2020-06-02

目录

拉普拉斯方程

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则在该区域上满足

$$-\Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

的方程就叫做拉普拉斯方程.

这里的 u 可以对应现实世界的化学浓度, 热平衡台下的温度分布, 经典引力势能和电磁势能. 以热平衡态的温度场为例, 因为达到了热平衡, 所以温度分布 u 不再随时间的变换, 只是位置的函数. 根据热传导定律, 热量的流动速度 $\mathbf{F}$ 和温度梯度 ∇u 成正比:

$$\mathbf{F} = -a\nabla u \quad (a > 0).$$

如果区域内没有产生热量的热源, 那么在平衡态下通过一个区域 V 表面的热量总和应该为零 (即传导进 V 的和传导出去的热量应该相等):

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \nu \mathrm{d}S = 0,$$

再利用高斯公式可得

$$\int_{V} \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}x = 0,$$

所以

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \Delta u = 0.$$

泊松方程

当热平衡区域有恒定的热源时, 我们可以用函数 f 来表示, 则

$$\Delta u = f,$$

这样的方程便叫做泊松方程. 这样的例子很多, 比如经典的引力场方程:

$$\Delta \Phi = 4\pi G\rho.$$

一般二阶线性偏微分方程

一般的二阶线性偏微分方程可以写成

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^i \partial x^j}+\sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x^i}+c(x)u(x)=f(x).$$

上式可以简写为

$$-\sum_{i=1}^{n} a^{ij}\partial_{ij}^2 u+\sum_{i=1}^{n} b^i\partial_i u+cu=f.$$

如果利用爱因斯坦记号, 则方程还可简写为

$$-a^{ij}\partial_{ij}^2 u+b^i\partial_i u+cu=f.$$

如果某一项中有两个相同的上标下标, 就默认对该指标作求和运算.

椭圆偏微分方程

根据偏微分方程的二阶系数 a^{ij}, 我们可以对椭圆进行分类.

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & \cdots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \cdots & a^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1} & a^{n2} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix}$$

如果上述矩阵在求解区域内的任意一点都是正定矩阵, 那么相应的方程被称为椭圆偏微分方程.

进一步, 如果矩阵还满足: 存在 $c_0 > 0$ 使得

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega,$$

则称其为一致椭圆方程.

经典解和强解

记 $L = -a^{ij}\partial_{ij}^2 + b^i\partial_i + c, Lu = f.$

若 $u \in C^2(\Omega)$ 并且满足

$$Lu = f,$$

则称其为方程的经典解.

若 u 可测,

$$Lu(x) = f(x), \text{ a.e. } x \in \Omega,$$

则称其为方程的强解.

弱解

考虑

$$Lu = -\partial_j \left(a^{ij}\partial_i u\right) + b^i\partial_i u + cu = f$$

其中

$$a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Omega) \quad (i, j = 1, \cdots, n).$$

若

$$\int_\Omega (a^{ij}\partial_i u\partial_j v + b^i\partial_i uv + cuv)\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

则称 u 为 $Lu = f$ 的弱解.

一般的一致椭圆方程弱解定义

$$Lu = -\partial_i(a^{ij}(x)\partial_j u + b^i(x)u) + c^i(x)\partial_i u + d(x)u. \tag{1}$$

存在 $\lambda > 0$ 使得

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

并且 L 的系数满足

$$\sum |a^{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2}\sum\left(|b^i(x)|^2 + |c^i(x)|^2\right) + \lambda^{-1}|d(x)| \leq \nu^2. \tag{3}$$

方程 $Lu = g + \partial_i f^i$ 的弱解定义为

$$\mathcal{L}(u,v) := \int_\Omega \left\{(a^{ij}\partial_j u + b^i u)\partial_i v + (c^i\partial_i u + du)v\right\} \mathrm{d}x = \int_\Omega (-f^i\partial_i v + gv)\mathrm{d}x,$$

其中 $v \in C_0^1(\Omega)$.

弱最大值原理

定理 1(弱最大值原理)

设 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 满足 $Lu \leq 0 (\geq 0)$(积分意义上), 并且 L 的系数满足

$$\int_\Omega \left(-dv - b^i \partial_i v\right) \mathrm{d}x \leq 0, \quad \forall v \geq 0, v \in C_0^1(\Omega). \tag{4}$$

则

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad \left(\inf_\Omega u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-\right). \tag{5}$$

证明: 设 $u \in W^{1,2}(\Omega), v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 则 $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$, 以及 $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$. 不等式 $\mathcal{L}(u,v) \leq 0$ 的形式为

$$\int_\Omega \left(\left(a^{ij}\partial_j u + b^i u\right)\partial_i v + \left(c^i \partial_i u + du\right) v\right) \mathrm{d}x \leq 0.$$

$$\int_\Omega \left(a^{ij}\partial_j u \partial_i v - (b^i - c^i) v \partial_i u\right) \mathrm{d}x \leq \int_\Omega \left(-duv - b^i \partial_i (uv)\right) \mathrm{d}x \leq 0, \tag{6}$$

其中 $v \geq 0$ 是使得 $uv \geq 0$ 的任意 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 函数.

如果 $b^i - c^i = 0$, 则

$$\int_\Omega a^{ij}\partial_j u \partial_i v \mathrm{d}x \leq 0,$$

令 $v = \max(u - l, 0)$, $l = \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$, 则

$$\int_{\{x\in\Omega : u(x) > v(x)\}} a^{ij}\partial_j u \partial_i u \mathrm{d}x \leq 0.$$

但是 $a^{ij}\partial_j\partial_i u \geq \lambda|\nabla u|^2$, 必然得到 $\nabla u(x) = 0, x \in \{x \in \Omega : u(x) > v(x)\}$, 所以该情况下定理成立.

对于一般情形, 假设 $l \leq k < \sup\limits_\Omega u$, 并设 $v = (u-k)^+$.(如果这样的 k 不存在则我们的证明已经完成.)

$$\nabla v = \begin{cases} \nabla u & u > k, \\ 0 & u \leq k. \end{cases}$$

从式 (6) 可得

$$\int_\Omega a^{ij}\partial_j v \partial_i v \mathrm{d}x \le 2\lambda v \int_\Gamma v|\partial v|\mathrm{d}x,$$

其中 $\Gamma = \mathrm{supp}\nabla v \subset \mathrm{supp} v$. 再由一致椭圆条件 (2) 得

$$\int_\Omega a^{ij}\partial_j v \partial_i v \mathrm{d}x \le 2\nu \int_\Gamma v|\nabla v|\mathrm{d}x \le 2\nu\|\nu\|_{2;\Gamma}\|\nabla v\|_2,$$

从而

$$\|\nabla v\|_2 \le 2\nu\|v\|_{2;\Gamma}.$$

再利用 $n \ge 3, p = 2$(n=2 的情形类似, 只是用的不等式不一样) 的 Sobolev 不等式以及 Hölder 不等式可得

$$\|v\|_{\frac{2n}{n-2}} \le C\|v\|_{2;\Gamma} \le C|\mathrm{supp}\nabla v|^{\frac{1}{n}}\|v\|_{\frac{2n}{n-2}}.$$

进而有

$$|\mathrm{supp}\nabla v| \ge C^{-n}.$$

这些不等式与 k 的选取没有关系, 所以当 $k \to \sup_\Omega u$ 的时候不等式仍然成立.

这说明 u 一定在一个测度大于 0 的集合上达到最大值, 并且在这个集合上有 $\nabla u = 0$. 这与 $\mathrm{supp}\nabla v > 0$ 矛盾. $\square$

由弱最大值原理可以得到满足条件 (1),(2),(3) 和 (4) 的 $Lu = 0$ 的解的唯一性.

弱解的存在性

定理 2

设 L 满足 (1), (2), (3) 和 (4), 那么对任意的 $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ 和 $g, f^i \in L^2(\Omega)$, 广义 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu = g + \partial_i f^i & x \in \Omega \\ u = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解存在且唯一.

令 $w = u - \varphi$, 则

$$\begin{aligned} Lw =& Lu - L\varphi \\ =& g - c^i \partial_i \varphi - d\varphi + \partial_i (f^i + a^{ij}\partial_j \varphi + b^i \varphi) \\ =& \widehat{g} + \partial_i \widehat{f}^i. \end{aligned}$$

Lax-Milgram 定理

定理 3(Lax-Milgram 定理)

设 B 是希尔伯特空间 H 上的一个双线性算子, 并且满足

$$|B(x,y)| \le K\|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in H \tag{7}$$

以及对某个 $v > 0$ 有

$$B(x,x) \ge v\|x\|^2, \quad \forall x \in H. \tag{8}$$

则对任意的一个有界线性泛函 $F \in H^*$, 存在唯一的 $f \in H$ 使得

$$B(x,f) = F(x), \quad \forall x \in H.$$

证明: 由 Riesz 表示定理可知, 对一个固定的 $f \in H$, 存在唯一的 g 使得

$$B(x,f) = (x,g), \quad \forall x \in H.$$

我们把以上述方式作的从 f 到 g 的映射记作 T. 则上式可写成

$$B(x,f) = (x, Tf), \quad \forall x \in H.$$

由双线性算子的第一个性质可得

$$(x, Tf) \le K\|x\|\|f\| \Rightarrow \|Tf\| \le K\|f\|.$$

在利用 B 的第二个性质

$$v\|f\| \le B(f,f) = (f, Tf) \le \|f\|\|Tf\| \Rightarrow v\|f\| \le \|Tf\|.$$

所以 T 是双射, 具有有界的你算子 T^{-1}. 则

$$F(x) = (x, g) = B(x, T^{-1}g),$$

令 $f = T^{-1}g$ 即可得到 $F(x) = B(x,f)$. □

弱解存在性的证明

定理 2 的证明: 利用 Lax-Milgram 定理, 设 $H = W_0^{1,2}(\Omega)$, $F(v) = \int_\Omega (-f^i \partial_i v + gv)\mathrm{d}x, v \in H$. 令 $\mathbf{g} = (g, f^1, \cdots, f^n)$, 则

$$|F(v)| \leq \|g\|_2 \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

剩下的只要说明 $\mathcal{L}(u, v)$ 满足条件 (7) 和 (8) 即可. 但 $\mathcal{L}(u, v)$ 不一定满足条件 (8), 不过我们可以用一种迂回的方案来解决这个问题.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u, u) =& \int_\Omega \left(a^{ij}\partial_j u \partial_i u + (b^i + c^i) u \partial_i u + du^2\right) \mathrm{d}x \\
\geq& \int_\Omega \left(\lambda |\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{2} |\nabla u|^2 - 2\lambda v^2 u^2\right) \mathrm{d}x \\
=& \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x - 2\lambda v^2 \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

定义新的算子 $L_\sigma u = Lu + \sigma u$, 根据上面的计算, 只要 σ 足够大, 相应的新的 $\mathcal{L}_\sigma(u,v) = \mathcal{L}(u,v) + \sigma(u,v)$ 就可以满足条件 (8).

则

$$\mathcal{L}_\sigma(u,v) - \sigma(u,v) = F(v),$$

进一步可以简记为

$$L_\sigma u - \sigma I u = F.$$

注意这里的映射 L_σ 是从 H 到 H^* 的映射, 是将 $u \in H$ 映射成泛函 $\mathcal{L}_\sigma(u,\cdot) \in H^*$, 同理 I 是将 $u \in H$ 映射成 $(u,\cdot) \in H^*$.

由 Lax-Milgram 定理, 映射 $L_\sigma : u \to f, \mathcal{L}_\sigma(u,v) = f(v)$ 是一一对应的可逆算子. 所以

$$u - \sigma L_\sigma^{-1} I u = L_\sigma^{-1} F.$$

再用到 $I = I_1 I_2, I_2 : H \to L^2(\Omega)$ 是紧算子,$I_2 : L^2(\Omega) \to H^*$ 以及 L_σ^{-1} 连续, 得到 $T = \sigma L_\sigma^{-1} I$ 为紧算子.

再由下面的 Fredholm Alternative 以及 $Lu = 0$ 解的唯一性即可完成证明. □

定理 4(Fredholm Alternative)

设 H 为 Hilbert 空间, T 是 H 到自身的紧算子, 则要么

$$x - Tx = 0$$

有一个非平凡的解 $x \in H$, 要么对任意的 $y \in H$, 方程

$$x - Tx = y$$

都有唯一确定的解, 并且 $(I - T)^{-1}$ 有界.

证明: 略. □

为什么需要弱解

从定义可以看出，弱解相比于经典解需要的条件更弱. 本质上，是因为经典情形下 $Lu = f$ 中的算子 L 的作用空间从 X(例如，至少是在 $C^2(\Omega)$ 中) 变成了更大的空间 Y. 在空间 Y 上的算子 L_Y 具有更好的性质，在这个空间上更加容易讨论解的存在性问题.

尽管我们很多时候可以得到弱解 $u \in Y$，但是最终需要的还是 X 中解的存在性，这需要我们找到某些条件，使得 $u \in X$，这样的条件就是正则性 (因为正则性可以使得函数更加光滑，所以正则性就是对函数光滑性的一种刻画).

这种正则性往往是一种先验估计，即假设解存在，然后就可以利用正则性得到解的存在性.

内正则性

为了简化证明，下述的内正则性定理的 L 算子作了简化，满足 (1) 的最一般情形的证明除了多几项平凡的估计，没有区别.

定理 5(内正则性)

令

$$Lu = -a^{ij}\partial_{ij}^2 u + b^i \partial_i u + cu = f.$$

设 $u \in W^{1,2}(\Omega)$ 是一致椭圆偏微分方程 $Lu = f$ 在开集 Ω 上的弱解，其系数 $a^{ij}, b^i, i, j = 1, \cdots, n$ 在 Ω 上一致 Lipschitz 连续，系数 c 在 Ω 上本性有界,$f \in L^2(\Omega)$. 那么对于任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega$，我们有 $u \in W^{2,2}(\omega')$ 并且

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq C \left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \right), \tag{9}$$

其中 C 只与方程系数和 $\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 有关.

$L = -\Delta$ 情形

该情形下

$$\Delta u = -f \in L^2(\Omega).$$

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} = \|u\|_{L^2(\Omega')} + \sum_{1\le i\le n} \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega')} + \sum_{|\alpha|=2} \|\partial_\alpha u\|_{L^2(\Omega')}.$$

因为上面的前两项都在不等式右边出现了，所以只要证明第三项小于等于 $\|f\|_{L^2}$ 的常数倍即可，而这可以利用之前证明过的不等式 $\|\partial_{ij}^2 u\|_{L^2} \le C\|\Delta u\|_{L^2}$.

一般情形

一般情形的证明有两个关键点:

1. 证明 $u \in W^{2,2}(\Omega')$.
2. 对 $\sum_{\alpha=2} \|\partial_\alpha u\|_{L^2(\Omega')}$ 进行估计.

在证明之前, 首先引入差商的概念:

定义

函数 u 在 x 点处关于 e_i 方向步长为 h 的差商是

$$\Delta_i^h u(x) := \frac{u(x+he_i)-u(x)}{h}, h \neq 0.$$

有时候如果一个讨论或者陈述对任意的 $i=1,\cdots,n$ 都成立的话, 也可以简写为 $\Delta^h u(x)$.

两个引理

引理 1

设 $u \in W^{1,p}(\Omega)$. 那么对任意的 $\Omega' \subset\subset \Omega$,$h < \mathrm{dist}(\Omega', \Omega)$, 我们有 $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$, 并且

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}$$

证明: 设 $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$,

$$\Delta^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h \partial_i u\left(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, \cdots, x_n\right) \mathrm{d}\xi.$$

利用 Hölder 不等式可得

$$|\Delta^h u(x)|^p \leq \frac{1}{h}\int_0^h |\partial_i u(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + \xi, x_{i+1}, \cdots, x_n)|^p \mathrm{d}\xi,$$

从而

$$\int_{\Omega'} |\Delta^h u|^p \mathrm{d}x \leq \frac{1}{h}\int_0^h \int_{B_h(\Omega')} |\partial_i u|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi \leq \int_{\Omega} |\partial_i u|^p \mathrm{d}x,$$

其中 $B_h(\Omega') = \{x : \mathrm{dist}(x, \Omega') < h\}$. □

引理 2

设 $u \in L^p(\Omega), 1 < p < \infty$,$\Omega' \subset\subset \Omega$, 假设存在一个常数 K 使得 $\Delta^h u \in L^p(\Omega')$ 并且对所有的 $0 < h < \mathrm{dist}(\Omega'.\Omega)$ 都有 $\|\Delta^h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K$. 则弱导数 $\partial_i u$ 存在并且满足 $\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)} \leq K$.

证明: 由 $L^p(\Omega')$ 中有界子集的弱紧性可知, 存在一个收敛到 0 的序列 $\{h_m\}$ 以及一个函数 $v \in L^p(\Omega)$,$\|v\|_p \leq K$, 对所有的 $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ 有

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta^{h_m} u \mathrm{d}x \to \int_{\Omega} \varphi v \mathrm{d}x.$$

对 $h_m < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}\varphi, \partial\Omega)$, 我们有

$$\int_\Omega \varphi \Delta^{h_m} u \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \Delta^{-h_m} \varphi \mathrm{d}x \to -\int_\Omega u \partial_i \varphi \mathrm{d}x.$$

所以

$$\int_\Omega \varphi v \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \partial_i \varphi \mathrm{d}x$$

即 u 的弱导数存在且 $v = \partial_i u$. $\square$

内正则性的证明

证明: 回顾弱解的定义, 弱解 u 满足

$$\int_\Omega \left(a^{ij}\partial_j u \partial_i v + b^i \partial_i u v + cuv\right) \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

定义 $g = -b^i\partial_i u - cu + f$, 则上式可写成

$$\int_\Omega a^{ij}\partial_j u \partial_i v \mathrm{d}x = \int_\Omega g v \mathrm{d}x.$$

对 $|2h| < \mathrm{dist}(\mathrm{supp} v, \partial\Omega)$,

$$\int_\Omega \Delta^h(a^{ij}\partial_j u)\partial_i v \mathrm{d}x = -\int_\Omega a^{ij}\partial_j u \partial_i \Delta^{-h} v \mathrm{d}x = -\int_\Omega g \Delta^{-h} v \mathrm{d}x.$$

因为

$$\Delta^h(a^{ij}\partial_j u)(x) = a^{ij}(x + he_k)\Delta^h \partial_j u(x) + \Delta^h a^{ij}(x)\partial_j u(x),$$

所以

$$\int_\Omega a^{ij}(x+he_k)\partial_j\Delta^h u\partial_i v\mathrm{d}x = -\int_\Omega \left(\Delta^h a^{ij}\partial_j u\partial_i v + g\Delta^{-h}v\right)\mathrm{d}x.$$

回顾 g 的定义以及利用引理 1 可得

$$\int_\Omega a^{ij}(x+he_k)\partial_j\Delta^h u\partial_i v\mathrm{d}x \le C\left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2\right)\|\nabla v\|_2.$$

令 $\eta\in C_0^1(\Omega), 0\le\eta\le 1, v=\eta^2\Delta^h u$, 利用一致椭圆函数系数的性质可得

$$\begin{aligned}
c_0\int_\Omega|\eta\nabla\Delta^h u|^2\mathrm{d}x &\le \int_\Omega \eta^2 a^{ij}(x+he_k)\Delta^h\partial_i u\Delta^h\partial_j u\mathrm{d}x\\
&= \int_\Omega a^{ij}(x+he_k)\partial_j\Delta^h u(\partial_i v - 2\Delta^h u\eta\partial_i\eta)\mathrm{d}x\\
&\le C\left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2\right)\left(\|2\eta\nabla\eta\Delta^h u + \eta^2\Delta^h\nabla u\|_2\right)\\
&\quad + C'\|\eta\nabla\Delta^h u\|_2\|\Delta^h u\nabla\eta\|_2\\
&\le C\left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2\right)\left(2\|\nabla\eta\Delta^h u\|_2 + \|\eta\nabla\Delta^h u\|_2\right)\\
&\quad + C'\|\eta\nabla\Delta^h u\|_2\|\Delta^h u\nabla\eta\|_2.
\end{aligned}$$

利用引理 1 以及 Young 不等式可得

$$
\begin{aligned}
\|\eta\Delta^h\nabla u\|_2 \leq & C\left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}+\|f\|_2+\|\Delta^h u\nabla\eta\|_2\right)\\
\leq & C\left(1+\sup_{\Omega}|\nabla\eta|\right)\left(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}+\|f\|_2\right).
\end{aligned}
$$

令 $\eta(x)=1, x\in\Omega'\subset\subset\Omega, |\nabla\eta|\leq 2/d', d'=\operatorname{dist}(\partial\Omega.\Omega')$. 利用引理 2 可得 $\nabla u\in W^{1,2}(\Omega')$. $\square$

正则性 + 泛函 ⇒ 性质更好的解的存在唯一性

准确地说, 就是内政则性 (硬分析), 再加上前面的存在唯一性定理 2(由泛函分析这样的软分析得到), 就可以得到更好的解的存在唯一性:

定理 6

设

$$Lu = a^{ij}(x)\partial_{ij}^2 u + b^i(x)\partial_i u + c(x)u = f$$

满足一致椭圆条件, 系数 $a^{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega}), b^i, c \in L^\infty(\Omega), c \leq 0$. 则对任意的 $f \in L^2(\Omega)$ 以及 $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, 存在唯一的解 $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ 满足 $Lu = f$ 并且 $u - \varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$.

全局正则性

上面的内正则性的内，就是指我们只能得到局部的 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 的结果. 本质上是因为取局部的时候就可以不需要考虑边界条件的任意性. 所以为了将这个局部的正则性变成全局正则性，必然要对边界条件进行限制，更加规则的边界加上内正则性就可以得到下面的全局正则性:

定理 7(全局正则性)

假设在定理 5 的基础上，设边界 $\partial\Omega$ 属于 C^2 类，并且存在一个函数 $\varphi \in W^{2,2}(\Omega)$ 满足 $u-\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$，则我们有 $u \in W^{2,2}(\Omega)$ 并且

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega)}\right). \tag{10}$$

证明: 略. □

弱解有界性

有界性就是通过系数，函数 f 以及边界条件来估计 $\sup_U u$ 或者 $\sup_U(-u)$ 的上界，下面就是一个局部有界性的定理范例：

定理 8

设 $a^{ij} \in L^\infty(B_1)$ 并且 $c \in L^q(B_1), q > \frac{n}{2}$，一致椭圆方程的下解 $Lu \le 0$ 定义为

$$\int_{B_1} a^{ij}\partial_i u \partial_j \varphi + cu\varphi \le \int_{B_1} f\varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^1(B_1), \varphi \ge 0.$$

若 $f \in L^q(B_1)$，则 $u^+ \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(B_1)$，并且对任意 $\theta \in (0,1)$ 和任意 $p > 0$ 都有

$$\sup_{B_\theta} u^+ \le C\left\{\frac{1}{(1-\theta)^{\frac{n}{p}}}\|u^+\|_{L^p(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)}\right\}$$

其中 $C = C(n, \lambda, \Lambda, p, q)$ 为一个大于 0 的常数.

定理 8 的证明用到的方法叫 Nash-Moser 迭代, 考虑函数 $f \in C[0,1]$, 如果我们对 $|\int_0^1 |f(x)|^\gamma \mathrm{d}x|^{\frac{1}{\gamma}}$ 可以作估计, 那么如何过渡到对 $\sup_{0\le x\le 1} |f(x)|$ 的估计呢? 考虑极限

$$\lim_{\gamma\to\infty} \left|\int_0^1 |f(x)|^\gamma \mathrm{d}x\right|^{\frac{1}{\gamma}} = \sup_{0\le x\le 1} |f(x)|.$$

这里的迭代就是知里面的 $\gamma \to \infty$ 过程, 具体通过建立不等式

$$\left(\int_{B_r} |u^+|^{\gamma\chi}\right)^{\frac{1}{\chi}} \le C\int_{B_R} |u^+|^\gamma, r < R$$

然后不停地迭代使用上述不等式以达到 $\gamma \to \infty$ 的目的.