偏微分方程理论作业

王允磊

2020 年 4 月 12 日

目录

1 Sobolev 空间

习题 1. 若 $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明 Hölder 不等式:

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

证明: 由不等式的齐次对称性, 不妨令 $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. 设 $\theta = \frac{1}{p}$, 则 $1-\theta = \frac{1}{q}$. 令 $F = |f|^p, G = |g|^q$. 则需要被证明的不等式转化为

$$\int_X F^\theta G^{1-\theta} \mathrm{d}\mu \leq 1. \tag{1}$$

由 $\ln x$ 函数的凸性可得

$$F^\theta(x)G^{1-\theta}(x) \leq \theta F(x) + (1-\theta)G(x).$$

对上式积分便得到 (1) 式. □

习题 2. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 证明 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n), 2 \leq p \leq \infty$.

证明: 令 q 满足

$$1+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{q},$$

其中 $1\leq q\leq 2$. 则由 Young 不等式可得

$$\|e^{-|x|^2}*f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq \|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$

而

$$\|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-q|x|^2}\mathrm{d}x<\infty,$$

且 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 所以 $e^{-|x|^2}*f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$