读 Terence Tao 的调和分析 Notes(MATH 247A) 所作笔记

Notes taken by 89hao

2020 年 4 月 13 日

目录

1 Lecture Notes 1 FOR 247A

1.1 什么是调和分析

第一份讲义介绍了这份讲义 (总共 6 个 note) 讲述的内容:

> 实变量调和分析理论 *(theory of real-variable harmonic analysis)* 以及研究该理论的基本工具

a. 什么是调和分析?

关于某个定义域或者类似对象 (测度, 分布, 定义域的子集, 或者从一个定义域到另一个定义域的映射) 上的函数的定量 (quantitative) 研究.

b. 典型的例子?

例如一个从某个 Banach 函数空间 V 到另一个空间 W 的算子 T, 这个算子并非定义在全空间 V 上而是定义在它的一个稠密子集上. 考虑这样一个定性 (qualitative) 问题: 能否将 T 连续拓展到整个空间 V 上? 实际上若 T 是线性的, 如果我们能够建立

$$\|Tf\|_W \leq C\|f\|_V$$

这样一种定量关系, 那么就可以作一个唯一连续延拓. 这里就是把一个定性问题转化成了一个定量问题来研究, 这个定量问题就是调和分析中的一个典型问题.

从这个典型的例子可以知道: 不等式在调和分析中有着非常重要的地位, 甚至是核心的地位 (就我目前读这个讲义的感觉). 在介绍一些不等式的建立时,Tao 在脚注中说了一句非常经典的话, 来自于他自身的经验:

Algebra draws its power from modularity, abstraction and identities; analysis draws its power from robustness, physical intuition and estimates.

1.2 建立不等式的方法

对于 $1 \leq p \leq \infty$, 有下述三角不等式成立

Triangle inequality

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1}$$

证明这个不等式的时候, 我们会用到一些处理不等式的一般技巧.

a. 根据 f 和 g 在不等式两边的齐次性 (对称性的一种), 可以设 $\|f\|_p = 1-\theta, \|g\|_p = \theta$, $0 < \theta < 1$(θ =0 和 1 的情形是平凡的).

b. 再将 f 和 g 的范数归一化, 设 $F = \frac{f}{1-\theta}, G = \frac{g}{\theta}$. 则不等式转化为

$$\|(1-\theta)F + \theta G\|_p \leq 1,$$

其中 $\|F\|_p = 1, \|G\|_p = 1$.

c. 根据 $z \mapsto |z|^p$ 在 $p \geq 1$ 时的凸性可知

$$|(1-\theta)F(x) + \theta G(x)|^p \leq (1-\theta)|F(x)|^p + \theta|G(x)|^p.$$

对上式积分即可.

概括起来就是, 根据不等式的对称性, 把不等式的选取范围缩小, 限定在尽可能小的子集内, 实际就是空间中的商作用. 如有必要, 对函数进行归一化. 简化后的不等式往往更容易处理, 在几何上有一些直观的特性 (在这里就是凸性).

Hölder's inequality

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q, \tag{2}$$

其中 $0 < p, q, r \leq \infty, \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

这里除了总的齐次性之外, 每个函数各自单独也有齐次性 (separate homogeneity symmetry), 所以可以直接设 $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. 令 $F := |f|^p, G := |g|^q, \theta = \frac{r}{q}$, 则原不等式化为

$$\int_X F^{1-\theta} G^\theta \leq 1, \text{ 其中} \int_X F = \int_X G = 1.$$

这里再次利用 $\ln x$ 的凸性可得逐点估计:

$$F^{1-\theta} G^\theta \leq (1-\theta)F(x) + \theta G(x).$$

对上式进行积分即可.

Log-convexity of L^p norms

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta}\|f\|_q^{\theta}, \tag{3}$$

其中 $0 < p < q < \infty, 0 < \theta < 1, \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q}$.

用类似的方法证明这个不等式的时候, 需要注意到该不等式有关于 f 和 μ 的齐次对称性, 从而可以设 $\|f\|_p = \|f\|_q = 1$. 当然这个不等式可以由 Hölder 不等式简单推导得到 (实际上这两个不等式是等价的).

讲义还给出了 log-convexity 的一个不常见的证明, 这个证明没有用到任何的逐点凸性估计 (pointwise convexity estimate), 而是用到了 ‘‘分治-合并’’ 策略 (“divide and conquer” strategy) 以及非常优雅 (并且相当无赖) 的 ‘‘张量幂技巧”(“tensor power trick”). 仍然假设 $\|f\|_p = \|f\|_q = 1$, 我们将函数 f 分成宽广平坦函数和窄高函数

$$f = f1_{|f|\leq 1} + f1_{|f|>1}.$$

进而

$$\|f\|_r^r = \int_{|f|\leq 1} |f|^r + \int_{|f|>1} |f|^r.$$

当 $|f| \leq 1$ 的时候, 由 $r > p$ 可得 $|f|^r \leq |f|^p$; 当 $|f| > 1$ 的时候, 由 $r < q$ 可得 $|f|^r \leq |f|^q$. 从而

$$\|f\|_r^r \leq \int_X |f|^p + \int_X |f|^q = 2.$$

下面就是张量幂技巧的使用: 设 M 为一个正整数, 用测度空间 $(X^M, \mathcal{B}^{\oplus M}, \mu^{\oplus M})$ 代替 $(X, \mathcal{B}, \mu)$, 用函数 $f^{\oplus M} : X^M \to \mathbb{C}$ 代替函数 f, 其中

$$f^{\oplus M}(x_1, x_2, \cdots, x_M) := f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_M).$$

易知

$$\|f^{\oplus M}\|_{L^p(X^M)} = \|f\|_{L^p(X)}^M = 1;$$
$$\|f^{\oplus M}\|_{L^q(X^M)} = \|f\|_{L^q(X)}^M = 1;$$
$$\|f^{\oplus M}\|_{L^r(X^M)} = \|f\|_{L^r(X)}^M.$$

再次利用前面的论证, 这次是应用到函数 $f^{\oplus M}$ 上, 得到

$$\|f^{\oplus M}\|_{L^r(X^M}^r \leq 2.$$

进而

$$\|f\|_{L^r(X)}^r \leq 2^{1/M}.$$

令 $M \to \infty$, 我们就得到了 $\|f\|_r \leq 1$.

1.3 一些简单但是重要的结论

1. 设 $\mu(X) < \infty$,f 是 X 上的函数, 则更高的 L^p 范数控制更低的范数:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, \tag{4}$$

其中 $0 < p \leq q \leq \infty$.

2. l^p 和与 L^p 和的可交换性:

$$\| \left(\sum_n |f_n|^p \right)^{1/p} \| = \left(\sum_n \|f\|_{L^p}^p \right)^{1/p}. \tag{5}$$

3. 对任意 $0 < p, q < \infty$:

$$\||f|^p\|_{L^q} = \|f\|_{L^{pq}}^p. \tag{6}$$

1.4 Lorentz Spaces

考虑 weak L^p 和 $\|\cdot\|_{L^p}$:

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \|\lambda\mu\left(\{|f| \geq \lambda\}\right)^{1/p}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})}$$

$$\|f\|_{L^p} = p^{1/p}\|\lambda\mu\left(\{|f| \geq \lambda\}\right)^{1/p}\|_{L^p(\mathbb{R}^+,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})}.$$

由这两个式子可以让我们推广出一个新的拟范数 Lorentz norm $L^{p,q}(X,\mu)$,$0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$:

$$\|f\|_{L^{p,q}(X,\mu)} := p^{1/q}\|\lambda\mu\left(\{|f| \geq \lambda\}\right)^{1/p}\|_{L^q(\mathbb{R}^+,\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda})}.$$

除了 $L^{\infty,\infty} = L^\infty$ 这一特殊情况, Lorentz norms 中 p 都不会取 ∞. 对于 q 来说, 按照重要程度依次递减, 只会用到 $q = p, q = \infty, q = 1, q = 2$. 可以通过简单的计算知对于一个高 H 宽 W 的函数, 它的 $L^{p,q}$ norm 是 $(p/q)^{\frac{1}{q}}HW^{\frac{1}{p}}$, 其中 $0 < p < \infty, 0 < q \leq \infty$.

定义 1.1.

a. 如果一个支撑为 E 的函数 f, 几乎处处满足 $|f(x)| \le H$ 并且 $\mu(E) \le W$, 则称 f 是一个高 H 宽 W 的 *sub-step function*.(因此 $|f| \le H 1_E$.)

b. 如果函数 f 满足几乎处处 $|f(x)| \sim H$, 以及 $\mu(E) \sim W$, 则称 f 是一个高 H 宽 W 的 *quasi-step function* .(因此 $|f| \sim H 1_E$.)

一个高 1 宽 W 的 sub-step function 按照二进制展开, 总能分解成真正的 step functions 的和:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f_k,$$

其中 f_k 是高 1 宽 H 的 step functions. 因此, 上述定义的两个函数类型都可以由 step function 逼近.

定理 1.2 (Characterisation of $L^{p,q}$). *设 f 为一个函数,$0 < p < \infty, 1 \le q \le \infty$, 设 $0 < A < \infty$. 那么下述 5 个在相差一个常数的情况下是等价的:*

(i) $\|f\|_{L^{p,q}} \lesssim_{p,q} A$.

(ii) *存在一个分解* $f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m$, *其中*