# KdV 方程两点时刻能观测不等式

指导老师: 王明

汇报人: 王允磊

2020-11-12

函数 $f$ 的傅立叶变换为

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \, \mathrm{d}\xi. \tag{1}$$

调和分析中的不确定性原理告诉我们: 如果一个函数及其傅立叶变换在无穷远处等于 0, 则这个函数恒为 0.

Logvinenko-Sereda[Teor. Funkc. Funkc. Anal., 1974] 证明了

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leq Ce^{Cr_1 r_2} \left( \int_{|x|\geq r_1} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{|x|\geq r_2} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \right). \tag{2}$$

不确定性原理有许多版本, 更详细的不确定性原理的介绍可以参考 Havin-Jöricke 的专著 *The uncertainty principle in harmonic analysis*. 该原理在偏微分方程及控制理论中有着广泛应用, 最近它被应用到 Schrödinger 方程的控制理论中.

考虑薛定谔方程

$$i\partial_t u - \Delta u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

能观测不等式是指下述形式的不等式

$$\int_\Omega |u(T,x)|^2 \,\mathrm{d}x \le C(T,\Omega) \int_0^T \int_\omega |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{4}$$

这里 $\omega \subset \Omega$.

- Rosier-Zhang[JDE,2009] 证明了全空间情形下有界区域外的可观测性, 即 $\omega$ 可取为任意半径的球外.
- Jaffard[PM,1990], Komornik-Loreti[2005] 证明周期边界条件下任意开集上的可观测性, 即 $\omega$ 可取为任意开集.

在前面的估计式

$$\int_{\Omega} |u(T,x)|^2 \,\mathrm{d}x \le C(T,\Omega) \int_0^T \int_{\omega} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

中, 观测时间是一个开区间, 至少在时间轴上具有正测度.

**问题**: 那么观测时间可以取更小的集合吗?

**薛定谔方程两点时刻能观测不等式 [Wang Ming 及合作者, JEMS, 2019]**

对所有满足方程 (3) 的 $u(t,x)$ 都有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x \le Ce^{\frac{Cr_1 r_2}{t}} \left( \int_{|x|\ge r_1} |u_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{|x|\ge r_2} |u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x \right). \tag{5}$$

- 该不等式把一段时间改进到两点时刻.
- 建立了能观测不等式和不确定性原理的等价性.
- 常数估计关于 $r_1, r_2$ 是最优估计, 两点时刻也是最优.

# KdV 方程的定性唯一延拓性

考虑下述线性 Korteweg-de Vries (KdV) 方程

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}). \tag{6}$$

当在 $u_0(x), u(t,x)$ 分别在球外为零时,$u(t,x) \equiv 0$.

- [B.Y. Zhang,SIAM J. Math. Anal., 1992] 若 $u$ 在 $(-\infty, c) \times t_0, t_1$ 上等于零, 则 $u \equiv 0$.
- [J. Bourgain, IMRN, 1997] 若 $u$ 在球外的一段时间等于零, 则 $u \equiv 0$, 这对非线性情形也成立.
- [Kenig et.al., JFA, 2007; Bull. AMS, 2012] 当 $u$ 在 $t_0, t_1$ 处指数衰减, 则 $u \equiv 0$.

# 主要结果

**KdV 上两点时刻可测集外能观测不等式**

若 $|S|, |\Sigma| < \infty$, 对于任意的 $t > 0$, 存在常数 $C = C(t, S, \Sigma) > 0$ 使得

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

所有解 $u(t, x)$ 满足

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x \le C \left( \int_{\mathbb{R}\setminus S} |u_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}\setminus\Sigma} |u(t, x)|^2 \,\mathrm{d}x \right). \tag{7}$$

对比薛定谔方程的能观测不等式:

- 集合 $|S|, |\Sigma|$ 比薛定谔情形更广泛. 后者 $S = B_{r_1}(0), \Sigma = B_{r_2}(0)$.
- 薛定谔方程的解与傅立叶变换有紧密的联系, 而 KdV 不具备这种性质.

# 主要难点

对于薛定谔方程的解 $u(t,x)$, 可以写成

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{i|x-y|^2/4t}}{(4\pi it)^{n/2}}u_0(y)\,\mathrm{d}y.$$

由此可以推出以下关系式

$$(2it)^{\frac{n}{2}}e^{-i|x|^2/4t}u(x,t)=\widehat{e^{i|\cdot|^2/4t}u_0}(x/2t),\ \text{for all } t>0. \tag{8}$$

该式说明 $t$ 时刻的解在去掉一个模为 1 的因子外, 可以看成是初值的傅立叶变换. 因此可以借助于不确定性原理的思想来得到相应的能观测不等式.

如果将 KdV 方程的解写成上述的积分表示, 积分核没有显式表示, 因此失去了与不确定性原理的联系.

# 证明思路

(1) 设 $S,\Sigma$ 为给定的有限测度集合, 构造算子

$$Tf := \chi_S S(-t)\left(\chi_\Sigma S(t)f\right), \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \tag{9}$$

其中 $\chi_S, \chi_\Sigma$ 为示性函数,$S(t)$ 定义为

$$u(t,x) = S(t)u_0(x).$$

(2) 证明 $T$ 是紧算子. 利用 $S(t)$ 的积分核逐点估计尝试证明 $T$ 是 Hilbert-Schimdt 算子, 从而是紧算子.

(3) 证明 $\|T\| < 1$. 容易证明 $\|T\| \leq 1$, 再由反证法及 (2) 证明其范数不可能等于 1.

(4) 证明两点能观测不等式, 由 (3) 以及 KdV 的守恒律得到.