

偏微分方程理论作业

王允磊

2020 年 4 月 19 日

目录

1 Sobolev 空间

1

1 Sobolev 空间

习题 1. 若 $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明 Hölder 不等式:

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

证明: 由不等式的齐次对称性, 不妨令 $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. 设 $\theta = \frac{1}{p}$, 则 $1 - \theta = \frac{1}{q}$. 令 $F = |f|^p, G = |g|^q$. 则需要被证明的不等式转化为

$$\int_X F^\theta G^{1-\theta} d\mu \leq 1. \quad (1)$$

由 $\ln x$ 函数的凸性可得

$$F^\theta(x) G^{1-\theta}(x) \leq \theta F(x) + (1 - \theta) G(x).$$

对上式积分便得到 (1) 式. □

习题 2. 若 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 证明 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n), 2 \leq p \leq \infty$.

证明: 令 q 满足

$$1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{q},$$

其中 $1 \leq q \leq 2$. 则由 Young 不等式可得

$$\|e^{-|x|^2} * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (2)$$

而

$$\|e^{-|x|^2}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q|x|^2} dx < \infty,$$

且 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 所以 $e^{-|x|^2} * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

习题 3. 设

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

求证: $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

证明: 设

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时, 求导得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} f(x) \\ f''(x) &= \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} \right) f(x) \\ f'''(x) &= \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4} \right) f(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

从上述几个导数易知可以归纳证明得到当 $x > 0$ 时有

$$f^{(k)}(x) = P_{2k}(x^{-1})f(x),$$

其中 P_{2k} 是次数为 $2k$ 的多项式. 由多项式和 e 指数的增长速率关系可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} P_{2k}(x)e^{-x} = 0.$$

所以对任意的 $n > 0$, 都有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(n)}(x) = 0$. 再利用分析学中的一个定理:

定理. 设 f 是在 $x = a$ 处连续的函数, $f'(x)$ 在 $x = a$ 的一个去心邻域上处处存在且

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

存在, 则 $f'(a)$ 存在且

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$

证明: 根据导数定义

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

由中值定理 $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_x), a < \xi_x < x$. 所以

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(\xi_x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x).$$

□

把该定理用到上面定义的函数上就得到函数 f 在 $x = 0$ 处任意阶右导数都存在且

$$f_+^{(n)}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

而当 $|x| \leq 1$ 时, 由

$$\phi(x) = f(1 - x^2)$$

$$\phi'(x) = -2xf'(1 - x^2)$$

$$\phi''(x) = -2f'(1 - x^2) + 4x^2 f''(1 - x^2)$$

...

知

$$\phi_-^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

另一方面, 由 $|x| \geq 1$ 时 $\phi(x) = 0$ 知

$$\phi_+^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

所以 $x = 1$ 时

$$\phi^{(n)}(1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$x = -1$ 时同理.

□

习题 4. 若 $1 \leq q \leq 2$, 证明对任意 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}.$$

证明: 设 $x = (x_1, x_2)$. 因为 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, 所以 u 可以写成

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2) dt = \int_{-\infty}^{x_2} u(x_1, t) dt.$$

进而有

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{x_i} |\partial_i u| dx_i \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_i u| dx_i, x \in \mathbb{R}^2.$$

那么

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}^2} dx \int_{\mathbb{R}} |\partial_1 u(x)| dx_1 \int_{\mathbb{R}} |\partial_2 u(x)| dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| dx \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| dx. \end{aligned}$$

利用平均不等式 (下式第二行到第三行) 可得

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| dx \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)| dx + \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)| dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2} (\|\partial_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\partial_2 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}) \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

对于 $1 < q < 2$ 的情况, 可以利用插值不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^\theta \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\theta} \quad 0 < \theta < 1$$

得到.

□