初识椭圆偏微分方程

王 允 磊

2020-06-02

经典	你好
部经典	你不好
你好	你好马

经典	你好
部经典	你不好

都比	都比

拉普拉斯方程

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则在该区域上满足

$$-\Delta u = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

的方程就叫做拉普拉斯方程.

这里的 u 可以对应现实世界的化学浓度, 热平衡台下的温度分布, 经典引力势能和电磁势能. 以热平衡态的温度场为例, 因为达到了热平衡, 所以温度分布 u 不再随时间的变换, 只是位置的函数. 根据热传导定律, 热量的流动速度 $\mathbf{F}$ 和温度梯度 ∇u 成正比:

$$\mathbf{F} = -a\nabla u \quad (a > 0).$$

如果区域内没有产生热量的热源, 那么在平衡态下通过一个区域 V 表面的热量总和应该为零 (即传导进 V 的和传导出去的热量应该相等):

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \nu \mathrm{d}S = 0,$$

再利用高斯公式可得

$$\int_{V} \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}x = 0,$$

所以

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \Rightarrow \Delta u = 0.$$

泊松方程

当热平衡区域有恒定的热源时, 我们可以用函数 f 来表示, 则

$$\Delta u = f,$$

这样的方程便叫做泊松方程. 这样的例子很多, 比如经典的引力场方程:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho.$$

一般二阶线性偏微分方程

一般的二阶线性偏微分方程可以写成

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x).$$

上式可以简写为

$$-\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu = f.$$

如果利用爱因斯坦记号, 则方程还可简写为

$$-a_{ij}\partial_{ij}^2 u + b_i \partial_i u + cu = f.$$

如果某一项中有两个相同的下标, 就默认作求和运算.

经典解和强解

记 $L = -a_{ij}\partial_{ij}^2 + b_i\partial_i + c$, $Lu = f$.

若 $u \in C^2(\Omega)$ 并且满足

$$Lu = f,$$

则称其为方程的经典解.

若 u 可测,

$$Lu(x) = f(x), \ \text{a.e.}\ x \in \Omega,$$

则称其为方程的强解.

弱解

考虑

$$Lu = -\partial_j \left(a_{ij}\partial_i u\right) + b_i\partial_i u + cu$$

其中

$$a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega) \quad \left(i, j = 1, \cdots, n\right).$$

若

$$\int_\Omega (a_{ij}\partial_i u\partial_j v + b_i\partial_i v + cuv)\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

则称 u 为 $Lu = f$ 的弱解.

椭圆偏微分方程

根据偏微分方程的二阶系数 a_{ij}, 我们可以对椭圆进行分类.

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1} & a_{n_2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果上述矩阵在求解区域内的任意一点都是正定矩阵, 那么相应的方程被称为椭圆偏微分方程.

进一步, 如果矩阵还满足: 存在 c_0 使得

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega,$$

则称其为一致椭圆方程.