МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

Мегафакультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационных технологий и программирования

Типовой расчёт №3

По дисциплине "Дискретная математика"
По теме «Суперпозиция, матрицы, связность и компоненты»

Выполнил студент группы №M3112
Муртазин Рифат Фаритович

Проверил
Кочетков Никита

Санкт-Петербург 2020

1 задание

(2 балла) Для двух данных функций сделать одну подстановку и одно отождествление

$$f(x, y, z) = x \nleftarrow y \leftarrow (z + y)$$
$$g(x, y, z) = x \downarrow z \oplus y$$

Чтобы осуществить подстановку по условию задания необходимо заменить аргумент функции на функцию g, я заменил на x. Отождествлением переменных называется подстановка i-того аргумента функции f вместо j-того аргумента. Я взял для отождествления функцию g и заменил в ней все z на x.

Подстановка

$$f(g(x, k, i), y, z) = (x \downarrow i \oplus k) \nleftarrow y \leftarrow (z + y)$$

Отождествление

$$g(x, y) = x \downarrow x \oplus y$$

2 задание

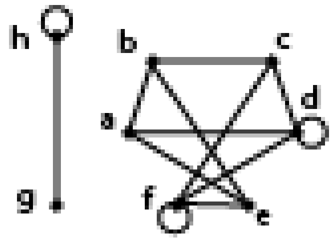

Рис. 1: Граф

1. Матрица смежности
   Матрица смежности - это вид представления графа в виде матрицы, когда пересечение столбцов и строк задаёт дуги. Используя матрицу смежности, можно задать вес дуг и ориентацию. Каждая строка и столбец матрицы соответствуют вершинам, номер строки соответствует вершине, из которой выходит дуга, а номер столбца - в какую входит дуга.
   Матрица смежности

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	1	0	1	1	0	0	0
b	1	0	1	0	1	0	0	0
c	0	1	0	1	0	1	0	0
d	1	0	1	1	0	1	0	0
e	1	1	0	0	0	1	0	0
f	0	0	1	1	1	1	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	1
h	0	0	0	0	0	0	1	1

2. Инцидентности
   Матрица инцидентности — одна из форм представления графа, в которой указываются связи между инцидентными элементами графа (ребро(дуга) и вершина). Столбцы матрицы соответствуют ребрам, строки — вершинам. Ненулевое значение в ячейке матрицы указывает связь между вершиной и ребром (их инцидентность).

	ab	bc	cd	ef	cf	ae	be	ad	fd	hg	ff	dd	hh
a	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
b	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	2	0
e	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	2	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2

3. Список смежности

   Список смежности — один из способов представления графа в виде списков вершин. Каждой вершине графа соответствует список, состоящий из "соседей"этой вершины.

```
a -> b -> d -> e
b -> a -> c -> e
c -> b -> f -> d
d -> c -> a -> f -> d
e -> f -> a -> b
f -> c -> d -> e -> f
g -> h
h -> g -> h
```

4. Степени вершин

   Степень вершины графа — это количество рёбер графа G, инцидентных вершине x. При подсчёте степени ребро-петля учитывается дважды.

Вершина	Степень
a	3
b	3
c	3
d	4
e	3
f	4
g	1
h	2

3 задание

(2 балла) Найти для указанного графа и дополнительного к нему:

1. центр
2. диаметр
3. радиус

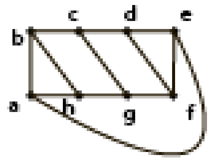

Рис. 2: Граф

1. Центр

Центром графа называют вершины с минимальным эксцентриситетом. Для поиска центра, сначало необходимо найти кратчайшие пути от всех вершин до вершины V и из этих значений выбрать максимальное, оно и будет эксцентриситетом вершины V. Затем нужно выбрать минимальный эксцентриситет из всех других, это и будет центром.

Построим матрицу кратчайших путей

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	1	2	2	1	2	2	1
b	1	0	1	2	2	3	2	1
c	2	1	0	1	2	2	1	2
d	2	2	1	0	1	1	2	3
e	1	2	2	1	0	1	2	2
f	2	3	2	1	1	0	1	2
g	2	2	1	2	2	1	0	1
h	1	1	2	3	2	2	1	0

Эксцентриситеты вершин графа

Центром графа называют вершины с минимальным эксцентриситетом, в нашем случае это a, c, e, g.

2. Радиус

Радиусом графа называется минимальный эксцентриситет среди всех вершин графа. Для поиска воспользуемся предыдущей

Вершины	Эксцентриситеты
a	**2**
b	3
c	**2**
d	3
e	**2**
f	3
g	**2**
h	3

таблицей. Мы видим, что минимальный эксцентриситет равен 2, это и будет радиусом графа. Ответ: 2;

3. Диаметр

Диаметром графа называется наибольшее расстояние между всеми парами вершин графа. Для поиска воспользуемся матрицей кратчайших путей. Максимальное значение в ней равно трём 3, это и будет диаметром графа (1=>0=>4=>5). Ответ:3;

Найдём теперь центр, диаметр и радиус для дополнительного графа.

Дополнительным графом к G называется граф с вершинами из V и теми и только теми ребрами из E, которые не вошли в G.

Построим дополнительный граф.

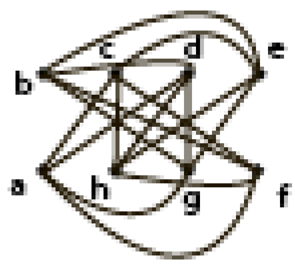

Рис. 3: Граф

Построим для неё матрицу кратчайших путей

Эксцентриситеты графа

1. Центр

Центром графа называют вершины с минимальным эксцентриситетом. Для поиска центра, сначало необходимо найти кратчайшие пути от всех вершин до вершины V и из этих значений выбрать максимальное, оно и будет эксцентриситетом вершины V. Затем нужно выбрать минимальный эксцентриситет

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	0	2	1	1	2	1	1	2
b	2	0	2	1	1	1	1	2
c	1	2	0	2	1	1	2	1
d	1	1	2	0	2	2	1	1
e	2	1	1	2	0	2	1	1
f	1	1	1	2	2	0	2	1
g	1	1	2	1	1	2	0	2
h	2	2	1	1	1	1	2	0

Вершины графа	Эксцентриситет
a	2
b	2
c	2
d	2
e	2
f	2
g	2
h	2

из всех других, это и будет центром.

Из таблицы эксцентриситетов графа видно, что все значения равны 2, следовательно радиус дополнительного графа равен 2, диаметр также равен 2, а центрами графа являются все вершины дополнительного графа. Ответ радиус = 2, диаметр = 2, центр все вершины графа.

4 задание

(4 балла) Запишите для представленного графа и дополнительного к нему:

1. компоненты реберной двусвязности;
2. компоненты вершинной двусвзяности;
3. точки сочленения, если их нет, то укажите почему;
4. мосты, если их нет, то укажите почему.

Решение для графа

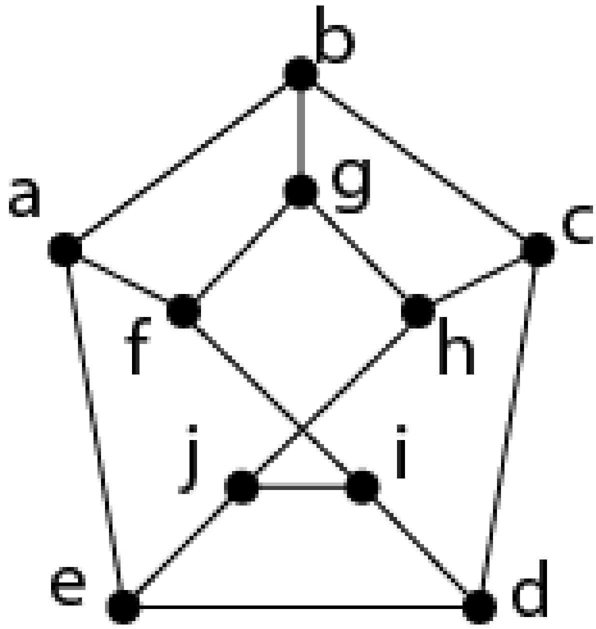

Рис. 4: Граф

Компоненты реберной двусвязности

Определение

Компонентами рёберной двусвязности графа называют его подграфы, множества вершин которых - классы эквивалентности рёберной двусвязности, а множества рёбер - множества ребер из соответствующих классов эквивалентности.

Две вершины u и v графа G называются рёберно двусвязными, если между этими вершинами существуют два рёберно непересекающихся пути.

В данном графе нет мостов, так как во всех соседних между собой вершин существут два пути, так же весь граф это одна компонента, потому что существует путь a->f->g->b->c->h->j->i->d->e->a, который образует один большой цикл или существует гамильтонов цикл. Гамильтоновым циклом является такой цикл, который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу.

Ответ: Граф содержит одну компоненту рёберной двусвязности. Так как в нём отсуствуют мосты и существует цикличный путь a->f->g->b->c->h->j->i->d->e->a, проходящийся по всем вершинам ровно по одному разу.

Компоненты вершинной двусвзяности;

Вершинная двусвязность определение. Два ребра графа называются **вершинно двусвязными**, если существуют вершинно непересекающиеся пути, соединяющие их концы. В данном графе есть только одна компонента, следовательно существует одна компонента вершинной двусвязности.

Ответ: Граф содержит одну компоненту вершинной двусвязности. Так как в нём отсуствуют точки сочлинения, так как можно удалить любую вершину и не увеличится компоненты связности и существует цикличный путь a->f->g->b->c->h->j->i->d->e->a, проходящийся по всем вершинам ровно по одному разу.

Точки сочленения, если их нет, то укажите почему;

Определение: Точка сочленения графа G — вершина, при удалении которой в G увеличивается число компонент связности. Если расмотреть наш граф и удалить любую её вершину, то не увеличится количество компонент связности, следовательно в ней отсутствуют точки сочлинения.

Ответ: В данном по условию графе не существуют точки сочлинения, так как можно взять и удалить любую вершину, не увеличив приэтом количество компонент связности.

Мосты, если их нет, то укажите почему.

Мост по определению это ребро, соединяющее две компоненты реберной двусвязности. Также мост графа - ребро, при удалении которого граф становится несвязным.

Ребро x является мостом графа G, если в G существуют такие вершины u и v, что любой простой путь между этими вершинами проходит через ребро x.

Ответ: В данном по условию графе нет мостов, так как при удалении любого ребря не нарушается связность графа .

Дополнительный граф

Компоненты реберной двусвязности

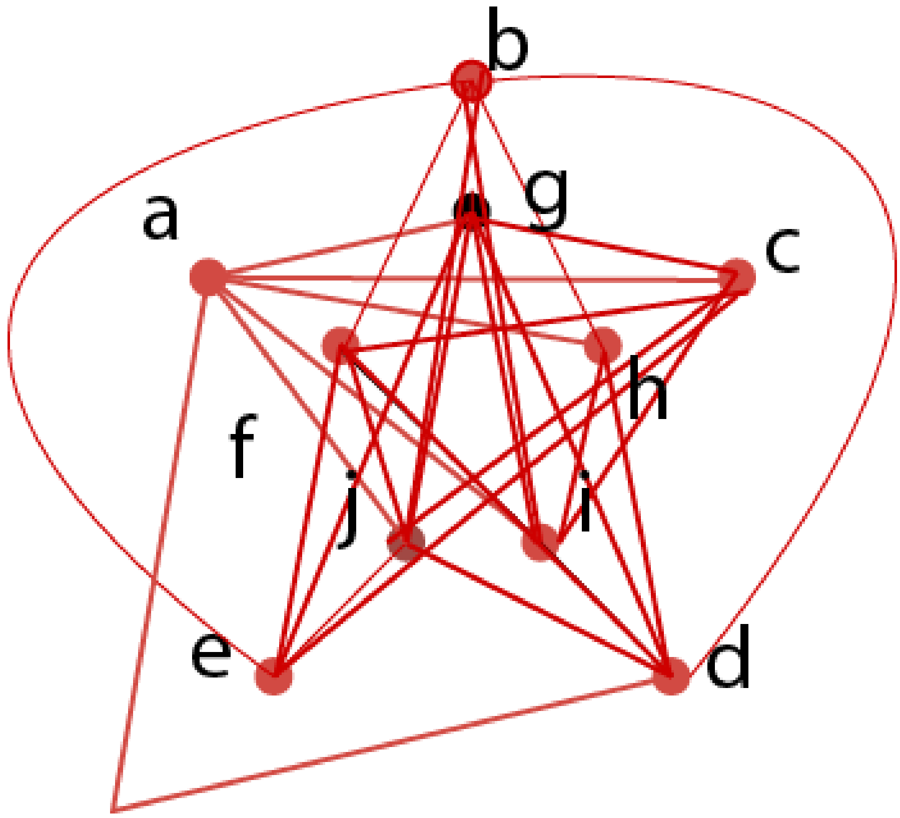

Рис. 5: Дополнительный граф

В данном графе также нет мостов, так как во всех соседних между собой вершин существует два пути, так же весь граф это одна компонента, потому что существует путь a->f->g->b->c->h->j->i->d->e->a, который образует один большой цикл или существует гамильтонов цикл. Гамильтоновым циклом является такой цикл, который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу.

Ответ: Граф содержит одну компоненту рёберной двусвязности. Так как в нём отсуствуют мосты и существует цикличный путь, проходящийся по всем вершинам ровно по одному разу.

Компоненты вершинной двусвязности;
Вершинная двусвязность определение. Два ребра графа называются **вершинно двусвязными**, если существуют вершинно непересекающиеся пути, соединяющие их концы. В данном графе есть только одна компонента, следовательно существует одна компонента вершинной двусвязности.

Ответ: Граф содержит одну компоненту вершинной

двусвязности. Так как в нём отсуствуют точки сочлинения, так как можно удалить любую вершину и не увеличится компоненты связности и существует цикличный путь, проходящийся по всем вершинам ровно по одному разу.

Точки сочленения, если их нет, то укажите почему;
Определение: Точка сочленения графа G — вершина, при удалении которой в G увеличивается число компонент связности.
Если расмотреть наш граф и удалить любую её вершину, то не увеличится количество компонент связности, следовательно в ней отсутствуют точки сочлинения.
Ответ: В данном по условию графе не существуют точки сочлинения, так как можно взять и удалить любую вершину, не увеличив приэтом количество компонент связности.

Мосты, если их нет, то укажите почему.
Ребро x является мостом графа G, если в G существуют такие вершины u и v, что любой простой путь между этими вершинами проходит через ребро x.
Ответ: В данном по условию графе нет мостов, так как при удалении любого ребра не нарушается связность графа .