МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

Мегафакультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационных технологий и программирования

Типовой расчёт №4

По дисциплине “Дискретная математика”
По теме «Теория графов и комбинаторика»

Выполнил студент группы №M3112
Муртазин Рифат Фаритович

Проверил
Кочетков Никита

Санкт-Петербург 2020

1 задание

Условие

(1 балл) На книжной полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно вытащить 5 из них так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

Решение

Данную задачу можно решить с помощью формулы сочетания без повторений, потому что нам не важен порядок в выборке.
Сочетание - это неупорядоченный набор размера n из m элементов

$$C(n,m) = C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! * n!}$$

Можно заметить что

$$\frac{m!}{(m-n)!}$$

- это формула размещения. Получается, что в сочетаниях мы вначале всё размещаем, а потом делим всё на все возможные перестановки - n!, **чтобы избавиться от всех возможных перестановок и оставить только один набор**. Следовательно, возвращаясь к задаче, нам нужно убрать 5 книг или сочетать 5 объектов, то есть n = 5. Мы можем их убрать в 8-ми местах, так как можно убрать каждую через один пропуск - это 6 мест и 2 места по краям. Таким образом получаем 8 элементов, которые осталось сочетать по 5-ть. Остаётся подставить в формулу сочетаний. Получаем

$$C_8^5 = \frac{8!}{(8-5)! * 5!} = \frac{40320}{6 * 120} = 56$$

Ответ: 56.

2 задание

Условие

(1 балл) Я хочу послать своему другу 8 фотографий. Сколькими способами я могу разложить их по 5-ти конвертам?

Решение

Для того чтобы решить эту задачу, нужно воспользовать формулой включений-исключений

$$\sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

адаптируем формулу под нашу задачу и получим:

$$m^n - C_m^1(m-1)^n + C_m^2(m-2)^n - \ldots + (-1)^k * C_m^k(m-k)^n + \ldots + \\ +(-1)^{m-1} C_n^{m-1}$$

пусть n = 8, а m = 5. Тогда подставим в формулу.

$$5^8 - C_5^1 * (5-1)^8 + C_5^2 * (5-2)^8 - C_5^3 * (5-3)^8 + C_5^4 * (5-4)^8 = \\ = 5^8 - C_5^1 * (4)^8 + C_5^2 * (3)^8 - C_5^3 * (2)^8 + C_5^4 * (1)^8 = \\ = 5^8 - \frac{5!}{4!} * (4)^8 + \frac{5!}{3! * 2!} * (3)^8 - \frac{5!}{2! * 3!} * (2)^8 + \frac{5!}{1! * 4!} * (1)^8 = \\ = 5^8 - 5 * 4^8 + 10 * 3^8 - 10 * 2^8 + 5 = \\ = 390625 - 327680 + 65610 - 2560 + 5 = 126000$$

Ответ: 126000.

3 задание

Условие

(1 балл) Пирамидка, в которую играет ребенок, состоит из 49 дисков, по 7 каждого размера (диски од- ного размера неразличимы). Пирамидка устроена таким образом, что на нижнем слое может находиться только самый большой диск, а на верхнем слое только самый маленький. Мы будем называть правильной сборкой пирамидки такую последовательность из семи дисков, что каждый следующий не больше предыдущего, первый диск будет самого большого размера, а последний – самого маленького (например, 7654321, 7775331, и 7222211 являются правильными сборками, а 7654322 – не правильной). Сколько всего существует правильных сборок?

Решение

Решается эта задача с помощью сочетания. Учтём тот факт, что у нас в условии сказано, что "Пирамидка устроена таким образом, что на нижнем слое может находиться только самый большой диск, а на верхнем слое только самый маленький следовательно у двух дисков уже определены позиции - это первая и последняя. Учтём также, что по условию могут идти подрят одиноковые по размеру диски, тогда можно сделать вывод, что у нас в сочетаниях есть повторения, тогда следует использовать готовую формулу сочетания с повторениями:

$$\tilde{\mathsf{C}}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \mathsf{C}_{n+k-1}^k.$$

В нашем случаи $k = 5$, потому что две позиции уже заняты,

$n = 7$. Подставим в уравнение значения и посчитаем:

$$\tilde{\mathsf{C}}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} =$$
$$= \frac{(7+5-1)!}{5!(7-1)!} = \frac{11!}{5!6!} = \frac{39916800}{86400} = 462.$$

Ответ: 462.

4 задание

Условие

(1 балл) В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

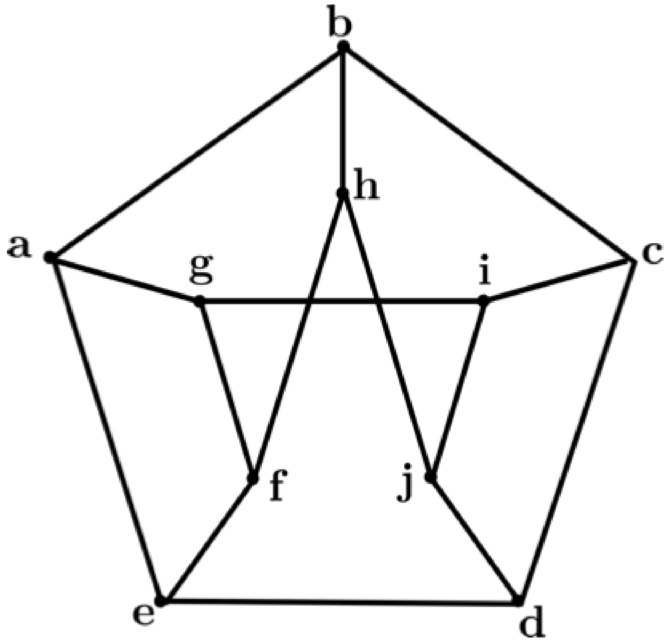
Решение

Решение основано на принципе умножения, потому что применим, когда у нас есть, какое то множество событий, которое происходит последовательно или события, которые осуществляются вне зависимости друг от друга. У нас есть два города, которые имеют общую авиалинию, но в стране всего 20 городов. Для выбора первого есть 20 городов, для выбора второго такого города остаётся 19. Следовательно перемножаем 19 и 20, а потом делим результат на 2, потому что авиалиния обща для двух городов. Имеем: $\frac{20*19}{2} = 190$. **Ответ: 190.**

5 задание

Условие

(2 балла) Для представленного графа определите:



1. есть ли в графе Эйлеров цикл или Эйлерова цепь? Если есть, то выпишите. Если нет, то обоснуйте отсутствие;
2. есть ли в графе Гамильтонов цикл, Гамильтонова цепь? Если есть, то выпишите. Если нет, то обоснуйте отсут- ствие;

Решение

1. **Эйлеровой цепью** в графе называется путь, который проходит по каждому ребру, причем ровно один раз. **Эйлеров цикл** — замкнутый эйлеров путь. В данном графе нет **Эйлеровой цепи** и **Эйлерового цикла**, потому что отсутсвует такой путь, который проходит по каждому ребру один раз. Граф так же не Эйлеров,так как количество вершин с нечетной степенью больше дву. Если количество вершин с

нечетной степенью больше двух, то граф не является ЭйлеровымСледователь граф не содержит Эйлеров цикл и Эйлеров путь и соответственно не Эйлеров**.

2. **Гамильтоновым путём** называется простой путь, проходящий через каждую вершину графа ровно один раз. **Гамильтоновым циклом** называют замкнутый гамильтонов путь. **Данный граф содержит Гамильтонов путь, проходящий по a => b => c => d => e => f => g => i => j => h. Данный граф содержит Гамильтонов цикл, проходящий по a => b => c => d => e => f => h => j => i => g => a**.

6 задание

Условие

(1 балл) Нарисуйте графы К6 и К3,4, К 7,5.

Решение

Простой граф с n взаимными вершинами обозначается K_n. Граф, в котором каждая пара различных вершин смежна **называется полным**. Полный граф с n вершинами имеет $\frac{n(n-1)}{2}$ рёбер. **Двудольный граф** — граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части. Двудольный граф с n вершинами в одной доле и m во второй обозначается $K_{n,m}$.

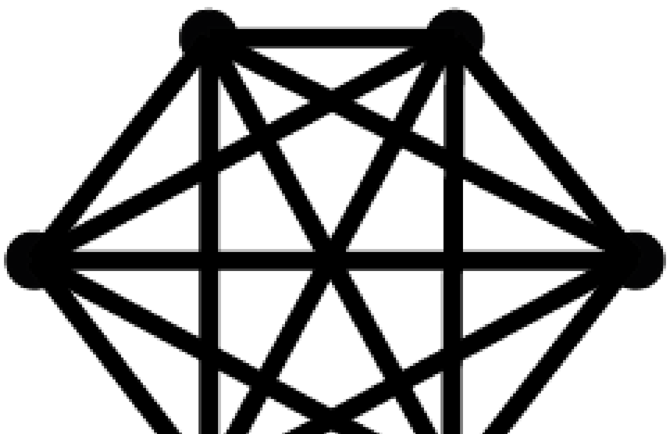


Рис. 1: Полный граф с 6-ю вершинами - K_6

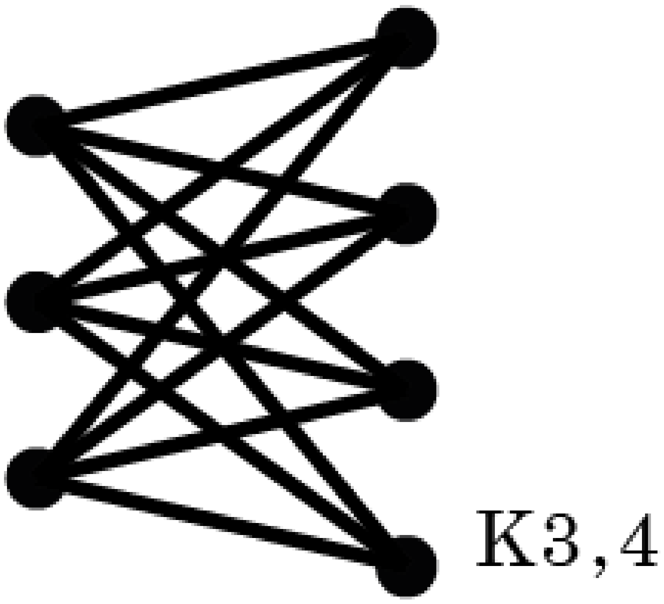


Рис. 2: Двудольный граф с 7-ю вершинами

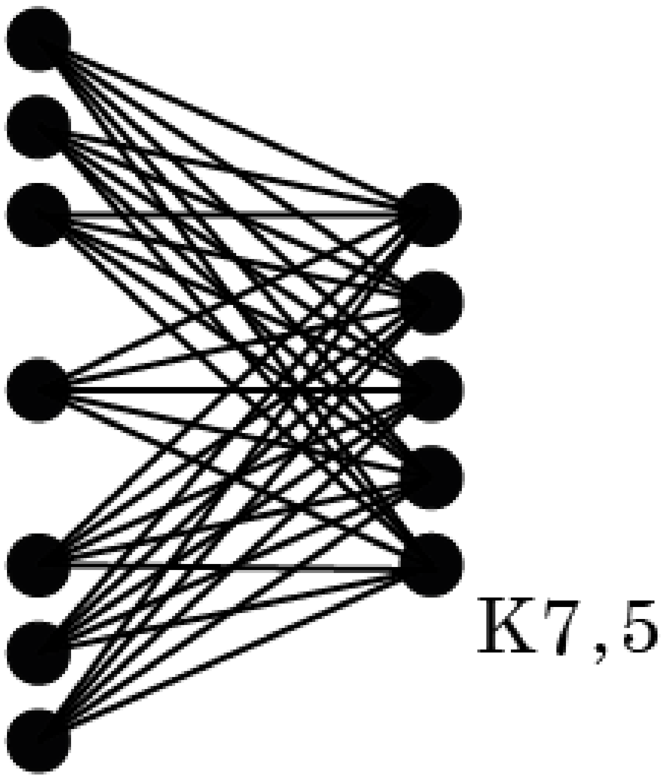


Рис. 3: Двудольный граф с 12-ю вершинами

7 задание

Условие

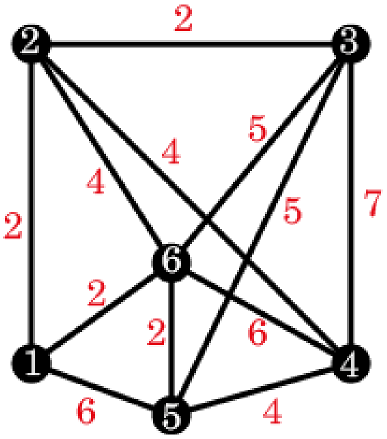
(3 балла) Граф задан матрицей расстояний. Требуется:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & - & - & 6 & 2 \\ & 0 & 2 & 4 & - & 4 \\ & & 0 & 7 & 5 & 5 \\ & & & 0 & 4 & 6 \\ & & & & 0 & 2 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

1. построить минимальное остовное дерево;
2. построить фундаментальную систему циклов, ассоциированную с этим остовом;
3. найти кратчайшие пути от вершины 4 до всех остальных вершин графа.

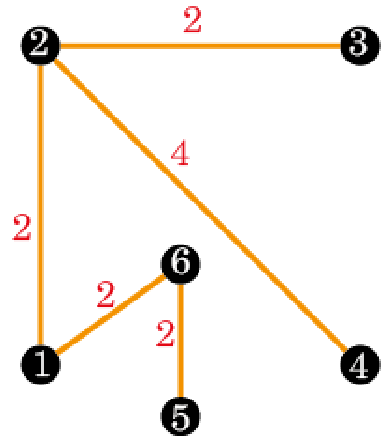
Решение

Изобразим граф по матрице расстояний. Получим:



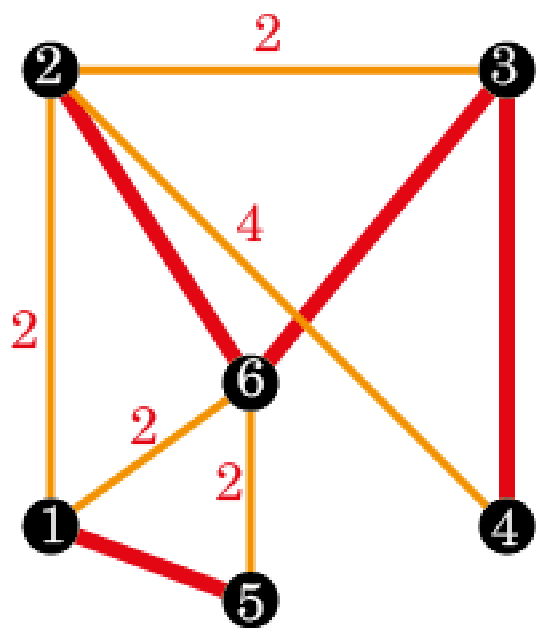
1. **Минимальное остовное дерево графа**

$G = (V, E)$— это его ациклический связный подграф, в который входят все его вершины, обладающий минимальным суммарным весом ребер. Для его нахождения можно использовать **алгоритм Прима**. Вначале на вход алгоритма подаётся связный неориентированный граф. Для каждого ребра задаётся его стоимость. Сначала берётся произвольная вершина и находится ребро, инцидентное данной вершине и обладающее наименьшей стоимостью. Найденное ребро и соединяемые им две вершины образуют дерево. Затем, рассматриваются рёбра графа, один конец которых — уже принадлежащая дереву вершина, а другой — нет; из этих рёбер выбирается ребро наименьшей стоимости. Выбираемое на каждом шаге ребро присоединяется к дереву. Рост дерева происходит до тех пор, пока не будут исчерпаны все вершины исходного графа. Результатом работы алгоритма является остовное дерево минимальной стоимости. **Пользуясь алгоритмом Прима, построим минимальное остовное дерево. Получим:**



Тогда вес минимального оставного дерева = 12 **Это и будет ответов на первый пункт задачи.**

2.**Фундаментальный цикл графа G относительно остова T** — простой цикл C, полученный путем добавления к остову T ребра $e1e2 \notin T$. Для того чтобы посчитать число фундаментальных циклов, нужно $m - n + 1$, где m - количество рёбер в графе, n - число вершин. Тогда получим $11 - 6 + 1 = 4$ **фундаментальных цикла**. Число фундаментальных циклов равно числу рёбер не пренадлежащих остову.



На рисунке рёбра красного цвета образуют фундаментальные циклы и их 4 штуки, следовательно это верное количество, так как по формуле также выходит 4. Так ребро инцедентное вершинам 2 и 6 образует цикл из вершин 2, 1, 6, ребро инцедентное вершинам 3 и 6 образует цикл из вершин 2, 1, 6, 3, ребро инцедентное вершинам 3 и 4 образует цикл из вершин 3, 4, 2, ребро инцедентное вершинам 1 и 5 образует цикл из вершин 5, 1, 6.

3. Чтобы найти кратчайшие пути от вершины 4 до всех остальных вершин графа, алгоритмом Дейкстры. Алгоритм работает пошагово — на каждом шаге он «посещает» одну вершину и пытается уменьшать метки. Работа алгоритма завершается, когда все вершины посещены. Если все вершины посещены, алгоритм завершается. В противном случае, из ещё не посещённых вершин выбирается вершина u, имеющая минимальную метку. Мы рассматриваем всевозможные маршруты, в которых u является предпоследним пунктом. Вершины, в которые ведут рёбра из u, назовём соседями этой вершины. Для каждого соседа вершины u, кроме отмеченных как посещённые, рассмотрим новую длину пути, равную сумме значений текущей метки u и длины ребра, соединяющего u с этим соседом. Если полученное значение длины меньше значения метки соседа, заменим значение метки

полученным значением длины. Рассмотрев всех соседей, пометим вершину u как посещённую и повторим шаг алгоритма.

И так из вершины **4 в 1** кратчайший путь - **4 -> 2 -> 1** равный 6. Из вершины **4 в 2** кратчайший путь - **4 -> 2** равный 4. Из вершины **4 в 3** кратчайший путь - **4 -> 2 -> 3** равный 6. Из вершины **4 в 5** кратчайший путь - **4 -> 5** равный 4. Из вершины **4 в 6** кратчайший путь - **4 -> 6** равный 6. В итоге получили все кратчайшие пути от вершины 4 до всех остальных вершин графа.