

Fisika Statistik untuk Mahasiswa MIPA

Mikrajuddin Abdullah, DR.Eng.
KK Fisika Material Elektronik - FMIPA, ITB

Copyright ©2009 by Mikrajuddin Abdullah

All rights reserved.

ISBN ...

*untuk Ayahanda H. Abdullah Hasan (alm) dan Ibunda Hj.
St.Habibah*

Kata Pengantar

Buku ini disusun untuk membantu mahasiswa memahami Fisika Statistik lebih mudah. Uraian diberikan serinci mungkin, tahap demi tahap, sehingga mahasiswa dapat mengikutinya dengan mudah. Mata kuliah Fisika Statistik sampai sekarang menjadi momok bagi sebagian besar mahasiswa. ketidaktersediaan buku yang menjelaskan materi secara rinci tampaknya menjadi salah satu penyebab terjadinya *bottle neck* keterlambatan kelulusan mahasiswa akibat gagal dalam menyelesaikan mata kuliah tersebut.

Buku ini hanya membahas dasar-dasar Fisika Statistik untuk memberikan bekal yang memadai bagi mahasiswa untuk memahami Fisika Statistik lanjut. Masih banyak kekurangan yang muncul disana-sini. oleh karena itu kritik dan saran yang membangun dari pembaca sangat diharapkan untuk menyempurnakan isi buku ini.

Penyelesaian buku ini tidak lepas dari tunjangan dana Hibah Penulisan Buku Teks 2009 dari Institut Teknologi Bandung yang penulis terima. Oleh karena itu penulis sampaikan terima kasih sebesar-besarnya kepada Wakil Rektor Senior Bidang Akademik ITB dan Direktur Pendidikan ITB. Terima kasih juga penulis sampaikan kepada Prof. Ismunandar dan Dr. Dhian Damajani atas support yang sangat berharga dalam proses penyelesaian buku ini.

Kepada penyunting, Dr. Siti Nurul Khatimah dari Prodi Fisika ITB, penulis sampaikan terima kasih sebesar-besarnya atas masukan dan saran yang sangat berharga. Penulis juga ingin menyampaikan terima kasih kepada para rekan-rekan dosen di Program Studi Fisika-FMIPA ITB yang secara langsung maupun tidak langsung membantu penulis menyelesaikan buku ini.

Terima kasih secara khusus ingin penulis sampaikan pada keluarga penulis (istri, Sri Rumiyyati, dan anak-anakku, Shafira Khairunnisa, Fathan Akbar,

dan Ardi Khalifah) yang tiada henti-hentinya memberikan support dalam setiap langkah pengabdian penulis dan ikut terlibat dalam pengecekan kesalahan ketik dalam naskah buku ini.

Bandung, Desember 2009

Mikrajuddin Abdullah

Daftar Isi

1 Pendahuluan	1
2 Statistik Maxwell-Boltzmann	5
2.1 Konfigurasi Penyusunan Sistem Klasik	5
2.2 Konfigurasi dengan Probabilitas Maksimum	14
2.3 Harga Rata-Rata	16
2.4 Nilai Peluang Konfigurasi Maksimum	19
3 Ruang Fasa	23
3.1 Definisi Ruang Fasa	23
3.2 Elemen volume Ruang Fasa	25
3.3 Energi Kinetik	26
3.4 N Sistem dalam Ruang Fasa	26
3.5 Menghitung Jumlah Keadaan	28
3.6 Menentukan n_s	31
3.7 Elemen Ruang Fasa dalam Momentum/Laju	32
4 Parameter-Parameter Statistik	35
4.1 Menentukan Parameter β	35
4.2 Bagaimana Kebergantungan β pada Suhu?	39
4.3 Menentukan β dari Energi Rata-Rata	42
4.4 Menentukan Parameter α	44
4.5 Makna Parameter α	47

5 Statistik Bose-Einstein	51
5.1 Sifat Dasar Boson	51
5.2 Konfigurasi Boson	53
5.3 Konfigurasi Maksimum	56
5.4 Parameter α untuk Photon dan Phonon	59
6 Statistik Fermi-Dirac	63
6.1 Konfigurasi Fermion	64
6.2 Konfigurasi Peluang Maksimum	67
7 Rapat Keadaan Sistem Kuantum	71
7.1 Ketidakpastian Heisenberg	71
7.2 Koordinat Spasial Satu Dimensi	72
7.3 Koordinat Spasial Dua Dimensi	73
7.4 Koordinat Spasial Tiga Dimensi	76
8 Beberapa Besaran Gas	81
8.1 Laju dengan Peluang Maksimum	81
8.2 Laju Rata-Rata	84
8.3 Laju <i>Root Mean Square</i>	85
8.4 Distribusi Partikel dalam Besaran Lain	87
9 Aplikasi Statistik Maxwell-Boltzmann	93
9.1 Efek Doppler	93
9.2 Atom Magnetik dalam Medan Magnet	97
9.3 Dipol Listrik	102
9.4 Momen Magnetik Tiga Arah Orientasi	104
9.5 Momen Magnetik Orientasi Sembarang	106
9.6 Vibrasi Kisi dalam Kristal	110
9.7 Hopping	113
9.8 Persamaan Difusi Einstein	117
9.9 Prinsip Ekipartisi Energi	120

9.10 Pemuaian Termal Zat	123
9.11 Efek Suhu Pada Difraksi Sinar-X	127
9.12 Kapasitas Panas Padatan Amorf	130
9.13 Konduktivitas Vogel-Tamman-Fulcher	134
10 Aplikasi Statistik Bose-Einstein	139
10.1 Radiasi Benda Hitam	139
10.2 Kapasitas Panas Kristal	148
10.3 Kondensasi Bose-Einstein	160
11 Aplikasi Distribusi Fermi-Dirac	169
11.1 Fungsi Distribusi Fermi Dirac pada Suhu 0 K	169
11.2 Energi Fermi	171
11.3 Distribusi Fermi Dirac pada Suhu $T > 0$ K	173
11.4 Integral Fungsi Fermi-Dirac	174
11.5 Energi Rata-Rata Elektron	179
11.6 Kapasitas Panas Logam	181
11.7 Emisi Termionik	185
11.8 Teori Bintang Katai Putih	189
11.9 Paramagnetisme Pauli	195
12 Termodinamika Gas	203
12.1 Entropi	203
12.2 Fungsi Partisi Boltzmann	205
12.3 Ungkapan Energi dalam Fungsi Partisi	206
12.4 Energi Bebas Helmholtz	207
12.5 Kapasitas Panas	208
12.6 Perhitungan Fungsi Partisi Klasik	208
12.7 Entropi Gas Semiklasik	210
12.8 Fungsi Partisi Total	211
12.9 Fungsi Partisi Gas Semiklasik	213
12.10 Transformasi Penjumlahan ke Integral	214

12.11 Suseptibilitas Paramagnetik Kuantum	216
12.12 Molekul Diatomik	222
12.13 Persamaan Saha	232
13 Statistik Semikonduktor	241
13.1 Pendahuluan	241
13.2 Doping Semikonduktor	242
14 Pengenalan Ensembel	251
14.1 Pendahuluan	251
14.2 Dinding Assembli yang Transparan Terhadap Energi	252
14.3 Konsep Ensembel	254
14.4 Assembli Terbuka	255
14.5 Jenis-Jenis Ensembel	257

Bab 1

Pendahuluan

Persoalan yang sering muncul pada kuliah fisika statistik di perguruan tinggi adalah ketidaktersediaan buku referensi bahasa Indonesia yang memadai. Buku terbitan luar negeri yang biasa digunakan sebagai referensi umumnya tidak membahas topik secara detail. Hal ini sering menyulitkan mahasiswa memahami mata kuliah tersebut. Bertahun-tahun kuliah ini diajarkan oleh dosen pada mahasiswa-mahasiswa fisika, persoalan yang sama selalu muncul. Bahkan mata kuliah tersebut menjadi salah satu "bottle neck" yang memperlambat kelulusan mahasiswa.

Cara pemahaman fisika statistik berbeda dengan mata kuliah fisika lain seperti gelombang, termodinamika, dan mekanika. Dalam fisika statistik kita akan berangkat dari persoalan abstrak yang sebenarnya merupakan bahan kajian orang matematika seperti permutasi dan kombinasi. Fisika statistik dapat dipandang sebagai persoalan statistik matematik yang diberikan syarat batas fisis, sehingga persoalan matematika murni menjadi memiliki interpretasi fisis. Diperlukan abstraksi yang cukup tinggi untuk memahami persoalan tersebut, dan tidak semua mahasiswa bisa melakukannya.

Sebenarnya ketika kita berhadapan dengan kumpulan partikel-partikel gas, partikel atomik atau sub atomik lainnya, kita tidak bisa menghindari dari statistik. Sebab, jumlah partikel yang kita kaji sangat besar, yaitu ordenya lebih dari 10^{20} partikel. Tiap partikel memiliki enam variabel untuk mendeskripsikan dengan lengkap keadaan geraknya, yaitu tiga koordinat ruang dan tiga komponen momentum. Sangat tidak mungkin menjelaskan dinamika partikel tersebut satu per satu dengan jumlah partikel yang luar biasa banyak, meskipun menggunakan semua komputer yang ada di dunia

saat ini. Pendekatan yang diberikan oleh fisika statistik adalah melihat sifat rata-rata dari partikel-partikel tersebut tanpa kita harus melihat partikel secara individual.

Karena berangkat dari persoalan statistik matematis, mahasiswa sering mengalami kesulitan memulai memahami fisika statistik. Buku-buku yang tersedia sekarang kurang memberikan penjelasan yang mendetail sehingga tidak memberikan bantuan yang cukup berarti kepada para mahasiswa untuk memahami konsep-konsep tersebut. Dari tahun ke tahun mahasiswa tetap mengalami kesulitan memahami mata kuliah ini, karena cara analisis yang berbeda dengan mata kuliah fisika lainnya. Tujuan penulisan buku ini adalah memberikan penjelasan yang lebih rinci kepada mahasiswa tentang penurunan persamaan-persamaan fisika statistik beserta beberapa aplikasinya. Rumus-rumus diturunkan secara lengkap dengan penjelasan yang rinci pula dengan harapan mahasiswa dapat memahami lebih jelas. Sampai saat ini kita kesulitan menemukan referensi yang memberikan penjelasan yang lebih rinci tentang penurunan persamaan-persamaan tersebut. Mahasiswa terpaksa harus melakukan usaha yang luar biasa untuk memahami konsep-konsep tersebut dan tidak jarang banyak yang apatis.

Karena materi buku ini hanya diperuntukkan bagi kuliah satu semester, maka hanya dasar-dasar statistik yang dapat menjadi modal awal bagi mahasiswa untuk mempelajari fisika statistik lanjut yang diberikan. Topik utama yang dibahas meliputi penurunan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, dan Fermi-Dirac. Contoh aplikasi sederhana ketiga macam statsitik tersebut juga diberikan. Konsep ruang fasa dan kerapatan keadaan dalam ruang fasa klasik serta ruang fasa kuantum juga diberikan, karena keduaanya digunakan untuk menghitung besaran-besaran termodinamika. Agar mahasiswa memiliki pemahaman awal tentang ensembel, maka salah satu jenis ensembel dibahas di sini, yaitu ensembel kanonik.

Pada langkah penurunan distribusi Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, dan Fermi-Dirac, modal statistik yang dibutuhkan hanya permutasi. Oleh karena itu topik yang membahas panjang lebar tentang permutasi dan kombinasi seperti yang dijumpai di kuliah-kuliah statistik yang bersifat matematis tidak diberikan di sini. Hal ini dimaksudkan untuk mengurangi beban mahasiswa sehingga mereka bisa lebih terfokus kepada aplikasi fisik dari statistik tersebut.

Sebelum masuk ke penurunan berbagai fungsi distribusi mari kita definisikan beberapa istilah yang digunakan dalam buku ini. Pertama kita mende-

fisika sistem. Terminologi sistem yang digunakan pada buku ini mengacu kepada partikel-partikel. Contohnya, jika kita membahas tentang gas maka sistem adalah atom atau molekul gas. Untuk gas monoatomik, sistem adalah atom gas dan untuk gas diatomik maka atau yang mengandung atom lebih banyak maka sistem adalah molekul gas. Jika kita membahas tentang elektron dalam logam maka sistem adalah elektron-elektron tersebut. Jika kita bahas tentang radiasi benda hitam maka sistem adalah foton. Jika kita bahas getaran kisi maka sistem adalah fonon.

Istilah kedua yang akan kita gunakan adalah assembli. Assembli adalah kumpulan sistem-sistem dalam suatu volum tertentu. Jumlah sistem dalam assembli sangat banyak. Ordenya sekitar sama dengan orde bilangan Avogadro. Jumlah sistem yang sangat besar ini memungkinkan prediksi statistik untuk sifat assembli menjadi sangat akurat. Ingat, statistik makin teliti jika sampel yang dilibatkan makin banyak.

Bab 2

Statistik Maxwell-Boltzmann

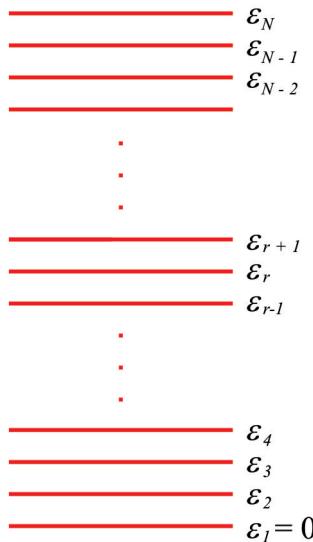
Isi Bab ini. Bab ini berisi perumusan statistik Maxwell-Boltzmann untuk assembli yang mengandung sistem (partikel) klasik. Contoh partikel klasik adalah atom atau molekul-molekul gas. Umumnya partikel dengan massa jauh lebih besar dari massa elektron dapat dianggap sebagai partikel klasik.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami bagaimana proses membangun statistik Maxwell-Boltzmann dengan menggunakan prinsip statistik murni yang digabungkan dengan beberapa hukum kekekalan dalam fisika, seperti kekekalan energi dan jumlah partikel.

Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Untuk memahami penurunan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann mahasiswa perlu memahami metode permutasi untuk benda-benda yang dapat dibedakan, sifat yang ditunjukkan oleh sebuah besaran yang nilainya kekal (konstan), serta bagaimana mencari nilai maksimum dari sebuah fungsi (metode penurunan).

2.1 Konfigurasi Penyusunan Sistem Klasik

Kita akan berangkat dari asumsi bahwa energi yang dimiliki sistem-sistem dalam dianggap terdiri atas tingkat-tingkat energi. Tingkat-tingkat energi tersebut berada dalam rentangan dari nol sampai tak berhingga. Gambar 2.1 adalah ilustrasi tingkat-tingkat energi yang dimiliki assembli. Untuk sistem klasik, seperti atom gas, perbedaan energi dua tingkat berdekatan mendekati nol, atau $\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \rightarrow 0$. Perbedaan energi yang mendekati nol memiliki makna bahwa tingkat energi sistem klasik bersifat kontinu. Sistem



Gambar 2.1: Tingkat-tingkat energi yang dimiliki assembli.

menempati salah satu dari tingkat energi di atas. *Dalam sistem klasik tidak ada batasan jumlah sistem yang dapat menempati satu keadaan energi. Satu keadaan energi dapat saja kosong, atau ditempati oleh satu sistem, oleh dua sistem, dan seterusnya. Bahkan semua sistem berada pada satu keadaan energi pun tidak dilarang.*

Agar sifat fisis dari assembli dapat ditentukan maka kita harus mengetahui bagaimana penyusunan sistem pada tingkat-tingkat energi yang ada serta probabilitas kemunculan masing-masing cara penyusunan tersebut. Pemahaman ini perlu karena nilai terukur dari besaran yang dimiliki assembli sama dengan perata-rataan besaran tersebut terhadap semua kemungkinan penyusunan sistem pada tingkat-tingkat energi yang ada.

Cara menghitung berbagai kemungkinan penyusunan sistem serta probabilitas kemunculannya menjadi mudah bila tingkat-tingkat energi yang dimiliki assembli dibagi atas beberapa kelompok, seperti diilustrasikan pada Gbr 2.2. Di sini kita membagi atas M kelompok. Tiap kelompok memiliki jangkauan energi yang cukup kecil sebagai berikut.

- Kelompok pertama memiliki jangkauan energi : 0 sampai $d\varepsilon$
- Kelompok kedua memiliki jangkauan energi : $d\varepsilon$ sampai $2d\varepsilon$

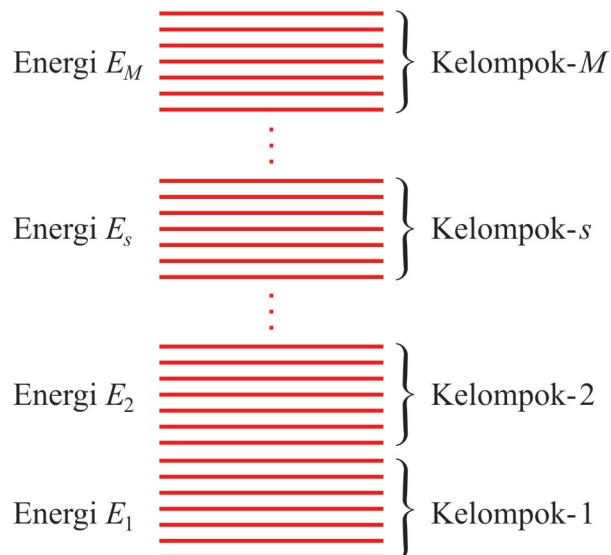
- Kelompok ketiga memiliki jangkauan energi : $2d\varepsilon$ sampai $3d\varepsilon$

⋮

- Kelompok ke- s memiliki jangkauan energi : $(s - 1)d\varepsilon$ sampai $sd\varepsilon$

⋮

- Kelompok ke- M memiliki jangkauan energi : $(M - 1)d\varepsilon$ sampai $Md\varepsilon$



Gambar 2.2: Kelompok-kelompok energi dalam assembli.

Satu kelompok energi mengandung sejumlah keadaan energi. Jumlah keadaan energi pada kelompok yang berbeda bisa sama dan bisa berbeda. Misalkan jumlah keadaan energi pada tiap-tiap kelompok tersebut sebagai berikut:

- Jumlah keadaan pada kelompok pertama : g_1
- Jumlah keadaan pada kelompok kedua : g_2

- Jumlah keadaan pada kelompok ketiga : g_3

⋮

- Jumlah keadaan pada kelompok ke- s : g_s

⋮

- Jumlah keadaan pada kelompok ke- M : g_M

Energi keadaan yang berbeda dalam satu kelompok umumnya berbeda. Tetapi karena perbedaan energi keadaan yang berbeda dalam satu kelompok sangat kecil (mendekati nol) maka kita dapat mengasumsi bahwa energi dalam satu kelompok diwakili oleh satu nilai energi saja. Energi tersebut dianggap sebagai energi rata-rata keadaan dalam kelompok yang bersangkutan. Jadi,

- Energi rata-rata kelompok pertama : E_1
- Energi rata-rata kelompok kedua : E_2
- Energi rata-rata kelompok ketiga : E_3

⋮

- Energi rata-rata kelompok ke- s : E_s

⋮

- Energi rata-rata kelompok ke- M : E_M

Misalkan pada konfigurasi tertentu tiap-tiap kelompok energi telah ditempati oleh sistem-sistem dengan distribusi jumlah sebagai berikut:

- Jumlah sistem pada kelompok energi pertama : n_1
- Jumlah sistem pada kelompok energi kedua : n_2

- Jumlah sistem pada kelompok energi ketiga : n_3

 \vdots

- Jumlah sistem pada kelompok energi ke- s : n_s

 \vdots

- Jumlah sistem pada kelompok energi ke- M : n_M

Deskripsi tentang jumlah sistem, jumlah keadaan dan energi pada kelompok-kelompok yang telah diuraikan di atas dapat diringkas dalam Table 2.1.

Tabel 2.1: Deskripsi jumlah sistem, jumlah keadaan, dan energi yang dimiliki tiap kelompok energi.

Kelompok ke-	Jumlah keadaan	Energi	Jumlah sistem
1	g_1	E_1	n_1
2	g_2	E_2	n_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
s	g_s	E_s	n_s
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
M	g_M	E_M	n_M

Jumlah total sistem dalam assembli adalah N . Karena N sistem tersebut terdistribusi pada semua kelompok energi maka terpenuhi

$$N = \sum_{s=1}^M n_s \quad (2.1)$$

Energi total assembli memenuhi

$$U = \sum_{s=1}^M n_s E_s \quad (2.2)$$

Untuk menentukan nilai dari besaran-besaran yang dimiliki assembli kita harus menentukan berapa probabilitas munculnya masing-masing konfigurasi dalam assembli tersebut. Tiap penyusunan sistem dalam assembli

mempunyai peluang kemunculan yang persis sama. Dengan demikian, probabilitas kemunculan sebuah konfigurasi sebanding dengan jumlah penyusunan sistem yang dapat dilakukan untuk membangun konfigurasi tersebut.

Oleh karena itu, mencari probabilitas kemunculan konfigurasi dengan kondisi

- Ada n_1 sistem pada kelompok energi 1
- Ada n_2 sistem pada kelompok energi 2

- Ada n_3 sistem pada kelompok energi 3

⋮

- Ada n_s sistem pada kelompok energi s

⋮

- Ada n_M sistem pada kelompok energi M

ekivalen dengan mencari berapa cara penyusunan

- n_1 sistem pada g_1 keadaan energi di kelompok energi 1

- n_2 sistem pada g_2 keadaan energi di kelompok energi 2

- n_3 sistem pada g_3 keadaan energi di kelompok energi 3

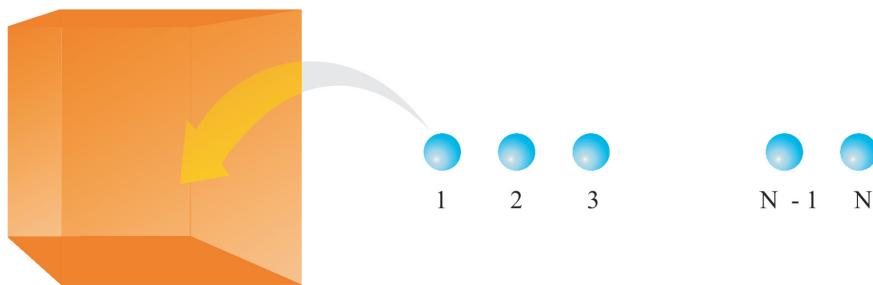
⋮

- n_s sistem pada g_s keadaan energi di kelompok energi s

⋮

- n_M sistem pada g_M keadaan energi di kelompok energi M

Selanjutnya kita akan menentukan jumlah cara penyusunan sistem-sistem yang tersebar pada tingkat-tingkat energi di atas. Untuk maksud tersebut, mari kita mulai dengan menganggap semua keadaan energi kosong (tidak di tempati sistem) dan di luar ada sejumlah sistem yang akan diisi pada keadaan-keadaan tersebut. Di sini ada dua tahap proses yang terjadi. Proses I adalah membawa N buah sistem dari luar ke dalam assembli dan proses II adalah menyusun sistem pada kempompok-kelompok energi yang ada di dalam assembli.



Gambar 2.3: Cara membawa sistem dari luar masuk ke dalam assembli.

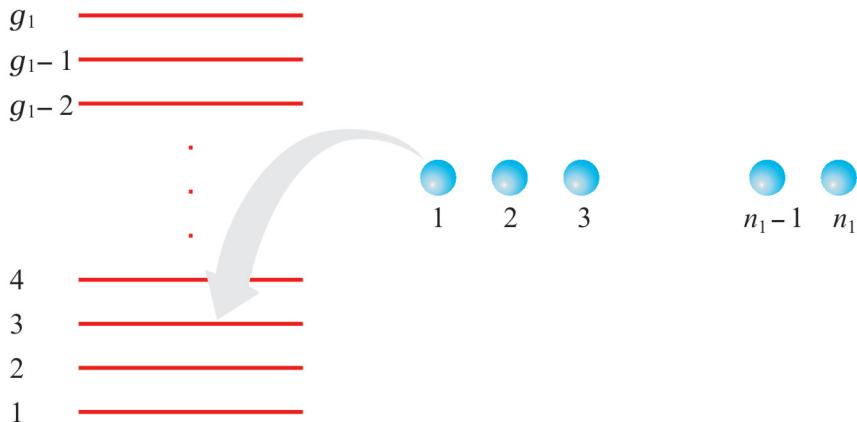
Proses I: Membawa N Buah Sistem ke Dalam Assembli. Mari kita hitung jumlah cara yang dapat ditempuh pada tiap proses pertama yaitu membawa N buah sistem dari luar ke dalam assembli. Proses ini tidak bergantung pada konfigurasi assembli. Yang terpenting adalah bagaimana membawa masuk N buah sistem ke dalam assembli. Untuk menentukan jumlah cara tersebut, perhatikan tahap-tahap berikut ini.

- i) Ambil satu sistem dari daftar N buah sistem yang berada di luar assembli (Gbr. 2.3). Kita bebas memilih satu sistem ini dari N buah sistem yang ada tersebut. Jadi jumlah cara pemilihan sistem yang pertama kali dibawa masuk ke dalam assembli adalah N cara.
- ii) Setelah sistem pertama dimasukkan ke dalam assembli maka tersisa $N - 1$ sistem dalam daftar di luar. Ketika membawa masuk sistem kedua ke dalam assembli kita dapat memilih salah satu dari $N - 1$ buah sistem dalam daftar. Jumlah cara pemilihan sistem ini adalah $N - 1$ cara.
- iii) Begitu seterusnya.

- iv) Akhirnya, ketika sistem ke- N akan dimasukkan ke dalam assembli hanya ada satu sistem yang tersisa di luar. Tidak ada pilihan-pilihan yang mungkin sehingga jumlah cara memasukkan sistem ke- N ke dalam asembli adalah hanya 1 cara.
- v) Dengan demikian, jumlah total cara membawa masuk N buah sistem ke dalam assembli adalah

$$N \times (N - 1) \times (N - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = N!$$

Proses II: Penyusunan Sistem di Dalam Kelompok-Kelompok Energi Selanjutnya kita tinjau proses kedua. Tahapan yang ditempuh sebagai berikut. Tinjau kelompok 1 yang mengandung g_1 keadaan dan ditempati oleh n_1 sistem. Sebagai ilustrasi lihat Gbr. (2.4).



Gambar 2.4: Menentukan cara menyusun n_1 sistem pada g_1 keadaan.

Ambil partikel pertama. Kita dapat menempatkan partikel ini entah di keadaan ke-1, keadaan ke-2, keadaan ke-3, dan seterusnya hingga keadaan ke- g_1 . Jadi jumlah cara menempatkan partikel pertama pada kelompok-1 yang memiliki g_1 keadaan adalah g_1 cara. Setelah partikel-1 ditempatkan, kita ambil partikel 2. Partikel ini pun dapat ditempatkan di keadaan ke-1, keadaan ke-2, keadaan ke-3, dan seterusnya hingga keadaan ke- g_1 . Dengan demikian, jumlah cara menempatkan partikel kedua juga g_1 cara. Hal yang sama juga berlaku bagi partikel ke-3, partikel ke-4, dan seterusnya, hingga partikel ke- n_1 . Akhirnya, jumlah cara menempatkan n_1 partikel pada g_1 buah keadaan adalah

$$g_1 \times g_1 \times g_1 \times \dots \times g_1 \quad (n_1 \text{ buah perkalian}) = g_1^{n_1}$$

Sejumlah $g_1^{n_1}$ cara di atas secara implisit mengandung makna bahwa urutan pemilihan partikel yang berbeda menghasilkan penyusunan yang berbeda pula. Padahal tidak demikian. Urutan pemilihan yang berbeda dari sejumlah n_1 partikel yang ada tidak berpengaruh pada penyusunan asalkan jumlah partikel pada tiap bangku tetap jumlahnya. Urutan pemilihan sejumlah n_1 partikel menghasilkan $n_1!$ macam cara penyusunan. Dengan demikian, jumlah riil cara penyusunan n_1 partikel pada g_1 buah keadaan seharusnya adalah

$$\frac{g_1^{n_1}}{n_1!}$$

Penjelasan yang sama juga berlaku bagi buah partikel yang disusun pada keadaan. Jumlah cara penyusunan partikel tersebut adalah

$$\frac{g_2^{n_2}}{n_2!}$$

Secara umum jumlah cara menempatkan n_s partikel di dalam kelompok energi yang mengandung keadaan adalah

$$\frac{g_s^{n_s}}{n_s!}$$

Akhirnya jumlah cara mendistribusikan secara bersama-sama n_1 sistem pada kelompok dengan g_1 keadaan, n_2 sistem pada kelompok dengan g_2 keadaan, .., n_s sistem pada g_s keadaan adalah

$$\frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \times \frac{g_2^{n_2}}{n_2!} \times \frac{g_3^{n_3}}{n_3!} \times \dots \times \frac{g_M^{n_M}}{n_M!} = \prod_{s=1}^M \frac{g_s^{n_s}}{n_s!}$$

Dengan demikian, jumlah total cara menempatkan N buah sistem ke dalam konfigurasi yang mengandung n_1 sistem pada kelompok dengan g_1 keadaan, n_2 sistem pada kelompok dengan g_2 keadaan, .., n_s sistem pada kelompok dengan g_s keadaan adalah

$$W(\{n_s\}) = N! \prod_{s=1}^M \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \quad (2.3)$$

Sekarang kita tinjau assembli yang terisolasi dari lingkungan. Tidak ada pertukaran partikel maupun energi antara assembli dan lingkungan. Dengan demikian, jumlah sistem N dan energi total U yang dimiliki assembli konstan. Akibatnya nilai diferensial keduanya nol, atau

$$\delta N = \sum_{s=1}^M \delta n_s = 0 \quad (2.4)$$

$$\delta U = \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0 \quad (2.5)$$

2.2 Konfigurasi dengan Probabilitas Maksimum

Sekarang kita mencari yang memiliki probabilitas kemunculan paling besar. Kita menganggap bahwa konfigurasi yang dibentuk oleh sistem-sistem dalam assembli yang menghasilkan besaran makroskopik adalah konfigurasi dengan probabilitas maksimum tersebut. Cara yang dilakukan adalah mencari kumpulan n_s sedemikian sehingga W maksimum. Tetapi karena W merupakan perkalian sejumlah faktor maka akan lebih mudah jika kita memaksimalkan $\ln W$. Sebab jika $\ln W$ maksimum maka W pun maksimum. Dengan cara demikian kita peroleh

$$\begin{aligned} \ln W (\{n_s\}) &= \ln N! + \ln \prod_{s=1}^M \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \\ &= \ln N! + \ln \left\{ \frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \times \frac{g_2^{n_2}}{n_2!} \times \dots \times \frac{g_M^{n_M}}{n_M!} \right\} \\ &= \ln N! + \ln \left(\frac{g_1^{n_1}}{n_1!} \right) + \ln \left(\frac{g_2^{n_2}}{n_2!} \right) + \dots + \ln \left(\frac{g_M^{n_M}}{n_M!} \right) \\ &= \ln N! + \sum_{s=1}^M \ln \left(\frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \right) \\ &= \ln N! + \sum_{s=1}^M \{\ln g_s^{n_s} - \ln n_s!\} \\ &= \ln N! + \sum_{s=1}^M \{n_s \ln g_s - \ln n_s!\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Karena baik N maupun n_s merupakan bilangan-bilangan yang sangat besar maka untuk mempermudah perhitungan kita dapat menggunakan pendekatan **Stirling**. Pendekatan tersebut berbentuk $\ln N! \cong N \ln N - N$, $\ln n_s \cong n_s \ln n_s - n_s$ sehingga kita dapatkan bentuk aproksimasi

$$\ln W(\{n_s\}) \cong N \ln N - N + \sum_{s=1}^M \{n_s \ln g_s - n_s \ln n_s + n_s\} \quad (2.7)$$

Dengan demikian, diferensial dari $\ln W(\{n_s\})$ menjadi

$$\begin{aligned} \delta \ln W &\cong \delta N \ln N - \delta N + \delta \sum_{s=1}^M \{n_s \ln g_s - n_s \ln n_s + n_s\} \\ &= 0 - 0 + \sum_{s=1}^M \{\delta n_s \ln g_s + n_s \delta \ln g_s - \delta n_s \ln n_s - n_s \delta \ln n_s + \delta n_s\} \\ &= \sum_{s=1}^M \left\{ \delta n_s \ln g_s + n_s \times 0 - \delta n_s \ln n_s - n_s \left(\frac{1}{n_s} \delta n_s \right) + \delta n_s \right\} \\ &= \sum_{s=1}^M \{\delta n_s \ln g_s - \delta n_s \ln n_s\} \\ &= \sum_{s=1}^M \{\ln g_s - \ln n_s\} \delta n_s \\ &= \sum_{s=1}^M \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) \delta n_s \end{aligned} \quad (2.8)$$

Karena kita harus menerapkan syarat batas kekekalan energi dan jumlah partikel, maka solusi untuk n_s dicari dengan menggabungkan persamaan (2.4), (2.5), dan (2.8). Penggabungan tersebut dilakukan dengan menerapkan pengali **Langrange** sebagai berikut

$$\delta \ln W(\{n_s\}) + \alpha \delta N + \beta \delta U = 0 \quad (2.9)$$

Substitusi persamaan (2.4), (2.5), dan (2.8) ke dalam persamaan (2.9) diperoleh

$$\sum_{s=1}^M \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) \delta n_s + \alpha \sum_{s=1}^M \delta n_s + \beta \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{s=1}^M \left\{ \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) + \alpha + \beta E_s \right\} \delta n_s = 0 \quad (2.10)$$

Karena kondisi ini berlaku untuk nilai n_s berapapun maka persamaan (2.10) dijamin nol asal tiap suku dalam tanda sumasi berharga nol, atau

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) + \alpha + \beta E_s &= 0 \\ \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) &= -\alpha - \beta E_s \\ \frac{g_s}{n_s} &= \exp(-\alpha - \beta E_s) \end{aligned}$$

yang menghasilkan ungkapan untuk n_s sebagai berikut

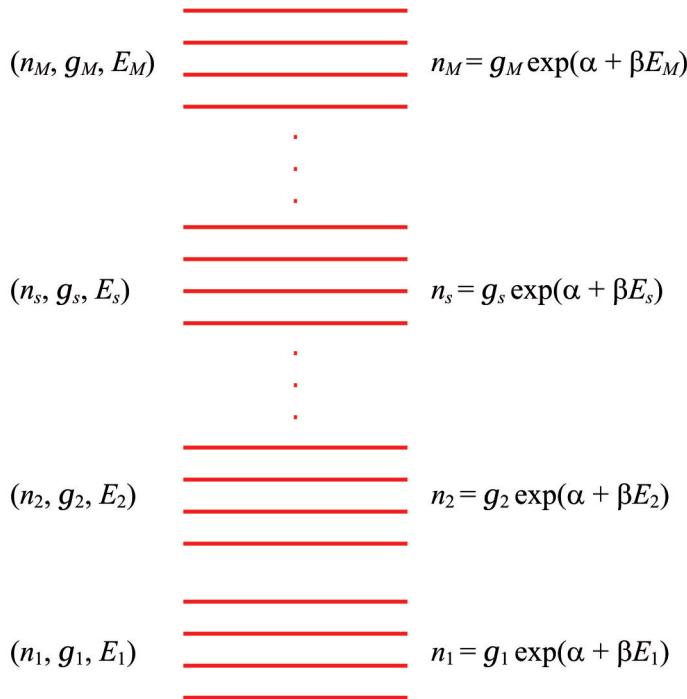
$$n_s = g_s \exp(\alpha + \beta E_s) \quad (2.11)$$

Jadi konfigurasi yang memiliki peluang kemunculan paling besar adalah yang memiliki jumlah sistem pada tiap kelompok energi yang memenuhi persamaan (2.11). Gambar 2.5 adalah ilustrasi yang menggambarkan jumlah partikel yang menempati berbagai kelompok energi.

2.3 Harga Rata-Rata

Banyak sekali yang diperbolehkan ketika menempatkan N sistem ke dalam M kelompok energi. Contoh konfigurasi tersebut adalah semua sistem menempati kelompok energi pertama sedangkan semua kelompok energi lainnya kosong, atau semua kelompok ditempati oleh sistem dalam jumlah yang sama banyak, dan sebagainya. Tiap konfigurasi memiliki peluang kemunculan yang berbeda-beda. Peluang kemunculan terbesar terjadi pada konfigurasi yang mengandung sistem pada tiap kelompok energi yang memenuhi persamaan (2.11).

Misalkan X adalah salah satu sifat sebuah assembli. Nilai X yang kita ukur merupakan perata-rataan nilai X pada semua konfigurasi yang mungkin. Misalkan nilai X beserta peluang kemunculan konfigurasi dilukiskan pada Tabel 2.2.



Gambar 2.5: Jumlah partikel yang menempati tiap kelompok energi.

Perlu diperhatikan di sini bahwa jumlah konfigurasi yang mungkin tidak sama dengan jumlah sistem atau jumlah kelompok energi dalam assembli. Nilai rata-rata X memenuhi hubungan

$$\begin{aligned}
 \langle X \rangle &= \{X(\text{konfig} - 1)P(\text{konfig} - 1) + X(\text{konfig} - 2)P(\text{konfig} - 2) + \dots \\
 &\quad + X(\text{konfig} - R)P(\text{konfig} - R)\} / \{P(\text{konfig} - 1) + P(\text{konfig} - 2) + \dots \\
 &\quad + P(\text{konfig} - R)\} \\
 &= \frac{\sum_{t=1}^R X(\text{konfig} - t)P(\text{konfig} - t)}{\sum_{t=1}^R P(\text{konfig} - t)}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Perhitungan nilai $\langle X \rangle$ di atas sangat sulit. Namun apabila kita dapat menunjukkan bahwa salah satu konfigurasi yang mungkin, yaitu konfigurasi

Tabel 2.2: Nilai X beserta probabilitas kemunculannya

Konfigurasi ke- i	Nilai X	Probabilitas kemunculan
1	$X(\text{konfig} - 1)$	$P(\text{konfig} - 1)$
2	$X(\text{konfig} - 2)$	$P(\text{konfig} - 2)$
\vdots	\vdots	\vdots
t	$X(\text{konfig} - t)$	$P(\text{konfig} - t)$
\vdots	\vdots	\vdots
R	$X(\text{konfig} - R)$	$P(\text{konfig} - R)$

dengan probabilitas maksimum, memiliki nilai yang jauh lebih besar daripada probabilitas konfigurasi-konfigurasi lainnya, maka perhitungan menjadi sangat sederhana. Misalkan $P(\text{konfig} - t) = P_{\text{maks}}$ dan terpenuhi syarat-syarat berikut ini:

$$P(\text{konfig} - 1) \ll P_{\text{maks}}$$

$$P(\text{konfig} - 2) \ll P_{\text{maks}}$$

 \vdots

$$P(\text{konfig} - R) \ll P_{\text{maks}}$$

maka

$$\begin{aligned} X(\text{konfig} - 1)P(\text{konfig} - 1) + X(\text{konfig} - 2)P(\text{konfig} - 2) + \dots \\ + X(\text{konfig} - R)P(\text{konfig} - R) \cong X(\text{konfig} - \text{maks})P_{\text{maks}} \end{aligned}$$

dan

$$P(\text{konfig} - 1) + P(\text{konfig} - 2) + \dots + P(\text{konfig} - R) \cong P_{\text{maks}}$$

Dengan demikian

$$\langle X \rangle \cong \frac{X(\text{konfig} - \text{maks})P_{\text{maks}}}{P_{\text{maks}}} = X(\text{konfig} - \text{maks}) \quad (2.13)$$

Apa implikasi persamaan (2.13)? Implikasinya sangat besar, yaitu nilai rata-rata sifat assembli sama dengan nilai sifat tersebut pada konfigurasi dengan probabilitas terbesar. *Kerumitan perata-rataan terhadap semua konfigurasi yang mungkin muncul telah direduksi secara drastis hanya dengan menghitung nilai pada konfigurasi maksimum. Ini adalah hasil yang luar biasa!!*

2.4 Nilai Peluang Konfigurasi Maksimum

Yang menjadi pertanyaan kita adalah benarkah probabilitas dengan maksimum memiliki nilai yang sangat besar daripada konfigurasi lainnya. Jika ya, berarti kita dapat menggunakan persamaan (2.13) bahwa nilai rata-rata sifat assembli sama dengan nilai pada konfigurasi maksimum. Namun jika tidak maka penyederhanaan yang kita impikan tidak terwujud. Pada bagian ini kita akan perlihatkan bahwa probabilitas konfigurasi maksimum benar-benar memilkiki nilai yang jauh lebih besar daripada konfigurasi lainnya. Mari kita uraikan $\ln W$ di sekitar $\ln W_{\text{maks}}$ menggunakan deret Taylor sebagai berikut

$$\begin{aligned} \ln W &= \ln W_{\text{maks}} + \sum_{s=1}^M \left. \frac{d \ln W}{dn_s} \right|_{n_{s,\text{maks}}} \delta n_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{s,q}^M \left. \frac{\partial^2 \ln W}{\partial n_s \partial n_q} \right|_{n_{s,\text{maks}}, n_{q,\text{maks}}} \delta n_s \delta n_q + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Karena W hanya fungsi variable n_s saja maka

$$\frac{\partial^2 \ln W}{\partial n_s \partial n_q} = \delta_{s,q} \frac{d^2 \ln W}{dn_s^2} \quad (2.15)$$

dengan $\delta_{s,q}$ adalah delta **Kronecker** yang memenuhi $\delta_{s,q} = 1$ jika $s = q$ dan $\delta_{s,q} = 0$ jika $s \neq q$. Dengan demikian kita dapatkan bentuk aproksimasi untuk $\ln W$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \ln W &= \ln W_{\text{maks}} + \sum_{s=1}^M \left. \frac{d \ln W}{dn_s} \right|_{n_{s,\text{maks}}} \delta n_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{s,q}^M \delta_{s,q} \left. \frac{d^2 \ln W}{dn_s^2} \right|_{n_{s,\text{maks}}, n_{q,\text{maks}}} \delta n_s \delta n_q + \dots \\ &= \ln W_{\text{maks}} + \sum_{s=1}^M \left. \frac{d \ln W}{dn_s} \right|_{n_{s,\text{maks}}} \delta n_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_s^M \left. \frac{d^2 \ln W}{dn_s^2} \right|_{n_{s,\text{maks}}} \delta n_s^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pada titik maksimum terpenuhi

$$\sum_{s=1}^M \frac{d \ln W}{dn_s} \Big|_{n_{s,\text{maks}}} \delta n_s = 0 \quad (2.17)$$

sehingga persamaan (2.16) menjadi

$$\ln W = \ln W_{\text{maks}} + \frac{1}{2} \sum_s^M \frac{d^2 \ln W}{dn_s^2} \Big|_{n_{s,\text{maks}}} \delta n_s^2 + \dots \quad (2.18)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.7) kita akan dapatkan

$$\frac{d \ln W}{dn_s} = \sum_{s=1}^M (\ln g_s - \ln n_s)$$

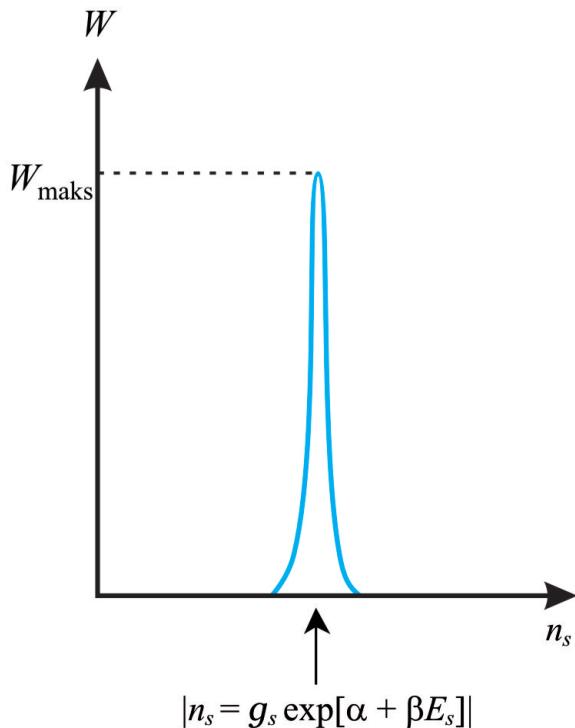
$$\begin{aligned} \frac{d^2 \ln W}{dn_s dn_q} &= \sum_{s=1}^M \left(\frac{d \ln g_s}{dn_q} - \frac{d \ln n_s}{dn_q} \right) \\ &= \sum_{s=1}^M \left(0 - \frac{1}{n_s} \frac{dn_s}{dn_q} \right) \\ &= \sum_{s=1}^M \left(0 - \frac{1}{n_s} \delta_{s,q} \right) \\ &= -\frac{1}{n_q} \end{aligned}$$

atau

$$\frac{d^2 \ln W}{dn_s dn_s} = \frac{d^2 \ln W}{dn_s^2} = -\frac{1}{n_s} \quad (2.19)$$

Dengan demikian persamaan (2.18) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \ln W - \ln W_{\text{maks}} &= \frac{1}{2} \sum_s^M -\frac{1}{n_s} \delta n_s^2 + \dots \\ \ln \left(\frac{W}{W_{\text{maks}}} \right) &= -\frac{1}{2} \sum_s^M \left(\frac{\delta n_s}{n_s} \right)^2 n_s + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$



Gambar 2.6: Variasi jumlah cara menempatkan sistem terhadap konfigurasi penyusunan sistem dalam tingkat-tingkat energi assembli.

Jika kita asumsikan bahwa untuk semua nilai s , penyimpangan jumlah sistem pada tiap kelompok energi terhadap jumlah sistem dalam konfigurasi maksimum bernilai sama maka

$$\frac{\delta n_s}{n_s} \cong \xi$$

sehingga diperoleh

$$\ln \left(\frac{W}{W_{\text{maks}}} \right) = -\frac{1}{2} \sum_s^M \xi^2 n_s + \dots$$

$$\ln \left(\frac{W}{W_{\text{maks}}} \right) = -\frac{1}{2} \xi^2 \sum_s^M n_s = -\frac{1}{2} \xi^2 N$$

atau

$$\frac{W}{W_{\text{maks}}} \cong \exp(-\xi^2 N/2) \quad (2.21)$$

Persamaan (2.21) dapat diilustrasikan pada Gbr. 2.6.

Sebagai ilustrasi, misalkan rasio deviasi jumlah sistem pada tiap-tiap kelompok energi terhadap jumlah pada konfigurasi maksimum adalah $\xi = 10^{-10}$. Dengan rasio ini maka $|n_s - g_s \exp[\alpha + \beta E_s]| \approx 10^{-10}$ untuk semua s dari 1 sampai M . Ini adalah rasio penyimpangan yang sangat kecil. Jumlah sistem dalam suatu assembli seorde dengan bilangan Avogadro, atau $N \approx 10^{23}$. Dengan nilai ini maka

$$\frac{W}{W_{\text{maks}}} \cong \exp(-10^{-20} \times 10^{23}/2) = \exp(-500) \approx 0$$

Jadi dengan rasio deviasi $\xi = 10^{-10}$ kali konfigurasi maksimum, probabilitas peluang konfigurasi tersebut hampir nol. Hal ini membuktikan bahwa nilai sifat assembli pada konfigurasi maksimum sama dengan nilai rata-rata sifat assembli.

Soal Latihan

1. Dari persamaan distribusi Maxwell-Boltzmann, $n_s = g_s \exp[\alpha + \beta E_s]$
 - a) Jelaskan apa yang direpresentasikan oleh n_s , g_s , dan E_s .
 - b) Buktikan bahwa parameter β harus berharga negatif.
2. Buktikan bahwa parameter α dapat ditulis $\alpha = \ln\{N / \sum g_s \exp[\beta E_s]\}$.
3. Jika i adalah indeks untuk keadaan dalam assembli, perlihatkan bahwa jumlah sistem yang menempati keadaan ke- i adalah $n_i = \exp[\alpha + \beta E_i]$.

Bab 3

Ruang Fasa

Isi Bab ini. Bab ini berisi diskusi tentang ruang fasa, yaitu ruang yang mengandung koordinat posisi dan momentum. Keadaan gerak sebuah benda sebenarnya lebih lengkap dinyatakan dalam koordinat ruang fasa karena koordinat tersebut sekaligus memberikan informasi tentang posisi dan momentum partikel sekaligus.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami apa itu ruang fasa, bagaimana mencari volume ruang fasa, dan menentukan kerapatan keadaan dalam ruang fasa. Mahasiswa juga mahir dalam melakukan transformasi kerapatan keadaan dari variable momentum ke variable energi.

Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Tidak ada pengetahuan pendahuluan yang lebih khusus untuk memahami isi bab ini.

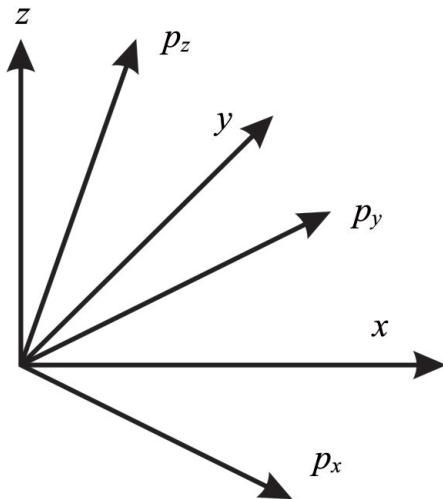
3.1 Definisi Ruang Fasa

Sebelum masuk lebih jauh untuk mencari besaran-besaran fisis suatu assembli, mari kita diskusikan satu jenis ruang yang dinamakan ruang fasa. Ruang fasa adalah ruang yang dibentuk oleh ruang spasial dan ruang momentum atau ruang spasial dan ruang kecepatan. Kita perlu memahami ruang fasa karena sebenarnya keadaan sistem statistik yang telah dan akan kita bahas adalah keadaan sistem tersebut dalam ruang fasa.

Misalkan kita memiliki sebuah partikel. Posisi partikel dapat diterangkan dengan lengkap oleh tiga koordinat ruang, yaitu x , y dan z . Tetapi posisi saja tidak lengkap mendeskripsikan dinamika partikel. Kita juga memerlu-

kan informasi tentang kecepatan partikel tersebut. Kecepatan partikel dapat didefinisikan dengan lengkap oleh tiga koordinat kecepatan, yaitu v_x , v_y , dan v_z . Dengan demikian, dinamika sebuah partikel dapat dijelaskan secara lengkap oleh enam buah koordinat, yaitu tiga koordinat ruang: x , y , dan z , serta tiga koordinat kecepatan: v_x , v_y , dan v_z . Kita dapat menggabungkan enam koordinat tersebut dalam satu ungkapan, yaitu (x, y, z, v_x, v_y, v_z) .

Karena momentum merupakan perkalian massa dan kecepatan, yaitu $\vec{p} = m\vec{v}$ maka alternatif lain untuk mendeskripsikan dinamika partikel secara lengkap adalah memberikan tiga koordinat spasial dan tiga koordinat momentum. Sumbu koordinat ruang fasa tersebut dapat digambarkan secara skematis seperti pada Gbr. 3.1. Dalam deskripsi ini, dinamika partikel dapat dijelaskan dengan lengkap jika tiga koordinat spasial dan tiga koordinat momentum dapat ditentukan. Keenam koordinat tersebut digabung dalam satu ungkapan (x, y, z, p_x, p_y, p_z) .



Gambar 3.1: Ilustrasi koordinat ruang fasa.

Ruang yang direpresentasikan oleh koordinat posisi saja disebut ruang spasial. Ruang yang diungkapkan oleh koordinat momentum saja disebut ruang momentum. Ruang yang direpresentasikan oleh gabungan koordinat ruang dan momentum disebut **ruang fasa**.

3.2 Elemen volume Ruang Fasa

Jika ruang fasa dibangun oleh ruang spasial tiga dimensi dan ruang momentum tiga dimensi maka:

- Elemen volume ruang spasial adalah: $dV_s = dx dy dz$
- Elemen volume ruang momentum adalah: $dV_p = dp_x dp_y dp_z$
- Elemen volume ruang fasa menjadi: $d\Gamma = dV_s dV_p = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$

Jika ruang fasa dibangun oleh ruang spasial dua dimensi dan ruang momentum dua dimensi maka:

- Elemen volume ruang spasial adalah: $dS_s = dx dy$
- Elemen volume ruang momentum adalah: $dS_p = dp_x dp_y$
- Elemen volume ruang fasa menjadi: $d\Gamma = dS_s dS_p = dx dy dp_x dp_y$

Ruang ini digunakan untuk mendeskripsikan keadaan partikel yang bergerak pada bidang.

Jika ruang fasa dibangun oleh ruang spasial satu dimensi dan ruang momentum satu dimensi maka:

- Elemen volume ruang spasial adalah: $dX_s = dx$
- Elemen volume ruang momentum adalah: $dP_p = dp_x$
- Elemen volume ruang fasa adalah: $d\Gamma = dX_s dP_p = dx dp_x$

Ruang ini digunakan untuk mendeskripsikan keadaan partikel yang bergerak pada kawat tipis atau tabung tipis.

Perhatikan bahwa yang dimaksud elemen volume pada penjelasan di atas bisa bermakna umum. Untuk kasus tiga dimensi, yang dimaksud elemen volume adalah elemen volume yang umumnya kita kenal. Untuk kasus dua dimensi, yang dimaksud elemen volume adalah elemen luas, sedangkan untuk kasus satu dimensi, yang dimaksud elemen volume adalah elemen panjang.

3.3 Energi Kinetik

Tinjau elemen kecil volume dalam ruang fasa yang dibatasi oleh koordinat-koordinat berikut ini:

- Antara x sampai $x + dx$
- Antara y sampai $y + dy$
- Antara z sampai $z + dz$
- Antara p_x sampai $p_x + dp_x$
- Antara p_y sampai $p_y + dp_y$
- Antara p_z sampai $p_z + dp_z$

Volume ruang fasa elemen tersebut adalah

$$d\Gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z \quad (3.1)$$

Di dalam elemen volume tersebut, komponen momentum partikel adalah p_x , p_y , dan p_z . Dengan demikian, energi kinetik partikel yang berada dalam elemen volume tersebut adalah

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \\ &= \frac{1}{2m}([mv_x]^2 + [mv_y]^2 + [mv_z]^2) \\ &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.4 N Sistem dalam Ruang Fasa

N Sistem dalam Ruang Fasa

Di atas kita bahas hanya satu sistem dalam ruang fasa. Bagaimana jika terdapat N sistem? Tiap sistem akan memiliki 6 koordinat fasa yang bebas yang terdiri dari 3 koordinat ruang dan 3 koordinat momentum.

- Koordinat sistem pertama $(x_1, y_1, z_1, p_{1x}, p_{1y}, p_{1z})$

- Koordinat sistem kedua $(x_2, y_2, z_2, p_{2x}, p_{2y}, p_{2z})$

⋮

- dan seterusnya

Jika sistem pertama berada pada elemen volume yang dibatasi oleh koordinat-koordinat berikut ini

- Antara x_1 sampai $x_1 + dx_1$
- Antara y_1 sampai $y_1 + dy_1$
- Antara z_1 sampai $z_1 + dz_1$
- Antara p_{1x} sampai $p_{1x} + dp_{1x}$
- Antara p_{1y} sampai $p_{1y} + dp_{1y}$
- Antara p_{1z} sampai $p_{1z} + dp_{1z}$

maka volume elemen ruang fasa yang menjadi lokasi sistem tersebut adalah

$$d\Gamma_1 = dx_1 dy_1 dz_1 dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z}$$

Dengan cara yang sama maka akan kita peroleh elemen volume ruang fasa yang ditempati sistem kedua adalah

$$d\Gamma_2 = dx_2 dy_2 dz_2 dp_{2x} dp_{2y} dp_{2z}$$

dan seterusnya. Dari hasil ini maka kita dapatkan elemen total ruang fasa yang ditempati oleh buah sistem adalah

$$\begin{aligned} d\Gamma &= dx_1 dy_1 dz_1 dp_{1x} dp_{1y} dp_{1z} dx_2 dy_2 dz_2 dp_{2x} dp_{2y} dp_{2z} \\ &\quad \cdots dx_N dy_N dz_N dp_{Nx} dp_{Ny} dp_{Nz} \\ &= \prod_{i=1}^N dx_i dy_i dz_i dp_{ix} dp_{iy} dp_{iz} \\ &= \prod_{i=1}^N d\Gamma_i \end{aligned} \tag{3.3}$$

Di dalam elemen ruang fase tersebut, energi masing-masing sistem adalah

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2m} (p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + p_{1z}^2) \\ E_2 &= \frac{1}{2m} (p_{2x}^2 + p_{2y}^2 + p_{2z}^2) \\ E_N &= \frac{1}{2m} (p_{Nx}^2 + p_{Ny}^2 + p_{Nz}^2) \end{aligned}$$

Dengan demikian energi total N sistem yang menempati ruang fasa dalam persamaan (3.3) adalah

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + \dots + E_N \\ &= \sum_{i=1}^N E_i \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.5 Menghitung Jumlah Keadaan

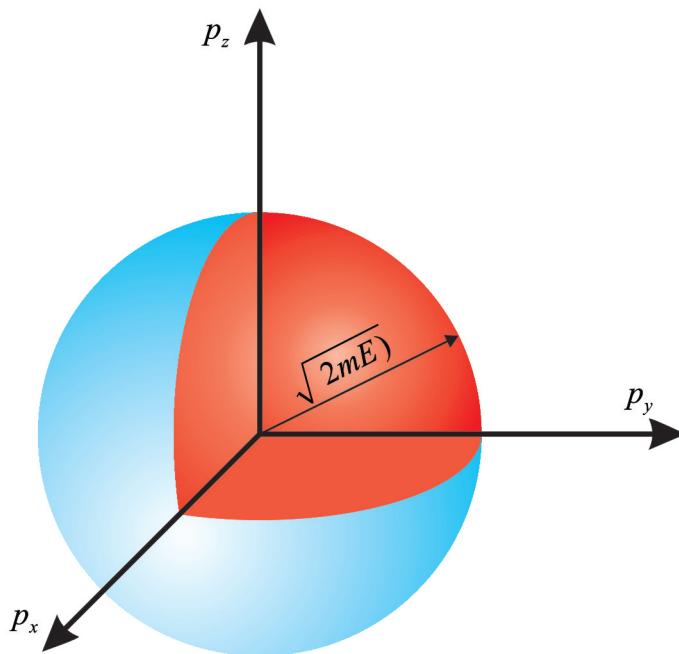
Pada penurunan fungsi distribusi kita sudah membagi energi atas kelompok-kelompok energi dari kelompok ke-1 hingga kelompok ke- M . Tinjau sebuah sistem dengan energi $E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$. Penulisan energi di atas dapat dibalik sebagai berikut

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = (\sqrt{2mE})^2 \tag{3.5}$$

Bandingkan persamaan (3.5) dengan persamaan untuk bola berikut ini

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \tag{3.6}$$

Persamaan (3.5) dan (3.6) persis sama. Pada persamaan (3.5), yang berperan sebagai jari-jari adalah $\sqrt{2mE}$ (Gbr. 3.2). Ini berarti, dalam koordinat momentum, nilai-nilai p_x , p_y , dan p_z yang memberikan E yang konstan adalah yang berada pada permukaan bola dengan jari-jari $\sqrt{2mE}$. Satu kulit bola mewakili satu nilai energi. Makin besar jari-jari bola maka makin besar energi yang dimiliki sistem yang berada pada kulit bola momentum tersebut.



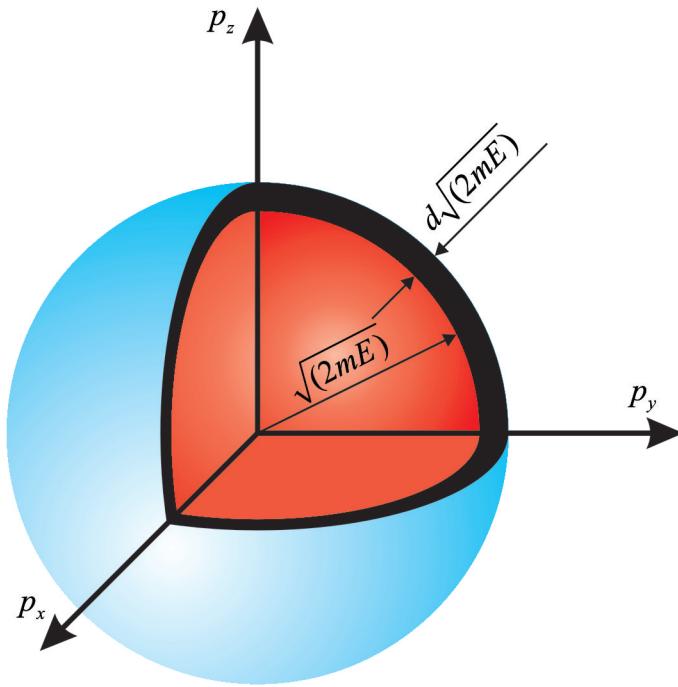
Gambar 3.2: Bola pada ruang momentum. Jari-jari bola adalah $\sqrt{2mE}$.

Jika kita bagi energi assembli atas kelompok-kelompok energi maka tiap kelompok akan diwakili oleh kulit bola dengan ketebalan tertentu. Mari kita ambil elemen volume pada kulit bola dengan jari-jari $\sqrt{2mE}$ dan ketebalan $d(\sqrt{2mE})$ (Gbr. 3.3). Luas kulit bola tersebut adalah

$$S_p = 4\pi \left(\sqrt{2mE}\right)^2 = 8\pi mE \quad (3.7)$$

Tebal kulit bola adalah

$$\begin{aligned} d\left(\sqrt{2mE}\right) &= \sqrt{2m} d\left(\sqrt{E}\right) \\ &= \sqrt{2m} \times \frac{1}{2} E^{-1/2} dE \\ &= \frac{\sqrt{2m}}{2} E^{-1/2} dE \end{aligned} \quad (3.8)$$



Gambar 3.3: Elemen volume dalam ruang momentum berupa kulit bola.

Dengan demikian, volume kulit bola adalah

$$\begin{aligned}
 dV_p &= S_p d\left(\sqrt{2mE}\right) \\
 &= 8\pi mE \frac{\sqrt{2m}}{2} E^{-1/2} dE \\
 &= 2\pi(2m)^{3/2} E^{1/2} dE
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Volume ruang fasa yang ditempati oleh sistem yang berada pada kulit bola momentum serta dalam elemen volume spasial $dV_s = dx dy dz$ adalah

$$d\Gamma = dx dy dz 2\pi(2m)^{3/2} E^{1/2} dE \tag{3.10}$$

Volume ruang fasa yang ditempati oleh sistem pada semua ruang spasial, tetapi tetap berada dalam kulit bola momentum diperoleh dengan mengin-

tegralkan persamaan (3.10) pada elemen ruang spasial. Hasilnya adalah

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma_p &= \int dxdydz 2\pi(2m)^{3/2}E^{1/2}dE \\ &= 2\pi V(2m)^{3/2}E^{1/2}dE\end{aligned}\quad (3.11)$$

dengan $V = \int dxdydz$ adalah volume total ruang spasial yang tidak lain merupakan volume assembli itu sendiri.

Kita belum mengetahui berapa kerapatan keadaan dalam ruang fasa. Untuk sementara kita menganggap kerapatan keadaan tersebut adalah B . Jumlah keadaan dalam elemen ruang fasa $\Delta\Gamma_p$ sama dengan volume ruang fasa dikali kerapatannya, yaitu

$$B\Delta\Gamma_p = 2\pi VB(2m)^{3/2}E^{1/2}dE \quad (3.12)$$

Persamaan (3.12) mirip dengan persamaan untuk mencari massa dengan mengalikan rapat massa dan volume. Jika kelompok-kelompok energi yang kita bangun di dalam assembli diwakili oleh kulit bola maka kita dapat menyamakan dalam persamaan (2.11) dengan $B\Delta\Gamma_p$ pada persamaan (3.12). Akhirnya, kita dapatkan ungkapan untuk g_s sebagai

$$g_s = 2\pi VB(2m)^{3/2}E^{1/2}dE \quad (3.13)$$

3.6 Menentukan n_s

Setelah mengetahui bentuk g_s dalam fungsi kontinu yaitu yang tertuang dalam persamaan (3.13), selanjutnya kita akan menentukan n_s dalam bentuk kontinu juga. Dalam bentuk diskrit, hubungan antara n_s dan g_s adalah $n_s = g_s \exp[\alpha + E_s]$. Pada hubungan ini, n_s menyatakan jumlah sistem. Sekarang kita mendefinisikan kerapatan sistem, yaitu jumlah sistem per satuan energi. Untuk kerapatan sistem kita gunakan symbol $n(E)$. Dengan demikian, jumlah sistem dalam kulit bola yang dibatasi oleh energi E dan $E + dE$ adalah $n(E)dE$. Dengan mengganti n_s dengan $n(E)dE$ dan g_s dengan persamaan (3.13) kita dapatkan hubungan antara jumlah sistem dan kerapatan keadaan dalam bentuk kontinu sebagai berikut

$$\begin{aligned}n(E)dE &= 2\pi VB(2m)^{3/2}E^{1/2}dE \times e^{\alpha+\beta E} \\ &= 2\pi VB(2m)^{3/2}e^{\alpha+\beta E}E^{1/2}dE\end{aligned}\quad (3.14)$$

3.7 Elemen Ruang Fasa dalam Momentum/Laju

Persamaan (3.11) menyatakan elemen volume ruang fasa dinyatakan dalam variabel energi. Kita juga dapat menyatakan elemen volume tersebut dalam variabel momentum atau laju. Kita mulai dari hubungan $E = p^2/2m$ sehingga

$$E^{1/2} = \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} p \quad (3.15)$$

$$dE = \frac{1}{m} pdp \quad (3.16)$$

Substitusi persamaan (3.15) dan (3.16) ke dalam persamaan (3.11) diperoleh ungkapan elemen ruang fasa dinyatakan dalam momentum sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_p &= 2\pi V(2m)^{3/2} \times \left(\frac{1}{2m}\right)^{1/2} p \times \frac{1}{m} pdp \\ &= 4\pi V p^2 dp \end{aligned} \quad (3.17)$$

Mengingat hubungan antara momentum dan laju $p = mv$ maka $dp = mdv$. Konsekuensinya, kita dapat menulis elemen ruang fasa dalam koordinat laju sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_v &= 4\pi V(mv)^2(mdv) \\ &= 4\pi V m^3 v^2 dv \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.18) maka kita dapatkan $g_s = B\Delta\Gamma_p = 4\pi BV m^3 v^2 dv$ dan kerapatan keadaan menjadi

$$\begin{aligned} n(v)dv &= g_s e^{\alpha+\beta E} \\ &= 4\pi BV m^3 v^2 dv \times e^{\alpha+\beta(mv^2/2)} \\ &= (4\pi BV m^3 e^\alpha) v^2 e^{\beta mv^2/2} dv \end{aligned} \quad (3.19)$$

Hasil yang kita peroleh di atas akan sering kita jumpai pada bab-bab berikutnya, khususnya saat melakukan transformasi dari penjumlahan diskrit ke integral kontinu.

Soal Latihan

1. Jelaskan apa yang dimaksud ruang fasa dan mengapa ruang fasa penting dalam fisika statistik.

2. Sebuah assembli mengandung N sistem. Ada berapa koordinat ruang fasa yang diperlukan untuk menggambarkan assembli tersebut?
3. Berapa energi kinetik suatu sistem yang memiliki koordinat ruang fasa antara (x, y, z, p_x, p_y, p_z) sampai $(x + dx, y + dy, z + dz, p_x + dp_x, p_y + dp_y, p_z + dp_z)$.
4. Misalkan kerapatan keadaan dalam ruang fasa adalah B , berapa jumlah keadaan dalam elemen ruang fasa antara (p_x, p_y, p_z) sampai $(p_x + dp_x, p_y + dp_y, p_z + dp_z)$ pada seluruh ruang spasial.
5. Kembali ke soal no. 4, berapa jumlah keadaan dalam ruang fasa dengan energi kinetik antara E sampai $E + dE$ dalam seluruh ruang spasial?

Bab 4

Parameter-Parameter Statistik

Isi Bab ini. Bab ini berisi penentuan parameter α dan β yang terdapat dalam fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann. Parameter-parameter tersebut telah diperkenalkan untuk mengakomodasi hukum kekekalan energi dan jumlah partikel yang dimiliki assembli.

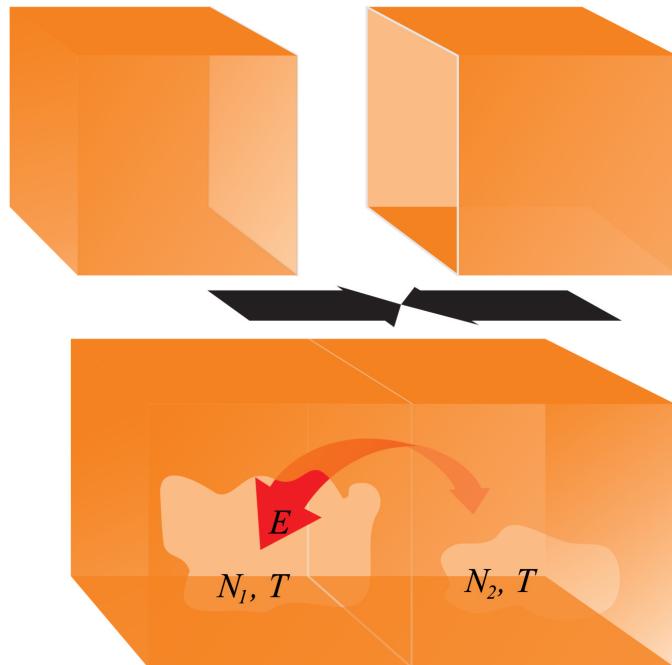
Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami bagaimana menentukan parameter α dan β dalam fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann dan alasan-alasan yang digunakan dalam proses penentuan parameter-parameter tersebut.

Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Pemahaman tentang isi Bab 2 dan Bab 3 sangat penting untuk mengikuti penjelasan dalam bab ini. Juga pemahaman tentang konsep entropi yang dipelajari di termodinamika serta dasar prinsip ekipartisi energi yang dipelajari pada gas ideal juga sangat membantu dalam memahami isi bab ini.

4.1 Menentukan Parameter β

Ketika mencari konfigurasi dengan probabilitas terbesar, kita memperkenalkan dua pengali Lagrange, yaitu α dan β untuk mengakomodasi syarat batas bahwa jumlah sistem dan energi assembli harus konstan. Pertanyaan berikutnya adalah adakah makna fisik parameter-parameter tersebut? Inilah yang kita bahas sekarang.

Sudah kita tunjukkan bahwa jumlah sistem yang menempati kelompok energi dengan energi rata-rata E_s dan mengandung keadaan sebanyak g_s memenuhi persamaan (2.11) yaitu $n_s = g_s e^{\alpha + \beta E_s}$. Secara fisis kita meyakini bahwa tidak mungkin ada sistem yang memiliki energi tak berhingga. Oleh karena itu jika $E_s \rightarrow \infty$ maka haruslah $n_s \rightarrow 0$. Ini hanya mungkin terpenuhi jika **parameter β bernilai negatif**. Lalu, *bergantung pada besaran apakah parameter β ?*



Gambar 4.1: Dua buah assembli terisolasi digabung setelah membuka masing-masing satu sisinya. Pada batas dua assembli diijinkan pertukaran energi tetapi tidak diijinkan pertukaran partikel.

Setelah mengetahui bahwa nilai parameter β harus negatif mari kita mencari bentuk ekspresi dari parameter tersebut. Untuk mempermudah mari kita tinjau dua assembli terisolasi dan berada pada suhu yang sama T . Kesamaan suhu bermakna bahwa kedua assembli berada dalam kesetimbangan termal. Assembli pertama memiliki N_1 sistem dan assembli kedua mengandung N_2 sistem. Kemudian salah satu sisi masing-masing assembli dilepas dan dua assembli dikontakkan pada sisi yang dilepas tersebut.

Setelah dikontakkan dua assembli menjadi sebuah assembli baru yang tetap terisolasi dari lingkungan. Misalkan pada permukaan kontak dua assembli dipasang dinding sedemikian rupa sehingga tidak ada pertukaran sistem antara dua assembli namun pertukaran energi diperbolehkan. Akibatnya, sebelum dan sesudah dua assembli disatukan, jumlah partikel di assembli kiri maupun assembli kanan tidak berubah. Tetapi energi yang dimiliki masing-masing assembli awal bisa berubah (lihat Gbr. 4.1).

Karena assembli gabungan terisolasi dari lingkungan maka pertukaran energi antar dua assembli awal tidak mengubah energi total assembli gabungan. Dengan persyaratan di atas kita dapatkan beberapa konstrain berikut ini

$$N_1 = \sum_s n_{1s} = \text{konstan} \quad (4.1)$$

$$N_2 = \sum_s n_{2s} = \text{konstan} \quad (4.2)$$

$$U = U_1 + U_2 = \sum_s n_{1s} E_{1s} + \sum_s n_{2s} E_{2s} = \text{konstan} \quad (4.3)$$

Apabila kita nyatakan dalam bentuk diferensial, persamaan (4.1) sampai (4.3) berbentuk

$$\delta N_1 = \sum_s \delta n_{1s} = 0 \quad (4.4)$$

$$\delta N_2 = \sum_s \delta n_{2s} = 0 \quad (4.5)$$

$$\delta U = \sum_s E_{1s} \delta n_{1s} + \sum_s E_{2s} \delta n_{2s} = 0 \quad (4.6)$$

Sebelum ke dua assembli digabung maka jumlah penyusunan sistem pada keadaan-keadaan energi di masing-masing assembli memenuhi persamaan (2.3), yaitu

$$W_1 = N_1! \prod_s \left(\frac{g_{1s}^{n_{1s}}}{n_{1s}!} \right) \quad (4.7)$$

$$W_2 = N_2! \prod_s \left(\frac{g_{2s}^{n_{2s}}}{n_{2s}!} \right) \quad (4.8)$$

Ketika dua assembli digabung maka probabilitas penyusunan sistem-sistem pada assembli gabungan tersebut merupakan perkalian probabilitas penyusunan pada masing-masing assembli awal, yaitu

$$W = W_1 W_2$$

atau bila diungkapkan dalam notasi logaritma menjadi

$$\ln W = \ln W_1 + \ln W_2 \quad (4.9)$$

Kita akan mencari konfigurasi dengan probabilitas maksimum dengan memperhatikan tiga konstrain pada persamaan (4.4) sampai (4.6). Ini mensyaratkan pengenalan tiga pengali Langrange α_1 , α_2 , dan β . Syarat maksimum memenuhi persamaan

$$\delta \ln W + \alpha_1 \delta N_1 + \alpha_2 \delta N_2 + \beta \delta U = 0 \quad (4.10)$$

Dengan menggunakan persamaan (4.9) maka

$$\begin{aligned} \delta \ln W &= \delta \ln W_1 + \delta \ln W_2 \\ &= \sum_s \frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} \delta n_{1s} + \sum_s \frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} \delta n_{2s} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Substitusi persamaan (4.4), (4.5), (4.6), dan (4.11) ke dalam persamaan (4.10) diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_s \frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} \delta n_{1s} + \sum_s \frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} \delta n_{2s} + \alpha_1 \sum_s \delta n_{1s} \\ + \alpha_2 \sum_s \delta n_{2s} + \beta \left[\sum_s E_{1s} \delta n_{1s} + \sum_s E_{2s} \delta n_{2s} \right] = 0 \end{aligned}$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_s \left[\frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} + \alpha_1 + \beta E_{1s} \right] \delta n_{1s} + \sum_s \left[\frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} + \alpha_2 + \beta E_{2s} \right] \delta n_{2s} = 0 \quad (4.12)$$

Agar persamaan (4.12) selalu terpenuhi untuk variasi δn_{1s} dan δn_{2s} berapa pun maka suku dalam kurung pada harus nol, atau

$$\frac{\partial \ln W_1}{\partial n_{1s}} + \alpha_1 + \beta E_{1s} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \ln W_2}{\partial n_{2s}} + \alpha_2 + \beta E_{2s} = 0 \quad (4.14)$$

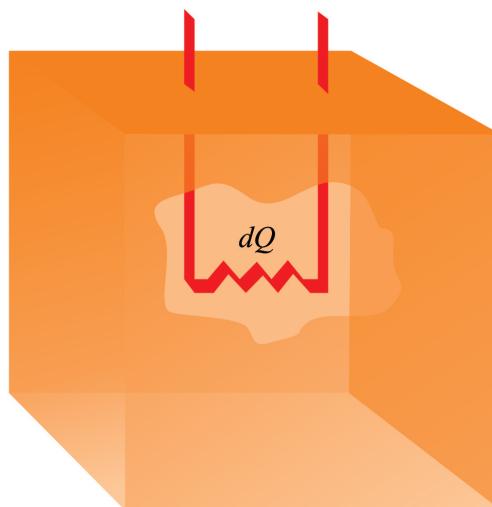
Persaman (4.13) dan (4.14) mengandung β yang sama. Ini mengisyaratkan bahwa **jika β merupakan fungsi parameter termodinamika**

maka parameter yang menentukan β haruslah yang tidak berubah sebelum dan sesudah dua assembli digabung. Parameter tersebut hanya suhu!! Sebelum dan sesudah dua assembli digabung suhunya sama. Jadi kita simpulkan bahwa β hanya merupakan fungsi suhu, atau

$$\beta = \beta(T) \quad (4.15)$$

4.2 Bagaimana Kebergantungan β pada Suhu?

Setelah kita mengetahui bahwa β merupakan fungsi suhu maka langkah selanjutnya adalah menentukan kebergantungan β terhadap suhu secara eksplisit. Untuk maksud mari kita lihat assembli pada Gbr. 4.2 berikut ini. Di dalam assembli kita letakkan sebuah pemanas yang dapat mensuplai kalor ke dalam assembli.



Gambar 4.2: Kalor disuplai ke dalam assembli.

Energi dalam yang dimiliki assembli adalah U . Jika ke dalam assembli diberikan tambahan kalor dQ maka kalor akan mengubah energi dalam assembli dan melakukan kerja pada assembli tersebut. Hubungan antara perubahan energi dalam, kalor yang diberikan dan kerja yang dilakukan memenuhi hukum I termodinamika, yaitu $dU = dQ + dW$. Dengan menggunakan definisi $dW = -pdV$ maka

$$dU = dQ - pdV \quad (4.16)$$

Karena ada kemungkinan volume assembli berubah ketika menyerap kalor maka tingkat energi dalam assembli juga mungkin berubah. Akibatnya, energi rata-rata sistem dalam satu kelompok energi, yaitu E_s , juga mungkin berubah sehingga secara umum terpenuhi $\delta E_s \neq 0$. Dengan demikian. Mengingat $U = \sum_s n_s E_s$ maka secara umum dalam bentuk diferensial dari U adalah

$$\delta U = \sum_s E_s \delta n_s + \sum_s n_s \delta E_s \quad (4.17)$$

Bagaimana hubungan persamaan (4.16) dan (4.17)? Masih ingat pelajaran fisika modern saat membahas partikel kuantum yang terperangkap dalam kotak (sumur potensial)? Di situ dibahas bahwa tingkat energi partikel dalam kotak bergantung pada ukuran kotak. Makin besar ukuran kotak maka tingkat-tingkat energi makin rapat dan menjadi kontinu ketika ukuran kotak menuju tak berhingga (Gbr. 4.3). Khusus untuk kotak satu dimensi, energi tiap tingkat energi memenuhi $E_i \propto i^2/L$ di mana i adalah indek keadaan (bilangan kuantum) dan L adalah lebar kotak. Kelakuan serupa juga dapat diterapkan di sini.

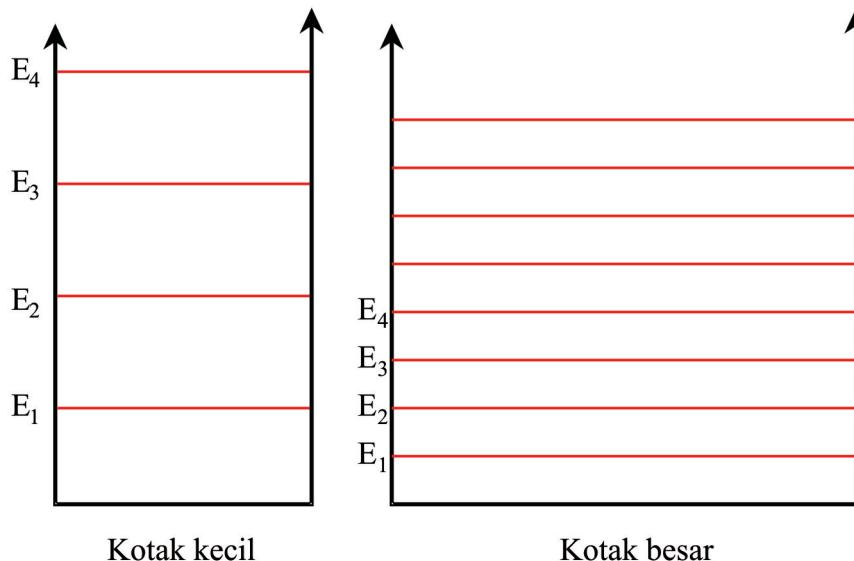
Ketika dalam assembli disuplai kalor, perubahan tingkat energi dalam assembli semata-mata disebabkan perubahan ukuran spasial assembli. Jadi, perubahan tingkat energi dalam assembli, yaitu δE_s merupakan kontribusi dari perubahan ukuran assembli. Dengan demikian, korelasi antara persamaan (4.16) dan (4.17) menjadi sebagai berikut:

- Suku pertama pada persamaan (4.17) merupakan kontribusi dari pemberian kalor
- Suku kedua dalam persamaan (4.17) merupakan kontribusi dari perubahan volume assembli.

Dengan demikian kita dapat mengambil kesimpulan berikut ini

$$\sum_s E_s \delta n_s = \delta Q \quad (4.18)$$

$$\sum_s n_s \delta E_s = -pdV \quad (4.19)$$



Gambar 4.3: Pada kotak kecil, jarak antar tingkat energi lebar sedangkan pada kotak besar jarak antar tingkat energi sempit.

Jika kita menganggap bahwa dinding assembli sangat tegar sehingga tidak terjadi perubahan volume pada saat penyerapan kalor δQ maka

$$\delta U = \delta Q \quad (4.20)$$

Dengan demikian, syarat konfigurasi dengan probabilitas maksimum menjadi

$$\delta \ln W + \alpha \delta N + \beta \delta Q = 0 \quad (4.21)$$

Untuk assembli yang terisolasi, jumlah sistem tidak berubah sehingga $\delta N = 0$. Akibat dari pembatasan tersebut maka persamaan (4.21) menjadi $\delta \ln W + \beta \delta Q = 0$ atau

$$\delta \ln W = -\beta \delta Q \quad (4.22)$$

Ingat, $\ln W$ merupakan sebuah fungsi sehingga $\delta \ln W$ merupakan diferensial sejati, yaitu merupakan selisih dua nilai berdekatan. Tetapi δQ bukan merupakan diferensial sejati. δQ tidak dapat dinyatakan sebagai selisih dua nilai dari sebuah fungsi. Dengan demikian tampak bahwa ruas kiri dan kanan persamaan (4.22) tidak konsisten. Agar konsisten maka ruas kanan pun harus merupakan diferensial sejati. Dalam pelajaran termodinamika,

sudah dibahas bahwa δQ bisa diubah menjadi diferensial sejati jika dibagi dengan suhu. Jadi, walaupun δQ bukan diferensial sejati tetapi $\delta Q/T$ merupakan diferensial sejati. Di termodinamika dibahas bahwa $\delta Q/T$ merupakan sebuah besaran termodinamika yang bernama entropi. Dengan demikian, agar ruas kanan persamaan (4.22) menjadi diferensial sejati maka haruslah $\beta \propto 1/T$. Dan karena kita menunjukkan bahwa β berharga negatif, maka bentuk umum β sebagai fungsi suhu manjadi

$$\beta = -\frac{1}{kT} \quad (4.23)$$

dengan k sebuah konstanta. Nanti akan kita buktikan bahwa k tidak lain daripada konstanta Boltzmann.

4.3 Menentukan β dari Energi Rata-Rata

Cara lain menentukan parameter β adalah menggunakan konsep energi rata-rata yang diturunkan menggunakan teori kinetik gas ideal. Satu atom atau molekul gas yang hanya melakukan gerak translasi dalam tiga arah koordinat ruang memiliki energi kinetik rata-rata

$$\bar{E} = \frac{3}{2}kT \quad (4.24)$$

dengan T suhu mutlak dan k konstanta Boltzmann. Kita bisa mendapatkan energi rata-rata tersebut dengan menggunakan kosep kerapatan keadaan yang telah kita pelajari pada bab terdahulu. Mari kita lakukan di sini. Dalam Bab 3 kita sudah menurunkan jumlah partikel yang berada dalam jangkauan energi antara E sampai $E + dE$ adalah

$$n(E)dE = 2\pi V B(2m)^{3/2} e^{\alpha+\beta E} E^{1/2} dE$$

Energi rata-rata partikel dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}
 \bar{E} &= \frac{\int_0^{\infty} En(E)dE}{\int_0^{\infty} n(E)dE} \\
 &= \frac{\int_0^{\infty} E \times 2\pi V B(2m)^{3/2} e^{\alpha+\beta E} E^{1/2} dE}{\int_0^{\infty} 2\pi V B(2m)^{3/2} e^{\alpha+\beta E} E^{1/2} dE} \\
 &= \frac{2\pi V B(2m)^{3/2} e^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{3/2} dE}{2\pi V B(2m)^{3/2} e^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE} \\
 &= \frac{\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{3/2} dE}{\int_0^{\infty} e^{\beta E} E^{1/2} dE}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Mari kita selesaikan integral pada persamaan (4.25) dengan melihat pembilang terlebih dahulu. Untuk menyelesaikan integral tersebut kita misalkan

$$e^{\beta E} dE = dx \tag{4.26a}$$

$$E^{3/2} = y \tag{4.26b}$$

Dengan melakukan integral pada dua sisi persamaan (4.26) diperoleh

$$x = \frac{1}{\beta} e^{\beta E}$$

dan dengan melakukan diferensial pada persamaan (4.26b) diperoleh

$$dy = \frac{3}{2} E^{1/2} dE$$

Selanjutnya kita gunakan aturan rantai untuk integral $\int ydx = xy - \int xdy$. Dengan aturan ini maka kita dapat menulis bagian pembilang persamaan

(4.25) sebagai

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\beta E} E^{3/2} dE &= \left[\frac{1}{\beta} e^{\beta E} E^{3/2} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{1}{\beta} e^{\beta E} \right) \left(\frac{3}{2} E^{1/2} dE \right) \\ &= \left[\frac{1}{\beta} e^{\beta \times \infty} \infty^{3/2} - \frac{1}{\beta} e^{\beta \times 0} 0^{3/2} \right] - \frac{3}{2\beta} \int_0^\infty E^{1/2} e^{\beta E} dE \end{aligned} \quad (4.27)$$

Karena β negatif maka $e^{\beta \times \infty} \rightarrow 0$ dan menuju nol lebih cepat daripada membesarnya $\infty^{3/2}$ sehingga perkalian $e^{\beta \times \infty} \infty^{3/2} \rightarrow 0$. Dengan sifat ini maka suku pertama di sisi kanan persamaan (4.27) yaitu yang berada di dalam kurung siku nilainya nol dan integral pembilang di persamaan (4.25) menjadi

$$\int_0^\infty e^{\beta E} E^{3/2} dE = -\frac{3}{2\beta} \int_0^\infty E^{1/2} e^{\beta E} dE \quad (4.28)$$

Substitusi persamaan (4.28) ke dalam persamaan (4.25) didapatkan energi rata-rata sistem menjadi

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty e^{\beta E} E^{3/2} dE}{\int_0^\infty e^{\beta E} E^{1/2} dE} = -\frac{3}{2\beta} \frac{\int_0^\infty e^{\beta E} E^{1/2} dE}{\int_0^\infty e^{\beta E} E^{1/2} dE} = -\frac{3}{2\beta}$$

Karena energi rata-rata ini harus sama dengan $3kT/2$ maka $-3/2\beta = 3kT/2$ sehingga diperoleh ungkapan untuk β

$$\beta = -\frac{1}{kT}$$

yang persis sama dengan persamaan (4.23). Hasil ini pun membuktikan bahwa konstanta k benar-benar merupakan konstanta Boltzmann karena berasal dari ungkapan energi rata-rata sistem.

4.4 Menentukan Parameter α

Setelah mengetahui ungkapan untuk g_s , kita siap menentukan parameter pengali Lagrange α . Kita mulai dari hubungan $n_s = g_s e^{\alpha + \beta E_s}$. Selanjutnya

kita lakukan penjumlahan untuk semua s yang mungkin

$$\sum_s n_s = \sum_s g_s e^{\alpha + \beta E_s} = e^\alpha \sum_s g_s e^{\beta E_s}$$

Penjumlahan di ruas kiri adalah jumlah total sistem. Jadi

$$N = e^\alpha \sum_s g_s e^{\beta E_s} \quad (4.29)$$

Mari kita fokuskan pada suku penjumlahan di ruas kanan persamaan (4.29). Kita ganti g_s dengan bentuk kontinu yang diberikan oleh persamaan (3.13). Penjumlahan selanjutnya diganti dengan integral pada semua jangkauan energi yang mungkin, yaitu dari $E = 0$ sampai $E = \infty$. Bentuk integral yang dimaksud adalah

$$\begin{aligned} N &= e^\alpha \int_0^\infty 2\pi V B (2m)^{3/2} e^{\beta E} E^{1/2} dE \\ &= 2\pi V B (2m)^{3/2} e^\alpha \int_0^\infty e^{\beta E} E^{1/2} dE \end{aligned} \quad (4.30)$$

Untuk menyelesaikan integral (4.30) mari kita mendefinisikan $\beta E = -y$ sehingga

$$E = -\frac{y}{\beta} \quad (4.31a)$$

$$dE = -\frac{1}{\beta} dy \quad (4.31b)$$

dan

$$E^{1/2} = \left(-\frac{y}{\beta}\right)^{1/2} = \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{1/2} y^{1/2} \quad (4.31c)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (4.31a) sampai (4.31c) maka suku integral

di ruas kanan persamaan (4.30) menjadi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{\beta E} E^{1/2} dE &= \int_0^\infty e^{-y} \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{1/2} y^{1/2} \left(-\frac{1}{\beta}\right) dy \\ &= \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-y} y^{1/2} dy \\ &= \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

di mana $\Gamma(x)$ adalah fungsi gamma. Dapat dibuktikan secara analitik (walaupun agak panjang) dan juga sudah ditabelkan bahwa $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ sehingga

$$\int_0^\infty e^{\beta E} E^{1/2} dE = \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4.32)$$

Akhirnya, substitusi persamaan (4.32) ke dalam (4.30) diperoleh

$$N = 2\pi V B (2m)^{3/2} e^\alpha \left(-\frac{1}{\beta}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4.33)$$

Karena kita sudah membuktikan $\beta = -1/kT$ maka

$$\begin{aligned}N &= 2\pi V B (2m)^{3/2} e^\alpha (kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= V B (2\pi m k T)^{3/2} e^\alpha\end{aligned}$$

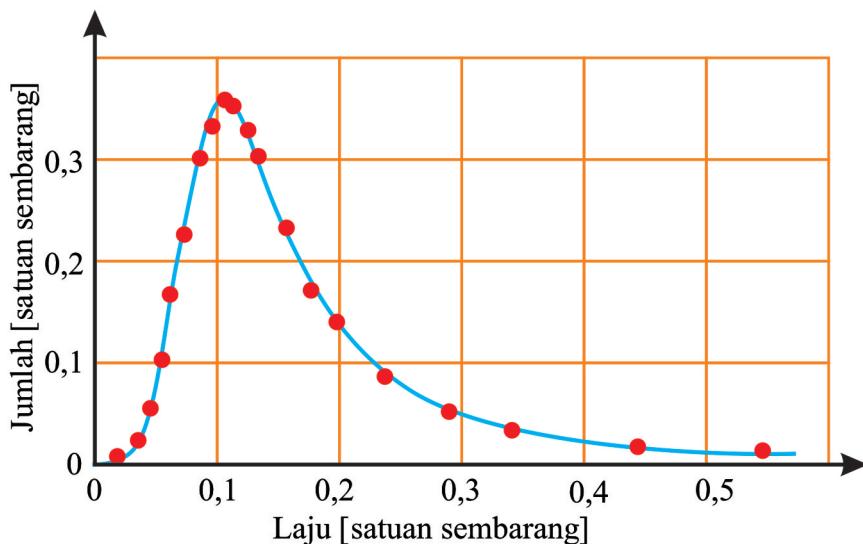
Dengan demikian parameter α memenuhi

$$e^\alpha = \frac{N}{V B (2\pi m k T)^{3/2}}$$

atau

$$\alpha = \ln \left[\frac{N}{V B (2\pi m k T)^{3/2}} \right] \quad (4.34)$$

Hingga saat ini kita sudah lengkap menentukan parameter-parameter fungsi distribusi klasik yang semula merupakan pengali Lagrange yang diperkenalkan untuk memperhitungkan jumlah partikel konstan dan energi total konstan.



Gambar 4.4: Fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann (kurva) dan hasil pengukuran untuk assembli gas cesium (simbol).

Substitusi persamaan (4.23) dan (4.34) ke dalam persamaan (3.17) kita dapatkan bentuk lengkap dari fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann menjadi

$$\begin{aligned}
 n(v)dv &= 4\pi BVm^3 \frac{N}{BV(2\pi mkT)^{3/2}} v^2 e^{-mv^2/2kT} \\
 &= \frac{4\pi N m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} v^2 e^{-mv^2/2kT}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Gambar 4.4 adalah pembuktian secara eksperimen fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann untuk gas cesium. Gas dalam ruang dengan suhu tertentu dikeluarkan dari lubang kecil. Distribusi laju atom/molekul gas yang keluar diukur dan dibandingkan dengan fungsi Maxwell-Boltzmann yang diplot pada suhu yang sama. Terdapat kesesuaian yang sangat baik antara hasil pengamatan dan prediksi teoretik.

4.5 Makna Parameter α

Mari kita lihat lebih eksplisit lagi makna parameter α . Karena N sistem menempati ruang dengan volume V maka volume rata-rata yang ditem-

pati satu sistem adalah N/V . Jika dianggap satu sistem menempati ruang berbentuk kubus dengan panjang sisi l maka volume kubus adalah l^3 dan memenuhi $l^3 = V/N$. Jika sistem menempati pusat kubus, maka jarak rata-rata antar sistem sama dengan panjang sisi kubus, yaitu l .

Energi rata-rata sistem dalam ruang tiga dimensi adalah $3kT/2$. Energi ini berasal dari energi kinetik sistem tersebut. Jadi

$$\text{Energi kinetik rata-rata} = \bar{p}^2/2m = 3kT/2$$

atau

$$\bar{p} = \sqrt{3mkT} \quad (4.36)$$

Panjang gelombang de Broglie rata-rata yang dimiliki sistem adalah

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{h}{\bar{p}} \\ &= \frac{h}{\sqrt{3mkT}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Dengan demikian, parameter α memenuhi

$$\begin{aligned} e^\alpha &= \frac{N/V}{Bh^3(2\pi/3)^{3/2} \frac{(3mkT)^{3/2}}{h^3}} \\ &= \frac{1/\ell^3}{Bh^3(2\pi/3)^{3/2} \frac{1}{\bar{\lambda}^3}} \\ &= \frac{1}{Bh^3(2\pi/3)^{3/2}} \left(\frac{\bar{\lambda}}{\ell}\right)^3 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Tampak dari persamaan (4.38) bahwa nilai α bergantung pada rasio panjang gelombang de Broglie termal sistem dengan jarak rata-rata antar sistem. Pada suhu yang sangat rendah, momentum sistem sangat kecil sehingga panjang gelombang de Broglie sangat besar. Akibatnya e^α jauh lebih besar dari satu. Sebaliknya, pada suhu sangat tinggi, momentum sistem sangat besar sehingga panjang gelombang de Broglie sangat kecil. Akibatnya, nilai e^α jauh lebih kecil daripada satu.

Soal Latihan

1. Buktikan bahwa panjang gelombang termal de Broglie memenuhi $\lambda = h/\sqrt{3mkT}$.

2. Buktikan bahwa $\alpha \propto \ln(\lambda/\ell)$ dengan λ adalah panjang gelombang termal de Broglie dan ℓ adalah jarak rata-rata antar sistem.

Bab 5

Statistik Bose-Einstein

Isi Bab ini. Bab ini berisi perumusan statistik Bose-Einstein untuk assembli boson, yaitu partikel kuantum dengan spin merupakan kelipatan bulat dari $\hbar = h/2\pi$. Contoh partikel boson adalah foton, fonon, dan atom helium.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami bagaimana proses membangun statistik Bose-Einstein dengan menggunakan prinsip statistik murni yang digabungkan dengan prinsip kekekalan dalam fisika seperti kekekalan energi dan jumlah partikel.

Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Untuk memahami penurunan fungsi distribusi Bose-Einstein mahasiswa perlu memahami prinsip permutasi untuk benda-benda yang tidak dapat dibedakan, sifat yang ditunjukkan oleh sebuah besaran yang nilainya kekal (konstan), serta bagaimana mencari nilai maksimum dari sebuah fungsi. Pemahaman tentang penurunan distribusi Maxwell-Boltzmann juga merupakan modal berharga untuk memahami penurunan distribusi Bose-Einstein secara lebih mudah.

5.1 Sifat Dasar Boson

Penyusunan partikel yang kita bahas pada bab sebelumnya berlaku untuk partikel dapat dibedakan. Partikel semacam ini dikenal dengan partikel klasik. Contoh partikel klasik adalah atom dan molekul gas. Dapat dibedakan di sini bukan berarti kita dapat melihat dengan mata telanjang bahwa jika ada dua partikel maka kita dapat membedakan mana partikel A dan mana partikel B. Dengan mata telanjang atau bahkan dengan mikroskop pun ki-

ta tidak dapat membedakan satu partikel dengan partikel lainnya. Dapat dibedakan di sini hanya dari sudut pandang teori (konsep). Jika ada dua partikel yang memiliki energi berbeda dipertukarkan maka kita menganggap akan mendapatkan penyusunan yang baru.

Kalau kita melangkah ke partikel sub atomik seperti proton dan elektron maka sifat dapat dibedakan menjadi hilang. Pertukaran dua partikel yang menempati tingkat energi berbeda tidak menghasilkan jenis penyusunan baru. Dikatakan partikel-partikel ini tidak terbedakan.

Sifat partikel sub atomik yang tidak dapat dibedakan dapat dipahami dari konsep gelombang partikel. Panjang gelombang de Broglie partikel-partikel tersebut memenuhi $\lambda = h/mv$ dengan m massa partikel dan v laju partikel. Karena m untuk partikel sub atomik sangat kecil maka panjang gelombang λ cukup besar. Panjang gelombang yang besar menyebabkan fungsi gelombang dua partikel yang berdekatan tumpang tindih (berimpitan). Kalau dua fungsi gelombang tumpang tindih maka kita tidak dapat lagi membedakan dua partikel yang memiliki fungsi-fungsi gelombang tersebut.

Kondisi sebaliknya dijumpai pada partikel klasik seperti molekul-molekul gas. Massa partikel sangat besar sehingga λ sangat kecil. Akibatnya tidak terjadi tumpang tindih fungsi gelombang partikel-partikel tersebut, sehingga secara prinsip partikel-partikel tersebut dapat dibedakan.

Akan kita lihat nanti bahwa pada suhu yang sangat tinggi partikel sub atomik berperilaku seperti partikel klasik. Pada suhu yang sangat tinggi kecepatan partikel sangat besar sehingga panjang gelombangnya sangat kecil. Akibatnya, tumpang tindih gelombang partikel-partikel menjadi hilang dan partikel menjadi terbedakan.

Sistem kuantum yang akan kita bahas ada dua macam, yaitu boson dan fermion. Boson adalah sistem yang memiliki spin kelipatan bulat dari \hbar . Sistem ini tidak memenuhi prinsip ekslusi Pauli sehingga satu tingkat energi dapat ditempati oleh partikel dalam jumlah berapa pun. Sebaliknya, fermion memiliki spin yang merupakan kelipatan gajil dari $\hbar/2$. Sistem ini memenuhi prinsip ekslusi Pauli. Tidak ada dua partikel atau lebih yang dapat memiliki keadaan yang sama.

5.2 Konfigurasi Boson

Mari kita mulai dengan munurunkan statistik untuk boson. Statistik ini dinamakan statistik Bose-Einstein. Agar dapat menentukan fungsi distribusi Bose-Einstein, kita terlebih dahulu harus menentukan konfigurasi dengan probabilitas paling besar. Konfigurasi ini memiliki probabilitas yang jauh lebih besar daripada konfigurasi-konfigurasi lainnya sehingga hampir seluruh waktu sistem boson membentuk konfigurasi tersebut. Sifat rata-rata assembli dapat dianggap sama dengan sifat pada konfigurasi maksimum tersebut.

Kita tetap membagi tingkat energi sistem-sistem dalam assembli atas M kelompok sebagai berikut:

- Kelompok-1 memiliki jumlah keadaan g_1 dan energi rata-rata E_1
- Kelompok-2 memiliki jumlah keadaan g_2 dan energi rata-rata E_2

⋮

- Kelompok- s memiliki jumlah keadaan g_s dan energi rata-rata E_s

⋮

- Kelompok- M memiliki jumlah keadaan g_M dan energi rata-rata E_M

Kita akan menentukan berapa cara penyusunan yang dapat dilakukan jika:

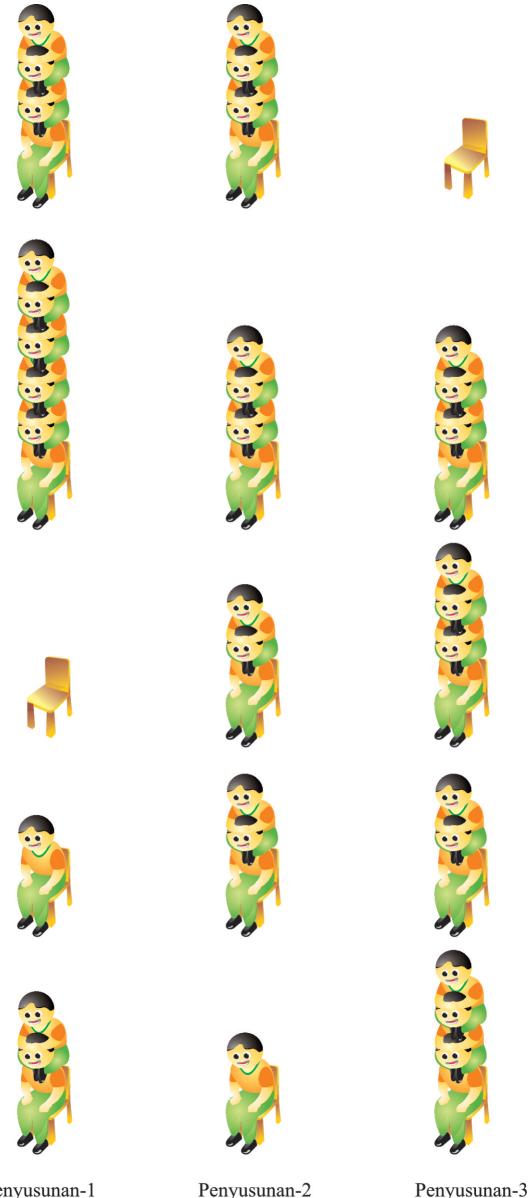
- Ada n_1 sistem di kelompok-1
- Ada n_1 sistem di kelompok-2

⋮

- Ada n_s sistem di kelompok-s

⋮

- Ada n_M sistem di kelompok-M



Gambar 5.1: Penyusunan orang dan kursi analog dengan penyusunan boson dalam tingkat-tingkat energi. Untuk merepresentasikan sistem boson, bagian paling bawah harus selalu kursi.

Mari kita tinjau kelompok-1 di mana terdapat g_1 keadaan dan n_1 sistem. Mari kita analogikan satu keadaan sebagai sebuah kursi dan satu sistem di-analogikan sebagai sebuah benda yang akan diletakkan di kursi tersebut. Satu kursi dapat saja kosong atau menampung benda dalam jumlah berapa saja. Untuk menghitung jumlah penyusunan benda, kita dapat melakukannya sebagai berikut.

Dari Gbr 5.1, apa pun cara penyusunan yang kita lakukan, yang berada di ujung bawah selalu kursi karena benda harus disangga oleh kursi (sistem harus menempati tingkat energi). Oleh karena itu, jika jumlah total kursi adalah g_1 maka jumlah total kursi yang dapat dipertukarkan hanya $g_1 - 1$ karena salah satu kursi harus tetap di ujung bawah. Bersama dengan orang sebanyak n_1 , maka jumlah total benda yang dapat dipertukarkan dengan tetap memenuhi sifat boson adalah $(g_1 - 1) + n_1 = g_1 + n_1 - 1$. Akibatnya, jumlah cara penyusunan benda yang dilakukan adalah $(g_1 + n_1 - 1)!$.

Karena sistem boson tidak dapat dibedakan satu dengan lainnya, maka pertukaran sesama orang dan sesama kursi tidak menghasilkan penyusunan yang berbeda. Jumlah penyusunan sebanyak $(g_1 + n_1 - 1)!$ secara implisit memperhitungkan jumlah pertukaran antar orang dan antar kursi. Jumlah pertukaran antar orang adalah $n_1!$ dan jumlah pertukaran antar kursi adalah $g_1!$. Oleh karena itu, jumlah penyusunan yang berbeda untuk n_1 boson di dalam g_1 keadaan hanyalah

$$\frac{(g_1 + n_1 - 1)!}{n_1! g_1!} \quad (5.1)$$

Hal yang sama berlaku untuk kelompok-2 yang mengandung g_2 keadaan dengan populasi n_2 sistem. Jumlah cara penyusunan yang berbeda sistem-sistem ke dalam keadaan-keadaan tersebut adalah

$$\frac{(g_2 + n_2 - 1)!}{n_2! g_2!} \quad (5.2)$$

Terakhir hingga kelompok energi ke- M , jumlah cara penyusunan yang berbeda untuk n_M sistem dalam g_M keadaan adalah

$$\frac{(g_M + n_M - 1)!}{n_M! g_M!} \quad (5.3)$$

Akhirnya, jumlah total cara penyusunan yang berbeda secara bersamaan n_1 sistem di dalam g_1 keadaan, n_2 sistem di dalam g_2 , ..., n_M sistem dalam

g_M keadaan adalah

$$\frac{(g_1 + n_1 - 1)!}{n_1!g_1!} \times \frac{(g_2 + n_2 - 1)!}{n_2!g_2!} \times \dots \times \frac{(g_M + n_M - 1)!}{n_M!g_M!} = \prod_{s=1}^M \frac{(g_s + n_s - 1)!}{n_s!g_s!} \quad (5.4)$$

Kita harus juga memperhitungkan jumlah cara membawa N sistem dari luar untuk didistribusikan ke dalam tingkat-tingkat energi di atas. Jumlah cara pengambilan N sistem adalah $N!$ cara. Karena sistem tidak dapat dibedakan maka jumlah tersebut harus dibagi dengan $N!$, sehingga jumlah total cara membawa N sistem ke dalam tingkat-tingkat energi di dalam assembli adalah $N!/N! = 1$. Akhirnya, kita dapatkan jumlah penyusunan sistem-sistem dalam assembli boson adalah

$$W = \prod_{s=1}^M \frac{(g_s + n_s - 1)!}{n_s!g_s!} \quad (5.5)$$

5.3 Konfigurasi Maksimum

Selanjutnya kita akan menentukan konfigurasi dengan peluang kemunculan paling besar. Ambil logaritma ruas kiri dan kanan persamaan (5.5)

$$\begin{aligned} \ln W &= \ln \prod_{s=1}^M \frac{(g_s + n_s - 1)!}{n_s!g_s!} = \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{(g_s + n_s - 1)!}{n_s!g_s!} \right] \\ &= \ln \sum_{s=1}^M \ln (g_s + n_s - 1)! - \ln n_s! - \ln g_s! \end{aligned} \quad (5.6)$$

Kemudian kita gunakan pendekatan Stirling untuk melakukan penyederhanaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \ln(g_s + n_s - 1)! &\cong (g_s + n_s - 1) \ln(g_s + n_s - 1) - (g_s + n_s - 1) \\ \ln g_s! &\cong g_s \ln g_s - g_s \\ \ln n_s! &\cong n_s \ln n_s - n_s \end{aligned}$$

Dengan pendekatan tersebut maka persamaan (5.6) menjadi

$$\begin{aligned} \ln W &\cong \sum_{s=1}^M [(g_s + n_s - 1) \ln(g_s + n_s - 1) - (g_s + n_s - 1) \\ &\quad - g_s \ln g_s + g_s - n_s \ln n_s + n_s] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Jumlah total sistem serta energi total assembli memenuhi $N = \sum_{s=1}^M n_s$ dan $U = \sum_{s=1}^M n_s E_s$. Untuk assembli yang terisolasi sehingga tidak ada pertukaran sistem maupun energi antara assembli dan lingkungan. Jumlah sistem maupun energi assembli konstanta. Pembatasan ini dapat dinyatakan dalam bentuk diferensial berikut ini

$$\delta N = \sum_{s=1}^M \delta n_s = 0 \quad (5.8)$$

$$\delta U = \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0 \quad (5.9)$$

Konfigurasi dengan probabilitas maksimum diperoleh dengan memaksimalkan $\ln W$. Dengan memperhatikan konstrain pada persamaan (5.8) dan (5.9) maka konfigurasi dengan probabilitas maksimum memenuhi

$$\delta \ln W + \alpha \delta N + \beta \delta U = 0 \quad (5.10)$$

Selanjutnya dengan mengambil diferensial persamaan (5.7) kita peroleh

$$\begin{aligned} \delta \ln W \cong & \sum_{s=1}^M [\delta(g_s + n_s - 1) \ln(g_s + n_s - 1) - \delta(g_s + n_s - 1) \\ & - \delta g_s \ln g_s + \delta g_s - \delta n_s \ln n_s + \delta n_s] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Mari kita hitung suku per suku yang terkandung dalam persamaan (5.11).

i)

$$\begin{aligned} & \delta(g_s + n_s - 1) \ln(g_s + n_s - 1) \\ &= \frac{\partial}{\partial n_s} (g_s + n_s - 1) \ln(g_s + n_s - 1) \delta n_s \\ &= \left[\ln(g_s + n_s - 1) + (g_s + n_s - 1) \times \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{(g_s + n_s - 1)} \right] \delta n_s \\ &= [\ln(g_s + n_s - 1) + 1] \delta n_s \end{aligned}$$

ii)

$$\delta(g_s + n_s - 1) = \frac{\partial}{\partial n_s}(g_s + n_s - 1) \delta n_s = \delta n_s$$

iii)

$$\delta g_s \ln g_s = \frac{\partial}{\partial n_s} g_s \ln g_s \delta n_s = 0$$

iv)

$$\begin{aligned}\delta n_s \ln n_s &= \frac{\partial}{\partial n_s} n_s \ln n_s \delta n_s \\ &= \left[\ln n_s + n_s \times \frac{1}{n_s} \right] \delta n_s \\ &= [\ln n_s + 1] \delta n_s\end{aligned}$$

Persamaan (5.11) selanjutnya menjadi

$$\begin{aligned}\delta \ln W &\cong \sum_{s=1}^M [\ln(g_s + n_s - 1) + 1] \delta n_s - \delta n_s - 0 + 0 - [\ln n_s + 1] \delta n_s + \delta n_s \\ &= \sum_{s=1}^M [\ln(g_s + n_s - 1) - \ln n_s] \delta n_s \\ &= \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s + n_s - 1}{n_s} \right] \delta n_s\end{aligned}\tag{5.12}$$

Karena $g_s \gg 1$ dan $n_s \gg 1$ maka $g_s + n_s - 1 \cong g_s + n_s$ sehingga persamaan (5.12) dapat disederhanakan lebih lanjut menjadi

$$\delta \ln W = \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s + n_s}{n_s} \right] \delta n_s\tag{5.13}$$

Substitusi persamaan (5.8), (5.9), dan (5.13) ke dalam persamaan (5.10) diperoleh

$$\sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s + n_s}{n_s} \right] \delta n_s + \alpha \sum_{s=1}^M \delta n_s + \beta \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0$$

atau

$$\sum_{s=1}^M \left\{ \ln \left[\frac{g_s + n_s}{n_s} \right] + \alpha + \beta E_s \right\} \delta n_s = 0 \quad (5.14)$$

Kesamaan di atas harus berlaku untuk semua variasi δn_s . Ini dijamin jika bagian di dalam kurung selalu nol, yaitu

$$\ln \left[\frac{g_s + n_s}{n_s} \right] + \alpha + \beta E_s = 0$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{g_s + n_s}{n_s} &= \exp(-\alpha - \beta E_s) \\ g_s + n_s &= n_s \exp(-\alpha - \beta E_s) \\ g_s &= n_s [\exp(-\alpha - \beta E_s) - 1] \end{aligned}$$

Dan akhirnya didapatkan ungkapan untuk jumlah populasi pada tiap-tiap tingkat energi sebagai berikut

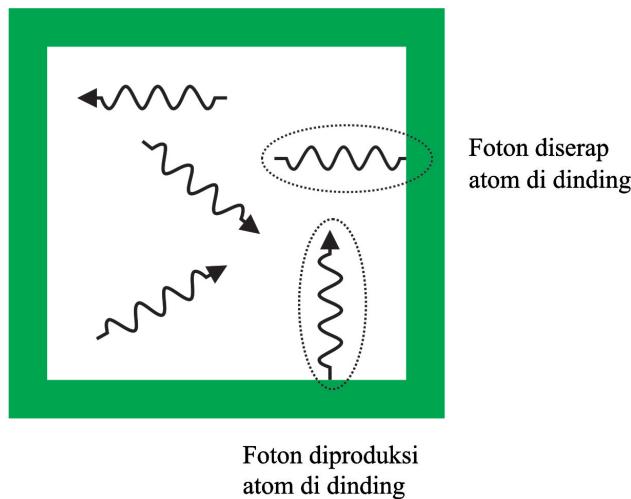
$$n_s = \frac{g_s}{\exp(-\alpha - \beta E_s) - 1} \quad (5.15)$$

Ternyata untuk assembli boson, parameter β juga berbentuk $\beta = -1/kT$. Dengan demikian, bentuk lengkap fungsi distribusi Bose-Einstein untuk assembli boson adalah

$$n_s = \frac{g_s}{\exp(-\alpha + E_s/kT) - 1} \quad (5.16)$$

5.4 Parameter α untuk Photon dan Phonon

Kita perhatikan untuk parameter α pada persamaan (5.16). Ada satu kekhususan untuk assembli foton (kuantisasi gelombang elektromagnetik) dan fonon (kuantisasi getaran atom dalam kristal) dan ini berimplikasi pada nilai parameter α . Dalam suatu kotak, foton bisa diserap atau diciptakan oleh atom-atom yang berada pada dinding kotak (Gbr. 5.2). Akibatnya, jumlah foton dalam satu assembli tidak harus tetap. Jumlah foton bisa bertambah, jika atom-atom di dinding memancarkan foton dan bisa berkurang jika atom-atom di dinding menyerap foton. Untuk sistem semacam ini pembatasan bahwa jumlah total sistem dalam assembli konstan sebenarnya tidak berlaku.



Gambar 5.2: Foton dapat diserap oleh atom-atom pada dinding dan sebaliknya atom-atom pada dinding dapat memproduksi foton. Dengan demikian jumlah foton (sistem) dalam assembli tidak tetap.

Pada penurunan fungsi distribusi Bose-Einstein kita telah mengasumsikan bahwa jumlah sistem dalam assembli selalu tetap, yaitu $\delta N = 0$. Konstrain ini dimasukkan dalam persamaan dengan memperkenalkan faktor pengali Lagrange α . Oleh karena itu, agar konstrain ini tidak diberlakukan untuk assembli dengan jumlah sistem tidak tetap, seperti foton atau fonon maka nilai α harus diambil nol. Dengan nilai ini maka fungsi distribusi untuk sistem semacam ini menjadi

$$n_s = \frac{g_s}{\exp(E_s/kT) - 1} \quad (5.17)$$

Fungsi distribusi yang diungkapkan oleh persamaan (5.17) akan kita pakai secara langsung ketika membahas sifat statistik foton dan fonon (getaran kisi). Aplikasi-aplikasi tersebut akan kita bahas dalam Bab 10.

Soal Latihan

1. Tentukan semua konfigurasi penyusunan yang mungkin untuk tiga boson pada tiga tingkat energi E_1 , E_2 , dan E_3 , serta energi yang berkaitan dengan masing-masing konfigurasi tersebut.

2. Berapa batas jumlah sistem boson yang dapat menempati suatu keadaan?
3. Sebutkan contoh boson dan spin yang dimilikinya
4. Secara umum, fungsi distribusi untuk boson adalah $n_s = g_s / \{\exp[-\alpha - \beta E_s] - 1\}$. Tetapi, untuk foton, fungsi distribusi adalah $n_s = g_s / \{\exp[-\beta E_s] - 1\}$. Jelaskan mengapa $\exp[-\alpha]$ tidak muncul dalam fungsi distribusi foton?

Bab 6

Statistik Fermi-Dirac

Isi Bab ini. Bab ini berisi perumusan statistik Fermi-Dirac untuk assembli fermion, yaitu partikel kuantum dengan spin merupakan kelipatan ganjil dari \hbar . Partikel ini memiliki satu sifat khas, yaitu memenuhi **prinsip eksklusi Pauli**. Bersadarkan prinsip ini maka *tidak ada fermion yang boleh memiliki sekumpulan bilangan kuantum yang sama*. Satu keadaan energi hanya boleh ditempati maksimum oleh dua fermion dengan syarat arah spin harus berlawanan. Contoh partikel fermion adalah elektron, proton, dan positron.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami bagaimana proses membangun statistik Fermi-Dirac dengan menggunakan prinsip statistik murni yang digabungkan dengan prinsip kekekalan dalam fisika seperti kekekalan energi dan jumlah partikel.

Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Untuk memahami penurunan fungsi distribusi Fermi-Dirac mahasiswa perlu memahami prinsip permutasi untuk benda-benda yang tidak dapat dibedakan, sifat yang ditunjukkan oleh sebuah besaran yang nilainya kekal (konstan), serta bagaimana mencari nilai maksimum dari sebuah fungsi. Pemahaman tentang penurunan distribusi Maxwell-Boltzmann serta Bose-Einstein juga merupakan modal berharga untuk memahami penurunan distribusi Fermi-Dirac secara lebih mudah.

6.1 Konfigurasi Fermion

Kita sudah menurunkan fungsi distribusi untuk sistem kuantum boson yang mempunyai sifat bahwa bilangan kuantum spin merupakan kelipatan bulat dari \hbar . Pada bagian ini kita akan menurunkan fungsi distribusi untuk sistem kuantum fermion dengan bilangan kuantum spin merupakan kelipatan ganjil dari $\hbar/2$. Salah satu sifat yang dimiliki fermion adalah terpenuhinya prinsip eksklusi Pauli. Tidak boleh lebih dari satu fermion memiliki keadaan kuantum yang sama. Satu keadaan hanya boleh kosong atau hanya ditempati oleh satu fermion. Konsekuensi dari prinsip eksklusi Pauli adalah jumlah fermion harus lebih sedikit atau sama dengan jumlah keadaan. Ini berbeda dengan sistem klasik atau boson di mana tidak ada pembatasan jumlah partikel yang menempati keadaan tertentu. Berapa pun jumlah keadaan yang tersedia, maka keadaan tersebut dapat menampung partikel klasik maupun boson yang jumlahnya berapa pun. Untuk menurunkan fungsi distribusi Fermi-Dirac kita pun akan memulai dengan membagi keadaan-keadaan atas kelompok-kelompok sebagai berikut:

- Kelompok-1 mengandung g_1 keadaan dengan energi rata-rata E_1
- Kelompok-2 mengandung g_2 keadaan dengan energi rata-rata E_2

⋮

- Kelompok- s mengandung g_s keadaan dengan energi rata-rata E_s

⋮

- Kelompok- M mengandung g_M keadaan dengan energi rata-rata E_M

Jumlah sistem yang menempati masing-masing keadaan misalkan

- n_1 sistem menempati keadaan-1
- n_2 sistem menempati keadaan-2

⋮

- n_s sistem menempati keadaan- s

⋮

- n_M sistem menempati keadaan- M

Karena satu keadaan maksimum menampung satu sistem maka harus terpenuhi $n_1 \leq g_1, n_2 \leq g_2, \dots, n_s \leq g_s, \dots, n_M \leq g_M$

Selanjutnya kita akan menentukan berapa cara menyusun n_1 sistem pada g_1 keadaan, g_2 sistem pada g_2 keadaan, \dots , n_m sistem pada g_m keadaan. Tinjau kelompok-1. Di sini ada g_1 keadaan dan menampung n_1 sistem. Kembali kita menganalogikan keadaan sebagai kursi dan sistem sebagai orang yang duduk pada kursi-kursi tersebut, seperti diilustrasikan pada Gbr. 6.1.

Untuk menentukan jumlah cara menempatkan orang pada kursi-kursi tersebut, kita tempelkan orang pada kursi-kursi tersebut. Pada satu kursi hanya boleh ditempeli satu orang. Penempelan ini menjamin bahwa tidak boleh lebih dari satu orang berada pada satu kursi. Akibatnya kita dapatkan

- Ada n_1 buah kursi yang ditempeli orang
- Ada $g_1 - n_1$ buah kursi yang kosong.

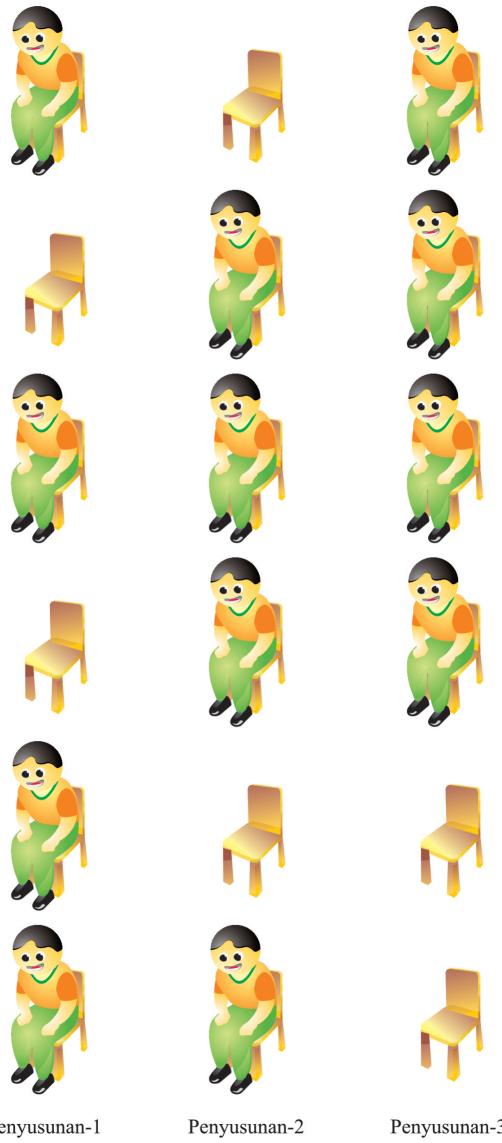
Kemudian kita melakukan permutasi semua kursi yang ada baik yang kosong maupun yang ditempeli orang. Karena orang sudah menempel pada kursi maka permutasi tidak memungkinkan munculnya satu kursi yang menampung lebih dari satu orang. Jumlah kursi yang dipermutasi adalah g_1 kursi sehingga menghasilkan jumlah permutasi sebanyak $g_1!$ cara. Tetapi, karena $(g_1 - n_1)$ buah kursi kosong tidak terbedakan dan n_1 buah kursi yang ditempeli orang juga tidak dapat dibedakan maka jumlah permutasi g_1 buah kursi harus dibagi dengan permutasi $(g_1 - n_1)$ buah kursi kosong dan n_1 buah kursi yang ditempeli orang untuk mendapatkan penyusunan yang berbeda. Jadi, jumlah penyusunan yang berbeda hanyalah

$$\frac{g_1!}{(g_1 - n_1)!n_1!} \quad (6.1)$$

Dengan cara yang sama kita dapatkan jumlah cara penyusunan n_2 sistem pada g_2 keadaan adalah

$$\frac{g_2!}{(g_2 - n_2)!n_2!} \quad (6.2)$$

Begitu seterusnya. Akhirnya, jumlah total cara penyusunan secara bersama-sama n_1 sistem pada g_1 keadaan, n_2 sistem pada g_2 keadaan, \dots , n_m sistem



Gambar 6.1: Contoh penyusunan fermion analog dengan penyusunan kursi. Sebagian kursi ditempeli orang (keadaan yang diisi fermion) dan sebagian kursi kosong (keadaan yang tidak ditempati fermion).

pada g_m keadaan adalah

$$\frac{g_1!}{(g_1 - n_1)!n_1!} \times \frac{g_2!}{(g_2 - n_2)!n_2!} \times \dots \times \frac{g_M!}{(g_M - n_M)!n_M!} = \prod_{s=1}^M \frac{g_s!}{(g_s - n_s)!n_s!} \quad (6.3)$$

Selanjutnya kita perlu menentukan berapa cara membawa N sistem dari luar untuk didistribusikan ke dalam keadaan-keadaan di dalam assembli. Seperti yang kita bahas pada assembli boson, untuk partikel tidak terbedakan jumlah cara tersebut adalah $N!/N! = 1$. Akhirnya, jumlah cara penyusunan fermion untuk konfigurasi di atas adalah

$$W = \prod_{s=1}^M \frac{g_s!}{(g_s - n_s)!n_s!}$$

atau dalam notasi logaritma

$$\ln W = \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s!}{(g_s - n_s)!n_s!} \right] \quad (6.4)$$

6.2 Konfigurasi Peluang Maksimum

Jumlah total sistem dalam assembli dan energi total assembli masing-masing adalah $N = \sum_{s=1}^M n_s$ dan $U = \sum_{s=1}^M E_s n_s$. Untuk sistem terisolasi di mana tidak terjadi pertukaran partikel maupun energi antara assembli dan lingkungan maka jumlah partikel selalu konstan dan energi total juga konstan. Dengan demikian bentuk diferensial dari N dan U adalah

$$\delta N = \sum_{s=1}^M \delta n_s = 0 \quad (6.5)$$

$$\delta U = \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s = 0 \quad (6.6)$$

Konfigurasi dengan probabilitas maksimum diperoleh dengan memaksimalkan W atau $\ln W$ dengan memperhatikan konstrain pada persamaan (6.5) dan (6.6). Sebelum kearah itu kita coba sederhanakan pada persamaan (6.4).

$$\ln W = \sum_{s=1}^M \ln g_s! - \ln(g_s - n_s)! - \ln n_s!$$

Selanjutnya kita gunakan pendekatan Stirling untuk menyederhanakan faktorial, yaitu

$$\begin{aligned}\ln g_s! &\cong g_s \ln g_s - g_s \\ \ln(g_s - n_s)! &\cong (g_s - n_s) \ln(g_s - n_s) - (g_s - n_s) \\ \ln n_s! &\cong n_s \ln n_s - n_s\end{aligned}$$

Dengan demikian bentuk $\ln W$ dapat diaproksimasi sebagai berikut

$$\begin{aligned}\ln W &\cong \sum_{s=1}^M g_s \ln g_s - g_s - (g_s - n_s) \ln(g_s - n_s) + (g_s - n_s) - n_s \ln n_s + n_s \\ &= \sum_{s=1}^M g_s \ln g_s - (g_s - n_s) \ln(g_s - n_s) - n_s \ln n_s\end{aligned}\tag{6.7}$$

Selanjunya, ambil diferensial kedua ruas persamaan (6.7)

$$\delta \ln W = \sum_{s=1}^M \delta [g_s \ln g_s] - \delta [(g_s - n_s) \ln(g_s - n_s)] - \delta [n_s \ln n_s]\tag{6.8}$$

Mari kita hitung satu per satu suku dalam persamaan (6.8)

i)

$$\delta [g_s \ln g_s] = \frac{\partial}{\partial n_s} [g_s \ln g_s] \delta n_s = 0$$

ii)

$$\begin{aligned}\delta [(g_s - n_s) \ln(g_s - n_s)] &= \frac{\partial}{\partial n_s} [(g_s - n_s) \ln(g_s - n_s)] \delta n_s \\ &= \left[-\ln(g_s - n_s) + (g_s - n_s) \times \frac{1}{(g_s - n_s)} \times (-1) \right] \delta n_s \\ &= -[\ln(g_s - n_s) + 1] \delta n_s\end{aligned}$$

iii)

$$\delta [n_s \ln n_s] = \frac{\partial}{\partial n_s} [n_s \ln n_s] \delta n_s = \left[\ln n_s + n_s \times \frac{1}{n_s} \times 1 \right] \delta n_s = [\ln n_s + 1] \delta n_s$$

Dari hasil di atas maka bentuk $\delta \ln W$ dapat ditulis dalam bentuk lebih sederhana sebagai berikut

$$\begin{aligned}\delta \ln W &= \sum_{s=1}^M 0 + [\ln(g_s - n_s) + 1] \delta n_s - [\ln n_s + 1] \delta n_s \\ &= \sum_{s=1}^M [\ln(g_s - n_s) - \ln n_s] \delta n_s \\ &= \sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s - n_s}{n_s} \right] \delta n_s\end{aligned}\quad (6.9)$$

Konfigurasi dengan probabilitas maksimum diperoleh dengan mencari solusi untuk persamaan $\delta \ln W + \alpha \delta N + \beta \delta U = 0$, atau

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^M \ln \left[\frac{g_s - n_s}{n_s} \right] \delta n_s + \alpha \sum_{s=1}^M \delta n_s + \beta \sum_{s=1}^M E_s \delta n_s &= 0 \\ \sum_{s=1}^M \left\{ \ln \left[\frac{g_s - n_s}{n_s} \right] + \alpha + \beta E_s \right\} &= 0\end{aligned}\quad (6.10)$$

Agar persamaan (6.10) selalu nol untuk variasi δn_s yang sembarang maka harus terpenuhi

$$\begin{aligned}\ln \left[\frac{g_s - n_s}{n_s} \right] + \alpha + \beta E_s &= 0 \\ \frac{g_s - n_s}{n_s} &= \exp(-\alpha - \beta E_s)\end{aligned}$$

yang memberikan ungkapan untuk n_s sebagai

$$n_s = \frac{g_s}{\exp(-\alpha - \beta E_s) + 1} \quad (6.11)$$

Berlaku juga pada fungsi distribusi fermion bahwa parameter β memenuhi $\beta = -1/kT$. Dengan parameter ini maka kita dapat menulis persamaan (6.11) secara lebih eksplisit sebagai

$$n_s = \frac{g_s}{\exp(-\alpha + E_s/kT) + 1} \quad (6.12)$$

Persamaan (6.12) merupakan bentuk umum fungsi distribusi Fermi-Dirac untuk fermion.

Soal Latihan

1. Tentukan semua konfigurasi penyusunan yang mungkin untuk tiga fermion pada empat tingkat energi E_1 , E_2 , E_3 , dan E_4 , serta energi yang berkaitan dengan masing-masing konfigurasi tersebut.
2. Sebutkan contoh fermion dan spin yang dimilikinya
3. Buktikan bahwa pada assembli fermion jumlah keadaan lebih banyak daripada jumlah sistem.
4. Suatu assembli fermion memiliki M keadaan dan N sistem. Sebutkan bagaimana cara penyusunan sistem-sistem tersebut pada suhu $T = 0$ K.
5. Berdasarkan fungsi Fermi-Dirac $n_s = g_s / \{\exp[-\alpha - \beta E_s] + 1\}$, buktikan bahwa $n_s \leq g_s$.

Bab 7

Rapat Keadaan Sistem Kuantum

Isi Bab ini. Bab ini berisi diskusi tentang kerapatan keadaan sistem kuantum, yang meliputi boson dan fermion. Salah satu perbedaan dengan sistem klasik adalah terpenuhinya **prinsip ketidakpastian Heisenberg** pada sistem kuantum. Namun akan tampak bahwa, tidak ada perbedaan signifikan antara kerapatan keadaan sistem klasik dan sistem kuantum. Perbedaan hanya terletak pada keberadaan elemen ruang fasa minimal yang diijinkan bagi sistem kuantum.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami bagaimana menurunkan kerapatan keadaan sistem kuantum dan bagaimana mendapatkan kerapatan keadaan tersebut dari kerapatan keadaan sistem klasik.

Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Untuk memahami bab ini lebih baik, mahasiswa diharapkan memahami terlebih dahulu isi Bab 3.

7.1 Ketidakpastian Heisenberg

Setelah membahas beberapa aplikasi statistik Maxwell-Boltzmann yang berlaku untuk partikel klasik, kita akan membahas beberapa aplikasi assembli kuantum yang diungkapkan oleh distribusi Bose-Einstein dan Fermi-Dirac. Namun, sebelum melangkah lebih jauh membahas beberapa aplikasi assembli kuantum tersebut, mari kita tentukan dahulu kerapatan keadaan. Kerapatan keadaan menjadi penting ketika kita akan menghitung besaran-besaran

termodinamika assembli tersebut. Dan yang paling sering kita jumpai adalah ketika kita berpindah dari penjumlahan yang bersifat diskrit ke integral yang bersifat kontinu.

Karena merupakan partikel kuantum maka pada boson maupun fermion kita harus menerapkan prinsip-prinsip mekanika kuantum. Salah satu prinsip dasar mekanika kuantum adalah prinsip ketidak pastian Heisenberg yang dapat dituliskan sebagai

$$\Delta p \Delta x \geq h \quad (7.1)$$

Prinsip ini menyatakan bahwa perkalian antara ketidakpastian momentum dan posisi tidak boleh lebih kecil dari konstanta Planck. Implikasinya adalah kita tidak mungkin mendefinisikan sebuah keadaan kuantum jika keadaan tersebut memuat ukuran momentum dan ukuran posisi sedemikian sehingga perkaliannya kurang dari h . Dengan perkataan lain, nilai terkecil dari perkalian Δp dan Δx yang bisa mendefinisikan sebuah keadaan adalah h . Dari hasil ini kita selanjunya bisa menentukan berapa jumlah kedaan kuantum dalam ruang fase dengan volume tertentu. Kita akan membahas untuk ruang fasa yang mengandung koordinat spasial satu, dua, dan tiga dimensi.

7.2 Koordinat Spasial Satu Dimensi

Misalkan kita memiliki assembli yang hanya boleh bergerak bebas dalam satu arah. Posisi partikel dalam assembli tersebut dinyatakan dengan ko-ordinat x . Dengan demikian, momentum partikel hanya memiliki satu komponen saja, yaitu p_x . Elemen kecil ruang fasa yang dimiliki sebuah partikel dalam assembli tersebut adalah $d\Gamma = dx dp_x$. Volume ruang fasa untuk semua posisi yang mungkin diperoleh dengan melakukan integral $d\Gamma$ pada semua ruang spasial,

$$\Delta\Gamma_p = \int dx dp_x = L dp_x \quad (7.2)$$

Dalam satu dimensi, ukuran minimum ruang fasa yang diijinkan oleh prinsip ketidakpastian Heisenberg adalah $\Delta\Gamma_{\min} = \Delta x \Delta p_x \cong h$. Oleh karena itu, jumlah keadaan yang terdapat dalam elemen ruang fasa $\Delta\Gamma_p$ adalah

$$dN = \frac{\Delta\Gamma_p}{\Delta\Gamma_{\min}} = \frac{L}{h} dp_x \quad (7.3)$$

Jumlah keadaan persatuan volume assembli menjadi

$$\begin{aligned} g(p_x)dp_x &= \frac{dN}{L} \\ &= \frac{1}{h}dp_x \end{aligned} \quad (7.4)$$

Kerapatan keadaan tersebut dapat juga diungkapkan dalam variable energi partikel dengan menggunakan hubungan $E = p_x^2/2m$. Dengan hubungan ini kita dapatkan

$$p_x = \sqrt{2m}\sqrt{E}$$

dan

$$dp_x = \sqrt{2m} \left(\frac{1}{2} \frac{dE}{\sqrt{E}} \right) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dE}{\sqrt{E}} \quad (7.5)$$

Substitusi persamaan (7.5) ke dalam persamaan (7.4) diperoleh ungkapan kerapatan keadaan per satuan volume sebagai berikut

$$g(E)dE = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{m}{2}} E^{-1/2} dE \quad (7.6)$$

Kerapatan keadaan tersebut dapat juga diungkapkan dalam variabel panjang gelombang partikel. Kita berangkat dari persamaan de Broglie $p_x = h/\lambda$. Dari persamaan ini kita dapat $dp_x = -hd\lambda/\lambda^2$. Substitusi dp_x ke dalam persamaan (7.5) dan hilangkan tanda negatif maka kita dapatkan

$$\begin{aligned} g(\lambda)d\lambda &= \frac{1}{h} \frac{h}{\lambda^2} d\lambda \\ &= \frac{1}{\lambda^2} d\lambda \end{aligned} \quad (7.7)$$

7.3 Koordinat Spasial Dua Dimensi

Sekarang kita berlanjut ke assembli dalam kotak dua dimensi dengan ukuran panjang searah sumbu x dan sumbu y masing-masing L_x dan L_y . Posisi partikel dalam assembli tersebut dinyatakan oleh koordinat x dan y saja. Akibatnya, momentum partikel hanya memiliki dua komponen saja, yaitu p_x dan p_y . Elemen ruang fasa yang dibatasi koordinat x sampai $x + dx$, sampai $y + dy$, momentum p_x sampai $p_x + dp_x$ dan p_y sampai $p_y + dp_y$ adalah

$d\Gamma = dx dy dp_x dp_y$. Volume ruang fasa untuk semua posisi yang mungkin diperoleh dengan mengintegralkan $d\Gamma$ pada semua variable spasial, yaitu

$$\Delta\Gamma_p = \int \int dx dy dp_x dp_y = L_x L_y dp_x dp_y \quad (7.8)$$

Dalam ruang dua dimensi, ukuran minimum ruang fasa yang diijinkan oleh prinsip ketidakpastian Heisenberg adalah $\Delta\Gamma_{\min} = \Delta x \Delta p_x \Delta y \Delta p_y \cong h \times h = h^2$. Dengan demikian, jumlah keadaan yang terdapat dalam elemen ruang fasa $\Delta\Gamma_p$ adalah

$$dN = \frac{\Delta\Gamma_p}{\Delta\Gamma_{\min}} = \frac{L_x L_y}{h^2} dp_x dp_y \quad (7.9)$$

Persamaan (7.9) menyatakan jumlah keadaan dalam elemen momentum yang berada antara p_x sampai $p_x + dp_x$ dan antara p_y sampai $p_y + dp_y$. Jadi ruang momentum berbentuk persegi panjang dengan sisi-sisi dp_x dan dp_y . Cara lain adalah membuat elemen ruang momentum yang dibatasi oleh momentum total antara p sampai $p + dp$ di mana momentum total memenuhi

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 \quad (7.10)$$

Elemen ruang momentum tersebut akan berupa sebuah cincin dengan jari-jari p dan ketebalan dp seperti pada Gbr. 7.1. Keliling cincin tersebut adalah $K_p = 2\pi p$ sedangkan tebalnya adalah dp . Dengan demikian, luas cincin adalah

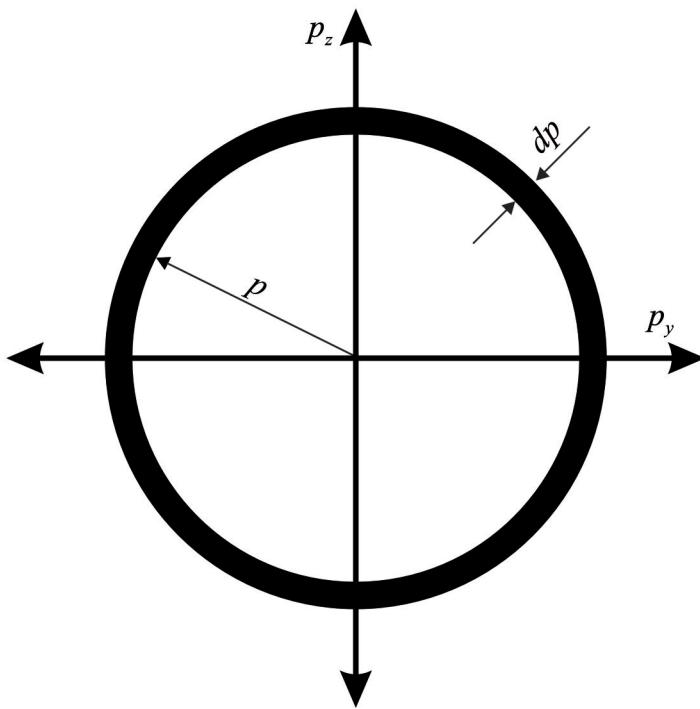
$$dS_p = K_p dp = 2\pi p dp \quad (7.11)$$

Dengan mengganti $dp_x dp_y$ pada persamaan (7.9) dengan dS_p pada persamaan (7.11) diperoleh

$$dN = \frac{L_x L_y}{h^2} 2\pi p dp \quad (7.12)$$

Kerapatan keadaan per satuan "volume dua dimensi (luas)" adalah

$$\begin{aligned} g(p) dp &= \frac{dN}{L_x L_y} \\ &= \frac{1}{h^2} 2\pi p dp \end{aligned} \quad (7.13)$$



Gambar 7.1: Elemen ruang momentum berupa cincin dengan jari-jari p dan keterbalan dp .

Kembali kita ingin menyatakan kerapatan keadaan dalam variabel energi. Kita gunakan persamaan energi $E = p^2/2m$ sehingga

$$p = \sqrt{2m}\sqrt{E} \quad (7.14a)$$

$$dp = \sqrt{2m} \left(\frac{1}{2} \frac{dE}{\sqrt{E}} \right) = \sqrt{\frac{m}{2}} E^{-1/2} dE \quad (7.14b)$$

Substitusi persamaan (7.14a) dan (7.14b) ke dalam persamaan (7.13) diperoleh kerapatan keadaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} g(E)dE &= \frac{1}{h^2} 2\pi \left(\sqrt{2m}\sqrt{E} \right) \left(\sqrt{\frac{m}{2}} E^{-1/2} dE \right) \\ &= \frac{1}{h^2} 2\pi m dE \end{aligned} \quad (7.15)$$

Seperti sebelumnya, jumlah keadaan tersebut dapat diungkapkan dalam variable panjang gelombang dengan menggunakan persamaan de Broglie $p = h/\lambda$.

Dari persamaan ini kita dapat $dp = -hd\lambda/\lambda^2$. Substitusi p dan dp ke dalam persamaan (7.13) dan hilangkan tanda negatif maka

$$\begin{aligned} g(\lambda)d\lambda &= \frac{1}{h^2}2\pi\frac{h}{\lambda}\left(\frac{hd\lambda}{\lambda^2}\right) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda^3}d\lambda \end{aligned} \quad (7.16)$$

7.4 Koordinat Spasial Tiga Dimensi

Sekarang kita berlanjut ke assembli dalam kotak tiga dimensi dengan ukuran panjang sisi searah sumbu x , sumbu y , dan sumbu z masing-masing L_x , L_y , dan L_z . Posisi partikel dalam assembli tersebut dinyatakan oleh koordinat x , y , dan z . Dengan demikian, momentum partikel terdiri dari tiga komponen, yaitu p_x , p_y , dan p_z . Elemen kecil ruang fasa di dalam assembli tersebut adalah $d\Gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$. volume ruang fasa untuk semua posisi yang mungkin adalah

$$\Delta\Gamma_p = \int \int \int dx dy dz dp_x dp_y dp_z = L_x L_y L_z dp_x dp_y dp_z \quad (7.17)$$

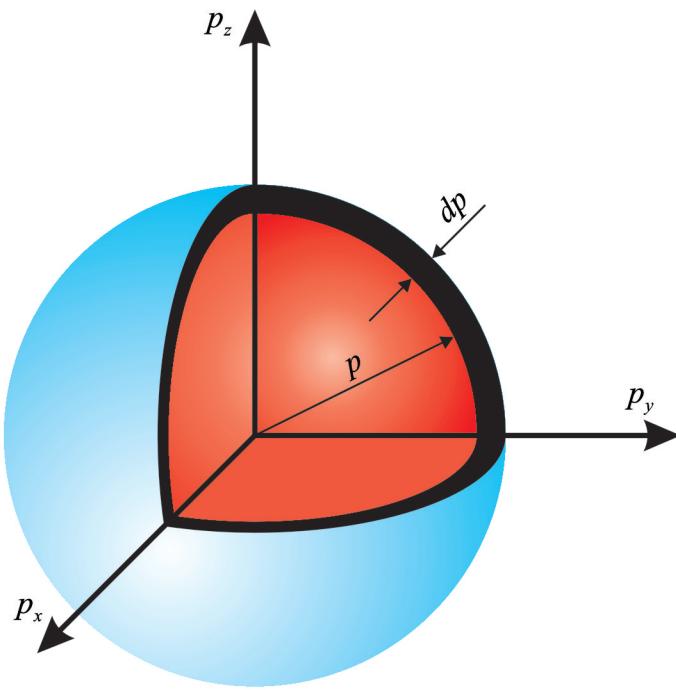
Dalam ruang tiga dimensi, ukuran minimum ruang fasa yang diijinkan oleh prinsip ketidakpastian Heisenberg adalah $\Delta\Gamma_{\min} = \Delta x \Delta p_x \Delta y \Delta p_y \Delta z \Delta p_z \cong h \times h \times h = h^3$. Akibatnya, jumlah keadaan yang terdapat dalam elemen ruang fase $\Delta\Gamma_p$ adalah

$$dN = \frac{\Delta\Gamma_p}{\Delta\Gamma_{\min}} = \frac{L_x L_y L_z}{h^3} dp_x dp_y dp_z \quad (7.18)$$

Persamaan (7.18) menyatakan jumlah keadaan dalam elemen momentum yang berada antara p_x sampai dp_x , antara p_y sampai dp_y dan antara p_z sampai dp_z . Jadi ruang momentum berbentuk balok dengan ukuran dp_x , dp_y , dan dp_z . Cara lain adalah membuat elemen ruang momentum yang dibatasi oleh momentum total antara p sampai $p + dp$ di mana momentum total memenuhi

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \quad (7.19)$$

Elemen ruang momentum tersebut akan berupa sebuah kulit bola dengan jari-jari p dan ketebalan $p + dp$ seperti diilustrasikan pada Gbr. 7.2. Luas



Gambar 7.2: Elemen ruang momentum berupa kulit bola dengan jari-jari p dan ketebalannya dp .

kulit bola tersebut adalah $S_p = 4\pi p^2$ dan ketebalannya adalah dp . Volume kulit bola menjadi

$$dV_p = S_p dp = 4\pi p^2 dp \quad (7.20)$$

Dengan mengganti $dp_x dp_y dp_z$ pada persamaan (7.18) dengan dV_p pada persamaan (7.20) diperoleh ungkapan lain untuk jumlah keadaan

$$dN = \frac{L_x L_y L_z}{h^3} 4\pi p^2 dp \quad (7.21)$$

Kerapatan keadaan per satuan volume adalah

$$\begin{aligned} g(p) dp &= \frac{dN}{L_x L_y L_z} \\ &= \frac{1}{h^3} 4\pi p^2 dp \end{aligned} \quad (7.22)$$

Kembali kita ingin menyatakan kerapatan keadaan dalam variable energi. Kita gunakan persamaan energi $E = p^2/2m$ sehingga

$$p = \sqrt{2m}\sqrt{E} \quad (7.23a)$$

$$dp = \sqrt{2m} \left(\frac{1}{2} \frac{dE}{\sqrt{E}} \right) = \sqrt{\frac{m}{2}} E^{-1/2} dE \quad (7.23b)$$

Substitusi persamaan (7.23a) dan (7.23b) ke dalam persamaan (7.22) diperoleh kerapatan keadaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} g(E)dE &= \frac{1}{h^3} 4\pi \left(\sqrt{2m}\sqrt{E} \right)^2 \left(\sqrt{\frac{m}{2}} E^{-1/2} dE \right) \\ &= \frac{1}{h^3} 4\pi \sqrt{2} m^{3/2} E^{1/2} dE \end{aligned} \quad (7.24)$$

Juga di sini kita akan menyatakan kerapatan keadaan dalam variable panjang gelombang dengan menggunakan persamaan de Broglie $p = h/\lambda$. Dari persamaan ini kita dapatkan $dp = -hd\lambda/\lambda^2$. Substitusi p dan dp ke dalam persamaan (7.22) dan hilangkan tanda negatif maka

$$\begin{aligned} g(\lambda)d\lambda &= \frac{1}{h^2} 4\pi \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{hd\lambda}{\lambda^2} \right) \\ &= \frac{4\pi}{\lambda^4} d\lambda \end{aligned} \quad (7.25)$$

Bergantung pada masalah yang kita hadapi, kita bisa memilih fungsi kerapatan keadaan yang mana saja. Pilihan kita bergantung pada kemudahan dalam mencari solusi.

Soal Latihan

1. Buktikan bahwa volum terkecil ruang fasa enam dimensi yang dapat menampung suatu keadaan adalah h^3 .
2. Untuk assembli boson perlihatkan bahwa

$$N = \frac{4\pi V}{h^3} \sqrt{2} m^{3/2} \int_0^\infty \frac{E^{1/2}}{\exp[-\alpha + E/kT] - 1} dE \quad (7.26)$$

3. Buktikan bahwa jumlah foton dalam ruang dengan volum V pada suhu T adalah

$$N = 8\pi V \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^4} \frac{d\lambda}{\exp[-\alpha + hc/\lambda kT] - 1} \quad (7.27)$$

Bab 8

Beberapa Besaran Gas

Isi Bab ini. Bab ini berisi diskusi tentang beberapa aplikasi distribusi Maxwell-Boltzmann untuk menentukan beberapa besaran yang dimiliki gas.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami beberapa besaran-besaran gas yang diturunkan dari fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann.

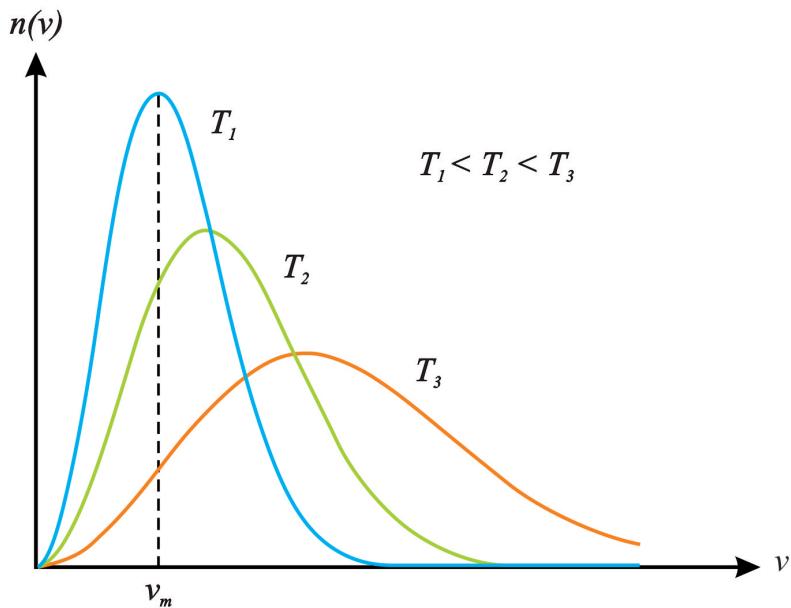
Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Untuk memahami lebih baik tentang bab ini, mahasiswa diharapkan memahami terlebih dahulu Bab 2, Bab 3, dan Bab 4.

8.1 Laju dengan Peluang Maksimum

Pertama kita akan tentukan laju gas yang memiliki peluang maksimum. Fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann memprediksi bahwa pada suhu tertentu laju partikel gas tidak seragam. Laju partikel gas bervariasi dari nol sampai tak berhingga. Tetapi ada laju yang memiliki peluang kemunculan paling besar. Laju tersebut berkaitan dengan lokasi puncak distribusi Maxwell-Boltzmann bila dinyatakan dalam variabel laju.

Gambar 8.1 adalah kurva kerapatan partikel gas sebagai fungsi laju pada berbagai suhu. Apa informasi yang tercermin dari kurva tersebut. Tampak bahwa makin rendah suhu maka kurva makin tinggi, makin sempit, dan puncaknya bergeser ke arah laju kecil. Luas daerah di bawah kurva (integral dari $n(v)$) menyatakan jumlah sistem dalam assembli. Karena jumlah sistem dalam assembli konstan maka luas daerah di bawah kurva pun harus kon-

stan, berapa pun suhu assembli. Ini mengharuskan bahwa kurva yang lebih tinggi harus lebih sempit. Puncak kurva bergeser ke kiri ketika suhu rendah bermakna bahwa makin rendah suhu maka makin banyak sistem yang memiliki laju lebih kecil.



Gambar 8.1: Kerapatan partikel gas sebagai fungsi laju pada berbagai suhu.

Laju dengan peluang kemunculan paling besar tersebut ditentukan dengan memecahkan persamaan

$$\frac{dn(v)}{dv} = 0 \quad (8.1)$$

Dari persamaan (4.35) kita simpulkan

$$n(v) = \frac{4\pi N m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad (8.2)$$

sehingga persamaan (8.1) memberikan

$$\begin{aligned}
 \frac{dn(v)}{dv} &= \frac{4\pi N m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} \left[2ve^{-mv^2/2kT} + v^2 \frac{d}{dv} e^{-mv^2/2kT} \right] \\
 &= \frac{4\pi N m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} \left[2ve^{-mv^2/2kT} + v^2 \left(-\frac{2mv}{2kT} \right) e^{-mv^2/2kT} \right] \\
 &= \frac{4\pi N m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} e^{-mv^2/2kT} \left[2v - \frac{mv^3}{kT} \right]
 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Jika v_m adalah laju dengan peluang maksimum maka pada v_m tersebut $dn/dv = 0$. Ini dipenuhi jika

$$\left[2v_m - \frac{mv_m^3}{kT} \right] = 0$$

yang memberikan solusi untuk **laju dengan peluang maksimum**

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (8.4)$$

Makin tinggi suhu maka makin banyak sistem yang memiliki laju besar sehingga kurva distribusi bergerak ke arah laju yang besar (ke kanan). Sebaliknya, makin besar massa sistem maka makin sulit sistem tersebut untuk bergerak. Dengan demikian, pada suhu yang sama puncak distribusi bergeser ke laju rendah (ke kiri) jika massa sistem makin besar.

8.2 Laju Rata-Rata

Selanjutnya kita akan menentukan laju rata-rata molekul gas. Laju rata-rata didefiniskan sebagai

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= \frac{\int_0^\infty v n(v) dv}{\int_0^\infty n(v) dv} \\
 &= \frac{4\pi N m^{3/2} / (2\pi kT)^{3/2} \int_0^\infty v e^{-mv^2/2kT} v^2 dv}{4\pi N m^{3/2} / (2\pi kT)^{3/2} \int_0^\infty v e^{-mv^2/2kT} v^2 dv} \\
 &= \frac{\int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2kT} dv}{\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT} dv}
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (8.5) kita misalkan $x = mv^2/2kT$. Dengan permisalan ini maka

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{\frac{2kT}{m}} x^{1/2} \\
 v^3 &= \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} x^{3/2} \\
 dv &= \sqrt{\frac{2kT}{m}} \times \frac{1}{2} x^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} x^{-1/2} dx
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, integral pada pembilang di persamaan (8.5) dapat diganti dengan

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} x^{3/2} e^{-x} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} x^{-1/2} dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \int_0^\infty x e^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \Gamma(2)
 \end{aligned}$$

Jika paremater dalam fungsi gamma merupakan bilangan bulat maka

$\Gamma(n) = (n - 1)!$. Dengan demikian, pembilang dalam persamaan (8.5) bernilai

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \Gamma(2) = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \times 1! = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2$$

Selanjutnya kita lihat integral pada penyebut di persamaan (8.5). Dengan melakukan substitusi yang sama dengan di atas maka penyebut tersebut berubah menjadi

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(\frac{2kT}{m} \right) x e^{-x} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} x^{-1/2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \times \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

Akhirnya **laju rata-rata** menjadi

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m} \right)^2}{\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{3/2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \end{aligned} \tag{8.6}$$

8.3 Laju Root Mean Square

Laju root mean square atau disingkat rms adalah laju yang diperoleh dari perata-rataan v^2 . Laju rms akan menentukan energi kinetik rata-rata atom

atau molekul gas. Mari kita hitung dulu rata-rata dari v^2 .

$$\begin{aligned}
 \overline{v^2} &= \frac{\int_0^\infty v^2 n(v) dv}{\int_0^\infty n(v) dv} \\
 &= \frac{4\pi N m^{3/2} / (2\pi kT)^{3/2} \int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT} v^2 dv}{4\pi N m^{3/2} / (2\pi kT)^{3/2} \int_0^\infty v e^{-mv^2/2kT} v^2 dv} \\
 &= \frac{\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/2kT} dv}{\int_0^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT} dv}
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Dengan melakukan substitusi serupa dengan yang kita lakukan pada sub bab 8.2 dalam mencari laju rata-rata, integral pada pembilang dapat diganti dengan

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \left(\frac{2kT}{m}\right)^2 x^2 e^{-x} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2kT}{m}} x^{-1/2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2} \int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2} \times \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2}
 \end{aligned}$$

Bagian penyebut persamaan (8.8) sama dengan bagian penyebut pada persamaan (8.6), dan hasil integralnya adalah

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}$$

Dengan demikian, rata-rata kuadrat laju menjadi

$$\overline{v^2} = \frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{8} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2}} = \frac{3kT}{m} \quad (8.8)$$

Akar dari $\overline{v^2}$ merupakan **laju rms**, yaitu

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (8.9)$$

Laju *rms* menentukan energi kinetik rata-rata molekul. Hal ini dapat kita perlihatkan sebagai berikut. Energi kinetik molekul yang memiliki laju v memenuhi $K = mv^2/2$. Energi kinetik rata-rata adalah

$$\bar{K} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \times \frac{2kT}{m} = \frac{3}{2}kT \quad (8.10)$$

8.4 Distribusi Partikel dalam Besaran Lain

Persamaan (8.2) menyatakan jumlah partikel yang memiliki laju antara v sampai $v + dv$. Kadang kita perlu mencari jumlah partikel yang memiliki komponen laju v_x sampai $v_x + dv_x$ saja, berapa pun laju v_y dan v_z . Informasi ini diperlukan misalnya saat menentukan besaran-besaran yang berkaitan dengan partikel yang bergerak dalam satu arah saja, misalnya difusi partikel sepanjang batang. Untuk mendapatkan distribusi dalam fungsi komponen kecepatan kita lakukan penurunan ulang ungkapan kontinu dari g_s .

Kita tinjau elemen ruang fasa yang berada antara koordinat-koordinat sebagai berikut

- Antara x sampai $x + dx$
- Antara y sampai $y + dy$
- Antara z sampai $z + dz$
- Antara p_x sampai $p_x + dp_x$
- Antara p_y sampai $p_y + dp_y$
- Antara p_z sampai $p_z + dp_z$

volume elemen ruang fasa tersebut adalah $d\Gamma = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$. Dan karena $p_x = mv_x$, $p_y = mv_y$, dan $p_z = mv_z$ maka kita dapat menulis

$$d\Gamma = m^3 dx dy dz dv_x dv_y dv_z \quad (8.11)$$

Apabila kita membatasi partikel hanya berada antara v_x sampai $v_x + dv_x$, antara v_y sampai $v_y + dv_y$, dan antara v_z sampai $v_z + dv_z$ saja, dan tidak membatasi nilai variabel ruang maka volume ruang fasa diperoleh dengan melakukan integral $d\Gamma$ pada semua variabel ruang dan hasilnya adalah

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{v_x, v_y, v_z} &= m^3 \int dx dy dz dv_x dv_y dv_z \\ &= m^3 V dv_x dv_y dv_z \end{aligned} \quad (8.12)$$

Jika B adalah kerapatan keadaan maka kita dapat mengganti g_s dalam bentuk kontinu sebagai berikut

$$g_s \rightarrow B \Delta\Gamma_{v_x, v_y, v_z} = B m^3 V dv_x dv_y dv_z \quad (8.13)$$

Karena n_s adalah jumlah sistem yang menempati keadaan g_s , maka bila kita mendefinisikan $n(v_x, v_y, v_z)$ sebagai bentuk kontinu untuk n_s melalui transformasi berikut ini,

$$n_s \rightarrow n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

Dengan menggunakan hubungan $n_s = g_s e^{\alpha + \beta E_s}$ dan mengganti n_s dan g_s dengan variabel kontinunya maka didapat

$$n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = B m^3 V dv_x dv_y dv_z \times e^{\alpha + \beta E} \quad (8.14)$$

Selanjutnya kita melakukan penggantian variabel sebagai berikut

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$\beta = -\frac{1}{kT}$$

$$e^\alpha = \frac{N}{BV(2\pi mkT)^{3/2}}$$

Dengan penggantian variabel di atas maka persamaan (8.14) menjadi

$$\begin{aligned} n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z &= Bm^3 V dv_x dv_y dv_z \times \\ &\quad \frac{N}{BV(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} \\ &= N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} dv_x dv_y dv_z \end{aligned} \quad (8.15)$$

Selanjutnya kita dapat menghitung jumlah molekul yang memiliki komponen kecepatan antara v_x sampai $v_x + dv_x$, berapa pun nilai v_y dan v_z dengan mengintegralkan $n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$, pada semua nilai v_y dan v_z yang mungkin, yaitu dari $v_y = -\infty$ sampai $v_y = +\infty$, dan $v_z = -\infty$ sampai $v_z = +\infty$. Hasilnya adalah

$$\begin{aligned} n(v_x) dv_x &= \int_{v_y=-\infty}^{+\infty} \int_{v_z=-\infty}^{+\infty} n(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \\ &= N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{v_y=-\infty}^{+\infty} \int_{v_z=-\infty}^{+\infty} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} dv_x dv_y dv_z \\ &= N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\int_{v_y=-\infty}^{+\infty} e^{-mv_y^2/2kT} dv_y \right) \\ &\quad \left(\int_{v_z=-\infty}^{+\infty} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z \right) e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \end{aligned} \quad (8.16)$$

Kita tinjau integral berikut ini $\int_{v_y=-\infty}^{+\infty} e^{-mv_y^2/2kT} dv_y$. Kita transformasi variabel sebagai berikut

$$\frac{mv_y^2}{2kT} = \eta^2$$

$$v_y = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \eta$$

$$dv_y = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} d\eta$$

Dengan transformasi tersebut maka integral yang ingin kita cari dapat ditulis

$$\begin{aligned} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} d\eta &= \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \times \sqrt{\pi} \\ &= \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Dengan cara persis sama kita akan dapatkan

$$\int_{v_y=-\infty}^{+\infty} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z = \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2}$$

Akhirnya

$$\begin{aligned} n(v_x)dv_x &= N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2} \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \\ &= N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \end{aligned} \quad (8.17)$$

Persamaan (8.16) menyatakan kerapatan partikel yang memiliki komponen kecepatan arah sumbu x antara v_x sampai $v_x + dv_x$.

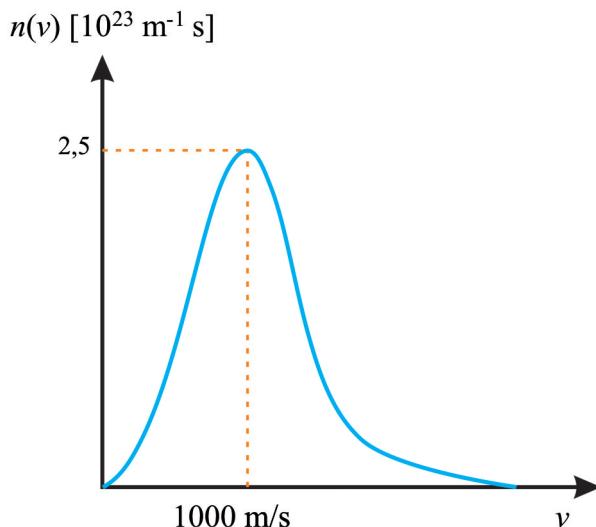
Dengan cara yang persis sama kita pun akan mendapatkan persamaan berikut ini

$$n(v_y)dv_y = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_y^2/2kT} dv_y \quad (8.18)$$

$$n(v_z)dv_z = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z \quad (8.19)$$

Soal

1. Laju rata-rata sistem gas tidak nol dan nilainya bergantung pada suhu dan massa sistem. Namun kecepatan rata-rata selalu nol, berapa pun suhu gas. Buktikan.
2. Suatu assembli gas nitrogen (N_2 , massa molekul 28 amu) memiliki fungsi distribusi seperti ditunjukkan pada gambar berikut ini. Tentukan



- a) Laju dengan peluang maksimum
 - b) Laju rata-rata partikel gas
 - c) Laju rms partikel gas
 - d) Suhu assembli
 - e) Jumlah mol gas dalam assembli
 - f) Jumlah mol gas dengan laju kurang dari 2000 m/s
3. Jelaskan dengan ide kalian bagaimana cara menentukan distribusi laju gas dalam assembli. Ide harus terdefinisi dengan jelas, dan jika perlu buatkan skema untuk menjelaskan ide kalian.
4. Energi kinetik rata-rata atom gas helium sama dengan energi kinetik rata-rata atom gas argon pada suhu 400 K. Jika masa atomic helium adalah 4 amu (atomic mass unit = satuan massa atom), tentukan
- a) suhu gas helium
 - b) laju rata-rata atom helium
 - c) laju rms atom helium
 - d) laju atom helium dengan probabilitas terbesar.
 - e) Jika jumlah gas helium dalam assembli adalah 0,2 mol, tentukan jumlah atom helium dengan laju lebih besar dari 10⁴ m/s.

Bab 9

Aplikasi Statistik Maxwell-Boltzmann

Isi Bab ini. Bab ini berisi contoh aplikasi statistik Maxwell-Boltzmann pada sejumlah assembli sederhana yang mengandung partikel klasik dan beberapa perbandingan ramalan menggunakan statistik ini dengan data pengamatan.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami beberapa aplikasi statistik Maxwell-Boltzmann pada sejumlah assembli klasik dan perbandingan hasil ramalan tersebut dengan data pengamatan.

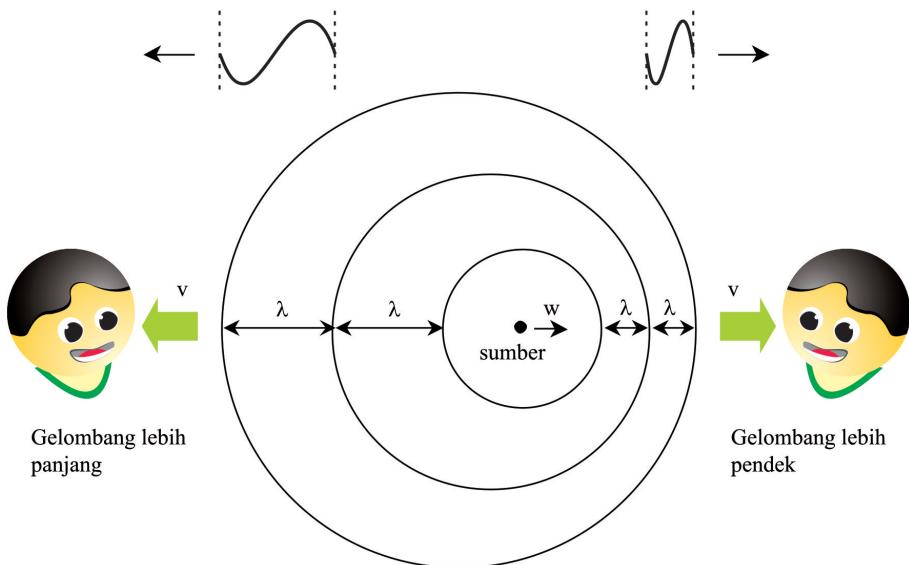
Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Untuk memahami aplikasi statistik Maxwell-Boltzmann mahasiswa perlu memahami prinsip dasar statistik Maxwell-Boltzmann, kerapatan keadaan klasik dan beberapa teknik integral.

9.1 Efek Doppler

Setelah menurunkan beberapa jenis fungsi distribusi untuk sistem klasik maupun kuantum sekarang kita akan melihat beberapa aplikasi fungsi distribusi tersebut. Pada bab ini kita akan melihat beberapa aplikasi fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann. Pembahasan tersebut diharapkan akan memberikan petunjuk yang berarti kepada para mahasiswa dalam menerapkan fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann dalam beberapa bidang fisika.

Efek Doppler dijumpai pada gelombang bunyi maupun gelombang elektromagnetik.

tromagnetik. Salah satu pesan dari efek ini adalah jika sumber gelombang mendekati pengamat maka panjang gelombang yang diukur oleh pengamat lebih kecil daripada apabila sumber diam terhadap pengamat. Sebaliknya, jika sumber gelombang menjauhi pengamat maka panjang gelombang yang diukur pengamat lebih besar daripada apabila sumber diam terhadap pengamat. Peristiwa ini dapat dilustrasikan pada Gbr. 9.1.



Gambar 9.1: Jika sumber mendekati pengamat maka panjang gelombang yang diukur pengamat lebih pendek daripada yang dikeluarkan sumber. Sebaliknya, jika sumber menjauhi pengamat maka panjang gelombang yang diukur pengamat lebih panjang daripada yang dikeluarkan sumber.

Khusus untuk gelombang gelombang elektromagnetik, panjang gelombang yang diukur oleh pengamat yang diam yang dihasilkan oleh sumber sumber bergerak dengan kecepatan v_x terhadap pengamat adalah

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) \quad (9.1)$$

dengan λ panjang gelombang yang dikur pengamat, λ_0 adalah panjang gelombang yang diukur jika sumber gelombang diam terhadap pengamat, dan c adalah kecepatan cahaya. Kita definisikan tanda kecepatan yaitu $v_x > 0$ jika sumber mendekati pengamat dan $v_x < 0$ jika sumber menjauhi

pengamat. Dalam astronomi, efek Doppler digunakan untuk mengukur kecepatan bintang-bintang. Berdasarkan pergeseran panjang gelombang yang dipancarkan bintang-bintang tersebut maka kecepatan relatif bintang terhadap bumi dapat diprediksi menggunakan persamaan (9.2).

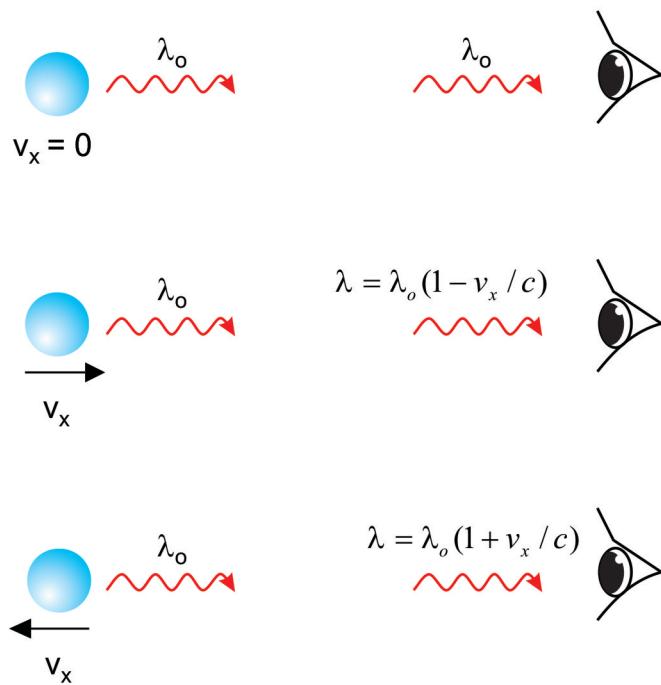


Gambar 9.2: Atom memancarkan gelombang elektromagnetik ketika terjadi transisi elektron antar tingkat energi.

Mari kita perhatikan sebuah atom yang memiliki dua tingkat energi (Gbr. 9.2). Atom tersebut memancarkan spektrum gelombang elektromagnetik dengan panjang gelombang tertentu, sebut saja λ_0 , akibat transisi elektron antar tingkat energi atom tersebut. Jika atom dalam keadaan diam maka panjang gelombang yang kita ukur adalah λ_0 , persis sama dengan panjang gelombang yang dipancarkan atom. Tetapi jika atom mendekati pengamat dengan laju v_x maka panjang gelombang yang diukur pengamat adalah $\lambda = \lambda_0(1 - v_x/c)$. Dan sebaliknya, jika atom menjauhi pengamat dengan laju v_x maka panjang gelombang yang diukur pengamat adalah $\lambda = \lambda_0(1 + v_x/c)$. Sebagai ilustrasi, lihat Gbr. 9.3.

Jika ada sejumlah atom yang diam maka gelombang yang diukur pengamat merupakan jumlah gelombang yang dipancarkan oleh semua atom. Panjang gelombang yang diterima dari semua atom sama, yaitu λ_0 . Yang didekripsi oleh pengamat hanyalah gelombang dengan panjang λ_0 tetapi memiliki intensitas tinggi. Akan tetapi jika atom yang memancarkan gelombang bergerak secara acak maka komponen kecepatan ke arah pengamat, yaitu v_x juga acak. Akibatnya panjang gelombang yang diukur pengamat yang berasal dari satu atom berbeda dengan yang diukur dari atom lainnya. Pengamat akan mengukur gelombang yang memiliki panjang yang bervariasi dalam jangkauan tertentu. Ini berakibat pada pelebaran garis spektrum yang diamati.

Selanjutnya kita akan menentukan distribusi intensitas spektrum pada berbagai panjang gelombang. Kecepatan atom gas pemancar spektrum memenuhi fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann karena merupakan partikel



Gambar 9.3: Pengamat menangkap panjang gelombang yang berbeda-beda bergantung pada gerak relatif antara atom terhadap pengamat.

klasik. Jumlah atom gas yang memiliki komponen kecepatan antara v_x sampai $v_x + dv_x$ adalah

$$n(v_x)dv_x = \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{mv_x^2}{2kT} \right] dv_x \quad (9.2)$$

Untuk mendapatkan fungsi distribusi intensitas maka harus menransformasi variabel kecepatan v_x ke dalam variabel panjang gelombang λ dengan menggunakan persamaan Doppler (9.1). Apabila transformasi tersebut dilakukan maka $n(v_x)dv_x$ menjadi sebanding dengan $I(\lambda)d\lambda$, yang menyatakan intensitas gelombang yang memiliki panjang antara λ sampai $\lambda + d\lambda$. Dengan demikian kita peroleh

$$I(\lambda)d\lambda \propto \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{mv_x^2}{2kT} \right] dv_x \quad (9.3)$$

Dari persamaan (9.1) kita dapatkan

$$v_x = c \left(\frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda_o} \right) \quad (9.4a)$$

$$dv_x = -\frac{c}{\lambda_o} d\lambda \quad (9.4b)$$

Substitusi persamaan (9.4a) dan (9.4b) ke dalam persamaan (9.3) diperoleh

$$\begin{aligned} I(\lambda) d\lambda &\propto \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{m \left(c \left[\frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda_o} \right] \right)^2}{2kT} \right] \left[-\frac{c}{\lambda_o} d\lambda \right] \\ &\propto \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{1/2} \left[-\frac{c}{\lambda_o} \right] \exp \left[-\frac{mc^2}{2kT} \left(\frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda_o} \right)^2 \right] d\lambda \end{aligned}$$

yang selanjutnya bisa ditulis dalam bentuk lebih sederhana sebagai

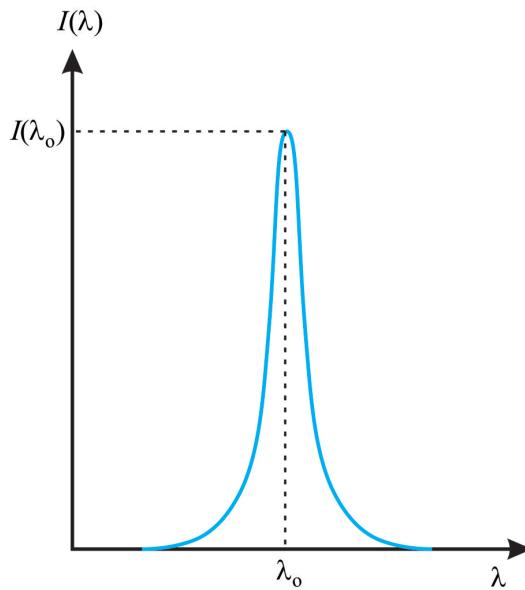
$$I(\lambda) d\lambda = I(\lambda_o) \exp \left[-\frac{mc^2}{2kT} \left(\frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda_o} \right)^2 \right] d\lambda \quad (9.5)$$

dengan $I(\lambda_o)$ adalah intensitas ketika $\lambda = \lambda_o$. Intensitas $I(\lambda_o)$ tidak bergantung pada panjang gelombang tetapi bergantung pada besaran lain seperti suhu gas dan massa atom gas.

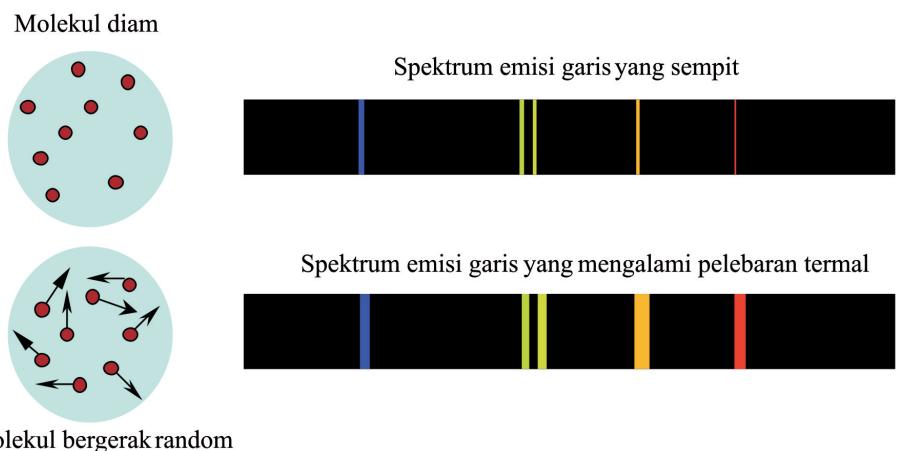
Gambar 9.4 adalah plot $I(\lambda)$ sebagai fungsi λ pada berbagai suhu gas. Tampak bahwa intensitas terdeteksi di sekitar λ_0 dengan λ_0 merupakan lokasi puncak intensitas. Jika suhu diperbesar maka spektrum makin lebar dan intensitasnya makin lemah. Ini disebabkan karena gerakan atom yang makin acak. Gambar 9.5 adalah contoh hasil pengamatan pelebaran spektrum emisi garis akibat getaran termal atom-atom pemancar spektrum tersebut.

9.2 Atom Magnetik dalam Medan Magnet

Selanjutnya kita akan bahas suatu assembli yang mengandung kumpulan atom yang memiliki momen magnet. Di dalam assembli tersebut kita berikan medan magnetik B . Untuk mempermudah kita asumsikan beberapa sifat berikut ini:

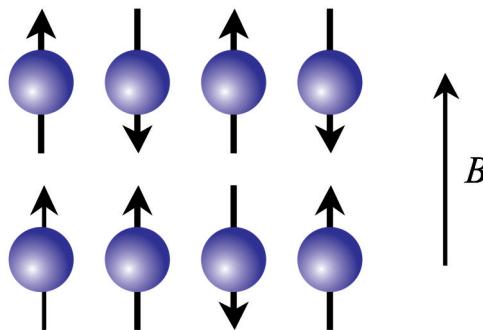


Gambar 9.4: Plot intensitas sebagai fungsi panjang gelombang ketika terjadi pelebaran spektrum akibat efek Doppler.



Gambar 9.5: Pelebaran spektrum emisi yang diakibatkan gerak termal partikel-partikel gas pemancar.

- i) Tidak ada interaksi antar atom. Interaksi hanya terjadi antara atom dengan medan magnet luar yang diberikan. Ini adalah penyederhanaan yang cukup drastis karena sebenarnya antara momen magnetik ada interaksi.
- ii) Momen magnetik atom hanya bisa mengambil salah satu dari dua arah orientasi, yaitu searah medan magnet atau berlawanan arah medan magnet. Ilustrasi dari asumsi tersebut tampak pada Gbr. 9.6.



Gambar 9.6: Dalam medan magnet, momen magnetik atom hanya dapat mengambil salah satu dari dua arah orientasi: searah atau berlawanan arah medan magnet.

Kita akan menentukan berapa momen magnetik total yang dihasilkan oleh kumpulan atom-atom tersebut. Kita mulai dengan menghitung energi yang dimiliki masing-masing atom akibat interaksi momen magnetik dengan magnet luar. Interaksi antara momen magnetik $\vec{\mu}$ dengan medan magnet luar \vec{B} memberikan tambahan energi pada atom sebesar

$$\begin{aligned} U &= -\vec{\mu} \bullet \vec{B} \\ &= -\mu B \cos \theta \end{aligned} \tag{9.6}$$

Dengan θ adalah sudut antara momen magnetik dan medan magnet. Karena hanya ada dua arah orientasi momen magnetik yang diijinkan, yaitu searah medan magnet ($\theta = 0$) dan berlawanan dengan arah medan magnet ($\theta = \pi$), maka tambahan energi atom dengan momen magnetik searah medan magnet adalah

$$U_{\uparrow} = -\mu B \tag{9.7}$$

dan tambahan energi atom dengan momen magnetik berlawanan arah medan magnet adalah

$$U_{\downarrow} = \mu B \tag{9.8}$$

Probabilitas mendapatkan atom dengan arah momen searah medan magnet sebanding dengan $n(U_\uparrow)$ dan probabilitas menemukan atom dengan arah momen berlawanan dengan arah medan magnet sebanding dengan $n(U_\downarrow)$. Dengan demikian, kita dapat menulis

$$P_\uparrow = K n(U_\uparrow) \quad (9.9a)$$

$$P_\downarrow = K n(U_\downarrow) \quad (9.9b)$$

di mana K adalah faktor penormalisasi. Karena jumlah total probabilitas harus satu maka $P_\uparrow + P_\downarrow = 1$ yang memberikan ungkapan untuk faktor normalisasi sebagai berikut

$$K = \frac{1}{n(U_\uparrow) + n(U_\downarrow)} \quad (9.10)$$

Dengan demikian persamaan (9.9a) dan (9.9b) dapat ditulis menjadi

$$P_\uparrow = \frac{n(U_\uparrow)}{n(U_\uparrow) + n(U_\downarrow)} \quad (9.11a)$$

$$P_\downarrow = \frac{n(U_\downarrow)}{n(U_\uparrow) + n(U_\downarrow)} \quad (9.11b)$$

Atom merupakan partikel klasik yang memenuhi fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann. Oleh karena itu probabilitas masing-masing arah orientasi memenuhi

$$n(U_\uparrow) \propto \exp\left[-\frac{U_\uparrow}{kT}\right] = \exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] \quad (9.12a)$$

$$n(U_\downarrow) \propto \exp\left[-\frac{U_\downarrow}{kT}\right] = \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right] \quad (9.12b)$$

Substitusi persamaan (9.12a) dan (9.12b) ke dalam persamaan (9.11) kita dapatkan bentuk eksplisit dari probabilitas sebagai berikut

$$P_\uparrow = \frac{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]} \quad (9.13a)$$

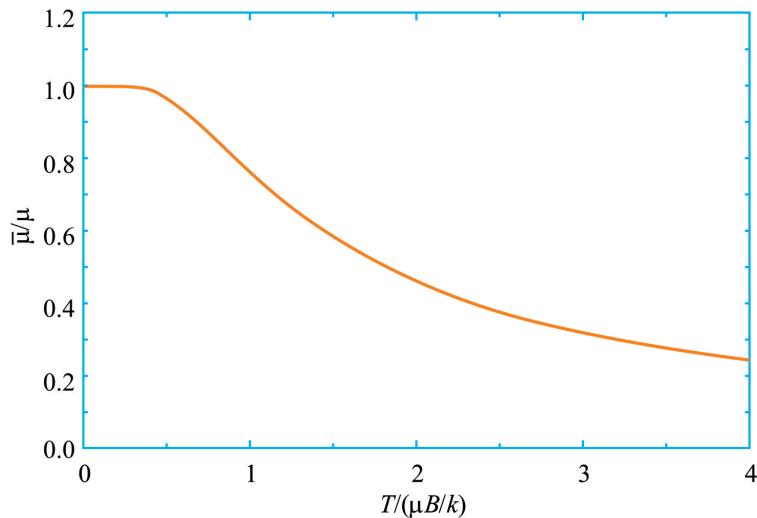
$$P_\downarrow = \frac{\exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]} \quad (9.13b)$$

Selanjutnya kita menghitung momen magnetik rata-rata atom. Karena hanya ada dua arah orientasi yang diijinkan maka momen magnetik rata-rata atom dapat dihitung dengan persamaan sederhana

$$\begin{aligned}
 \bar{\mu} &= +\mu P_{\uparrow} - \mu P_{\downarrow} \\
 &= +\mu \frac{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]} - \mu \frac{\exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]} \\
 &= \mu \frac{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] - \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]}{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]} \\
 &= \mu \frac{\left(\frac{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] - \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]}{2}\right)}{\frac{\exp\left[\frac{\mu B}{kT}\right] + \exp\left[-\frac{\mu B}{kT}\right]}{2}} \tag{9.14} \\
 &= \mu \frac{\sinh\left[\frac{\mu B}{kT}\right]}{\cosh\left[\frac{\mu B}{kT}\right]} \\
 &= \mu \tanh\left[\frac{\mu B}{kT}\right]
 \end{aligned}$$

Gambar 9.7 adalah plot $\bar{\mu}$ sebagai fungsi suhu. Tampak bahwa jika $T \rightarrow 0$ maka $\bar{\mu} \rightarrow \mu$. Artinya bahwa pada suhu tersebut momen magnetik rata-rata mengambil arah yang sama. Ini terjadi karena pada suhu yang mendekati nol, getaran termal atom-atom menjadi sangat kecil. Interaksi dengan medan magnet luar dapat memaksa atom-atom mengambil arah orientasi yang sama.

Sebaliknya, pada suhu $T \rightarrow \infty$ maka $\bar{\mu} \rightarrow 0$. Ini akibat getaran atom-atom yang sangat intensif sehingga medan magnet luar yang diberikan tidak sanggup mengarahkan momen-momen magnet. Energi termal elektron jauh melampaui energi interaksi dengan medan magnet. Arah momen magnet atom-atom menjadi acak. Akibatnya, jumlah momen magnet yang searah medan menjadi sama dengan yang berlawanan arah medan. Juga tampak bahwa untuk suhu yang sama, $\bar{\mu}$ makin besar jika medan makin besar. Ini disebabkan penggunaan medan yang besar akan memberikan paksaan yang lebih besar kepada atom-atom untuk menyearahkan momen magnetiknya. Gambar 9.8 adalah penyeearahan momen magnetik pada suhu $T = 0$ dan $T \rightarrow \infty$.



Gambar 9.7: Momen magnetik rata-rata atom sebagai fungsi suhu.

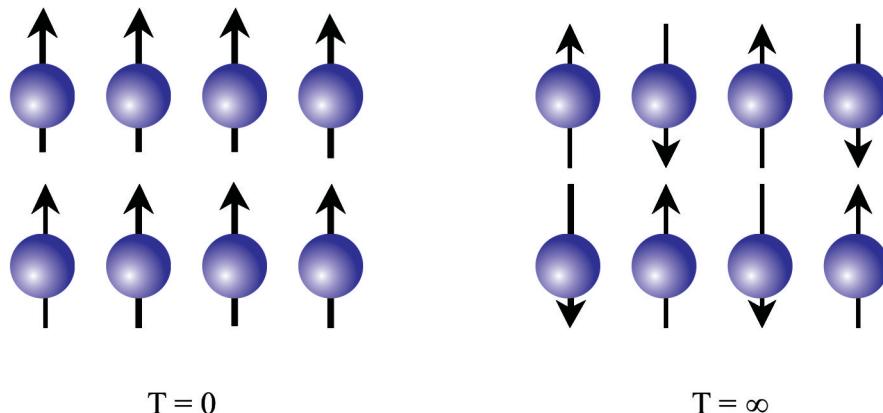
9.3 Dipol Listrik

Fenomena yang mirip dengan atom magnetik dijumpai pula pada assembli momen dipol listrik. Misalkan kita memiliki sejumlah atom atau molekul sejenis yang masing-masing memiliki momen dipol \vec{p} . Di dalam assembli tersebut kita berikan medan listrik E . Kita ingin mencari berapa momen dipol rata-rata yang dimiliki atom/molekul. Untuk kemudahan kita juga mengasumsikan beberapa sifat berikut ini:

- i) Tidak ada interaksi antara sesama dipol. Interaksi hanya terjadi antara dipol dengan medan listrik luar.
- ii) Tiap dipol hanya boleh mengambil salah satu dari dua arah orinetasi, yaitu searah medan listrik dan berlawanan arah dengan arah medan listrik.

Energi interaksi antara dipol dengan medan listrik adalah

$$\begin{aligned} U &= -\vec{p} \bullet \vec{E} \\ &= -pE \cos \theta \end{aligned} \tag{9.15}$$



Gambar 9.8: Arah orientasi momen magnetik sistem pada suhu $T = 0$ dan $T \rightarrow \infty$.

dengan θ adalah sudut antara momen dipol dengan medan listrik. Jika dipol searah medan maka energi interaksinya adalah

$$U_{\uparrow} = -pE \quad (9.16a)$$

dan jika berlawanan medan maka energi interaksinya adalah

$$U_{\downarrow} = pE \quad (9.16b)$$

Tampak bahwa bentuk ungkapan energi ini sama persis dengan yang kita jumpai pada atom magnetik yang telah kita bahas di sub Bab 9.1. Dengan demikian, pencarian momen dipol total persis sama dengan saat kita mencari momen magnetik total, hanya dengan mengganti variable-variabel yang ekivalen sebagai berikut

$$p \leftrightarrow \mu$$

$$E \leftrightarrow B$$

Dengan melakukan penggantian tersebut akhirnya kita dapatkan momen dipol rata-rata atom menjadi

$$\bar{p} = p \tanh \left[\frac{pE}{kT} \right] \quad (9.17)$$

9.4 Momen Magnetik Tiga Arah Orientasi

Kita sudah membahas momen magnetik rata-rata jika hanya ada dua orientasi yang diijinkan, yaitu searah dan berlawanan dengan arah medan magnet. Sekarang kita sedikit perluas asumsi kita dengan menganggap bahwa ada tiga arah orientasi momen magnetik yang diijinkan, yaitu searah medan magnet, tegak lurus medan magnet, dan berlawanan arah medan magnet.

Dari persamaan energi interaksi antara momen magnetik dan medan magnet $U = -\mu B \cos \theta$ kita dapatkan bahwa:

- i) Untuk momen yang searah medan, energi interaksinya adalah $U_{\uparrow} = -\mu B$
- ii) Untuk momen yang tegak lurus medan, energi interaksinya adalah $U_{\rightarrow} = -\mu B \cos(\pi/2) = 0$
- iii) Untuk momen yang berlawanan medan, energi interaksinya adalah $U_{\downarrow} = \mu B$

Probabilitas untuk mendapatkan momen magnetik pada berbagai arah tersebut sebagai berikut:

- i) Untuk momen yang searah medan

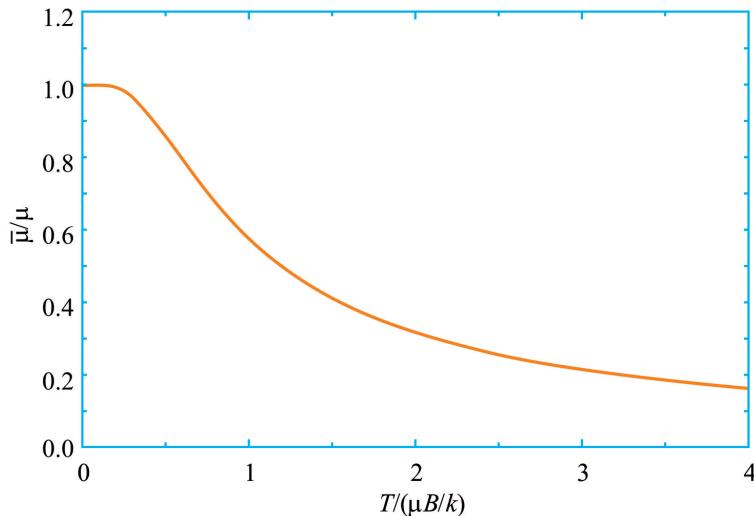
$$P_{\uparrow} = \frac{e^{-U_{\uparrow}/kT}}{e^{-U_{\uparrow}/kT} + e^{-U_{\rightarrow}/kT} + e^{-U_{\downarrow}/kT}} = \frac{e^{\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} \quad (9.18a)$$

- ii) Untuk yang tegak lurus medan

$$P_{\rightarrow} = \frac{e^{-U_{\rightarrow}/kT}}{e^{-U_{\uparrow}/kT} + e^{-U_{\rightarrow}/kT} + e^{-U_{\downarrow}/kT}} = \frac{1}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} \quad (9.18b)$$

- iii) Untuk yang berlawanan dengan arah medan

$$P_{\downarrow} = \frac{e^{-U_{\downarrow}/kT}}{e^{-U_{\uparrow}/kT} + e^{-U_{\rightarrow}/kT} + e^{-U_{\downarrow}/kT}} = \frac{e^{-\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} \quad (9.18c)$$



Gambar 9.9: Momen magnetik rata-rata sebagai fungsi suhu untuk assembli momen magnetik yang memiliki tiga kemungkinan arah orientasi.

Momen magnetik yang searah medan memberikan kontribusi momen magnetik $+\mu$, yang tegak lurus medan memberi kontribusi momen magnetik 0, dan yang berlawanan dengan arah medan memberi kontribusi momen magnetik $-\mu$. Dengan demikian, momen magnetik rata-rata adalah

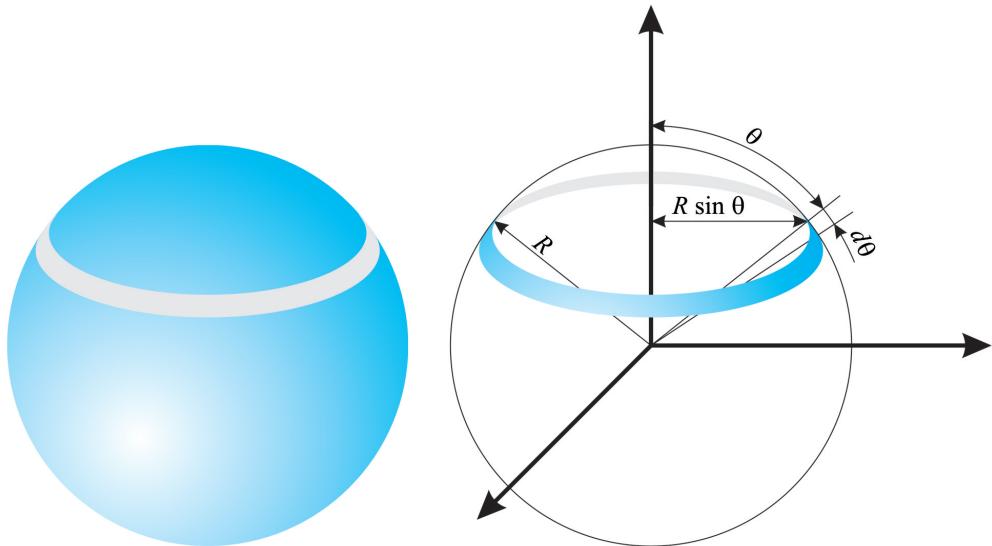
$$\begin{aligned}
 \bar{\mu} &= +\mu \times P_{\uparrow} + 0 \times P_{\rightarrow} - \mu \times P_{\downarrow} \\
 &= \mu \frac{e^{\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} - \mu \frac{e^{-\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} \\
 &= \mu \frac{e^{\mu B/kT} - e^{-\mu B/kT}}{e^{\mu B/kT} + 1 + e^{-\mu B/kT}} \\
 &= \mu \frac{\frac{e^{\mu B/kT} - e^{-\mu B/kT}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{e^{\mu B/kT} + e^{-\mu B/kT}}{2}} \\
 &= \mu \frac{\sinh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)}{\frac{1}{2} + \cosh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)}
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

Gambar 9.9 adalah kurva momen magnetik rata-rata sebagai fungsi suhu berdasarkan persamaan (9.19).

9.5 Momen Magnetik Orientasi Sembarang

Sekarang kita melangkah ke kasus yang lebih umum di mana arah orientasi momen magnetik bisa sembarang, bukan diskrit seperti yang kita bahas sebelumnya. Tentu saja pembahasan akan sedikit lebih rumit. Tetapi mari kita bahas perlahan-lahan. Sebagai ilustrasi, lihat Gbr. 9.10.

Mari kita melihat momen magnetik yang membentuk arah antara sudut θ sampai $\theta + d\theta$ terhadap arah medan magnet. Arah medan magnet dipilih sejajar sumbu z . Momen magnetik dengan arah orientasi demikian memiliki energi interaksi $U(\theta) = -\mu B \cos \theta$. Kita akan menentukan berapa peluang momen magnetik tersebut berada pada sudut demikian. Ini ditentukan oleh dua faktor, yaitu faktor Maxwell-Boltzmann, dan kerapatan keadaan. Coba kalian iris kulit bola yang dibatasi oleh sudut θ sampai $\theta + d\theta$ dan hitung luas irisan tersebut. Irisan tersebut berbentuk lingkaran dengan lebar tertentu.



Gambar 9.10: Menentukan rapat keadaan yang dibatasi oleh sudut antara θ sampai $\theta + d\theta$.

Misalkan jar-jari bola adalah R . Jari-jari irisan adalah $r = R \sin \theta$. Demikian, keliling irisan tersebut adalah

$$K = 2\pi r = 2\pi R \sin \theta \quad (9.20)$$

Keliling bola sendiri adalah $2\pi R$. Keliling ini mencakup sudut sebesar 2π ,

sedangkan irisan sendiri hanya mencakup sudut sebesar $d\theta$. Dengan menggunakan perbandingan sudut maka kita dapat menghitung tebal irisan sebagai berikut

$$ds = \frac{d\theta}{2\pi} \times 2\pi R = Rd\theta \quad (9.21)$$

Akhirnya kita dapatkan luas irisan adalah

$$\begin{aligned} dS &= Kds \\ &= (2\pi R \sin \theta) Rd\theta \\ &= 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (9.22)$$

Luas keseluruhan kulit bola sendiri adalah $S = 4\pi R^2$. Dengan demikian, kerapatan keadaan pada posisi sudut θ sampai $\theta + d\theta$ adalah

$$\begin{aligned} g(\theta)d\theta &= \frac{dS}{S} = \frac{2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{4\pi R^2} \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (9.23)$$

Probabilitas mendapatkan atom dengan arah orientasi momen magnetik antara θ sampai $\theta + d\theta$ adalah

$$P(\theta)d\theta \propto e^{-U(\theta)/kT} g(\theta)d\theta$$

atau

$$P(\theta)d\theta = Ce^{-U(\theta)/kT} g(\theta)d\theta \quad (9.24)$$

dengan C adalah faktor penormalisasi. Karena probabilitas mendapatkan atom pada semua orientasi adalah 1 maka

$$\int_0^\pi P(\theta)d\theta = 1$$

atau

$$\int_0^\pi Ce^{-U(\theta)/kT} g(\theta)d\theta = 1$$

yang akhirnya memberikan ungkapan untuk faktor penormalisasi

$$C = \frac{1}{\int_0^\pi e^{-U(\theta)/kT} g(\theta)d\theta} \quad (9.25)$$

Ketika momen magnetik membentuk sudut θ maka komponen momen yang searah medan magnet hanya $\mu \cos \theta$. Dengan demikian, momen magnetik rata-rata menjadi

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= \int_0^\pi (\mu \cos \theta) P(\theta) d\theta \\ &= \frac{\int_0^\pi (\mu \cos \theta) e^{-U(\theta)/kT} g(\theta) d\theta}{\int_0^\pi e^{-U(\theta)/kT} g(\theta) d\theta} \\ &= \mu \frac{\int_0^\pi \cos \theta e^{\mu B \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\mu B \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta}\end{aligned}\quad (9.26)$$

Untuk menyelesaikan integral (9.26) mari kita misalkan $x = \mu B \cos \theta / kT$. Dengan permisalan ini maka

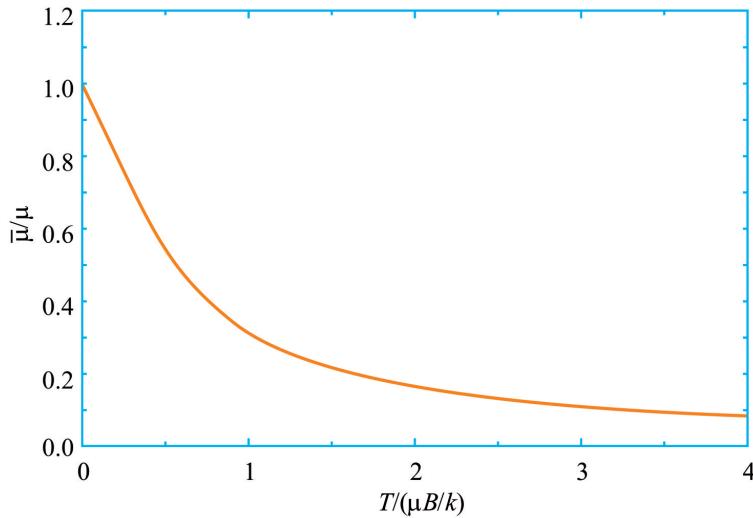
$$\cos \theta = \frac{kT}{\mu B} x \quad (9.27a)$$

$$\sin \theta d\theta = -\frac{kT}{\mu B} dx \quad (9.27b)$$

Selanjutnya kita menentukan batas integral untuk x . Jika $\theta = 0$ maka $x = \mu B / kT$ dan jika $\theta = \pi$ maka $x = -\mu B / kT$. Substitusi persamaan (9.27a) dan (9.27b) ke dalam persamaan (9.26) kita peroleh

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= \mu \frac{\int_{\mu B / kT}^{-\mu B / kT} \left(\frac{kT}{\mu B} x \right) e^x \left(-\frac{kT}{\mu B} dx \right)}{\int_{\mu B / kT}^{-\mu B / kT} e^x \left(-\frac{kT}{\mu B} dx \right)} \\ &= \left(\frac{kT}{B} \right) \frac{\int_{-\mu B / kT}^{\mu B / kT} x e^x dx}{\int_{\mu B / kT}^{-\mu B / kT} e^x dx} = \left(\frac{kT}{B} \right) \left(\frac{-\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} - \alpha e^\alpha + e^\alpha}{e^{-\alpha} - e^\alpha} \right)\end{aligned}\quad (9.28)$$

dengan $\alpha = \mu B / kT$.



Gambar 9.11: Momen magnetik rata-rata sebagai fungsi suhu untuk assembli momen magnetik yang memiliki sembarang arah orientasi.

Kita sederhanakan lebih lanjut persamaan (9.28) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \bar{\mu} &= \left(\frac{kT}{B} \right) \frac{-\alpha(e^\alpha + e^{-\alpha}) + (e^\alpha - e^{-\alpha})}{-(e^\alpha - e^{-\alpha})} \\
 &= \left(\frac{kT\alpha}{B} \right) \left(\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right) \\
 &= \mu \left(\frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})/2}{(e^\alpha - e^{-\alpha})/2} - \frac{1}{\alpha} \right) \\
 &= \mu \left(\frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \\
 &= \mu \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right)
 \end{aligned} \tag{9.29}$$

Dengan memperkenalkan fungsi Langevin,

$$L(\alpha) = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \tag{9.30}$$

maka momen magnetik rata-rata dapat ditulis dalam bentuk lebih singkat sebagai berikut

$$\bar{\mu} = \mu L \left(\frac{\mu B}{kT} \right) \tag{9.31}$$

Gambar 9.11 adalah plot momen magnetik rata-rata seperti yang diungkapkan oleh persamaan (9.31).

9.6 Vibrasi Kisi dalam Kristal

Atom-atom dalam kristal selalu bervibrasi. Atom-atom tersebut dapat dipandang sebagai kumpulan osilator harmonik sejenis. Kita akan mencari energi rata-rata getaran atom dalam kristal. Kita menganggap bahwa tidak ada interaksi antara satu atom dengan atom lainnya. Tiap atom dipandang sebagai osilator harmonik bebas.

Menurut mekanika kuantum, atom-atom yang bergetar tidak dapat memiliki energi sembarang. Energi yang dimiliki osilator tersebut bersifat diskrit yang memenuhi

$$E_n = (n + 1/2) \hbar\omega \quad (9.32)$$

dengan ω adalah frekuensi karakteristik osilasi, dan n adalah bilangan kuantum osilasi dengan nilai $0, 1, 2, \dots, \infty$. Kita berkeinginan mencari energi rata-rata getaran atom dengan asumsi bahwa distribusi osilator yang memiliki energi tertentu memenuhi distribusi Maxwell-Boltzmann. Dengan demikian, peluang sebuah osilator memiliki energi $E_n = (n + 1/2) \hbar\omega$ adalah $P_n \propto e^{-E_n/kT}$ atau

$$P_n = C e^{-E_n/kT} \quad (9.33)$$

dengan C adalah konstanta normalisasi. Peluang mendapatkan osilator pada semua tingkat energi adalah satu. Peluang tersebut adalah penjumlahan semua P_n dari $n = 0$ hingga $n = \infty$, atau $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$. Penjumlahan tersebut menghasilkan nilai faktor normalisasi dalam bentuk

$$C = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/kT}} \quad (9.34)$$

Ungkapan lengkap untuk probabilitas menemukan osilator pada keadaan dengan bilangan kuantum n adalah

$$P_n = \frac{e^{-E_n/kT}}{\sum_{n=0}^N e^{-E_n/kT}} \quad (9.35)$$

Setelah mendapatkan ungkapan untuk peluang mendapatkan osilator pada berbagai tingkat energi maka kita dapat menghitung energi rata-rata osilator sebagai berikut

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/kT}}\end{aligned}\quad (9.36)$$

Untuk mencari bentuk penjumlahan di atas mari kita ganti $-1/kT$ dengan β . Penggantian tersebut menyebabkan kita dapat menulis persamaan (9.36) sebagai

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^N E_n e^{\beta E_n}}{\sum_{n=0}^N e^{\beta E_n}}\quad (9.37)$$

Mari kita misalkan

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta E_n}\quad (9.38)$$

Jika kita diferensialkan Z terhadap β , kita peroleh

$$\frac{dZ}{d\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\beta} e^{\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n}\quad (9.39)$$

Dengan demikian, kita dapat menulis energi rata-rata osilator sebagai

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta} \\ &= \frac{d}{d\beta} \ln Z\end{aligned}\quad (9.40)$$

Persamaan (9.40) menginformasikan pada kita bahwa untuk mencari energi rata-rata osilator, kita dapat memulai dengan mencari Z seperti yang didefinisikan dalam persamaan (9.38). Sekarang mari kita mencari Z tersebut.

but.

$$\begin{aligned}
 Z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta E_n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta(n+1/2)\hbar\omega} \\
 &= e^{\beta\hbar\omega/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{n\beta\hbar\omega}
 \end{aligned} \tag{9.41}$$

Kalian ingat jumlah suatu deret geometri berikut ini bukan? Jika $|x| < 1$ maka berlaku

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{9.42}$$

Dengan membandingkan persamaan (9.41) dan persamaan (9.42) kita identifikasi bahwa x pada persamaan (9.42) ekivalen dengan $e^{\beta\hbar\omega}$ pada persamaan (9.41). Dengan demikian kita dapat menulis

$$Z = e^{\beta\hbar\omega/2} \left(\frac{1}{1 - e^{\beta\hbar\omega}} \right) \tag{9.43}$$

Selanjutnya kita dapat memperoleh persamaan-persamaan berikut ini,

$$\begin{aligned}
 \ln Z &= \frac{\beta\hbar\omega}{2} - \ln(1 - e^{\beta\hbar\omega}) \\
 \frac{d}{d\beta} \ln Z &= \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{(1 - e^{\beta\hbar\omega})} \times (-\hbar\omega e^{\beta\hbar\omega}) \\
 &= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega e^{\beta\hbar\omega}}{1 - e^{\beta\hbar\omega}}
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, energi rata-rata osilator menjadi

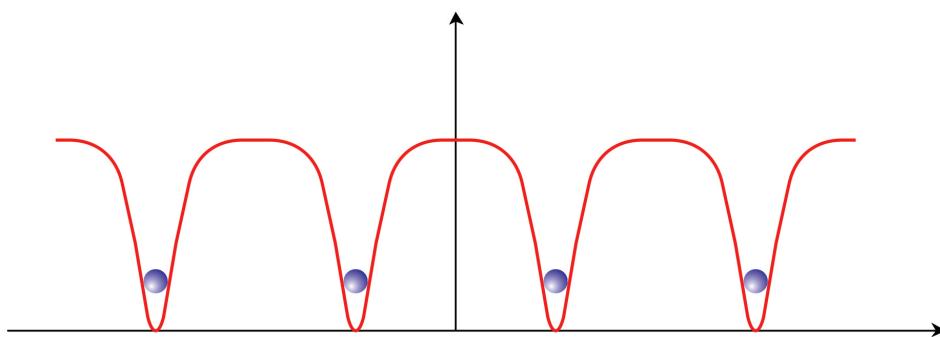
$$\begin{aligned}
 \bar{E} &= \frac{d}{d\beta} \ln Z \\
 &= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega e^{\beta\hbar\omega}}{1 - e^{\beta\hbar\omega}} \\
 &= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{-\beta\hbar\omega} - 1} \\
 &= \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}
 \end{aligned} \tag{9.44}$$

Tampak dari persamaan (9.44), jika $T \rightarrow 0$ maka $e^{\hbar\omega/kT} \rightarrow \infty$. Dengan sifat ini maka $\bar{E} \rightarrow \hbar\omega/2$. Energi $\bar{E} = \hbar\omega/2$ disebut energi titik nol.

9.7 Hopping

Sekarang kita akan tinjau konduktivitas suatu material ionik. Ion-ion dalam material semacam ini menempati posisi yang tetap. Ion-ion tersebut tidak dapat bergerak bebas seperti pada atom zat cair atau gas. Tetapi, ketika material tersebut ditempatkan di antara dua elektroda dan diberi beda potensial maka ada arus yang mengalir dalam material. Bagaimana menjelaskan fenomena ini? Mari kita bahas.

Karena ion-ion berada pada lokasi yang tetap dan sulit bergerak maka kita dapat menganggap bahwa masing-masing ion terkurung dalam lembah potensial seperti diilustrasikan pada Gbr. 9.12 ini. Tinggi bukit potensial



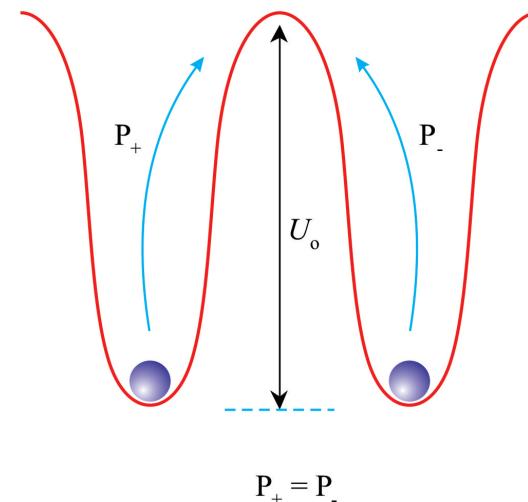
Gambar 9.12: Ion-ion dalam material ionik dapat dianggap terkurung dalam lembah potensial.

mencerminkan energi ikat yang dimiliki ion-ion. Makin tinggi bukit potensial maka makin kuat ion-ion terikat pada tempatnya. Namun, meskipun ion terikat pada posisi tempat masing-masing, ion-ion masih memiliki peluang untuk berpindah ke lokasi lain dengan cara meloncati bukit potensial. Peristiwa ini disebut hopping.

Untuk menjelaskan fenomena hopping, mari kita lihat dua ion bertetangga seperti yang diilustrasikan pada Gbr 9.13. Tinggi bukit potensial adalah U_o . Ion dapat meloncati bukit potensial jika memiliki energi qU_o , dengan q muatan efektif ion. Berdasarkan statistik Maxwell-Boltzmann, peluang ion memiliki energi qU_o adalah

$$P = Ce^{-qU_o/kT} \quad (9.45)$$

dengan C adalah faktor penormalisasi. Ion kiri dan kanan melihat bukit



Gambar 9.13: Dua ion bertetangga dalam material ionik.

potensial yang sama tingginya. Peluang ion kiri meloncat ke kanan adalah

$$P_+ = C e^{-qU_o/kT} \quad (9.46a)$$

dan peluang ion kanan meloncat ke kiri adalah

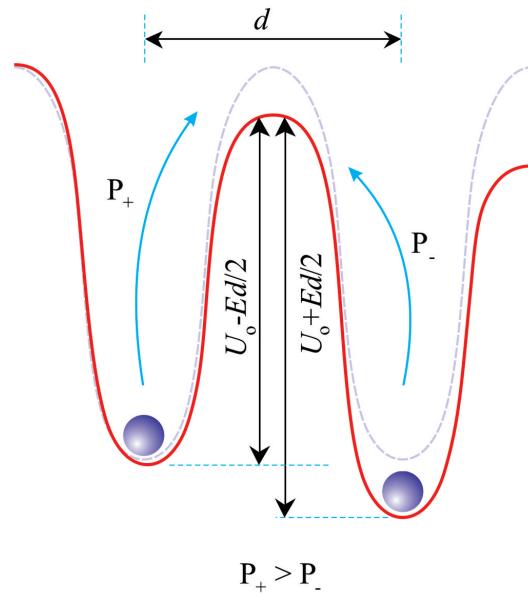
$$P_- = C e^{-qU_o/kT} \quad (9.46b)$$

Karena ke dua peluang tersebut sama maka secara total tidak ada loncatan ion netto ke kiri maupun ke kanan. Akibatnya, tidak ada arus dalam bahan.

Sekarang pada material kita beri medan listrik E ke arah kanan. Pemberian medan ini menyebabkan potensial pada tiap titik dalam material mengalami perubahan. Titik yang berada pada posisi x mengalami perubahan potensial sebesar $-Ex$. Akibatnya adanya medan tersebut, tinggi bukit potensial yang diamati dua ion menjadi berbeda seperti diilustrasikan pada Gbr. 9.14. Jika dimisalkan jarak dua ion berdekatan adalah d maka kita dapatkan hasil berikut ini:

- i) Potensial pada posisi ion sebelah kiri menjadi

$$V_1 = V_1(x) = -Ex \quad (9.47)$$



Gambar 9.14: Bukit potensial terdistorsi ketika diberi medan listrik.

- ii) Potensial pada posisi ion sebelah kanan menjadi

$$V_2 = V_2(x) = -E(x + d) = -Ex - Ed \quad (9.48)$$

- iii) Tinggi bukit potensial menjadi

$$U_b(x) = U_o - V\left(x + \frac{d}{2}\right) = U_o - E(x + d/2) = U_o - Ex - Ed/2 \quad (9.49)$$

- iv) Tinggi bukit potensial terhadap posisi ion kiri adalah

$$\Delta U_1 = U_b - U_1 = \left(U_o - Ex - \frac{Ed}{2}\right) - (-Ex) = U_o - \frac{Ed}{2} \quad (9.50)$$

- v) Tinggi bukit potensial terhadap posisi ion kanan adalah

$$\Delta U_2 = U_b - U_2 = \left(U_o - Ex - \frac{Ed}{2}\right) - (-Ex - Ed) = U_o + \frac{Ed}{2} \quad (9.51)$$

Berdasarkan potensial-potensial di atas maka kita dapatkan hasil lanjut berikut ini:

i) Probabilitas ion kiri meloncat ke kanan adalah

$$P_+ = Ce^{-q\Delta U_1/kT} = Ce^{-q(U_o - Ed/2)/kT} \quad (9.52)$$

ii) Probabilitas ion kanan meloncat ke kiri adalah

$$P_- = Ce^{-q\Delta U_2/kT} = Ce^{-q(U_o + Ed/2)/kT} \quad (9.53)$$

iii) Selisih probabilitas ion meloncat dari kiri ke kanan adalah

$$\begin{aligned} \Delta P &= P_+ - P_- \\ &= Ce^{-qU_o/kT} \left(e^{qEd/2kT} - e^{-qEd/2kT} \right) \\ &= Ce^{-(qU_o + qEd/2)/kT} \left(e^{qEd/kT} - 1 \right) \end{aligned} \quad (9.54)$$

Jika dianggap bukit potensial sangat tinggi sehingga $|qU_o| \gg |qEd/2|$ maka kita dapat mengaproksimasi $qU_o + qEd/2 \cong qU_o$. Dengan aproksimasi ini maka persamaan (9.54) menjadi

$$\Delta P \cong Ce^{-qU_o/kT} \left(e^{qEd/kT} - 1 \right) \quad (9.55)$$

Kerapatan arus yang mengalir di dalam material sebanding dengan selisih probabilitas di atas, atau $J \propto \Delta P$, sehingga bisa kita tulis

$$J(T, E) = J_o e^{-qU_o/kT} \left(e^{qEd/kT} - 1 \right) \quad (9.56)$$

Jika medan yang diterapkan tidak terlalu besar, yaitu jika terpenuhi $qEd \ll kT$ maka aproksimasi $e^{qEd/kT} \approx 1 + qEd/kT$ dapat kita lakukan. Dengan aproksimasi tersebut maka persamaan (9.56) dapat disederhanakan menjadi

$$J(T, E) \approx J_o e^{-qU_o/kT} \frac{qEd}{kT} \quad (9.57)$$

Kita ingat pelajaran tentang arus listrik bahwa ada hubungan antara kerapatan arus dan medan, yaitu

$$J = \sigma E \quad (9.58)$$

dengan σ disebut konduktivitas listrik. Dengan membandingkan persamaan (9.57) dan (9.58) kita dapatkan ungkapan konduktivitas listrik pada medan rendah untuk material ionik sebagai

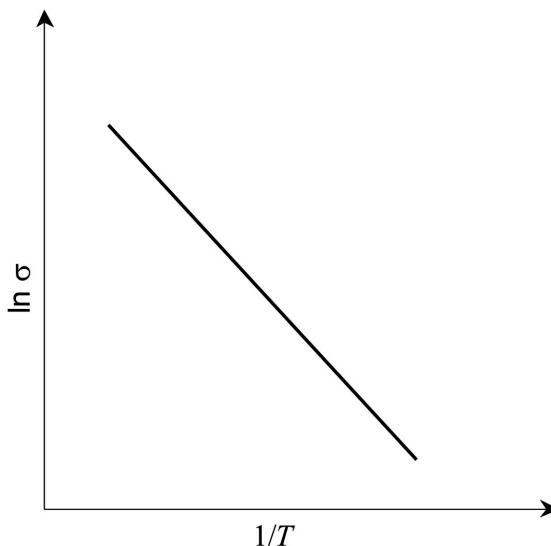
$$\begin{aligned} \sigma &\approx J_o e^{-qU_o/kT} \frac{qd}{kT} \\ &= \frac{\sigma_o}{T} e^{-E_a/kT} \end{aligned} \quad (9.59)$$

Dengan $\sigma_o = J_0 qd/k$ dan $E_a = qU_o$. Besaran E_a dikenal dengan nama energi aktivasi.

Dalam eksperimen, biasanya konduktivitas ditampilkan dalam grafik konduktivitas skala logaritmik terhadap kebalikan suhu. Jika kita ambil logaritma dua sisi persamaan (9.59) maka kita dapatkan

$$\ln \sigma = \ln \sigma_o + \ln \left(\frac{1}{T} \right) - \frac{E_a}{k} \left(\frac{1}{T} \right) \quad (9.60)$$

Gambar 9.15 adalah bentuk kurva $\ln \sigma$ sebagai fungsi $1/T$. Bentuk kurva semacam ini sering dijumpai dalam eksperimen. Kemiringan kurva adalah $-E_a/k$ sekaligus menentukan energi aktivasi.



Gambar 9.15: Bentuk kurva konduktivitas dalam skala logaritma terhadap $1/T$.

9.8 Persamaan Difusi Einstein

Selanjutnya kita meninjau difusi ion di bawah pengaruh medan listrik. Peristiwa ini sering dimanfaatkan dalam proses elektroforesis di mana medan listrik digunakan untuk menggerakkan partikel-partikel bermuatan dalam zat cair.

Mari kita lihat sebuah assembli yang mengandung sejumlah ion. Kita anggap tidak ada interaksi antar ion. Interaksi hanya terjadi antara ion dan medan listrik yang diterapkan. Misalkan muatan semua ion sama, yaitu q . Misalkan pula arah medan listrik sejajar sumbu x . Difusi yang akan kita bahas hanya difusi dalam arah sejajar sumbu x . Kita menganggap kuat medan listrik sama pada tiap titik dalam bahan. Gaya yang dialami ion yang berada pada posisi x adalah $F = qE$ sehingga energi potensial yang dimiliki ion yang berada pada posisi x adalah

$$U(x) = -qEx \quad (9.61)$$

Karena ion merupakan partikel klasik maka distribusi Maxwell-Boltzmann digunakan sehingga konsentrasi ion pada posisi x memenuhi

$$n(x) = Ce^{-U(x)/kT} = Ce^{qEx/kT} \quad (9.62)$$

dimana C merupakan konstanta normalisasi

Dari kuliah tentang arus listrik kita sudah mempelajari hubungan antara kecepatan ion dengan kuat medan yang diterapkan, yaitu

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \quad (9.63)$$

dengan μ adalah mobilitas listrik. Untuk kasus satu dimensi maka kita bisa sederhanakan menjadi $v = \mu E$. Kerapatan arus pada posisi x yang diakibatkan oleh medan listrik adalah

$$J_e(x) = vn(x) = \mu En(x) \quad (9.64)$$

Di samping itu, karena terjadi ketidakhomogenan distribusi ion maka terjadi juga pergerakan ion akibat ketidakhomogenan itu. Gerakan ion akibat fenomena ini disebut difusi. Kerapatan arus difusi memenuhi

$$\vec{J}_d = -D \vec{\nabla} n \quad (9.65)$$

dengan D disebut konstanta difusi dan $\vec{\nabla} = \hat{i}\partial/\partial x + \hat{j}\partial/\partial y + \hat{k}\partial/\partial z$. Tanda minus pada persamaan (9.65) menginformasikan bahwa arah aliran ion akibat difusi berlawanan dengan arah gradient kerapatan ion. Artinya ion mengalir dari lokasi dengan kerapatan tinggi ke lokasi dengan kerapatan rendah. Lebih khusus lagi, untuk kasus satu dimensi, kerapatan arus difusi dapat dituliskan

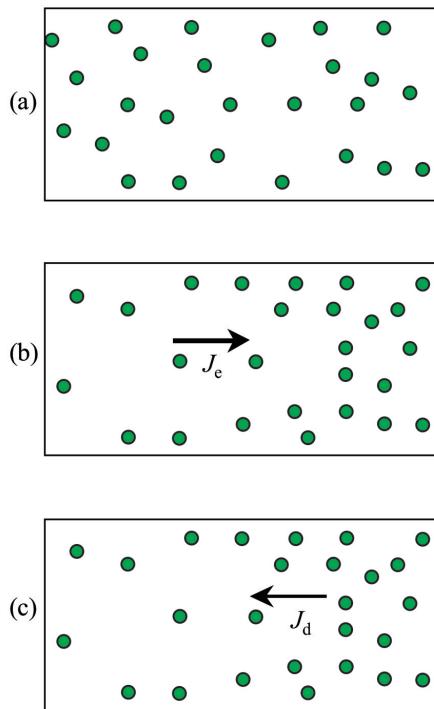
$$J_d(x) = -D \frac{dn(x)}{dx} \quad (9.66)$$

Dengan menggunakan persamaan (9.62) kita dapatkan

$$\frac{dn(x)}{dx} = C \frac{qE}{kT} e^{qEx/kT} = \frac{qE}{kT} n(x)$$

Substitusi hasil di atas ke dalam persamaan (9.66) diperoleh,

$$J_d(x) = -D \frac{qE}{kT} n(x) \quad (9.67)$$



Gambar 9.16: (a) Tanpa medan listrik ion-ion tersebar merata dalam material dan tidak muncul gradien konsentrasi. (b) Ketika medan listrik diterapkan maka ion-ion bergerak ke satu sisi material sehingga mulai muncul gradien konsentrasi. (c) Dengan munculnya gradien konsentrasi maka mulai timbul difusi ion dalam arah berlawanan.

Jika bahan tidak dihubungkan dengan rangkaian luar maka tidak ada arus total yang mengalir dalam bahan. Arus yang ditimbulkan oleh medan listrik sama besar dengan arus yang ditimbulkan oleh difusi (Gbr. 9.16), atau

$$J_e + J_d = 0$$

$$\mu En(x) - D \frac{qE}{kT} n(x) = 0$$

Yang memberikan mobilitas ion sebagai

$$\mu = \frac{qD}{kT} \quad (9.68)$$

Persamaan (9.68) dikenal dengan **persamaan difusi Einstein**.

9.9 Prinsip Ekipartisi Energi

Prinsip ekipartisi energi menyatakan bahwa tiap derajat kebebasan yang memiliki energi fungsi dalam ungkapan fungsi kuadratik dari variable derajat kebebasan memberikan kontribusi energi rata-rata kepada partikel sebesar $kT/2$. Contohnya, sebuah partikel yang bergerak bebas sepanjang garis lurus. Partikel tersebut hanya memiliki satu derajat kebebasan, yaitu momentum dalam satu arah. Energi partikel merupakan fungsi kuadratik dari momentum. Dengan demikian energi rata-rata yang disumbangkan oleh momentum tersebut adalah $kT/2$. Jika partikel tersebut hanya dapat bergerak dalam satu garis lurus di bawah pengaruh gaya pegas, maka partikel tersebut memiliki dua derajat kebebasan, yaitu posisi dan momentum. Derajat kebebasan posisi memberikan energi dalam bentuk kuadratik (persamaan Hooke) dan derajat kebebasan momentum juga memberikan energi dalam bentuk kuadratik. Apabila dirata-ratakan maka derajat kekebabasan posisi dan momentum masing-masing menyumbang $kT/2$ sehingga energi rata-rata partikel adalah $2 \times (kT/2) = kT$. Pada bagian ini kita akan membuktikan prinsip ini secara umum untuk derajat kebebasan yang sembarang.

Misalkan suatu partikel memiliki f derajat kekebasan. Energi total partikel diungkapkan dalam bentuk umum

$$E = A\xi^2 + B\eta^2 + C\psi^2 + \dots, \quad (9.69)$$

Di mana penjumlahan mengandung f suku. A, B, C , dan seterusnya adalah konstanta dan ξ, η, ψ , dan seterusnya adalah variabel yang berkaitan dengan derajat kebebasan. Variabel-variabel tersebut boleh posisi, momentum, sudut, atau apa saja.

Dengan menganggap bahwa partikel tersebut memenuhi fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann maka energi rata-rata satu partikel adalah

$$\bar{E} = \frac{\sum E e^{-E/kT}}{\sum e^{-E/kT}} \quad (9.70)$$

Untuk memudahkan penyelesaian persaman (9.70) mari untuk sementara kita kembali mendefinisikan $\beta = -1/kT$ dan $Z = \sum e^{\beta E}$ sehingga

$$\frac{dZ}{d\beta} = \sum E e^{\beta E} \quad (9.71)$$

Dengan demikian, energi rata-rata partikel dapat ditulis menjadi

$$\bar{E} = \frac{dZ/d\beta}{Z} = \frac{d}{d\beta} \ln Z \quad (9.72)$$

Selanjutnya kita fokuskan pada pencarian Z .

$$\begin{aligned} Z &= \sum \exp [\beta (A\xi^2 + B\eta^2 + C\psi^2 + \dots)] \\ &= \sum \exp [\beta A\xi^2] \exp [\beta B\eta^2] \exp [\beta C\psi^2] \dots \\ &= \sum \exp [\beta A\xi^2] \sum \exp [\beta B\eta^2] \sum \exp [\beta C\psi^2] \dots \end{aligned} \quad (9.73)$$

Penyelesaian penjumlahan di atas hampir tidak mungkin dilakukan. Namun penyelesaian dapat dilakukan dengan mengganti penjumlahan dengan integral terhadap variabel-variabel yang merepresentasikan derajat kebebasan. Kita lakukan penggantian sebagai berikut

$$\sum \exp [\beta A\xi^2] = \int_0^\infty \exp [\beta A\xi^2] (g_1 d\xi) \quad (9.74)$$

Pada persamaan (9.74), g_1 adalah kerapatan keadaan yang berkaitan dengan variable ξ . Dengan demikian persamaan (9.73) dapat ditulis menjadi

$$Z = (g_1 g_2 g_3 \dots) \int_0^\infty \exp [\beta A\xi^2] d\xi \int_0^\infty \exp [\beta B\eta^2] d\eta \int_0^\infty \exp [\beta C\psi^2] d\psi \dots \quad (9.75)$$

Mari kita selesaikan integral pertama, yaitu $\int_0^\infty \exp [\beta A\xi^2] d\xi$. Untuk kemudahan kita misalkan $\beta A\xi^2 = -x^2$. Ingat, suku kanan berharga negatif karena β negatif. Dengan permisalan tersebut maka

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{-\beta A}} x$$

$$d\xi = \frac{1}{\sqrt{-\beta A}} dx$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp [\beta A \xi^2] d\xi &= \int_0^\infty \exp [-x^2] \frac{1}{\sqrt{-\beta A}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\beta A}} \int_0^\infty \exp [-x^2] dx = \frac{1}{\sqrt{-\beta A}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \end{aligned} \quad (9.76a)$$

Dengan cara persis sama kita akan dapatkan

$$\int_0^\infty \exp [\beta B \eta^2] d\eta = \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \quad (9.76b)$$

$$\int_0^\infty \exp [\beta C \psi^2] d\psi = \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \quad (9.76c)$$

dan seterusnya. Akhirnya kita dapatkan ungkapan untuk Z sebagai berikut

$$\begin{aligned} Z &= (g_1 g_2 g_3 \dots) \left(\frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{-\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \right) \dots \\ &= \frac{1}{(-\beta)^{f/2}} \left\{ (g_1 g_2 g_3 \dots) \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \dots \right\} \\ \ln Z &= \ln \frac{1}{(-\beta)^{f/2}} + \ln \left\{ (g_1 g_2 g_3 \dots) \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \dots \right\} \\ &= -\frac{f}{2} \ln(-\beta) + \ln \left\{ (g_1 g_2 g_3 \dots) \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \dots \right\} \end{aligned} \quad (9.77)$$

Dengan hasil di atas maka persaman (9.72) selanjutnya menjadi

$$\overline{E} = \frac{d}{d\beta} \ln Z = -\frac{f}{2} \frac{d}{d\beta} \ln(-\beta) - \frac{d}{d\theta} \ln \left\{ (g_1 g_2 g_3 \dots) \sqrt{\frac{\pi}{4A}} \sqrt{\frac{\pi}{4B}} \sqrt{\frac{\pi}{4C}} \dots \right\} \quad (9.78)$$

Semua suku di ruas paling kanan persamaan (9.78) tidak mengandung β sehingga diferensial terhadap β nol. Jadi kita hanya dapatkan

$$\begin{aligned}\bar{E} &= -\frac{f}{2} \frac{d}{d\beta} \ln(-\beta) \\ &= -\frac{f}{2\beta} = -\frac{f}{2(-1/kT)} = \frac{f}{2} kT \\ &= f\left(\frac{1}{2}kT\right)\end{aligned}\quad (9.79)$$

Karena partikel yang kita bahas memiliki f derajat kebebasan maka kita simpulkan bahwa tiap derajat kebebasan menyumbang energi sebesar $kT/2$. Jadi kita telah membuktikan prinsip ekipartisi energi.

9.10 Pemuaian Termal Zat

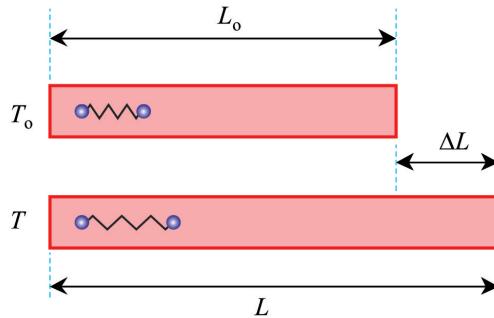
Jika benda dipanaskan maka benda tersebut akan mengalami pertambahan volume atau memuai. Satu contoh khas adalah jika zat padat dipanaskan maka zat tersebut mengalami pertambahan panjang yang memenuhi

$$\Delta L = L_o \alpha(T - T_o) \quad (9.80)$$

dengan L_o adalah panjang benda pada suhu T_o , L adalah panjang benda pada suhu T , dan α adalah koefisien muai panjang (Gbr. 9.17). Bagaimana menjelaskan fenomena ini secara mikroskopik? Mari kita lihat untuk kasus benda berbentuk kristal.

Atom dalam kristal selalu bergerak di sekitar titik seimbang. Aproksimasi paling ideal untuk menjelaskan getaran atom-atom tersebut adalah menggunakan fungsi harmonik untuk potensial getaran, yaitu $U(x) = cx^2$. Pendekatan ini cukup teliti jika simpangan atom di sekitar titik keseimbangan sangat kecil dan kondisi ini biasanya diamati pada suhu yang sangat rendah. Sebaliknya, pada suhu yang relatif tinggi, simpangan atom di sekitar titik setimbang cukup besar sehingga aproksimasi harmonik untuk potensial getaran atom tidak lagi mencukupi. Pendekatan yang lebih teliti dapat diperoleh dengan menambahkan suku simpangan orde lebih dari dua, yaitu orde tiga dan empat. Oleh karena itu, aproksimasi yang lebih baik untuk potensial getaran menjadi

$$U(x) = cx^2 - gx^3 - fx^4 \quad (9.81)$$



Gambar 9.17: Ketika dipanaskan panjang material bertambah. Pertambahan panjang tersebut disebabkan pertambahan jarak keseimbangan atom-atom dalam material karena kenaikan suhu akibat potensial getaran atom tidak sepenuhnya harmonik.

dengan f dan g adalah konstanta. Walaupun dilakukan koreksi pada potensial getaran, namun tetap berlaku bahwa $|gx^3| \ll |cx^2|$ dan $|fx^4| \ll |cx^2|$. Artinya, suku harmonik (kuadratik) tetap jauh lebih dominan.

Pada suhu yang cukup tinggi, getaran atom dapat dijelaskan dengan statistik Maxwell-Boltzmann. Simpangan rata-rata atom dari posisi keseimbangan adalah

$$\langle x \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \exp[\beta U(x)] dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[\beta U(x)] dx} \quad (9.82)$$

Sekarang kita perhatikan integral di bagian pembilang.

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \exp[\beta U(x)] dx &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \exp[\beta(cx^2 - gx^3 - fx^4)] dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \exp[\beta cx^2] \exp[-\beta(gx^3 + fx^4)] dx \end{aligned}$$

Karena nilai $gx^3 + fx^4$ umumnya sangat kecil maka kita dapat menguraikan $\exp[-\beta(gx^3 + fx^4)]$ dalam deret Taylor sebagai berikut

$$\exp[-\beta(gx^3 + fx^4)] \cong 1 - \beta(gx^3 + fx^4)$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} x \exp [\beta U(x)] dx &\cong \int_{-\infty}^{\infty} x \exp [\beta cx^2] \times [1 - \beta (gx^3 + fx^4)] dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x \exp [\beta cx^2] dx - \beta g \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp [\beta cx^2] dx \\
 &\quad - \beta f \int_{-\infty}^{\infty} x^5 \exp [\beta cx^2] dx
 \end{aligned} \tag{9.83}$$

Pada integral di dalam persamaan (9.83), suku pertama dan ketiga merupakan fungsi ganjil sehingga nilai integralnya nol. Yang tidak nol hanya suku kedua. Jadi

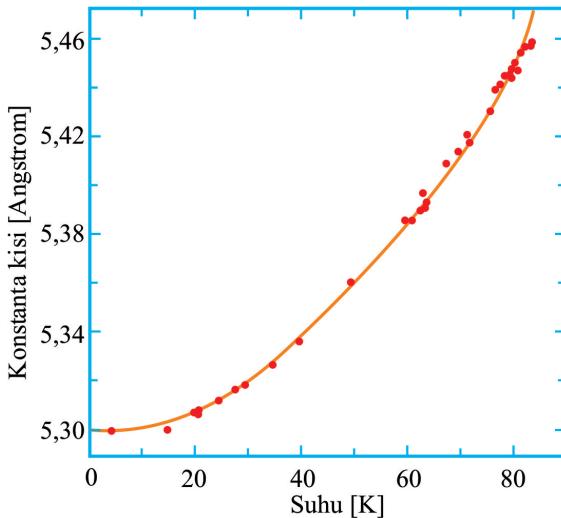
$$\int_{-\infty}^{\infty} x \exp [\beta U(x)] dx \cong -\beta g \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp [\beta cx^2] dx \tag{9.84}$$

Untuk menyelesaikan integral (9.84) kita misalkan $\beta cx^2 = -y$. Akibatnya $x^4 = (-y/\beta c)^2$, $dx = \frac{1}{2\sqrt{-\beta c}}y^{-1/2}dy$ dan integral (9.84) menjadi

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} x \exp [\beta U(x)] dx &\cong -\beta g \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{y}{\beta c}\right)^2 e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{-\beta c}} y^{-1/2} dy \\
 \int_{-\infty}^{\infty} x \exp [\beta U(x)] dx &\cong -\frac{\beta g}{(-\beta c)^{5/2}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{3/2} e^{-y} dy \\
 &= -\frac{\beta g}{(-\beta c)^{5/2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\
 &= -\frac{\beta g}{(-\beta c)^{5/2}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4}
 \end{aligned} \tag{9.85}$$

Sekarang kita lihat penyebut pada persamaan (9.82),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp [\beta U(x)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp [\beta (cx^2 - gx^3 - fx^4)] dx$$



Gambar 9.18: Kebergantungan konstanta kisi argon pada terhadap suhu.

Karena di sini hanya ada suku eksponen di dalam integral dan tidak ada suku pengali lain, seperti suku x pada integral pembilang, maka kita dapat langsung melakukan aproksimasi dengan membuang suku pangkat tiga dan pangkat empat pada eksponensial. Dengan demikian kita dapatkan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp [\beta U(x)] dx \cong \int_{-\infty}^{\infty} \exp [\beta cx^2] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\beta c}} \quad (9.86)$$

Akhirnya dari persamaan (9.85) dan (9.86) kita dapatkan simpangan rata-rata atom adalah

$$\langle x \rangle = -\frac{\beta g / (-\beta c)^{5/2} (3\sqrt{\pi})/4}{\sqrt{\pi}/z - \beta c} = \frac{3g}{4c^2(-\beta)} = \frac{3g}{4c^2} kT \quad (9.87)$$

Misalkan pada suhu $T = 0$ jarak antar atom adalah α . Pada suhu T_o , jarak antar atom menjadi $a + (3g/4c^2)kT_o$ dan pada suhu T sembarang jarak antar atom menjadi $a + (3g/4c^2)kT$. Gambar 9.18 adalah hasil pengamatan kebergantungan konstanta kisi Argon padat sebagai fungsi suhu. Hasil tersebut memperlihatkan bahwa konstanta kisi berubah hampir linier terhadap suhu, seperti yang diprediksi oleh persamaan (9.87).

Jika terdapat N atom dalam arah memanjang maka panjang benda adalah

- Pada suhu T_o ,

$$L_o = N \left(a + \frac{3g}{4c^2} kT_o \right) \quad (9.88)$$

- Pada suhu T ,

$$L = N \left(a + \frac{3g}{4c^2} kT \right) \quad (9.89)$$

- Pertambahan panjang benda menjadi

$$\Delta L = L - L_o = N \frac{3g}{4c^2} k(T - T_o) \quad (9.90)$$

Umumnya akan selalu berlaku bahwa $a >> \frac{3g}{4c^2} kT_o$. Dengan demikian persamaan (9.88) dapat diaproksimasi menjadi $L_o \approx Na$ atau $N \approx L_o/a$. Pertambahan panjang benda yang dinyatakan dalam persamaan (9.90) selanjutnya dapat dituliskan

$$\Delta L = \frac{L_o}{a} \frac{3g}{4c^2} k(T - T_o) = L_o \alpha(T - T_o) \quad (9.91)$$

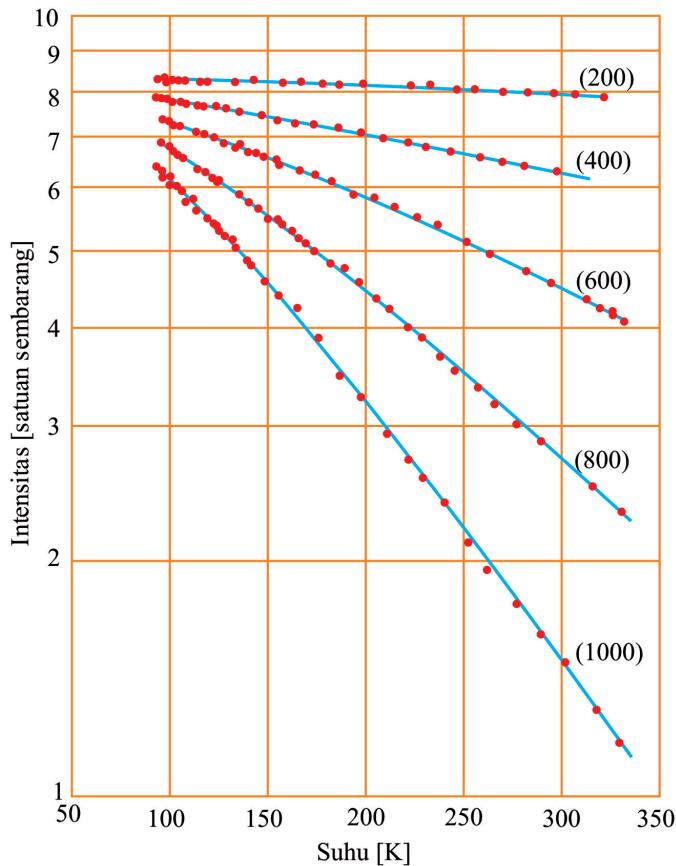
dengan

$$\alpha = \frac{3gk}{4ac^2} \quad (9.92)$$

9.11 Efek Suhu Pada Difraksi Sinar-X

Ketika diamati di bawah spektrometer sinar-X kristal memperlihatkan puncak-puncak difraksi akibat pemantulan sinar-X yang mengenai kristal oleh atom-atom dalam kristal tersebut. Posisi puncak difraksi dan intensitas relatif masing-masing puncak sangat bergantung pada struktur kristal dan jenis atom yang membentuk kristal. Ada satu pengamatan yang menarik yaitu ketika suhu sampel yang dideteksi dengan sinar-X diubah maka intensitas puncak difraksi berubah sedangkan lebar puncak tidak berubah (Gbr. 9.19). Makin tinggi suhu maka makin rendah intensitas puncak difraksi. Bagaimana menjelaskan fenomena ini?

Penyebab fenomena ini adalah karena vibrasi atom dalam kristal akibat suhu. Makin tinggi suhu maka makin cepat getaran atom dan ini berakibat pada makin lemahnya intensitas sinar-X yang dipantulkan atom tersebut. Mari kita kaji lebih detail.



Gambar 9.19: Variasi intensitas puncak difraksi $(h00)$ aluminium ketika suhu diubah-ubah.

Misalkan pada suhu $T = 0$ posisi atom ke- j dalam kristal adalah \vec{R}_j . Pada suhu T sembarang, posisi atom berubah-ubah akibat getaran termal. Posisi atom menjadi fungsi waktu sebagai berikut

$$\vec{r}_j(t) = \vec{R}_j + \vec{u}_j(t) \quad (9.93)$$

Besaran yang sangat menentukan intensitas difraksi sinar-X oleh kristal adalah faktor struktur, S_G yang diberikan oleh persamaan

$$S_G = \sum_j f_j \exp \left[-i \vec{G} \bullet \vec{R}_j \right] \quad (9.94)$$

di mana penjumlahan dilakukan pada semua atom dalam satu kisi, f_j adalah parameter yang bergantung pada jenis atom dalam kisi, dan \vec{G} adalah vektor dalam kisi resiprok. Intensitas difraksi akan memenuhi

$$I \propto |S_G|^2 \quad (9.95)$$

Sekarang kita tinjau satu suku dalam penjumlahan faktor struktur di atas. Ketika terjadi vibrasi termal nilai suku tersebut menjadi

$$f_j \exp \left[-i\vec{G} \bullet \vec{r}_j(t) \right] = f_j \exp \left[-i\vec{G} \bullet \vec{R}_j \right] \exp \left[-i\vec{G} \bullet \vec{u}_j(t) \right] \quad (9.96)$$

Jika dilakukan perata-rataan terhadap suhu maka

$$\langle f_j \exp \left[-i\vec{G} \bullet \vec{r}_j(t) \right] \rangle = f_j \left\langle \exp \left[-i\vec{G} \bullet \vec{R}_j \right] \right\rangle \left\langle \exp \left[-i\vec{G} \bullet \vec{u}_j(t) \right] \right\rangle \quad (9.97)$$

Umumnya, $\vec{u}_j(t)$ sangat kecil sehingga kita dapat melakukan penguraian berikut ini

$$\begin{aligned} \left\langle \exp \left[-i\vec{G} \bullet \vec{u}_j(t) \right] \right\rangle &\approx \left\langle 1 - i\vec{G} \bullet \vec{u}_j(t) - \frac{1}{2}(\vec{G} \bullet \vec{u}_j(t))^2 \right\rangle \\ &= 1 - i \left\langle \vec{G} \bullet \vec{u}_j(t) \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle (\vec{G} \bullet \vec{u}_j(t))^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (9.98)$$

Tetapi $\left\langle \vec{G} \bullet \vec{u}_j(t) \right\rangle = 0$ karena merupakan rata-rata simpangan termal di sekitar titik setimbang. Untuk suku kuadratik kita lakukan penyelesaian sebagai berikut

$$\left\langle (\vec{G} \bullet \vec{u}_j(t))^2 \right\rangle = \left\langle (Gu \cos \theta)^2 \right\rangle = G^2 \langle u^2 \rangle \langle \cos^2 \theta \rangle \quad (9.99)$$

di mana $\langle u^2 \rangle$ adalah rata-rata secara termal dan $\langle \cos^2 \theta \rangle$ adalah rata-rata secara geometri.

Sekarang kita mencari $\langle \cos^2 \theta \rangle$. Perhatikan Gbr. 9.7. Kita mendapatkan bahwa

$$\begin{aligned} \langle \cos^2 \theta \rangle &= \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\text{luas cincin}}{\text{luas bola}} \\ &= \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{(2\pi R \sin \theta)(R d\theta)}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Untuk mencari $\langle u^2 \rangle$ kita lakukan hal berikut ini. $\langle u^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = \frac{2}{c} \left\{ \frac{c}{2} \langle x^2 \rangle + \frac{c}{2} \langle y^2 \rangle + \frac{c}{2} \langle z^2 \rangle \right\}$ dengan c konstanta pegas dan tiap suku dalam kurung kurawal adalah energi potensial dalam tiap arah vibrasi. Berdasarkan prinsip ekipartisi energi, tiap derajat kebebasan memiliki energi rata-rata $kT/2$. Jadi $\langle u^2 \rangle = (2/c) \langle kT/2 + kT/2 + kT/2 \rangle = 3kT/c$. Akhirnya kita dapatkan aproksimasi berikut ini

$$\langle (\vec{G} \bullet \vec{u}_j(t))^2 \rangle = G^2 \frac{3kT}{c} \frac{1}{3} = \frac{kG^2}{c} T$$

dan

$$\langle \exp \left[-i\vec{G} \bullet \vec{u}_j(t) \right] \rangle \approx 1 - \frac{kG^2}{2c} T \quad (9.100)$$

Karena umumnya nilai suku $\frac{kG^2}{2c} T \ll 1$ maka kita dapat melakukan aproksimasi $1 - \frac{kG^2}{2c} T \approx \exp \left[-\frac{kG^2}{2c} T \right]$. Jadi

$$\langle \exp \left[-i\vec{G} \bullet \vec{u}_j(t) \right] \rangle \approx \exp \left[-\frac{kG^2}{2c} T \right] \quad (9.101)$$

dan suku dalam faktor struktur menjadi

$$\approx f_j \langle \exp \left[-i\vec{G} \bullet \vec{R}_j \right] \rangle \exp \left[-\frac{kG^2}{2c} T \right] \quad (9.102)$$

Ini berakibat, intensitas difraksi sinar-X akan memenuhi

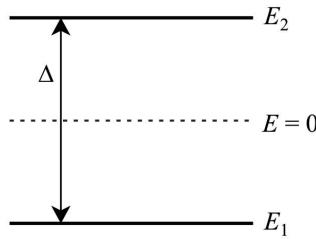
$$I \propto \left| f_j \langle \exp \left[-i\vec{G} \bullet \vec{R}_j \right] \rangle \exp \left[-\frac{kG^2}{2c} T \right] \right|^2$$

atau

$$I = I_o \exp \left[-\frac{kG^2}{c} T \right] \quad (9.103)$$

9.12 Kapasitas Panas Padatan Amorf

Padatan amorf memiliki atom-atom yang tersusun secara acak (tidak teratur). Sebagian atom menempati posisi "benar", yaitu sesuai dengan posisi dalam kristal dan sebagian lainnya menempati posisi yang "salah" yaitu menyimpang dari posisi kristal murni. Untuk memodelkan padatan amorf,



Gambar 9.20: Dua tingkat energi dalam padatan amorf.

kita dapat memperkenalkan dua tingkat energi. Tingkat energi pertama dimiliki atom yang menempati posisi "benar" dan tingkat energi kedua dimiliki oleh atom yang menempati posisi "salah".

Seperti ditunjukkan pada Gbr. 9.20, jarak antar dua tingkat energi dalam padatan amorf kita anggap \$\Delta\$. Untuk mudahnya kita ambil referensi energi nol tepat di tengah dua tingkat energi tersebut. Dengan demikian, energi yang ada dalam padatan amorf menjadi \$E_1 = -\Delta/2\$ dan \$E_2 = +\Delta/2\$. Dengan menggunakan persamaan (9.38) kita dapatkan

$$Z = \sum_i e^{\beta E_i} = e^{-\beta\Delta/2} + e^{\beta\Delta/2} = 2 \coth \frac{\beta\Delta}{2} \quad (9.104)$$

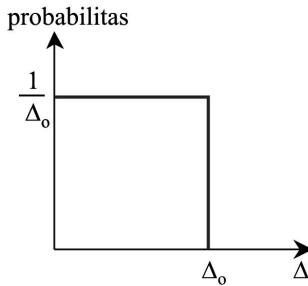
Energi rata-rata per sistem menjadi

$$U = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{\Delta}{2} \tanh \frac{\beta\Delta}{2} \quad (9.105)$$

Kapasitas panas per sistem menjadi

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{dU}{dT} \\ &= \frac{1}{kT^2} \frac{dU}{d\beta} \\ &= k \left(\frac{\beta\Delta}{2} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\beta\Delta}{2} \right) \end{aligned} \quad (9.106)$$

Untuk material amorf, \$\Delta\$ tidak konstan tetapi memiliki nilai yang acak. Jika kita asumsikan bahwa \$\Delta\$ tersebar secara homogen dari nilai \$\Delta = 0\$ ke \$\Delta = \Delta_o\$, seperti pada Gbr. 9.21. Maka kita dapatkan nilai rata-rata



Gambar 9.21: Distribusi jarak antar tingkat energi Δ .

kapasitas kalor sebagai

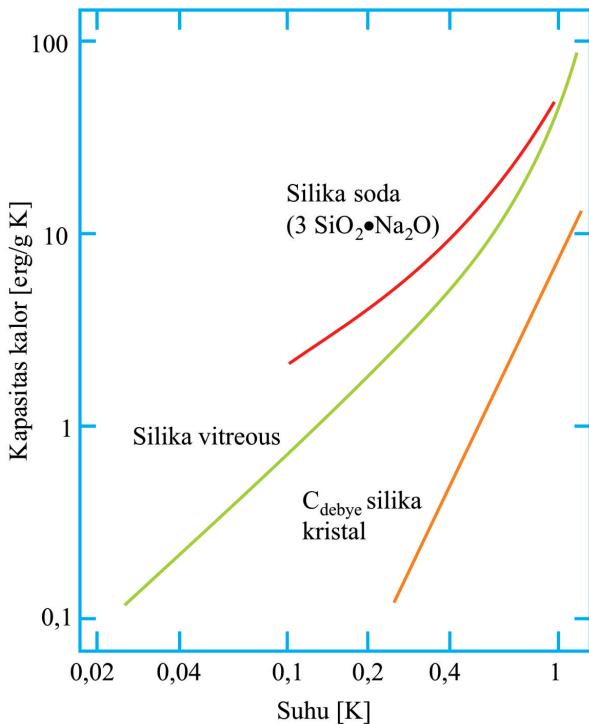
$$\begin{aligned}\langle C_V \rangle &= \frac{1}{\Delta_0} \int_0^{\Delta_0} C_V d\Delta \\ &= \frac{k}{\Delta_0} \int_0^{\Delta_0} \left(\frac{\beta\Delta}{2}\right)^2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\beta\Delta}{2}\right) d\Delta\end{aligned}\quad (9.107)$$

Kita misalkan $-\beta\Delta/2 = y$ sehingga $d\Delta = (-2/\beta)dy$ dan $\operatorname{sech}^2\left(\frac{\beta\Delta}{2}\right) = \operatorname{sech}^2(-y) = \operatorname{sech}^2 y$ karena sech^2 adalah fungsi genap. Jadi

$$\langle C_V \rangle = -\frac{2k}{\beta\Delta_0} \int_0^{-\beta\Delta_0/2} y^2 \operatorname{sech}^2(y) dy \quad (9.108)$$

Integral (9.108) tidak dapat dilakukan secara langsung. Sekarang kita lihat dua kasus ekstrim. Tinjau kasus di mana suhu cukup besar, yaitu $-\beta\Delta_0/2 \ll 1$. Pada kondisi ini kita mengintegralkan y pada rentang nilai $y = 0$ sampai nilai y yang mendekati nol. Dalam rentang integral tersebut, nilai $\operatorname{sech} y$ tidak jauh berbeda dari $\operatorname{sech} 0$, yaitu sama dengan 1. Jadi kita dapat melakukan aproksimasi berikut ini untuk suhu tinggi

$$\begin{aligned}\langle C_V \rangle &\approx -\frac{2k}{\beta\Delta_0} \int_0^{-\beta\Delta_0/2} y^2 dy = -\frac{2k}{\beta\Delta_0} \times \frac{1}{3} \left(-\frac{\beta\Delta_0}{2}\right)^3 \\ &= \frac{\Delta_0^2}{12kT^2}\end{aligned}\quad (9.109)$$



Gambar 9.22: Kapasitas panas glas soda silika dan silika vitreous (keduanya amorf) sebagai fungsi suhu pada daerah suhu rendah.

Sebaliknya pada suhu yang cukup rendah, yaitu $-\beta\Delta_o/2 \gg 1$ maka batas atas integral (9.108) dapat dianggap tak berhingga sehingga

$$\langle C_V \rangle \approx -\frac{2k}{\beta\Delta_o} \int_0^{\infty} y^2 \operatorname{sech}^2(y) dy \quad (9.110)$$

Namun, nilai $\operatorname{sech}^2 y$ hanya cukup signifikan di sekitar $y = 0$ sampai $y = 1$, sedangkan di atas $y = 1$ dapat diabaikan (dianggap nol). Pada rentang antara $y = 0$ sampai $y = 1$ pun nilai $\operatorname{sech}^2 y$ mendekati satu. Dengan demikian,

aproksimasi kasar untuk kapasitas panas pada suhu rendah adalah

$$\begin{aligned}
 \langle C_V \rangle &\approx -\frac{2k}{\beta\Delta_o} \int_0^1 y^2 \operatorname{sech}^2(y) dy - \frac{2k}{\beta\Delta_o} \int_1^\infty y^2 \operatorname{sech}^2(y) dy \\
 &\approx -\frac{2k}{\beta\Delta_o} \int_0^1 y^2 \times 1 dy - \frac{2k}{\beta\Delta_o} \int_1^\infty y^2 \times 0 dy \\
 &= -\frac{2k}{\beta\Delta_o} \int_0^1 y^2 dy \\
 &= -\frac{2k}{3\beta\Delta_o} \\
 &= \frac{2k^2}{3\Delta_o} T
 \end{aligned} \tag{9.111}$$

Gambar 9.22 adalah plot kapasitas panas silica amorf sebagai fungsi suhu pada suhu yang sangat rendah. Tampak bahwa suhu berubah hampir linier pada suhu di bawah 1 K, sesuai dengan yang diramalkan persamaan (9.111). Plot kapasitas panas yang diberikan oleh fungsi Debye untuk silica kristal juga ditampilkan sebagai pembanding.

9.13 Konduktivitas Vogel-Tamman-Fulcher

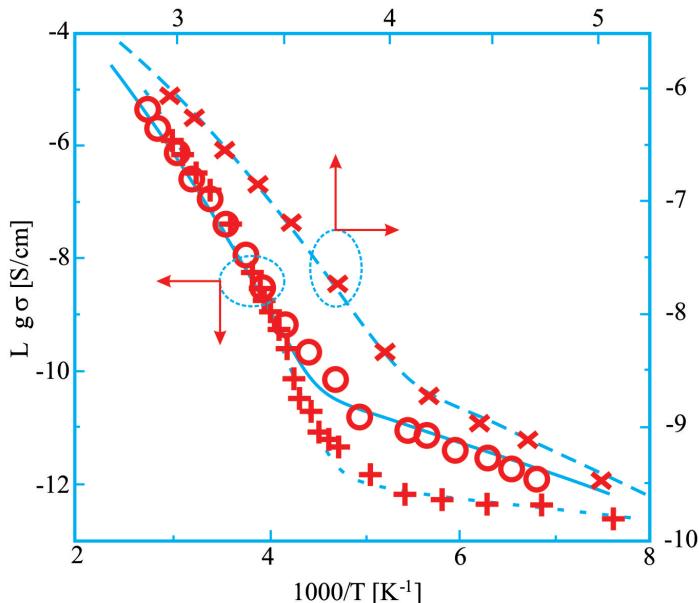
Konduktivitas listrik dalam elektrolit padat sering memenuhi persamaan Arrhenius $\sigma = \sigma_o \exp[-E_a/kT]$ dengan E_a disebut energi aktivasi. Sifat ini disebabkan oleh hopping ion melalui site-site dalam material dan probabilitas hopping memenuhi probabilitas Maxwell-Boltzmann. Namun, dalam polimer elektrolit, konduktivitas listrik lebih sering memenuhi persamaan **Vogel-Tamman-Fulcher (VTF)**, yaitu $\sigma = \sigma_o \exp[-B/(T-T_o)]$. Gambar 9.23 adalah contoh hasil pengamatan konduktivitas listrik dalam sejumlah polimer elektrolit. Tampak bahwa kurva konduktivitas tidak benar-benar merupakan garis lurus seperti yang diramalkan persamaan Arrhenius.

Sifat ini diduga muncul sebagai akibat gerakan segmental polimer yang menyebabkan ion ter dorong ke lokasi sebelahnya. Gerakan segmental tersebut muncul jika dalam polimer terdapat yang cukup. Agar terjadi gerakan segmental, diperlukan ruang minimum V^* yang harus diberikan pada tiap

segmen polimet. Jika polimer dipanaskan maka polimer mengalami pemuai-an. Suatu elemen volume dalam polimer mengalami pertambahan volume efektif sebesar $\Delta V = V - V_o$ akibat kenaikan suhu dari T_o ke T di mana V_o adalah volume awal elemen tersebut. Pertambahan elemen volume tersebut menjadi ruang bagi terjadinya gerakan segmental. Peluang terjadinya perpindahan ion akibat gerakan segmental tersebut memenuhi

$$P \propto \exp \left[-\frac{V^*}{\Delta V} \right] \quad (9.112)$$

Jika konduktivitas dianggap sebanding dengan peluang ini maka



Gambar 9.23: Kebergantungan konduktivitas listrik sejumlah polimer elektrolit terhadap suhu. (lingkaran terbuka) $\text{Cd}_{0.75}\text{PS}_3\text{Na}_{0.5}$ (PEO), (tanda plus) $\text{Cd}_{0.75}\text{PS}_3\text{Li}_{0.5}$ (PEO), dan (tanda silang) $\text{Cd}_{0.75}\text{PS}_3\text{Li}_{0.5}$ (PPG).

$$\sigma \propto \exp \left[-\frac{V^*}{\Delta V} \right] = \sigma_o \exp \left[-\frac{V^*}{\Delta V} \right] \quad (9.113)$$

Jika dianggap bahwa elemen volume polimer memuai menurut persamaan yang berlaku untuk material ukuran besar maka kita dapat menulis

$$\Delta V = V_o \gamma (T - T_o) \quad (9.114)$$

dengan γ adalah koefisien muai volume. Dengan demikian kita peroleh

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_o \exp \left[-\frac{V^*}{V_o \gamma (T - T_o)} \right] \\ &= \sigma_o \exp \left[-\frac{(V^*/V_o \gamma)}{(T - T_o)} \right] \\ &= \sigma_o \exp \left[-\frac{B}{(T - T_o)} \right]\end{aligned}\quad (9.115)$$

dengan $B = V^*/V_o \gamma$.

Sifat konduktivitas VTF umumnya terjadi jika polimer berada dalam fase amorf. Jika polimer berada dalam fasa kristal maka konduktivitas biasanya memenuhi persamaan Arrhenius. Misalkan pada suhu T fraksi volume fase kristal dalam polimer adalah $\phi_c(T)$ dan fraksi volume fase amorf adalah $\phi_a(T) = 1 - \phi_c(T)$. Konduktivitas efektif dalam polimer elektrolit berasal dari kontribusi dua mekanisme di atas dan dapat dituliskan

$$\sigma(T) = \phi_c(T) \sigma_o \exp \left[-\frac{E_a}{kT} \right] + \phi_a(T) \sigma_o \exp \left[-\frac{B}{(T - T_o)} \right] \quad (9.116)$$

Untuk menentukan konduktivitas efektif di atas maka kita perlu menentukan $\phi_c(T)$ sebagai fungsi suhu. Salah satu fungsi pendekatan untuk $\phi_c(T)$ adalah

$$\phi_c(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Erf} \left[-\frac{(T - T_m)}{T_m} \sqrt{\frac{C_{mv}}{R}} \right] \quad (9.117)$$

jika suhu berada di bawah suhu leleh polimer, T_m dan

$$\phi_c(T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Erf} \left[\frac{(T - T_m)}{T_m} \sqrt{\frac{C_{mv}}{R}} \right] \quad (9.118)$$

jika suhu berada di atas suhu leleh polimer, T_m . Disini $\operatorname{Erf}(x)$ adalah fungsi Error yang memenuhi

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp[-t^2/2] dt \quad (9.119)$$

C_{mv} adalah kapasitas panas pada titik leleh dan R adalah konstanta gas.

Soal Latihan

1. Misalkan sebuah assembli mengandung sistem momen magnetik yang hanya dapat mengambil lima arah orientasi, yaitu sejajar dan berlawanan arah medan magnetik, tekan lurus medan magnetik, dan membentuk sudut $+45^\circ$ dan -45° terhadap medan magnetik.
 - i) Cari momen magnetik rata-rata sebagai fungsi suhu
 - ii) Cari energi magnetik rata-rata sistem dan energi total assembli
 - iii) Cari kapasitas panas assembli sebagai fungsi suhu
2. Ferromagnetik. Kita sudah membahas bahwa momen magnetik rata-rata sistem dalam assembli momen magnetik memenuhi persamaan $\langle \mu \rangle = \mu \tanh(\mu B/kT)$ sehingga magnetisasi assembli adalah $M = n \langle \mu \rangle = M_o \tanh(\mu B/kT)$ dengan n adalah konsentrasi sistem dan $M_o = n\mu$. Hubungan ini dapat diperluas ke bahan ferromagnetik. Dalam bahan ferromagnetik, medan magnetik yang dirasakan sistem bukan hanya berasal dari medan magnetik luar, B_o , tetapi juga merupakan sumbangan dari momen-momen magnetik di sekitarnya. Medan magnetik efektif yang dihasilkan oleh momen-momen magnetik di sekitarnya bergantung pada magnetisasi bahan tersebut dan memenuhi hubungan sederhana $B' = \lambda M$ dengan λ adalah konstanta. Jadi medan magnetik total yang dirasakan sistem menjadi $B = B_o + \lambda M$
 - Tentukan persamaan magnetisasi untuk bahan ferromagnetik.
 - Jika tidak ada medan magnetik luar yang diterapkan pada bahan ferromagnetik maka magnetisasi masih bisa muncul. Ini disebut magnetisasi spontan. Tentukan persamaan untuk magnetisasi spontan.
 - Cari solusi untuk magnetisasi spontan pada sejumlah suhu berikut ini: $T = 0,2\lambda\mu M_o/k$, $T = 0,8\lambda\mu M_o/k$, $T = 1,2\lambda\mu M_o/k$, dan $T = 2\lambda\mu M_o/k$
 - Perlihatkan bahwa jika suhu $T > \lambda\mu M_o/k$ maka tidak ada solusi untuk momen magnetik kecuali $M = 0$. Nilai $T_C = \lambda\mu M_o/k$ disebut suhu kritis atau suhu transisi. Hanya di bawah suhu kritis momen magnetik spontan dapat muncul sedangkan di atas suhu kritis tidak dapat.

- Buktikan bahwa sedikit di bawah suhu kritis momen magnetik spontan mendekati persamaan aproksimasi $M \approx M_o \sqrt{1 - T/T_C}$. Gunakan aproksimasi x sangat kecil untuk fungsi $\tanh x$ dan mempertimbangkan sifat magnetisasi spontan yang mendekati nol ketika suhu mendekati suhu kritis.
 - Buktikan pula bahwa pada suhu mendekati nol, magnetisasi dapat diaproksimasi dengan $M \approx M_o(1 - 2e^{-2T_C/T})$. Gunakan aproksimasi x sangat besar untuk fungsi $\tanh x$ dan mempertimbangkan sifat magnetisasi spontan yang mendekati M_o ketika suhu mendekati nol.
3. Misalkan suatu kristal memiliki N site normal dan N_I site interstisial. Perlihatkan jumlah cara menyusun N_f atom di dalam site interstisial dan $N - N_f$ atom dalam site normal adalah
- $$W = \frac{N!}{N_f!(N - N_f)!} \frac{N_I!}{N_f!(N_I - N_f)!}$$
4. Misalkan E_f adalah energi yang diperlukan untuk memindahkan atom dari site normal ke site interstisial, entropi didefinisikan sebagai $S = k \ln W$, energi dalam Kristal (relatif terhadap keadaan normal) $E = N_f E_f$, serta energi bebas Helmholtz memenuhi $F = U - TS$, buktikan bahwa energi bebas minimum jika
- $$\frac{(N - N_f)(N_I - N_f)}{N_f^2} = e^{E_f/kT}$$
5. Jika n adalah konsentrasi molekul di permukaan bumi, M adalah massa molekul, dan g adalah percepatan gravitasi bumi, perlihatkan bahwa pada suhu konstan jumlah total molekul di atmosfer adalah

$$N = 4\pi n(R) \exp[-MgR/kT] \int_R^\infty dr r^2 \exp[MgR^2/krT]$$

Di mana r diukur dari pusat bumi, R adalah jari-jari bumi.

6. Sebuah silinder dengan jari-jari R berotasi terhadap sumbunya dengan kecepatan sudut ω . Silinder tersebut mengandung gas idean dengan massa atom M dan berada pada suhu T . Carilah ungkapan yang menyatakan kebergantungan konsentrasi terhadap jarak dari pusat silinder dengan mengambil $n(0)$ sebagai konsentrasi di pusat silinder.

Bab 10

Aplikasi Statistik Bose-Einstein

Isi Bab ini. Bab ini berisi contoh aplikasi statistik Bose-Einstein pada sejumlah assembli sederhana yang mengandung boson dan beberapa perbandingan ramalan menggunakan statistik ini dengan data pengamatan.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami beberapa aplikasi statistik Bose-Einstein pada sejumlah assembli boson dan perbandingan hasil ramalan tersebut dengan data pengamatan.

Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Untuk memahami aplikasi statistik Bose-Einstein mahasiswa perlu memahami prinsip dasar statistik Bose-Einstein, kerapatan keadaan kuantum dan beberapa teknik integral.

10.1 Radiasi Benda Hitam

Setelah mempelajari beberapa aplikasi statistik Maxwell-Boltzmann pada bab sebelumnya, pada bab ini kita akan mempelajari beberapa aplikasi statistik Bose-Einstein. Statistik ini diterapkan pada assembli boson, yaitu partikel kuantum dengan spin yang merupakan kelipatan bulat dari \hbar . Contoh boson adalah foton, fonon, dan atom helium.

Mari kita awali dengan membahas satu topik yang sangat populer dalam fisika yaitu radiasi benda hitam. Teori tentang radiasi benda hitam menandai awal lahirnya mekanika kuantum dan fisika modern. Benda hitam merupakan penyerap sekaligus pemancar kalor terbaik sekaligus pemancar kalor ter-

baik. Benda hitam dapat dianalogikan sebagai kotak yang berisi gas foton. Jumlah foton dalam kotak tidak selalu konstan. Ada kalanya foton diserap oleh atom-atom yang berada di dinding kotak dan sebaliknya atom-atom di dinding kotak dapat memancarkan foton ke dalam ruang kotak. Karena jumlah foton yang tidak konstan ini maka faktor Bose-Einstein untuk gas foton adalah $1/(e^{E/kT} - 1)$, yang diperoleh dengan menggunakan $\alpha = 0$.

Foton adalah kuantum gelombang elektromagnetik. Eksistensi foton direpresentasikan oleh keberadaan gelombang berdiri dalam kotak. Kerapatan kedaan gelombang berdiri dalam kotak tiga dimensi telah kita turunkan dalam Bab 7, yang terungkap dalam persamaan (7.25) yaitu $4\pi d\lambda/\lambda^4$. Karena gelombang elektromagneik memiliki dua kemungkinan arah osilasi (polarisasi) yang saling bebas, maka kerapatan kedaan foton dalam kotak merupakan dua kali kerapatan gelombang stasioner, yaitu

$$g(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda \quad (10.1)$$

Dengan demikian, jumlah foton dengan panjang gelombang antara λ sampai $\lambda + d\lambda$ adalah

$$n(\lambda)d\lambda = \frac{g(\lambda)d\lambda}{e^{E/kT} - 1} \quad (10.2)$$

Karena energi satu foton adalah $E = hc/\lambda$ maka energi foton yang memiliki panjang gelombang antara λ sampai $\lambda + d\lambda$ adalah

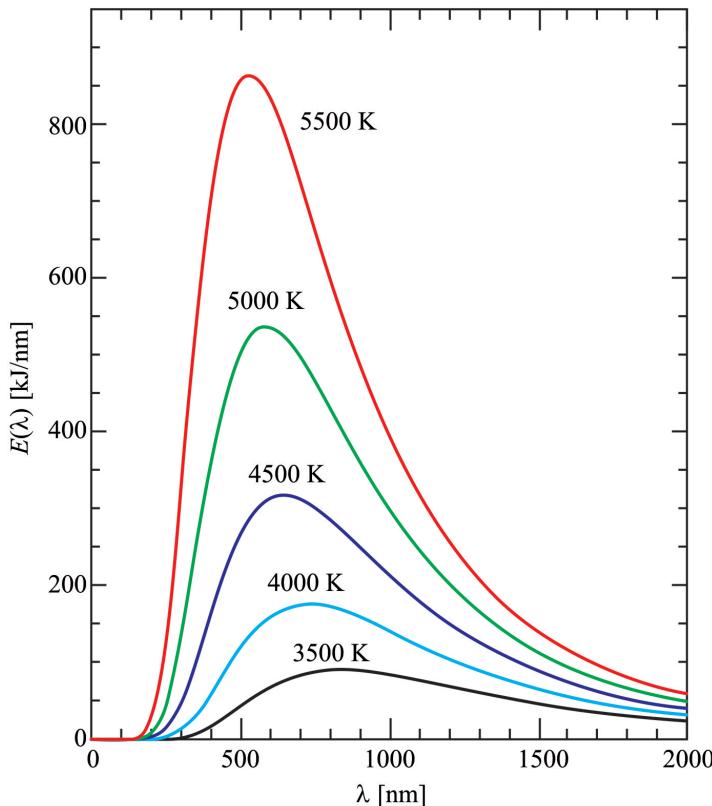
$$\begin{aligned} E(\lambda)d\lambda &= \frac{hc}{\lambda}n(\lambda)d\lambda \\ &= \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \end{aligned} \quad (10.3)$$

Hukum Pergeseran Wien

Gambar 10.1 adalah plot $E(\lambda)$ sebagai fungsi λ pada berbagai suhu. Tampak bahwa $E(\lambda)$ mula-mula naik, kemudian turun setelah mencapai nilai maksimum pada panjang gelombang λ_m . Berapakah λ_m ? Kita dapat menentukan λ_m dengan mendiferensial $E(\lambda)$ terhadap λ dan menyamakan λ dengan λ_m , atau

$$\left. \frac{dE(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_m} = 0 \quad (10.4)$$

Berdasarkan persamaan (10.3) maka



Gambar 10.1: Spektrum radiasi benda hitam pada berbagai suhu.

$$E(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (10.5)$$

Untuk memudahkan diferensiasi persamaan (10.5) persamaan di atas kita misalkan $x = \lambda kT/hc$. Dengan permisalan tersebut maka kita dapat menulis

$$E(\lambda) = 8\pi hc \left(\frac{kT}{hc} \right)^5 \frac{1}{x^5 (e^{1/x} - 1)} \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dE(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{dE(\lambda)}{dx} \frac{dx}{d\lambda} \\
 &= \frac{kT}{hc} \frac{dE(\lambda)}{dx} \\
 &= \left(\frac{kT}{hc} \right) 8\pi hc \left(\frac{kT}{hc} \right)^5 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^5 (e^{1/x} - 1)} \right)
 \end{aligned} \tag{10.7}$$

Agar terpenuhi $dE/d\lambda = 0$ maka pada persamaan (10.7) harus terpenuhi

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^5 (e^{1/x} - 1)} \right) = 0 \tag{10.8}$$

Jika kalian lakukan diferensiasi secara seksama akan dapatkan hubungan berikut ini.

$$(1 - 5x) e^{1/x} - 5 = 0 \tag{10.9}$$

Nilai x pada persamaan (10.9) dapat diselesaikan dengan berbagai cara. Jika kita menggunakan instruksi **Mathematica** (**Wolfram Research**), maka solusi untuk x yang memenui persamaan (10.9) adalah 0,194197. Dengan demikian, λ_m memenuhi hubungan

$$\frac{\lambda_m k T}{hc} = 0,194197$$

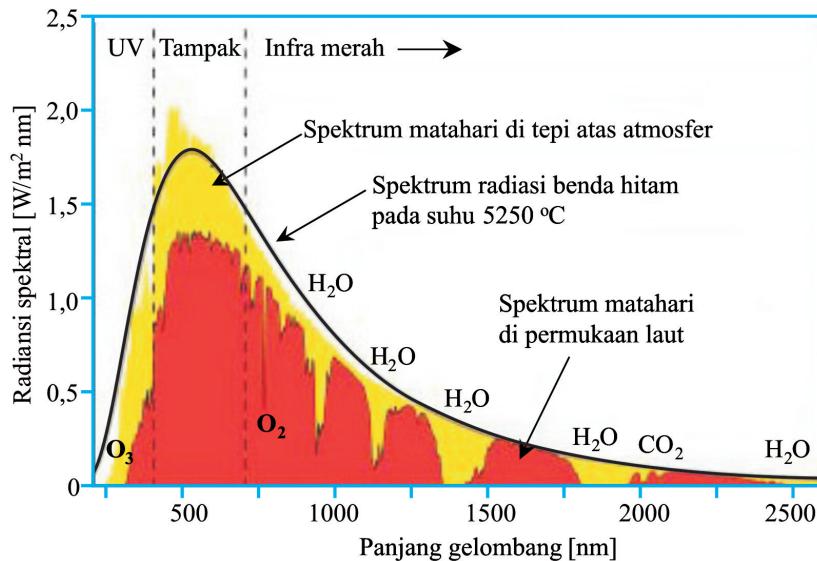
atau

$$\lambda_m T = 0,194197 \frac{hc}{k} \tag{10.10}$$

Dengan menggunakan nilai konstanta $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K, $h = 6,625 \times 10^{-34}$ J s, dan $c = 3 \times 10^8$ m/s maka kita peroleh

$$\lambda_m T = 2,8 \times 10^{-3} \text{mK} \tag{10.11}$$

Persamaan (10.11) tidak lain daripada ungkapan hukum pergeseran Wien. Hukum ini menjelaskan hubungan antara suhu benda dengan gelombang dengan intensitas maksimum yang dipancarkan benda tersebut. Makin tinggi suhu benda maka makin pendek gelombang yang dipancarkan benda tersebut, atau warna benda bergeser ke arah biru. Ketika pandai besi memanaskan logam maka warna logam berubah secara terus menurun dari semula merah, kuning, hijau dan selanjutnya ke biru-biruan. Ini akibat suhu benda yang semakin tinggi.

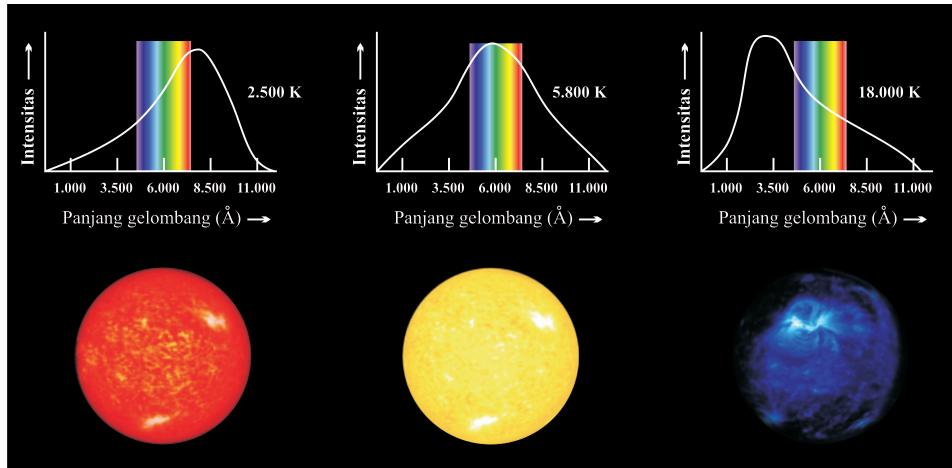


Gambar 10.2: Spektrum energi radiasi matahari berdasarkan hasil pengukuran dan prediksi dengan persamaan radiasi benda hitam (garis).

Hukum pergeseran Wien telah dipakai untuk memperkirakan suhu benda berdasarkan spektrum elektromagnetik yang dipancarkannya. Energi yang dipancarkan benda diukur pada berbagai panjang gelombang. Kemudian intensitas tersebut diplot terhadap panjang gelombang sehingga diperoleh panjang gelombang yang memiliki intensitas terbesar. Panjang gelombang ini selanjutnya diterapkan pada hukum pergeseran Wien guna memprediksi suhu benda. Gambar 10.2 adalah pengamatan spektrum radiasi matahari di sisi atas atmosfer dan di permukaan laut. Kurva radiasi benda hitam juga dilukiskan. Tampak bahwa radiasi matahari cocok dengan kurva benda hitam yang memiliki suhu 5250 °C. Para astronom memperkirakan suhu bintang-bintang berdasarkan spektrum energi yang dipancarkan oleh bintang-bintang tersebut. Gambar 10.3 adalah contoh spektrum yang dipancarkan bintang-bintang yang memiliki warna yang berbeda-beda.

Persamaan Stefan-Boltzmann

Sebuah benda hitam memancarkan gelombang elektromagnetik pada semua jangkauan frekuensi dari nol sampai tak berhingga. Hanya intensitas gelombang yang dipancarkan berbeda-beda. Ketika panjang gelombang menuju



Gambar 10.3: Warna bintang menginformasikan suhu bintang. Makin menuju ke warna biru maka suhu bintang making tinggi. Sebaliknya makin menuju ke warna merah maka suhu bintang makin rendah.

nol, intensitas yang dipancarkan menuju nol. Juga ketika panjang gelombang menuju tak berhingga, intensitas yang dipancarkan juga menuju tak berhingga. Intensitas gelombang yang dipancarkan mencapai maksimum pada saat $\lambda = \lambda_m$. Sekarang kita akan menghitung energi total yang dipancarkan oleh benda hitam. Energi total tersebut diperoleh dengan mengintegralkan persamaan (10.3) dari panjang gelombang nol sampai tak berhingga, yaitu

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\infty} E(\lambda) d\lambda \\ &= 8\pi hc \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \end{aligned} \tag{10.12}$$

Untuk menyelesaikan integral (10.12) mari kita misalkan $y = hc/\lambda kT$.

Dengan permisalan tersebut maka diperoleh ungkapan-ungkapan berikut ini

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} &= \frac{kT}{hc}y \\ \frac{1}{\lambda^5} &= \left(\frac{kT}{hc}\right)^5 y^5 \\ \lambda &= \frac{hc}{kT} \frac{1}{y} \\ d\lambda &= -\frac{hc}{kT} \frac{1}{y^2} dy\end{aligned}$$

Sekarang kita tentukan syarat batas yang berlaku bagi y . Saat $\lambda = 0$ maka $y = \infty$ dan saat $\lambda = \infty$ maka $y = 0$. Dengan demikian, dalam variable y integral (10.12) menjadi

$$\begin{aligned}E &= 8\pi hc \int_{\infty}^0 \left(\frac{kT}{hc}\right)^5 y^5 \frac{(-hc/kTy^2)dy}{e^y - 1} \\ &= 8\pi hc \left(\frac{kT}{hc}\right)^5 \left(\frac{hc}{kT}\right) \int_{\infty}^0 -\frac{y^3 dy}{e^y - 1} \\ &= 8\pi hc \left(\frac{kT}{hc}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{y^3 dy}{e^y - 1}\end{aligned}\tag{10.13}$$

Persamaan (10.13) merupakan kerapatan energi foton di dalam kotak. Hubungan antara kerapatan energi yang diradasi dengan energi foton dalam kotak adalah

$$\begin{aligned}E_{rad} &= \frac{c}{4} E \\ &= 2\pi hc^2 \left(\frac{kT}{hc}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{y^3 dy}{e^y - 1} \\ &= \left[2\pi hc^2 \left(\frac{k}{hc}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{y^3 dy}{e^y - 1} \right] T^4\end{aligned}\tag{10.14}$$

Persamaan (10.14) sangat mirip dengan persamaan Stefan-Boltzman tentang energi yang diradiasi benda hitam, yaitu $E_{rad} = \sigma T^4$ dengan σ konstanta

Stefan-Boltzmann. Jadi, pada persamaan (10.14) kita dapat menyamakan

$$\sigma = 2\pi hc^2 \left(\frac{k}{hc}\right)^4 \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y - 1} \quad (10.15)$$

Dengan menggunakan instruksi Matematika sederhana kita dapatkan

$$\int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y - 1} = 6,49394$$

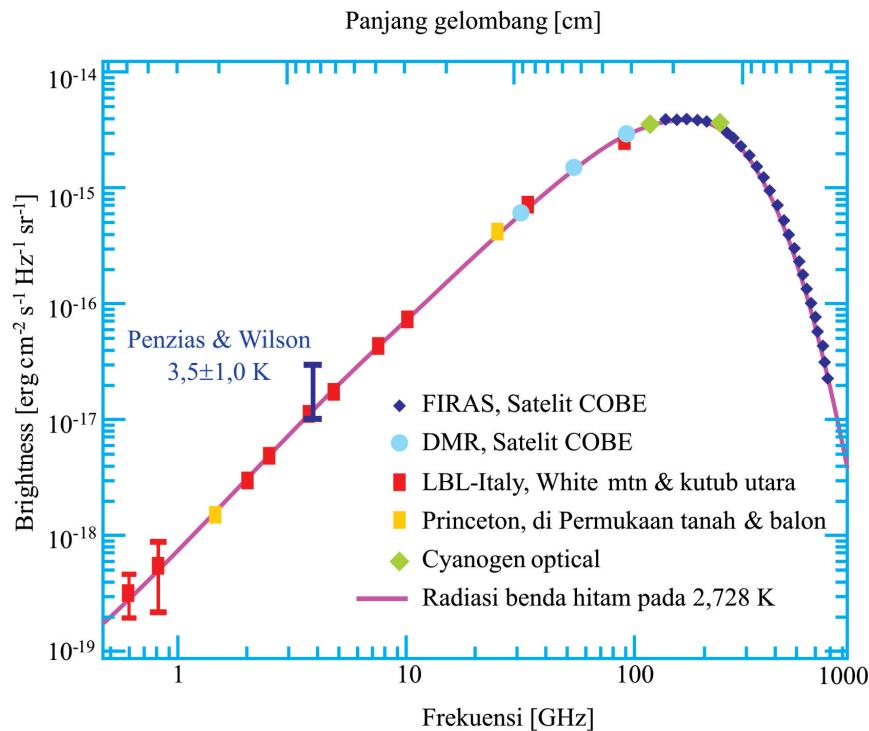
Selanjutnya, dengan memasukkan nilai konstanta-konstanta lain $k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K, $= 6,625 \times 10^{-34}$ Js, dan $c = 3 \times 10^8$ m/s kita dapatkan nilai konstanta Stefan-Boltzmann

$$\sigma = 5,65 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$$

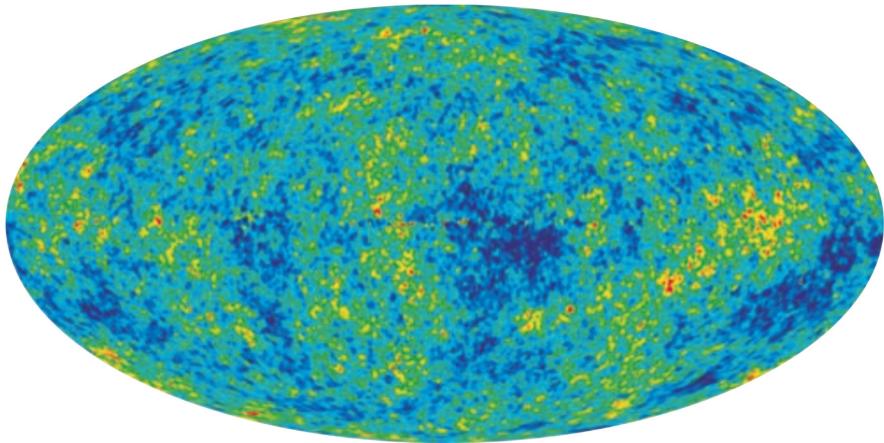
Cosmic Microwave Background (CMB)

Salah satu gejala penting sebagai hasil peristiwa **Big Bang** adalah keberadaan radiasi yang bersifat isotropik (sama ke segala arah) di alam semesta dalam panjang gelombang mikro. Gejala ini selanjutnya dikenal dengan **cosmic microwave background (CMB)**. Radiasi ini benar-benar isotropik. Penyimpangan dari sifat isotropic hanya sekitar seper seribu. Dua astronom muda, Arno Penzias and Robert Wilson yang pertama kali mengidentifikasi gejala ini tahun 1965 dengan menggunakan *antene horn* yang dikalibrasi dengan sangat teliti. Dengan anggapan bahwa alam semesta berupa benda hitam sempurna dan setelah dilakukan pengukuran yang teliti intensitas radiasi gelombang mikro ini pada berbagai panjang gelombang yang mungkin, selanjutnya hasil pengukuran di-fit dengan persamaan radiasi benda hitam (Gbr. 10.4) disimpulkan bahwa suhu rata-rata alam semesta sekarang adalah $2,725^\circ\text{K}$.

Ada sedikit variasi suhu pada arah yang berbeda seperti ditunjukkan dalam Gbr 10.5. Bagian berwarna merah sedikit lebih panas dan bagian berwarna biru sedikit lebih dingin dengan penyimpangan sekitar 0,0002 derajat.



Gambar 10.4: Fitting data CMB dengan persamaan radiasi benda hitam (<http://ircamera.as.arizona.edu/>).



Gambar 10.5: Sedikit variasi suhu alam semesta berdasarkan posisi (<http://www.floraberlin.de/soundbag/sbimages/rauschen.jpg>).

10.2 Kapasitas Panas Kristal

Dalam kristal atom-atom bervibrasi. Jika diselesaikan dengan mekanika kuantum maka energi vibrasi atom-atom dalam kristal terkuantisasi. Kuantisasi getaran atom tersebut disebut fonon. Energi fonon dengan bilangan kuantum n adalah $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$. Karena jumlah fonon tidak konstan maka fungsi distribusi untuk fonon diperoleh dengan mengambil $\alpha = 0$. Fungsi distribusi tersebut persis sama dengan fungsi distribusi untuk foton.

Karena frekuensi fonon umumnya merupakan fungsi bilangan gelombang, κ , maka secara umum energi total yang dimiliki fonon dalam kristal dapat dituliskan

$$U = \sum_{\kappa} \frac{\hbar\omega(\kappa)}{\exp[\hbar\omega(\kappa)/kT] - 1} \quad (10.16)$$

Jika fonon memiliki sejumlah polarisasi dan polarisasi ke- p memiliki $\omega_p(\kappa)$ frekuensi, maka energi total fonon setelah memperhitungkan polarisasi tersebut adalah

$$U = \sum_p \sum_{\kappa} \frac{\hbar\omega_p(\kappa)}{\exp[\hbar\omega_p(\kappa)/kT] - 1} \quad (10.17)$$

Penjumlahan terhadap κ dilakukan dengan asumsi bahwa κ adalah integer. Tetapi jika κ adalah variabel kontinu maka penjumlahan terhadap dapat

diganti dengan innegral dengan melakukan transformasi berikut ini

$$\sum_{\kappa} \rightarrow \int g_p(\kappa) d\kappa \quad (10.18)$$

Tetapi, karena ω merupakan fungsi κ maka kita dapat mengubah integral terhadap κ menjadi integral terhadap ω dengan melakukan transformasi

$$\sum_{\kappa} \rightarrow \int g_p(\kappa) d\kappa \rightarrow \int g_p(\omega) d\omega \quad (10.19)$$

Akhirnya kita dapat menulis ulang persamaan (10.17) menjadi

$$U = \sum_p \int g_p(\omega) \frac{\hbar\omega}{\exp[\hbar\omega/k_B T] - 1} d\omega \quad (10.20)$$

Dari definisi energi dalam dalam persamaan (10.20) maka kita dapat menentukan kapasitas panas yang didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{dU}{dT} \\ &= \frac{d}{dT} \sum_p \int g_p(\omega) \frac{\hbar\omega}{\exp[\hbar\omega/kT] - 1} d\omega \\ &= \sum_p \int g_p(\omega) \frac{d}{dT} \left\{ \frac{1}{\exp[\hbar\omega/kT] - 1} \right\} \hbar\omega d\omega \end{aligned} \quad (10.21)$$

Untuk menyederhanakan persamaan (10.21) mari kita lihat suku diferensial dalam persamaan tersebut. Untuk mempermudah kita misalkan $y = \hbar\omega/kT$. Dengan permisalan tersebut maka

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} &= \frac{d}{dy} \frac{dy}{dT} = -\frac{\hbar\omega}{kT^2} \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dT} \left\{ \frac{1}{\exp[\hbar\omega/kT] - 1} \right\} &= \frac{d}{dT} \left\{ \frac{1}{e^y - 1} \right\} = -\frac{\hbar\omega}{kT^2} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{e^y - 1} \right\} \\ &= -\frac{\hbar\omega}{kT^2} \left\{ \frac{-e^y}{(e^y - 1)^2} \right\} = \frac{\hbar\omega}{kT^2} \frac{e^y}{(e^y - 1)^2} \\ &= \frac{\hbar\omega}{kT^2} \frac{\exp[\hbar\omega/kT]}{(\exp[\hbar\omega/kT] - 1)^2} \end{aligned}$$

Dengan demikian, kapasitas panas dapat ditulis

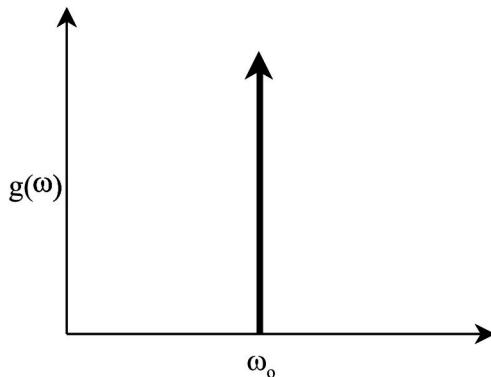
$$\begin{aligned} C_v &= \sum_p \int g_p(\omega) \left\{ \frac{\hbar\omega}{kT^2} \frac{\exp[\hbar\omega/kT]}{(\exp[\hbar\omega/kT] - 1)^2} \right\} \hbar\omega d\omega \\ &= \frac{\hbar^2}{kT^2} \sum_p \int g_p(\omega) \frac{\exp[\hbar\omega/kT]}{(\exp[\hbar\omega/kT] - 1)^2} \omega^2 d\omega \end{aligned} \quad (10.22)$$

Model Einstein

Untuk mencari kapasitas panas kristal, Einstein mengusulkan model bahwa semua fonon berosilasi dengan frekuensi karakteristik yang sama, ω_o . Dengan asumsi ini maka dapat kita tulis

$$g_p(\omega) = N\delta(\omega - \omega_o) \quad (10.23)$$

di mana $\delta(\omega - \omega_o)$ merupakan fungsi delta Dirac. Gambar 10.6 adalah kurva



Gambar 10.6: Kurva kerapatan keadaan fonon model Einstein.

kerapatan keadaan fonon berdasarkan model Einstein.

Dengan model ini kita dapatkan kapasitas panas kristal untuk satu macam

polarisasi saja sebesar

$$\begin{aligned}
 C_v &= \frac{\hbar^2}{kT^2} \int g(\omega) \frac{\exp[\hbar\omega/kT]}{(\exp[\hbar\omega/kT] - 1)^2} \omega^2 d\omega \\
 &= \frac{\hbar^2}{kT^2} \int N\delta(\omega - \omega_o) \frac{\exp[\hbar\omega/kT]}{(\exp[\hbar\omega/kT] - 1)^2} \omega^2 d\omega \\
 &= \frac{N\hbar^2}{kT^2} \frac{\exp[\hbar\omega_o/kT]}{(\exp[\hbar\omega_o/kT] - 1)^2} \omega_o^2
 \end{aligned} \tag{10.24}$$

Untuk kristal 3 dimensi, terdapat tiga arah polarisasi fonon yang mungkin (arah sumbu x , y , dan z). Dengan menganggap bahwa ke tiga polarisasi tersebut memberikan sumbangan energi yang sama besar maka kapasitas panas total menjadi tiga kali dari yang tampak dalam persamaan (10.24), yaitu menjadi

$$C_v = \frac{3N\hbar^2}{kT^2} \frac{\exp[\hbar\omega_o/kT]}{(\exp[\hbar\omega_o/kT] - 1)^2} \omega_o^2 \tag{10.25}$$

Sekarang kita tinjau kasus-kasus khusus, yaitu ketika $T \rightarrow 0$ dan $T \rightarrow \infty$. Dalam kondisi $T \rightarrow 0$ maka $\exp[\hbar\omega_o/kT] \gg 1$ sehingga $\exp[\hbar\omega_o/kT] - 1 \rightarrow \exp[\hbar\omega_o/kT]$. Akibatnya

$$\begin{aligned}
 C_v &\approx \frac{3N\hbar^2}{kT^2} \frac{\exp[\hbar\omega_o/kT]}{(\exp[\hbar\omega_o/kT])^2} \omega_o^2 \\
 &= \frac{3N\hbar^2\omega_o^2}{kT^2} e^{-\hbar\omega_o/kT}
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

Perhatikan bahwa suku pembilang dan penyebut pada persamaan (10.26). Jika $T \rightarrow 0$ maka suku penyebut $T^2 \rightarrow 0$ dan suku pembilang $\exp[-\hbar\omega_o/kT] \rightarrow 0$. Tetapi suku pembilang menuju nol jauh lebih cepat daripada suku penyebut. Dengan demikian $C_v \rightarrow 0$ jika $T \rightarrow 0$. Untuk kasus sebaliknya, yaitu $T \rightarrow \infty$ maka $\hbar\omega_o/kT \rightarrow 0$ kita dapat mengaproksimasi

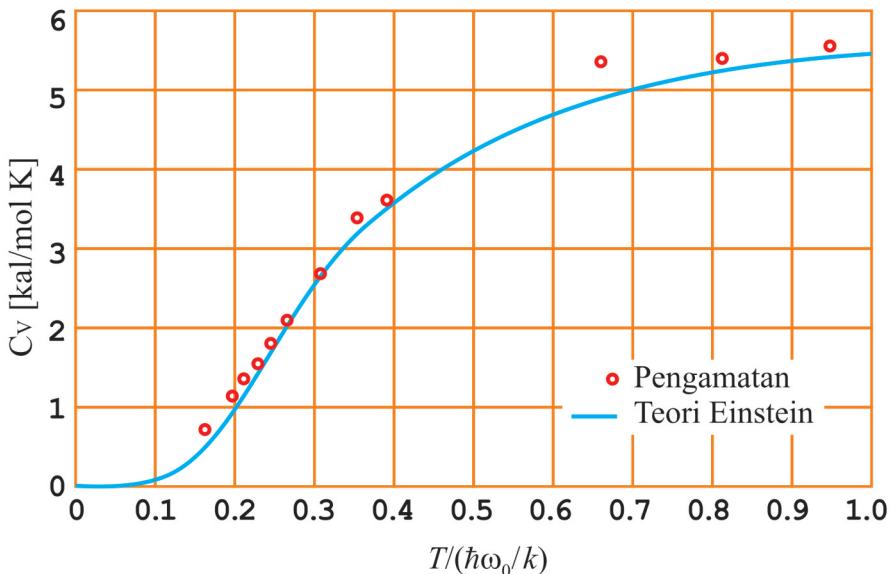
$$\exp[\hbar\omega_o/kT] \approx 1 + \frac{\hbar\omega_o}{kT}$$

Dengan aproksimasi ini maka persamaan (10.25) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 C_v &\approx \frac{3N\hbar^2}{kT^2} \frac{1 + \hbar\omega_o/kT}{(1 + \hbar\omega_o/kT - 1)^2} \omega_o^2 \\
 &\approx \frac{3N\hbar^2}{kT^2} \left(\frac{kT}{\hbar\omega_o}\right)^2 \omega_o^2 \\
 &= 3Nk = 3(nN_A)k \\
 &= 3n(N_A k) = 3nR
 \end{aligned} \tag{10.27}$$

dengan N_A bilangan Avogadro, n jumlah mol dan $R = N_A k_B$ konstanta gas umum. Hasil ini persis sama dengan teori klasik dari Dulong-Petit bahwa kapasitas panas per satuan mol semua padatan adalah konstan, yaitu $3R$.

Gambar 10.7 adalah perbandingan hasil pengamatan kapasitas panas intan (simbol) dan prediksi dengan model Einstein. Terdapat kesesuaian yang baik antara prediksi model tersebut dengan pengamatan, khususnya nilai kapasitas panas yang menuju nol jika suhu menuju nol dan nilai kapasitas panas menuju konstanta Dulong-Petit pada suhu tinggi.



Gambar 10.7: Kapasitas panas intan yang diperoleh dari pengamatan (simbol) dan prediksi menggunakan model kapasitas panas Einstein (kurva).

Model Einstein dapat menjelaskan dengan baik kebergantungan kapa-

sitas panas terhadap suhu. Sesuai dengan pengamatan eksperimen bahwa pada suhu menuju nol kapasitas panas menuju nol dan pada suhu sangat tinggi kapasitas panas menuju nilai yang diramalkan Dulong-Petit. Tetapi, masih ada sedikit penyimpangan antara data eksperimen dengan ramalan Einstein. Pada suhu yang menuju nol, hasil eksperimen memperlihatkan bahwa kapasitas panas berubah sebagai fungsi kubik (pangkat tiga) dari suhu, bukan seperti pada persamaan (10.26). Oleh karena itu perlu penyempurnaan pada model Einstein untuk mendapatkan hasil yang persis sama dengan eksperimen.

Model Debye

Salah satu masalah yang muncul dalam model Einstein adalah asumsi bahwa semua fonon bervibrasi dengan frekuensi yang sama. Tidak ada justifikasi untuk asumsi ini. Asumsi ini digunakan semata-mata karena kemudahan mendapatkan solusi. Oleh karena ini hasil yang lebih tepat diharapkan muncul jika dianggap frekuensi fonon tidak seragam. Asumsi ini digunakan oleh Debye untuk membangun teori kapasitas panas yang lebih teliti. Namun, sebelum masuk ke teori Debye kita akan terlebih dahulu membahas kerapatan keadaan untuk kisi dalam usaha mencari ekspresi yang tepat untuk $g(\omega)$.

Frekuensi getaran kisi dalam kristal secara umum tidak konstan, tetapi bergantung pada bilangan gelombang. Persamaan yang menyatakan kebergantungan frekuensi dengan bilangan gelombang dinamakan persamaan dispersi, $\omega = \omega(\kappa)$. Dari persamaan dispersi tersebut dapat diturunkan persamaan kerapatan keadaan (dibahas di kuliah zat padat) sebagai berikut

$$g(\omega) = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\kappa^2}{d\omega/d\kappa} \quad (10.28)$$

Kebergantungan ω terhadap κ kadang sangat kompleks. Sebagai contoh, untuk kristal satu dimensi, kita peroleh persamaan dispersi $\omega = \sqrt{(2C/m)(1 - \cos \kappa a)}$, dengan m massa atom, C konstanta pegas getaran kisi, dan a jarak antar atom dalam kisi (periodisitas). Namun, jika κ sangat kecil, atau panjang gelombang yang besar ($\kappa = 2\pi/\lambda$), kita dapatkan sebuah persamaan aproksimasi

$$\omega = v_g \kappa \quad (10.29)$$

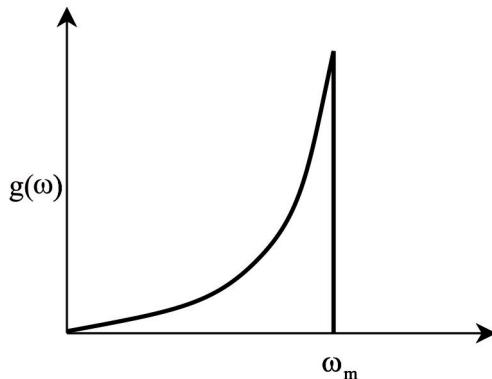
dengan v_g disebut kecepatan grup. Dalam membangun model kapasitas panas, Debye mengambil asumsi sebagai berikut:

- i) Frekuensi getaran kisi memenuhi persamaan dispersi $\omega = v_g \kappa$
- ii) Ada sebuah frekuensi maksimum, ω_m , yang boleh dimiliki fonon dalam kristal sehingga tidak ada fonon yang memiliki frekuensi di atas ω_m .

Dari persamaan dispersi (10.29) kita dapatkan bahwa untuk $\omega \leq \omega_m$, dan $\frac{d\omega}{d\kappa} = v_g$ sehingga kerapatan keadaan pada persamaan (10.28) menjadi $g(\omega) = V\omega^2/2\pi v_g^3$. Akhirnya jika digabung dengan asumsi kedua tentang adanya frekuensi maksimum getaran fonon diperoleh ungkapan umum untuk kerapatan keadaan sebagai berikut

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{V}{2\pi v_g^3} \omega^2, & \omega \leq \omega_m \\ 0 & \omega > \omega_m \end{cases} \quad (10.30)$$

Gambar 10.8 adalah kurva kerapatan keadaan fonon model Debye seperti yang diberikan persamaan (10.30).



Gambar 10.8: Kurva kerapatan keadaan fonon model Debye.

Berapa nilai ω_m pada model Debye? Untuk menentukan ω_m kita kembali kepada definisi bahwa $g(\omega)$ adalah jumlah keadaan per satuan frekuensi. Karena frekuensi maksimum fonon adalah ω_m maka integral $g(\omega)$ dari frekuensi 0 sampai ω_m memberikan jumlah total keadaan yang dimiliki

fonon, dan itu sama dengan jumlah atom, N . Jadi

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_m} g(\omega) d\omega &= N \\ \int_0^{\omega_m} \frac{V}{2\pi v_g^3} \omega^2 d\omega &= N \\ \frac{V}{2\pi v_g^3} \int_0^{\omega_m} \omega^2 d\omega &= N \\ \frac{V}{2\pi v_g^3} \frac{\omega_m^3}{3} &= N \end{aligned}$$

yang memberikan ungkapan untuk frekuensi maksimum

$$\omega_m^3 = \frac{6\pi v_g^3 N}{V} \quad (10.31)$$

Untuk kemudahan mari kita defisisikan suhu Debye, Θ_D , berdasarkan hubungan berikut ini

$$k_B \Theta_D = \hbar \omega_m \quad (10.32)$$

Dengan definsi di atas kita dapatkan

$$\Theta_D = \frac{\hbar v_g}{k_B} \left(\frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{1/3} \quad (10.33)$$

Tabel 10.1 adalah suhu Debye sejumlah unsur.

Kita asumsikan bahwa kapasitas panas kisi yang dihasilkan oleh tiap polarisasi fonon sama besarnya. Karena terdapat tiga polarisasi getaran yang mungkin maka penjumlahan terhadap indeks p dalam persamaan (10.22) menghasilkan tiga kali nilai per polarisasi. Akibatnya, tanda sumasi dapat diganti dengan nilai tiga dan kita peroleh kapasitas panas yang disumbang-

Tabel 10.1: Suhu Debye sejumlah unsur.

Unsur	Suhu Debye, Θ_D (K)	Unsur	Suhu Debye, Θ_D (K)
Li	344	Mo	450
Be	1440	Ru	600
C	2230	Rh	480
Na	158	Pd	274
Mg	400	Ag	225
Al	428	Cd	209
Si	645	In	108
Ka	91	Sn	200
Ca	230	Sb	211
Sc	360	Te	153
Ti	420	Xe	64
V	380	Cs	38
Cr	630	Ba	110
Mn	410	La	142
Fe	470	Hf	252
Co	445	Ta	540
Ni	450	W	400
Cu	343	Re	430
Zn	327	Os	500
Ga	320	Ir	420
As	282	Pt	240
Se	90	Au	165
Rb	56	Hg	71,9
Sr	147	Tl	78,5
Y	280	Pb	105

kan oleh semua polarisasi menjadi

$$\begin{aligned}
 C_v &= 3 \frac{\hbar^2}{kT^2} \int_0^\infty g(\omega) \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^2 d\omega \\
 &= \frac{3\hbar^2}{kT^2} \int_0^{\omega_m} g(\omega) \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^2 d\omega + \frac{3\hbar^2}{kT^2} \int_{\omega_m}^\infty g(\omega) \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^2 d\omega \\
 &= \frac{3\hbar^2}{kT^2} \int_0^{\omega_m} \left(\frac{V}{2\pi v_g^3} \omega^2 \right) \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^2 d\omega \\
 &\quad + \frac{\hbar^2}{kT^2} \int_{\omega_m}^\infty (0) \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^2 d\omega \\
 &= \frac{3\hbar^2 V}{2\pi v_g^3 kT^2} \int_0^{\omega_m} \frac{e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2} \omega^4 d\omega
 \end{aligned} \tag{10.34}$$

Untuk menyelesaikan integral pada persamaan (10.34) kita misalkan $x = \hbar\omega/kT$. Dengan permisalan tersebut maka

$$\omega = \frac{kT}{\hbar} x$$

$$d\omega = \frac{kT}{\hbar} dx$$

Selanjutnya, syarat batas untuk x ditentukan sebagai berikut. Jika $\omega = 0$ maka $x = 0$ dan jika $\omega = \omega_m$ maka $x = \hbar\omega_m/kT = k\Theta_D/kT = \Theta_D/T$. Dengan demikian, bentuk integral untuk kapasitas panas menjadi

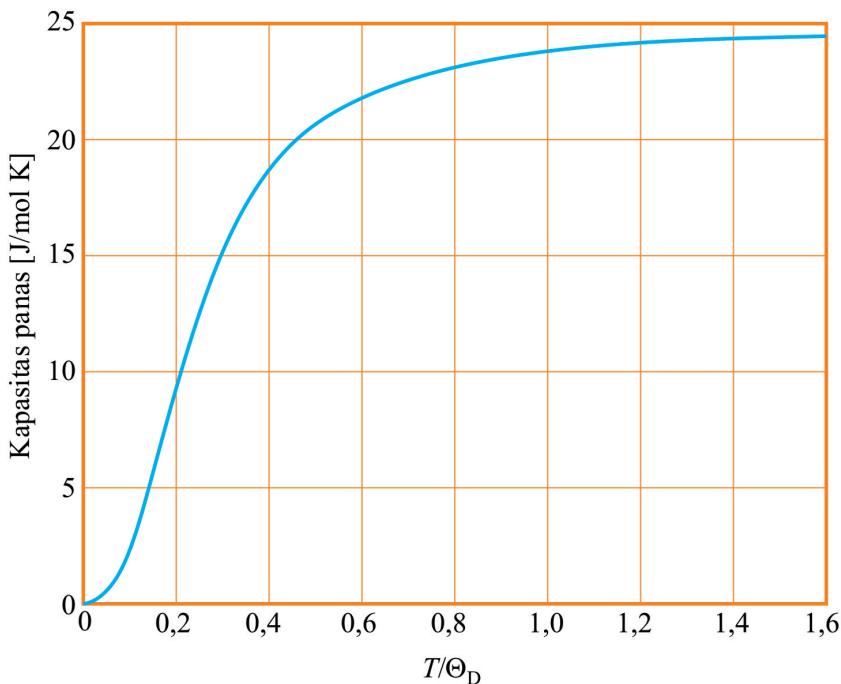
$$\begin{aligned}
 C_v &= \frac{3\hbar^2 V}{2\pi v_g^3 kT^2} \int_0^{\Theta_D/T} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \left(\frac{kT}{\hbar} x \right)^4 \frac{kT}{\hbar} dx \\
 &= \frac{3V k^4 T^3}{2\pi v_g^3 \hbar^3} \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx
 \end{aligned} \tag{10.35}$$

Berdasarkan definisi Θ_D pada persamaan (10.33) maka kita dapat menulis $\Theta_D^3 = 6\pi^2 N \hbar^3 v_g^3 / k^3 V$ atau $V k^4 T^3 / 2\pi v_g^3 \hbar^3 = 3Nk(T/\Theta_D)^3$. Substitusi

hubungan ini ke dalam persamaan (10.35) kita peroleh ungkapan kapasitas panas dalam bentuk yang lebih seberhana sebagai berikut

$$C_v = 9Nk \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (10.36)$$

Gambar 10.9 adalah plot persamaan (10.36) sebagai fungsi suhu. Bentuk kurva mirip dengan kurva Einstein, namun jika dikaji lebih teliti, terdapat perbedaan yang cukup menonjol pada daerah suhu mendekati nol. Persamaan Debye dapat menjelaskan dengan seksama kapasitas panas pada suhu mendekati nol sedangkan peramaan Einstein memberikan prediksi yang sedikit menyimpang.



Gambar 10.9: Kurva kapasitas panas Debye yang diberikan persamaan (10.36).

Selanjutnya kita tinjau beberapa kasus khusus yaitu ketika $T \rightarrow 0$ dan

$T \rightarrow \infty$. Jika $T \rightarrow 0$ maka $\Theta_D/T \rightarrow \infty$ sehingga

$$C_v \approx 9Nk \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \quad (10.37)$$

Bagian integral tidak bergantung lagi pada T dan hasil integral adalah sebuah bilangan. Jika kalian menggunakan program Mathematica, akan diperoleh hasil integral pada persamaan (10.37) adalah

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{15} \quad (10.38)$$

Dengan demikian, untuk $T \rightarrow 0$ diperoleh

$$\begin{aligned} C_v &\approx \frac{9\pi^2 Nk}{15} \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \\ &= AT^3 \end{aligned} \quad (10.39)$$

dengan

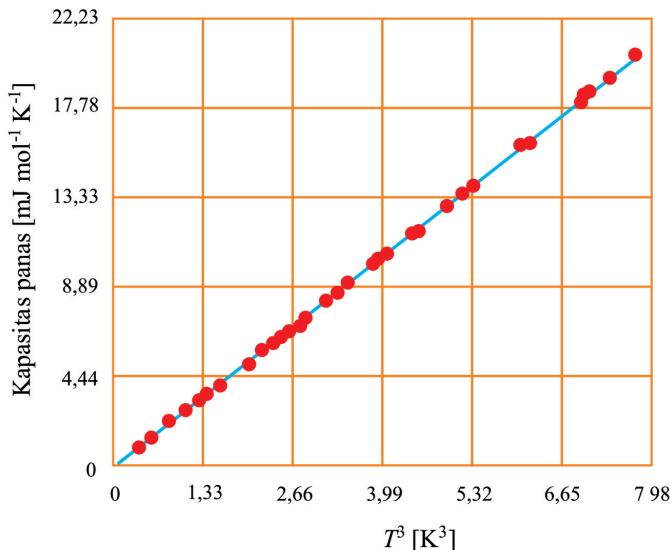
$$A \approx \frac{9\pi^2 Nk}{15\Theta_D^3} \quad (10.40)$$

Sebaliknya, untuk $T \rightarrow \infty$ maka penyebut pada persamaan (10.36) dapat diaproksimasi $e^x - 1 \approx x$ dan pada pembilang dapat diaproksimasi $e^x \approx 1$ sehingga

$$\begin{aligned} C_v &\approx 9Nk \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^4}{(x)^2} dx \\ &= 9Nk \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\Theta_D/T} x^2 dx = 9Nk \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \frac{1}{3} \left(\frac{\Theta_D}{T} \right)^3 \\ &= 3Nk \end{aligned} \quad (10.41)$$

yang juga persis sama dengan ramalan Dulong-Petit.

Gambar 10.10 adalah hasil pengukuran kapasitas panas argon padat (titik-titik) beserta kurva yang diperoleh menggunakan model Debye. Tam-pak bahwa ramalan Debye tentang kebergantungan kapasitas panas pada pangkat tiga suhu sangat sesuai dengan hasil pengamatan.



Gambar 10.10: Kapasitas panas argon padat diukur pada suhu jauh di bawah suhu Debye. Garis adalah hasil perhitungan menggunakan teori Debye (Kittel, hlm 125).

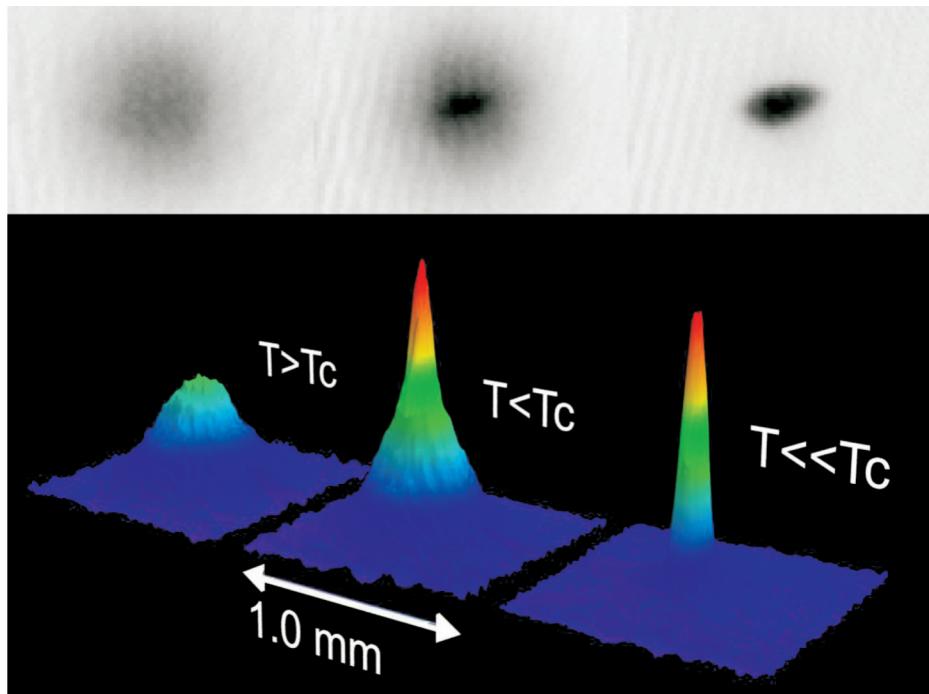
10.3 Kondensasi Bose-Einstein

Kita kembali melihat bentuk fungsi distribusi BE. Jumlah sistem yang menempati keadaan dengan energi E_n pada suhu T adalah

$$n(E_n, T) = \frac{1}{\exp(E_n - \mu)/kT - 1} \quad (10.42)$$

Tampak jelas dari ungkapan di atas bahwa pada suhu yang sangat rendah sistem-sistem akan terkonsentrasi di keadaan-keadaan dengan energi sangat rendah. Jika $T \rightarrow 0$ maka jumlah sistem yang menempati tingkat energi paling rendah, tingkat energi kedua, ketiga, dan seterusnya makin dominan. Jumlah sistem yang menempati keadaan-keadaan dengan nilai energi tinggi makin dapat diabaikan. Hampir semua sistem akan berada pada tingkat energi terendah jika suhu didinginkan hingga dalam orde 10^{-14} K.

Namun, ada fenomena yang menarik di sini. Ternyata untuk boson, keadaan dengan energi terendah dapat ditempati oleh sistem dalam jumlah yang sangat besar pada suhu yang jauh lebih tinggi dari 10^{-14} K. **Dengan kata lain, boson tidak perlu menunggu suhu serendah 10^{-14} K**



Gambar 10.11: Salah satu hasil pengukuran yang membuktikan fenomena kondensasi Bose-Einstein (http://cua.mit.edu/ketterle_group/Popular_papers/BEC_three_peaks.jpg).

untuk mendapatkan sistem dalam jumlah yang sangat besar pada tingkat energi terendah. Pada beberapa material, seperti helium, jumlah sistem yang sangat besar pada tingkat energi terendah dapat diamati pada suhu setinggi 3 K. Jadi terjadi semacam kondensasi boson pada suhu yang jauh lebih tinggi dari prediksi klasik. Fenomena ini dikenal dengan **kondensasi Bose-Einstein**. Bagaimana menjelaskan fenomena kondensasi ini? Gambar 10.11 adalah contoh pengamatan yang membuktikan keberadaan fenomena kondensasi Bose-Einstein.

Kebergantungan Potensial Kimia Pada Suhu

Mari kita tengok kembali fungsi distribusi Bose-Einstein. Untuk mudahnya kita gunakan skala energi sedemikian sehingga tingkat terendah memiliki energi $E_o = 0$. Populasi keadaan dengan tingkat energi sembarang diberikan

oleh persamaan (10.42). Jumlah populasi yang menempati tingkat energi terendah ($E_o = 0$) adalah

$$n(0, T) = \frac{1}{\exp(0 - \mu)/kT - 1} = \frac{1}{\exp(-\mu/kT) - 1} \quad (10.43)$$

Pada suhu $T \rightarrow 0$ hampir semua sistem menempati keadaan dengan energi terendah. Dengan demikian, jumlah populasi pada tingkat ini memiliki orde kira-kira sama dengan jumlah total sistem, atau

$$N \approx \lim_{T \rightarrow 0} n(0, T) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{\exp(-\mu/kT) - 1} \quad (10.44)$$

Karena nilai N sangat besar (dalam orde 10^{23}) maka ketika $T \rightarrow 0$ penyebut pada $\frac{1}{\exp(-\mu/kT) - 1}$ harus menuju nol. Sebab, jika tidak maka $\frac{1}{\exp(-\mu/kT) - 1}$ tidak akan menghasilkan nilai N yang sangat besar. Nilai $\exp(-\mu/kT) - 1$ akan menuju nol hanya jika $\exp(-\mu/kT)$ menuju satu. Fungsi eksponensial $\exp(x)$ mendekati 1 jika $x \rightarrow 0$. Jadi kita simpulkan bahwa pada $T \rightarrow 0$ akan berlaku $\mu/kT \rightarrow 0$. Dan jika $\mu/kT \rightarrow 0$ maka kita dapat melakukan aproksimasi

$$\exp(-\mu/kT) \approx 1 - \frac{\mu}{kT} \quad (10.45)$$

Jadi kita dapatkan aproksimasi berikut ini

$$N \approx \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{\exp(-\mu/kT) - 1} \approx \frac{1}{(1 - \mu/kT) - 1} = -\frac{kT}{\mu}$$

atau

$$\mu \approx -\frac{kT}{N} \quad (10.46)$$

Hubungan pada persamaan (10.46) menyatakan bahwa pada suhu $T \rightarrow 0$ maka μ berharga negatif dan merupakan fungsi linier dari suhu. Sebagai ilustrasi, pada $T = 1$ K dan $N = 10^{22}$ maka $\mu \approx -1,4 \times 10^{-38}$ erg. Ini adalah nilai yang sangat kecil. Bahkan nilai ini jauh lebih kecil daripada jarak antar dua tingkat energi terdekat dalam assembli atom helium di dalam kubus dengan sisi 1 cm. Kebergantungan μ pada suhu itulah yang menyebabkan peristiwa kondensasi Bose-Einstein.

Agar lebih memahami fenomena kondensasi Bose-Einstein, mari kita perhatikan sistem-sistem yang berada dalam kubus dengan sisi L . Tingkat-tingkat energi yang dimiliki assembli memenuhi

$$E(n_x n_y n_z) = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (10.47)$$

Tingkat energi terendah bersesuaian dengan $n_x = n_y = n_z = 1$, yaitu

$$E(111) = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (1+1+1)$$

Salah satu tingkat energi berikutnya bersesuaian dengan $n_x = n_y = 1$ dan $n_z = 2$, yaitu

$$E(112) = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (1+1+4)$$

Selisih tingkat energi terendah dan tingkat energi berikutnya adalah

$$\Delta E = E(112) - E(111) = 3 \times \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$$

Jika assembli terebut adalah atom helium ($M = 6,6 \times 10^{-24}$ g) dalam kubus dengan sisi 1 cm maka $\Delta E \cong 2,48 \times 10^{-30}$ erg.

Apabila kita prediksi populasi sistem pada tingkat energi eksitasi pertama dan tingkat energi terendah dengan menggunakan statistik Maxwell-Boltzmann adalah

$$\frac{n_1}{n_o} = \exp(-\Delta E/kT)$$

Pada suhu $T = 1$ mK maka

$$\frac{n_1}{n_o} = \exp\left(-\frac{2,48 \times 10^{-30} \text{ erg}}{k \times 10^{-3} \text{ K}}\right) \cong 1$$

Hasil di atas berarti bahwa pada suhu 1 mK, tingkat energi terendah dan eksitasi pertama memiliki populasi yang hampir sama. Namun, dengan statistik Bose-Einstein kita mendapatkan hasil yang sangat berbeda. Dengan asumsi $N = 10^{20}$ dan suhu $T = 1$ mK maka kita peroleh

$$\mu = -\frac{kT}{N} = -\frac{k \times 10^{-3}}{10^{22}} = -1,4 \times 10^{-41} \text{ erg}$$

Jumlah populasi yang menempati tingkat energi eksitasi pertama (tepat di atas tingkat energi paling rendah) adalah

$$n(E_1, T) = \frac{1}{\exp(E_1 - \mu)/kT - 1}$$

Karena $E_o = 0$ maka $E_1 = \Delta E$. Lebih lanjut, mengingat $|\mu| \ll \Delta E$ maka $E_1 - \mu \approx E_1 = \Delta E$. Dengan demikian

$$n(E_1, T) \approx \frac{1}{\exp(\Delta E/kT) - 1} = \frac{1}{\exp(2,48 \times 10^{30}/(k \times 10^{-3})) - 1} \approx 5 \times 10^{10}$$

Dengan demikian, fraksi sistem pada tingkat energi eksitasi pertama adalah

$$\frac{n(E_1)}{N} \approx \frac{5 \times 10^{10}}{10^{22}} = 5 \times 10^{-12}$$

tampak bahwa fraksi sistem pada tingkat energi eksitasi pertama amat kecil. Ini berarti bahwa sebagian besar sistem berada pada tingkat energi terendah.

Suhu Kondensasi Einstein

Sudah kita pelajari pada bab-bab sebelumnya bahwa kerapatan keadaan kuantum untuk sistem dengan spin nol dapat dituliskan dengan

$$g(E) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2M}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} \quad (10.48)$$

Pada suhu $T \rightarrow 0$ sebagian sistem menempati tingkat energi terendah dengan jumlah yang sangat signifikan. Jumlah total sistem dalam assembli dapat dituliskan

$$\begin{aligned} N &= \sum n(E_n) = n_o(T) + \sum_{n \neq 0} n(E_n) \\ &= n_o(T) + \int_0^{\infty} g(E) f(E, T) dE = n_o(T) + n_e(T) \end{aligned} \quad (10.49)$$

dengan $n_o(T)$ adalah jumlah sistem pada tingkat energi terendah dan $n_e(T) = \int_0^{\infty} g(E) f(E, T) dE$ dan jumlah total sistem yang menempati tingkat-tingkat energi lainnya.

Dengan mengambil skala energi $E_o = 0$ maka jumlah sistem pada tingkat energi terendah dapat dituliskan

$$n_o(T) = \frac{1}{\exp(-\mu/kT) - 1}$$

Jumlah sistem yang menempati semua tingkat energi lainnya adalah

$$\begin{aligned} n_e(T) &= \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2M}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{E^{1/2}}{\exp(E - \mu)/kT - 1} dE \\ &= \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2M}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{E^{1/2}}{\exp(-\mu/kT) \exp(E/kT) - 1} dE \end{aligned} \quad (10.50)$$

Karena $n_o(T) \rightarrow N$ pada suhu yang mendekati nol maka haruslah $\exp(-\mu/kT) \rightarrow 1$. Dengan sifat ini maka persamaan (10.50) dapat disederhanakan menjadi

$$n_e(T) \approx \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2M}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{E^{1/2}}{\exp(E/kT) - 1} dE \quad (10.51)$$

Untuk menyelesaikan (10.53) kita lakukan substitusi $E/kT = x$. Dengan demikian $E^{1/2} = (kT)^{1/2}x^{1/2}$, $\exp(E/kT) = \exp(x)$, dan $dE = (kT)dx$. Selanjutnya integral pada persamaan (10.53) dapat ditulis

$$\int_0^\infty \frac{E^{1/2}}{\exp(E/kT) - 1} dE = (kT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{\exp(x) - 1} dx = 1,306\pi^2(kT)^{3/2}$$

Akhirnya kita dapatkan

$$\begin{aligned} n_e(T) &\approx \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2M}{\hbar^2} \right)^{3/2} \times 1,306\pi^2(kT)^{3/2} \\ &= 2,612n_Q V \end{aligned} \quad (10.52)$$

dengan $n_Q = \left(\frac{MkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$ dinamakan **konsentrasi kuantum**.

Kita definisikan suhu kondensasi Bose-Einstein, T_E , sebagai suhu ketika jumlah sistem pada keadaan terkesitasi persis sama dengan jumlah total sistem. Jadi, pada $T = T_E$, terpenuhi $n_e(T_E) = N$. Dengan menggunakan persamaan (10.52) kita dapatkan bahwa pada suhu kondensasi Bose-Einstein terpenuhi

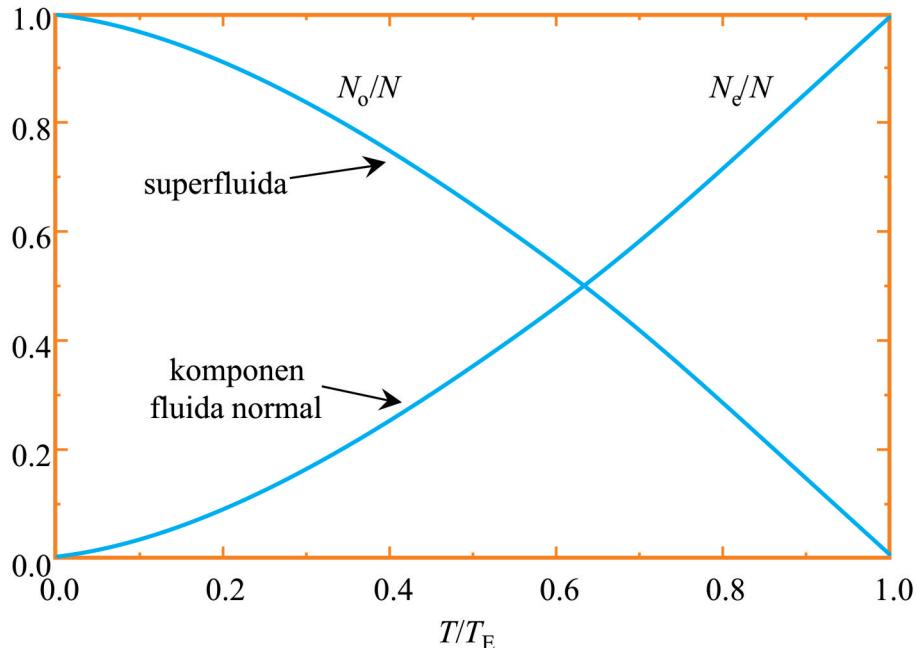
$$N = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2M}{\hbar^2} \right)^{3/2} \times 1,306\pi^2(kT_E)^{3/2}$$

yang memberikan

$$T_E = \frac{2\pi\hbar^2}{Mk} \left(\frac{N}{2,612V} \right)^{2/3} \quad (10.53)$$

Pada sembarang suhu yang mendekati nol derajat, fraksi jumlah sistem pada keadaan tereksitasi adalah

$$\frac{n_e(T)}{N} = \left(\frac{T}{T_E} \right)^{3/2} \quad (10.54)$$



Gambar 10.12: Fraksi superfluida (sistem yang menempati keadaan dasar) dan fluida normal (sistem yang menempati keadaan eksitasi) dalam assembli boson sebagai fungsi suhu ketika suhu berada di bawah suhu kondensasi Bose-Einstein.

Berarti pula bahwa fraksi jumlah sistem pada keadaan paling rendah adalah

$$\frac{n_o(T)}{N} = 1 - \frac{n_e(T)}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_E}\right)^{3/2} \quad (10.55)$$

Gambar 10.12 adalah kurva fraksi N_e/N dan N_c/N yang diberikan oleh persamaan (10.54) dan (10.55).

Soal Latihan

1. Jika zat padat berada dalam keseimbangan termal maka energi setiap modus normal berfluktuasi. Kuadrat dari standar deviasi S diberikan oleh $S^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ di mana

$$\langle E \rangle = \frac{\sum n \hbar \omega e^{-n \hbar \omega / kT}}{\sum e^{-n \hbar \omega / kT}}$$

dan

$$\langle E^2 \rangle = \frac{\sum n^2 \hbar^2 \omega^2 e^{-n\hbar\omega/kT}}{\sum e^{-n\hbar\omega/kT}}$$

Indeks penjumlahan bergerak dari $n = 0$ hingga $n = \infty$. Perlihatkan bahwa

- a) $S = \frac{\hbar^2 \omega^2 e^{\hbar\omega/kT}}{(e^{\hbar\omega/kT} - 1)^2}$
 - b) Kalasitas kalor pada volume tetap adalah $C_v = \frac{S^2}{kT^2}$
 - c) $\frac{S}{\langle E \rangle} \rightarrow e^{\hbar\omega/kT}$ jika T sangat kecil
 - d) $\frac{S}{\langle E \rangle} \rightarrow 1$ jika T sangat besar
2. Perkirakan suhu permukaan bumi dengan asumsi bahwa permukaan bumi merupakan benda hitam sempurna yang memancarkan energi yang persis sama dengan energi yang diterima dari matahari. Juga anggap bahwa suhu permukaan bumi konstan tiap saat (termasuk siang dan malam). Diketahui suhu permukaan matahari adalah 5800 K, jari-jari matahari adalah 7×10^8 m, dan jarak bumi matahari adalah $1,5 \times 10^{11}$ m.
3. Perlihatkan bahwa untuk gas foton berlaku
- a) $p = -\frac{\partial U}{\partial V} = -\sum_s n_s \hbar \frac{d\omega_s}{dV}$
 - b) $\frac{d\omega_s}{dV} = -\frac{\omega_s}{3V}$
 - c) $p = \frac{U}{3V}$
4. Para ilmuwan memperkirakan bahwa ruang antar galaksi diisi oleh gas hydrogen dengan kerapatan sekitar 1 atom/m³. Ruang tersebut diisi oleh energi radiasi yang berada dalam kesetimbangan termal pada suhu 2,9 K. Perlihatkan bahwa rasio antara kapasitas panas materi dan kapasitas panas radiasi sekitar 10^{-9} .
5. Tinjau suatu zat padat yang memiliki suhu Debye 100 K dan kerapatan atom 10^{22} atom/cm³. Hitung suhu di mana kapasitas panas yang dikontribusi oleh foton sama dengan kapasitas panas yang dikontribusi oleh fonon pada suhu 1 K.
6. Perlihatkan bahwa kerapatan spectral fluks energi radian yang mencapai elemen sudut ruang $d\Omega$ adalah $cu \cos \theta d\Omega/4\pi$ di mana Θ adalah

sudut antara berkas dating dengan arah normal bidang yang luasnya satu satuan, dan u adalah kerapatan energi per satuan jangkauan frekuensi. Perlihatkan pula bahwa jumlah besaran tersebut untuk semua sudut dating adalah $cu/4$.

Bab 11

Aplikasi Distribusi Fermi-Dirac

Isi Bab ini. Bab ini berisi contoh aplikasi statistik Fermi-Dirac pada sejumlah assembli sederhana yang mengandung fermion dan beberapa perbandingan ramalan menggunakan statistik ini dengan data pengamatan.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami beberapa aplikasi statistik Fermi-Dirac pada sejumlah assembli fermion dan perbandingan hasil ramalan tersebut dengan data pengamatan.

Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Untuk memahami aplikasi statistik Fermi-Dirac mahasiswa perlu memahami prinsip dasar statistik Fermi-Dirac, kerapatan keadaan kuantum dan beberapa teknik integral.

11.1 Fungsi Distribusi Fermi Dirac pada Suhu 0 K

Dalam Bab 9 dan 10 kita sudah membahas sejumlah aplikasi statistik Maxwell-Boltzmann dan Bose-Einstein, masing-masing untuk assembli klasik dan assembli boson. Kita mendapatkan beberapa prediksi statistik tersebut bersesuaian dengan hasil pengamatan. Pada bab ini kita akan rampungkan pembahasan tentang aplikasi statistik dengan memprediksi beberapa sifat fermion menggunakan statistik Fermi-Dirac.

Ada satu ciri yang menarik dari fungsi distribusi Fermi-Dirac yang tidak dijumpai pada distribusi Maxwell-Boltzmann atau Bose-Einstein. Pada suhu 0 K, fungsi distribusi Fermi-Dirac tiba-tiba diskontinu pada energi ter-

tentu (energi maksimum). Semua fermion terkumpul pada tingkat energi di bawah energi maksimum tersebut dengan kerapatan yang persis sama. Tiap keadaan energi diisi oleh dua fermion dengan arah spin berlawanan. Di atas energi batas tersebut tidak ditemukan satu fermion pun. Artinya di atas energi tersebut, keadaan energi kosong. Sifat ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Kita dapat menulis ulang fungsi distribusi Fermi-Dirac

$$f(E) = \frac{1}{e^{-\alpha-\beta E} + 1}$$

dalam bentuk yang lebih mudah, yaitu

$$\frac{f(E) = 1}{\exp[(E - E_F)/kT] + 1} \quad (11.1)$$

Pada penulisan persamaan (11.1) kita telah mengganti $\beta = -1/kT$ dan telah mendefinisikan $E_F = \alpha kT$. Parameter E_F dikenal dengan **energi Fermi**. Dari bentuk $f(E)$ kita identifikasi bahwa pada $E = E_F$ maka $f(E) = 1/2$, berapa pun suhu assembli. Dengan demikian kita dapat mendefinisikan bahwa *energi Fermi sama dengan energi ketika fungsi distribusi memiliki nilai tepat setengah*.

Hal yang menarik muncul ketika assembli 0 K. Dalam suhu tersebut:

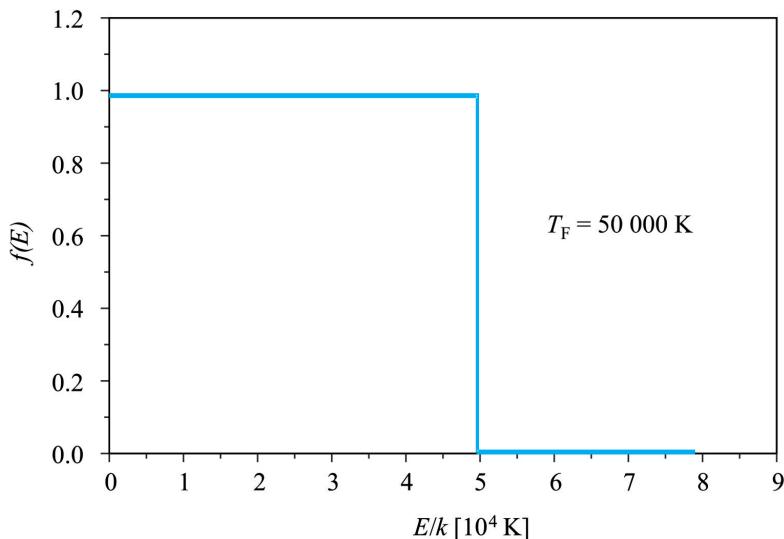
i) Jika $E > E_F$ maka $(E - E_F)/kT = (E - E_F)/0 = \infty$ sehingga

$$f(E > E_F, T = 0) = \frac{1}{e^\infty + 1} = 0 \quad (11.2)$$

ii) Jika $E < E_F$ maka $(E - E_F)/kT = -(E_F - E)/0 = -\infty$ sehingga

$$f(E < E_F, T = 0) = \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1 \quad (11.3)$$

Ini berarti pada $T = 0$, fungsi distribusi Fermi-Dirac berharga 1 untuk semua energi di bawah energi Fermi dan nol untuk semua energi di atas energi Fermi. Jika digambar, maka bentuk fungsi distribusi tersebut pada $T = 0$ tampak pada Gbr. 11.1.



Gambar 11.1: Fungsi distribusi Fermi-Dirac Pada Suhu 0 K.

11.2 Energi Fermi

Pertanyaan berikutnya adalah bagaimana kebergantungan energi Fermi terhadap besaran-besaran lain yang dimiliki assembli. Mari kita tentukan. Jumlah total fermion dapat dihitung dengan integral

$$\begin{aligned} N &= V \int_0^{\infty} n(E) dE \\ &= V \int_0^{\infty} g(E) f(E) dE \end{aligned} \tag{11.4}$$

Jumlah fermion tersebut dapat dihitung dengan mudah pada suhu 0 K karena fungsi distribusi Fermi-Dirac memiliki bentuk yang sederhana. Jika per-

hitungan dilakukan pada $T = 0$ maka

$$\begin{aligned}
 N &= V \int_0^{E_F} g(E) f(E) dE + V \int_{E_F}^{\infty} g(E) f(E) dE \\
 &= V \int_0^{E_F} g(E) \times 1 \times dE + V \int_{E_F}^{\infty} g(E) \times 0 \times dE \quad (11.5) \\
 &= V \int_0^{E_F} g(E) dE
 \end{aligned}$$

Dalam Bab 7 kita sudah mendapatkan ungkapan untuk kerapatan keadaan per satuan volume, yaitu

$$g(E) = \frac{1}{h^3} 4\pi \sqrt{2} m^{3/2} E^{1/2} \quad (11.6)$$

Khusus untuk elektron, karena satu keadaan dapat ditempati dua fermion dengan spin yang berlawanan, maka rapat keadaan untuk fermion sama dengan dua kali nilai persamaan (11.6). Dengan demikian persamaan (11.5) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 N &= V \int_0^{E_F} 2 \times \frac{1}{h^3} 4\pi \sqrt{2} m^{3/2} E^{1/2} dE \\
 &= \frac{V}{h^3} 8\pi \sqrt{2} m^{3/2} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE \quad (11.7) \\
 &= \frac{V}{h^3} 8\pi \sqrt{2} m^{3/2} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2}
 \end{aligned}$$

Kita dapat menyederhanakan persamaan (11.7) lebih lanjut menjadi

$$\frac{3N}{8\pi V} = \left(\frac{2m}{h^2} E_F \right)^{3/2}$$

Dan akhirnya diperoleh ungkapan untuk energi Fermi pada suhu 0 K sebagai berikut

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \quad (11.8)$$

Tabel 11.1: Suhu fermi sejumlah logam (C. Kittel hlm 150).

Valensi	Logam	Energi Fermi (eV)	Suhu Fermi (10^4 K)
1	Li	4,72	5,48
	Na	3,23	3,75
	K	2,12	2,46
	Rb	1,85	2,15
	Cs	1,58	1,83
	Cu	7,00	8,12
	Ag	5,48	6,36
	Au	5,51	6,39
2	Be	14,14	16,41
	Mg	7,13	8,27
	Ca	4,68	5,43
	Se	3,95	4,58
	Ba	3,65	4,24
	Zn	9,39	10,90
	Cd	7,46	8,66
3	Al	11,63	13,49
	Ga	10,35	12,01
	In	8,60	9,98
4	Pb	9,37	10,87
	Sn	10,03	64

Selanjunya kita dapat mendefinisikan **suhu Fermi** melalui hubungan $kT_F = E_F$ sehingga diperoleh ungkapan untuk suhu Fermi pada suhu 0 K sebagai

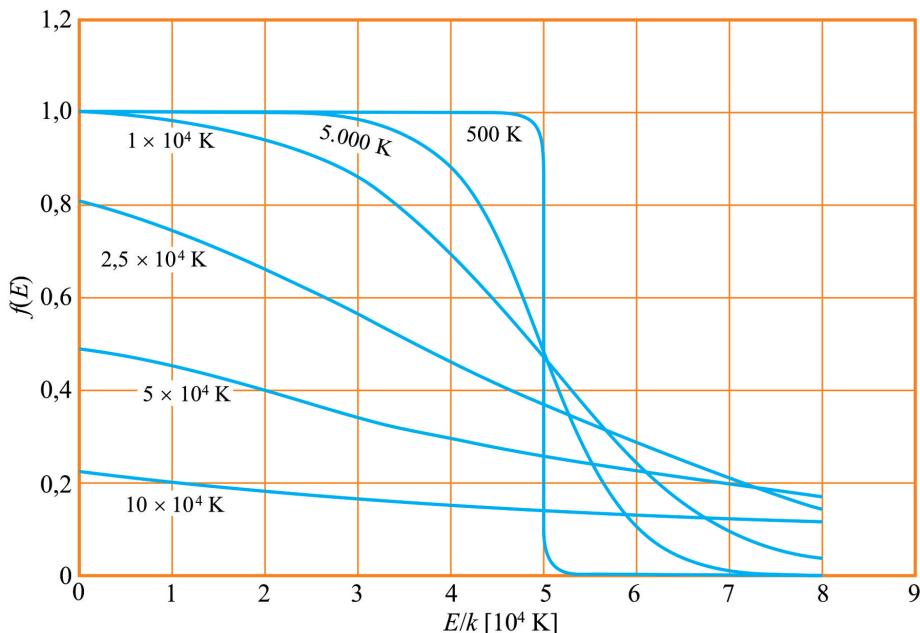
$$\begin{aligned} T_F &= \frac{E_F}{k} \\ &= \frac{\hbar^2}{2mk} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \end{aligned} \tag{11.9}$$

Suhu Fermi sejumlah material ditampilkan pada Tabel 11.1.

11.3 Distribusi Fermi Dirac pada Suhu $T > 0$ K

Jika $T > 0$ maka sudah mulai ada fermion yang memiliki energi di atas energi Fermi. Sebagai konsekuensinya, jumlah fermion yang memiliki energi

di bawah energi fermi mulai berkurang. Tetapi belum ada fermion yang memeliki energi jauh di atas energi fermi dan belum ada elektron yang memiliki energi jauh di bawah energi fermi meninggalkan tempat semula. Akibatnya terjadi distorsi fungsi Fermi-Dirac hanya di sekitar energi Fermi saja. Distorsi tersebut hanya berada pada daerah yang ordenya sekitar kT di sekitar energi Fermi. Gambar 11.2 adalah bentuk fungsi distribusi Fermi-Dirac pada berbagai suhu.



Gambar 11.2: Bentuk fungsi distribusi Fermi-Dirac pada berbagai suhu. Pada perhitungan digunakan $T_F = 50.000 \text{ K}$.

11.4 Integral Fungsi Fermi-Dirac

Kita selanjutnya akan sering berhadapan dengan integral yang mengandung fungsi distribusi Fermi-Dirac. Misalkan saat menghitung energi rata-rata fermion, kita mengintegralkan energi dikali kerapatan keadaan dikali fungsi Fermi-Dirac. Khusus untuk suhu di atas 0 K, integral yang melibatkan fungsi Fermi-Dirac sulit dilakukan. Suatu pendekatan perlu ditempuh untuk mendapatkan hasil integral secara analitik. Memang, dengan menggunakan

software yang sesuai, seperti Mathematica, kendala tersebut dapat diatasi dengan mudah. Tetapi ketika ingin mendapatkan ungkapan secara analitik sederhana, mau tidak mau kita mesti memecahkan integral tersebut dengan aproksimasi yang reasonable.

Pada bagian ini kita akan mencari bentuk umum integral yang berupa perkalian fungsi Fermi-Dirac dengan fungsi sembarang. Bentuk umum tersebut dapat diperoleh berkat beberapa kekhasan dari sifat fungsi Fermi-Dirac. Mari kita pecahkan integral bentuk umum berikut ini

$$I = \int_0^\infty \phi(E) f(E) dE \quad (11.10)$$

di mana $\phi(E)$ sembarang fungsi dari E . Kita selanjutnya mendefinisikan fungsi berikut ini

$$\Psi(E) = \int_0^E \phi(E) dE \quad (11.11)$$

Dari definisi tersebut kita mendapatkan

$$d\Psi = \phi(E) dE \quad (11.12)$$

Dengan menggunakan persamaan (11.12) maka persamaan (11.10) dapat ditulis

$$I = \int_0^\infty f(E) d\Psi \quad (11.13)$$

Selanjutnya kita menggunakan dalil rantai untuk menguraikan integral (11.13). Dalil tersebut berbentuk $\int u dv = uv - \int v du$. Dengan dalil ini maka persamaan (11.13) menjadi

$$\begin{aligned} I &= [f(E)\Psi(E)]_0^\infty - \int_0^\infty \Psi \frac{df}{dE} dE \\ &= [f(\infty)\Psi(\infty) - f(0)\Psi(0)] - \int_0^\infty \Psi \frac{df}{dE} dE \end{aligned} \quad (11.14)$$

Tetapi, berdasarkan definisi fungsi Fermi-Dirac kita akan dapatkan $f(\infty) = 0$ dan $f(0) = 1$. Selanjutnya berdasarkan definisi Ψ pada persamaan (11.11)

kita dapatkan $\Psi(\infty) = \int_0^\infty \phi(E)dE$, dan $\Psi(0) = \int_0^0 \phi(E)dE = 0$. Dengan demikian persamaan (11.14) menjadi

$$\begin{aligned} I &= \left[0 \times \int_0^\infty \phi(E)dE - 1 \times 0 \right] - \int_0^\infty \Psi \frac{df}{dE} dE \\ &= - \int_0^\infty \Psi \frac{df}{dE} dE \end{aligned} \quad (11.15)$$

Selanjutnya kita uraikan $\Psi(E)$ dalam deret Taylor di sekitar E_F hingga suku ketiga, yaitu

$$\Psi(E) = \Psi(E_F) + \frac{d\Psi}{dE} \Big|_{E_F} (E - E_F) + \frac{1}{2} \frac{d^2\Psi}{dE^2} \Big|_{E_F} (E - E_F)^2 \quad (11.16)$$

Berdasarkan definisi $\Psi(E)$ dalam persamaan (11.11) maka kita dapatkan

$$\Psi(E_F) = \int_0^{E_F} \phi(E)dE \quad (11.17)$$

$$\frac{d\Psi}{dE} = \phi(E) \text{ sehingga } \frac{d\Psi}{dE} \Big|_{E_F} = \phi(E_F) \quad (11.18)$$

$$\frac{d^2\Psi}{dE^2} = \frac{d\phi}{dE} \text{ sehingga } \frac{d^2\Psi}{dE^2} \Big|_{E_F} = \frac{d\phi}{dE} \Big|_{E_F} \quad (11.19)$$

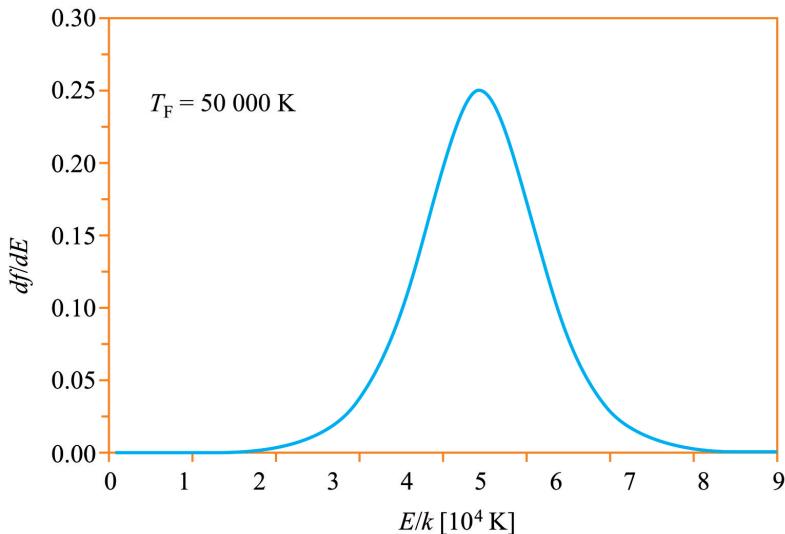
Dengan demikian, persamaan (11.16) menjadi

$$\Psi(E) = \int_0^{E_F} \phi(E)dE + \phi(E_F)(E - E_F) + \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dE} \Big|_{E_F} (E - E_F)^2 \quad (11.20)$$

Dan persamaan (11.15) dapat diaproksimasi sebagai

$$\begin{aligned}
 I &= - \int_0^\infty \left\{ \int_0^{E_F} \phi(E)dE + \phi(E_F)(E - E_F) + \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dE} \Big|_{E_F} (E - E_F)^2 \right\} \frac{df}{dE} dE \\
 &= - \int_0^{E_F} \phi(E)dE \int_0^\infty \frac{df}{dE} dE - \phi(E_F) \\
 &\quad \int_0^\infty (E - E_F) \frac{df}{dE} dE - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dE} \Big|_{E_F} \int_0^\infty (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \\
 &= - \int_0^{E_F} \phi(E)dE [f(\infty) - f(0)] - \phi(E_F) \\
 &\quad \int_0^\infty (E - E_F) \frac{df}{dE} dE - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dE} \Big|_{E_F} \int_0^\infty (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \\
 &= - \int_0^{E_F} \phi(E)dE [0 - 1] - \phi(E_F) \int_0^\infty (E - E_F) \frac{df}{dE} dE - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dE} \Big|_{E_F} \\
 &\quad \int_0^\infty (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \\
 &= \int_0^{E_F} \phi(E)dE - \phi(E_F) \int_0^\infty (E - E_F) \frac{df}{dE} dE - \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dE} \Big|_{E_F} \\
 &\quad \int_0^\infty (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE
 \end{aligned} \tag{11.21}$$

Perhatikan integral suku kedua di ruas kanan persamaan (11.21). Fungsi df/dE merupakan fungsi genap di sekitar E_F , seperti diperlihatkan pada Gbr. 11.3. Fungsi $(E - E_F)$ sendiri merupakan fungsi ganjil di sekitar E_F . Dengan demikian, perkalian $(E - E_F)(df/dE)$ merupakan fungsi ganjil di sekitar E_F sehingga integral perkalian tersebut dalam daerah dari E yang jauh lebih kecil dari E_F sampai E yang jauh lebih besar dari E_F hasilnya



Gambar 11.3: Kurva turunan fungsi Fermi-Dirac pada suhu 5.000 K.

nol. Dengan demikian kita peroleh

$$I = \int_0^{E_F} \phi(E) dE - \frac{1}{2} \left. \frac{d\phi}{dE} \right|_{E_F} \int_0^{\infty} (E - E_F)^2 \frac{df}{dE} dE \quad (11.22)$$

Selanjutnya, dari fungsi distribusi Fermi-Dirac kita akan dapatkan

$$\frac{df}{dE} = \frac{\exp [E - E_F] / kT}{(\exp [E - E_F] / kT + 1)^2} \frac{1}{kT} \quad (11.23)$$

Untuk menyelesaikan integral di ruas kanan persamaan (11.22) mari kita definisikan $x = (E - E_F)/kT$. Dengan definisi tersebut maka

$$\begin{aligned} \frac{df}{dE} &= -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \frac{1}{kT} \\ (E - E_F)^2 &= (kT)^2 x^2 \\ dE &= kT dx \end{aligned}$$

Selanjutnya kita tentukan syarat batas untuk x . Jika $E = 0$ maka $x = -E_F/kT$ dan jika $E = \infty$ maka $x = \infty$. Akhirnya persamaan (11.22) dapat

ditulis sebagai

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{E_F} \phi(E)dE - \frac{1}{2} \left. \frac{d\phi}{dE} \right|_{E_F} \int_{-E_F/kT}^{\infty} (kT)^2 x^2 \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} \frac{1}{kT} kT dx \\ &= \int_0^{E_F} \phi(E)dE + \frac{1}{2} \left. \frac{d\phi}{dE} \right|_{E_F} (kT)^2 \int_{-E_F/kT}^{\infty} x^2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx \end{aligned} \quad (11.24)$$

Untuk T sekitar suhu kamar maka berlaku $E_F \gg kT$ sehingga $E_F/kT \rightarrow \infty$. Dengan demikian

$$I \approx \int_0^{E_F} \phi(E)dE + \frac{1}{2} \left. \frac{d\phi}{dE} \right|_{E_F} (kT)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx \quad (11.25)$$

Dengan menggunakan Mathematica, kita dapat menentukan dengan mudah bahwa integral di ruas kanan memiliki hasil $\pi^2/3$. Jadi

$$\begin{aligned} I &\approx \int_0^{E_F} \phi(E)dE + \frac{1}{2} \left. \frac{d\phi}{dE} \right|_{E_F} (kT)^2 \frac{\pi^2}{3} \\ &= \int_0^{E_F} \phi(E)dE + \left. \frac{d\phi}{dE} \right|_{E_F} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \quad (11.26)$$

Persamaan (11.26) adalah bentuk umum yang akan kita gunakan untuk mencari integral yang melibatkan fungsi Fermi-Dirac.

11.5 Energi Rata-Rata Elektron

Selanjutnya mari kita aplikasikan bentuk ungkapan persamaan (11.26) untuk mencari beberapa besaran yang dimiliki fermion. Pertama kita akan menghitung energi rata-rata elektron. Energi rata-rata didefinisikan sebagai

$$\overline{E} = \frac{\int_0^{\infty} E g(E)f(E)dE}{\int_0^{\infty} g(E)f(E)dE} \quad (11.27)$$

Kerapatan keadaan elektron (karena memiki dua arah spin) memenuhi

$$g(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E^{1/2}$$

Lihat bagian pembilang pada persamaan (11.27). Tampak di sini bahwa

$$\phi(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E^{3/2}$$

$$\frac{d\phi}{dE} = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{3}{2} E^{1/2} = \frac{12\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E^{1/2}$$

$$\int_0^{E_F} \phi(E) dE = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \int_0^{E_F} E^{3/2} dE$$

Dengan demikian

$$\text{pembilang} = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2} + \frac{12\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E_F^{1/2} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6} \quad (11.28)$$

Karena umumnya $kT \ll E_F$ maka suku kedua jauh lebih kecil daripada suku pertama sehingga kita dapat mengaproksimasi

$$\text{pembilang} \approx \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5} E_F^{5/2} \quad (11.29)$$

Selanjutnya kita lihat penyebut pada persamaan (11.27). Tampak di sini bahwa

$$\phi(E) = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E^{1/2}$$

$$\frac{d\phi}{dE} = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{1}{2} E^{-1/2} = \frac{4\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E^{-1/2}$$

$$\int_0^{E_F} \phi(E) dE = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2}$$

Dengan demikian kita dapatkan

$$\text{penyebut} = \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3} E_F^{3/2} + \frac{4\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} E_F^{-1/2} (kT)^2 \frac{\pi^2}{6} \quad (11.30)$$

Sekali lagi, karena umumnya $kT \ll E_F$ maka suku kedua jauh lebih kecil daripada suku pertama sehingga kita dapat mengaproksimasi

$$\text{penyebut} \approx \frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3}E_F^{3/2} \quad (11.31)$$

Dengan demikian energi rata-rata menjadi

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}} \\ &= \frac{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5}E_F^{5/2}}{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3}E_F^{3/2}} \\ &= \frac{3}{5}E_F \end{aligned} \quad (11.32)$$

Namun, jika kita mengambil sampai orde dua, maka energi rata-rata diperoleh dari persamaan (11.28) dan (11.30) yaitu

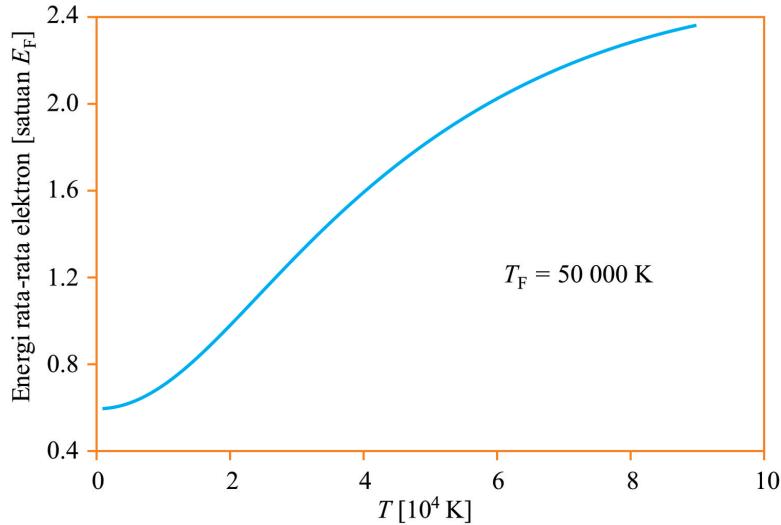
$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{5}E_F^{5/2} + \frac{12\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3}E_F^{1/2}(kT)^2\frac{\pi^2}{6}}{\frac{8\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3} \times \frac{2}{3}E_F^{3/2} + \frac{4\pi\sqrt{2}m^{3/2}}{h^3}E_F^{-1/2}(kT)^2\frac{\pi^2}{6}} \\ &= \frac{3}{5}E_F \left[\frac{1 + \frac{15}{24}\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2}{1 + \frac{3}{24}\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (11.33)$$

Gambar 11.4 adalah energi rata-rata elektron sebagai fungsi suhu. Tampak bahwa energi rata-rata makin bertambah dengan bertambahnya suhu. Ini diakibatkan makin banyaknya elektron yang menempati tingkat energi di atas energi fermi.

11.6 Kapasitas Panas Logam

Jika terdapat N elektron dalam assembli maka energi total semua elektron pada sembarang suhu dapat diperoleh dari persamaan (11.33)

$$\begin{aligned} U &= N\bar{E} \\ &= \frac{3}{5}NE_F \left[\frac{1 + \frac{15}{24}\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2}{1 + \frac{3}{24}\pi^2\left(\frac{kT}{E_F}\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (11.34)$$



Gambar 11.4: Energi rata-rata elektron sebagai fungsi suhu. Pada perhitungan digunakan suhu fermi 50.000 K.

Jika suhu sangat kecil dibandingkan dengan suhu Fermi maka $kT \ll E_F$ sehingga persamaan (11.34) dapat diaproksimasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} U &= \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \frac{15}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{3}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right]^{-1} \\ &\approx \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \frac{15}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{3}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (11.35)$$

di mana kita telah menggunakan aturan binomial $(1+x)^{-1} \approx 1-x$ untuk suku kedua.

Karena $kT \ll E_F$ kita dapat mempertahankan perkalian hanya sampai suku yang mengandung T^2 . Dengan asumsi ini maka persamaan (11.35) dapat diaproksimasi lebih lanjut menjadi

$$\begin{aligned} U &\approx \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \frac{15}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 - \frac{3}{24}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \\ &= \frac{3}{5}NE_F \left[1 + \frac{1}{2}\pi^2 \left(\frac{kT}{E_F} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (11.36)$$

Tabel 11.2: Konstanta γ untuk sejumlah logam.

Logam	γ (mJ mol ⁻¹ K ⁻²)	Logam	γ (mJ mol ⁻¹ K ⁻²)
Li	1,63	Mo	2,0
Be	0,17	Ru	3,3
Na	1,38	Rh	4,9
Mg	1,3	Pd	9,42
Al	1,35	Ag	0,646
Ka	2,08	Cd	0,688
Ca	2,9	In	1,69
Sc	10,7	Sn	1,78
Ti	3,35	Sb	0,11
V	9,26	Cs	3,20
Cr	1,40	Ba	2,7
Mn	9,20	La	10
Fe	4,98	Hf	2,16
Co	4,37	Ta	5,9
Ni	7,02	W	1,3
Cu	0,695	Re	2,3
Zn	0,64	Os	2,4
Ga	0,596	Ir	3,1
As	0,19	Pt	6,8
Rb	2,41	Au	0,729
Sr	3,6	Hg	1,79
Y	10,2	Tl	1,47
Zr	2,80	Pb	2,98
Nb	7,79	Bi	0,008

Akhirnya kita dapatkan kapasitas panas elektronik, yaitu kapasitas panas yang diperoleh dari sumbangan energi elektron adalah

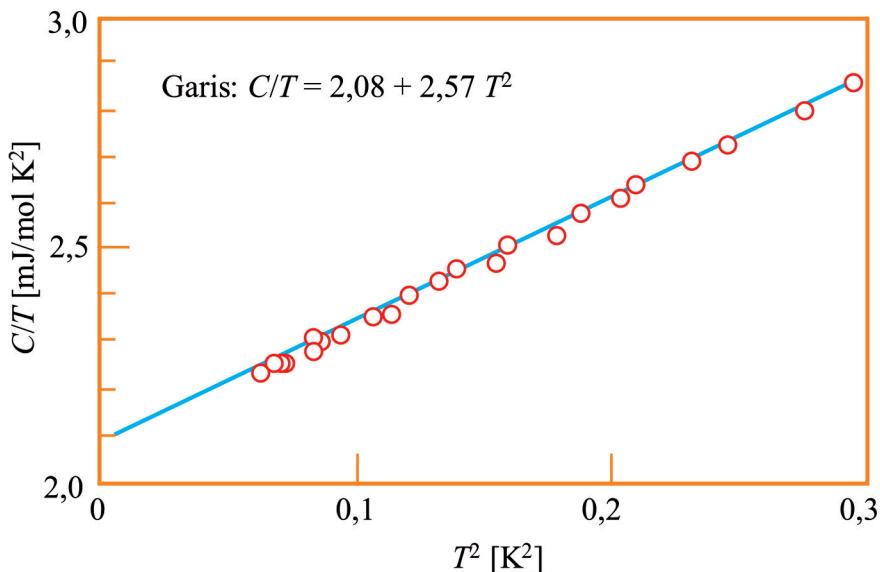
$$\begin{aligned}
 C_e &= \frac{dU}{dT} \\
 &= \frac{3\pi^2 N k^2}{5E_F} T \\
 &= \gamma T
 \end{aligned} \tag{11.37}$$

dengan $\gamma = 3\pi^2 N k^2 / 5E_F$. Tampak dari persamaan (11.37) bahwa kapasitas panas elektronik berubah secara linier terhadap suhu. Nilai kontanta untuk berbagai logam tapak pada Tabel 11.2.

Jika kita memiliki logam maka kita memiliki sekaligus assembli fonon (getaran atom) serta assembli fermion (elektron bebas). Akibatnya, kapasitas panas logam mendapat kontribusi dari dua macam assembli tersebut. Dengan demikian, pada suhu di bawah suhu Debye dan di bawah suhu Fermi maka kapasitas panas logam memenuhi persamaan umum

$$C = \gamma T + AT^3 \quad (11.38)$$

Suku pertama disumbangkan oleh elektron (persamaan (11.37)) dan suku kedua disumbangkan oleh fonon (persamaan (10.39)).



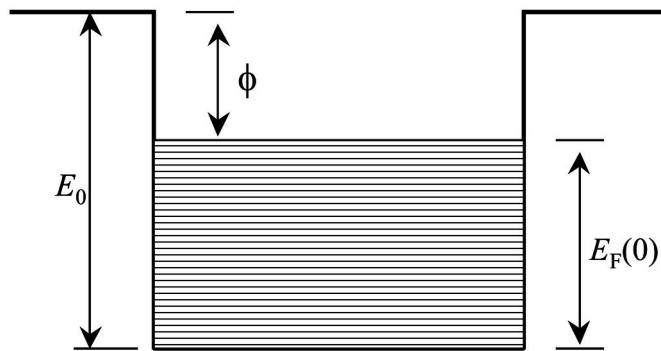
Gambar 11.5: Kebergantungan C/T terhadap T^2 untuk logam kalium.

Persamaan (11.38) sudah dikonfirmasi secara eksperimen. Gambar 11.5 adalah kapasitas panas kalium yang diperoleh dari pengukuran dinyatakan dalam C/T sebagai fungsi T^2 . Berdasarkan persamaan (11.38) C/T bergantung secara linier terhadap T^2 . Tampak kesesuaian yang baik antara data eksperimen dan ramalan teoretik. Perpotongan kurva dengan sumbu tegak (sumbu C/T) memberikan nilai γ . Berdasarkan persamaan (11.37) maka dari nilai γ kita dapat menentukan energi Fermi. Kemiringan kurva memberikan nilai A . Berdasarkan persamaan (10.39) maka dari nilai A kita dapat menentukan suhu Debye.

11.7 Emisi Termionik

Pada suhu yang cukup tinggi elektron dapat keluar dari permukaan logam. Pada suhu tersebut sebagian elektron memiliki energi yang sangat besar yang sanggup melewati potensial penghalang di dinding logam. Filamen di dalam tabung sinar katoda dipanaskan agar elektron keluar dari logam filamen. Elektron yang keluar kemudian ditarik dengan medan listrik yang cukup besar sehingga menumbuk material luminisens pada layar untuk menghasilkan spot bercahaya. Pertanyaan selanjutnya adalah bagaimana kebergantungan arus elektron yang keluar meninggalkan permukaan logam terhadap suhu? Ini yang akan kita kaji sekarang.

Kita mulai dengan asumsi bahwa logam merupakan sumur potensial dengan ketinggian dinding E_o . Sebagai ilustrasi, lihat Gbr. 11.6. Elektron mempati tingkat-tingkat energi dalam sumur potensial tersebut. Pada suhu $T = 0$, energi maksimum yang dimiliki elektron adalah $E_F(0)$. Elektron yang



Gambar 11.6: Elektron dalam logam dapat dipandang terperangkap dalam sumur potensial dengan ketinggian dinding E_o .

sedang bergerak ke arah permukaan logam akan meninggalkan logam jika energi kinetik dalam arah tersebut melebihi E_o . Misalkan elektron sedang bergerak ke arah x . Elektron akan lepas dari permukaan logam tersebut jika terpenuhi

$$\frac{1}{2}mv_x^2 > E_o \quad (11.39)$$

Jumlah elektron per satuan volume yang memiliki komponen kecepatan arah

x antara v_x sampai $v_x + dv_x$ adalah

$$n_x(v_x)dv_x = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(v_x, v_y, v_z)dv_y dv_z \right\} dv_x \quad (11.40)$$

Untuk elektron, satu tingkat energi dapat ditempati oleh dua elektron dengan arah spin berlawanan. Sehingga kita kerapatan elektron dapat dituliskan

$$\begin{aligned} n(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z &= f(E) \frac{2d\Gamma}{h^3} \\ &= \frac{2m^3}{h^3} f(E) dv_x dv_y dv_z \\ &= \frac{2m^3}{h^3} \frac{dv_x dv_y dv_z}{e^{(E-E_F)kT} + 1} \end{aligned} \quad (11.41)$$

Karena kita tertarik pada elektron yang meninggalkan permukaan logam maka fokus perhatian kita adalah pada elektron yang memiliki energi cukup jauh di atas energi Fermi. Dengan pembatasan ini maka kita dapat mengaproksimasi $(E - E_F) \gg kT$ sehingga

$$\frac{1}{e^{(E-E_F)kT} + 1} \approx \frac{1}{e^{(E-E_F)kT}} = e^{E_F kT} e^{-E/kT}$$

dan persamaan (11.41) menjadi

$$n(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z \approx \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F/kT} e^{-E/kT} dv_x dv_y dv_z \quad (11.42)$$

Substitusi persamaan (11.42) ke dalam persamaan (11.40) kita peroleh

$$\begin{aligned} n_x(v_x)dv_x &\approx \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F/kT} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-E/kT} dv_y dv_z \right\} dv_x \\ &= \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F/kT} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} dv_y dv_z \right\} dv_x \\ &= \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F/kT} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_y^2/2kT} dv_y \right\} \\ &\quad \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z \right\} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \end{aligned} \quad (11.43)$$

Persamaan (11.43) dapat diselesaikan dengan menggunakan hubungan umum $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\pi/\lambda}$. Dengan menggunakan hubungan ini maka persamaan (11.43) menjadi

$$\begin{aligned} n_x(v_x)dv_x &= \frac{2m^3}{h^3} e^{E_F/kT} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{(m/2kT)}} \right\} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{(m/2kT)}} \right\} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \\ &= \frac{4\pi m^2 k T}{h^3} e^{E_F/kT} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \end{aligned} \quad (11.44)$$

Jumlah elektron yang meninggalkan permukaan logam tiap satuan luas permukaan tiap satuan waktu dengan jangkauan kecepatan antara v_x sampai $v_x + dv_x$ adalah

$$v_x n_x(v_x) dv_x$$

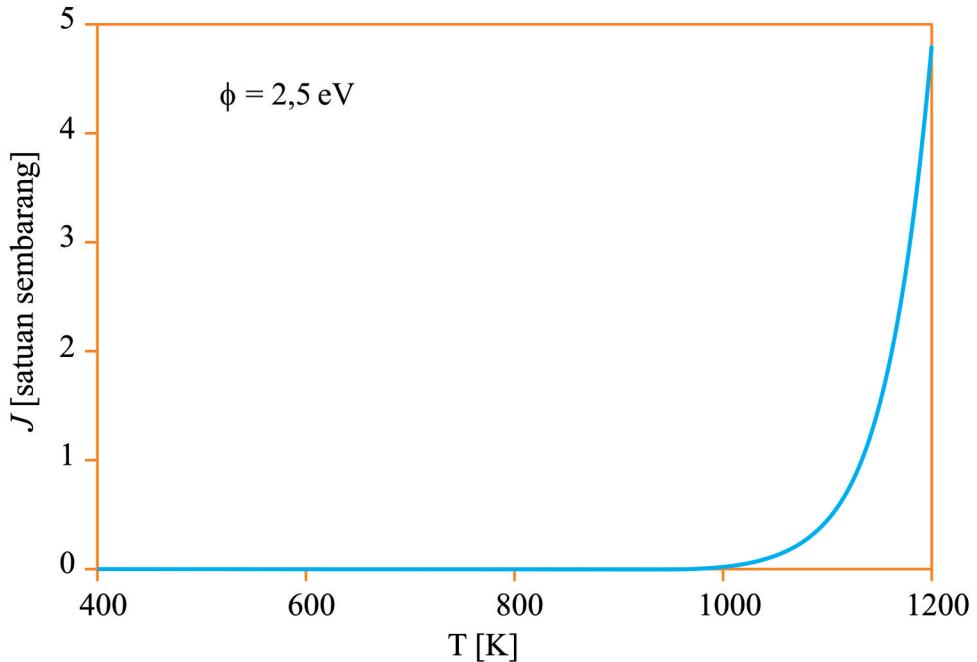
asalkan terpenuhi $\frac{1}{2}mv_x^2 > E_o$. Jika q adalah muatan elektron maka rapat arus yang dihasilkan adalah

$$\begin{aligned} J &= \int_{mv_x^2=E_o}^{\infty} q v_x n_x(v_x) dv_x \\ &= q \frac{4\pi m^2 k T}{h^3} e^{E_F/kT} \int_{mv_x^2/2=E_o}^{\infty} v_x e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \end{aligned} \quad (11.45)$$

Untuk menyelesaikan integral (11.45) mari kita misalkan $y = mv_x^2/2kT$. Dengan permisalan ini maka

$$v_x dv_x = \frac{kT}{m} dy \quad (11.46)$$

Selanjutnya kita tentukan syarat batas untuk y . Syarat batas bawah $mv_x^2/2 = E_o$ ekivalen dengan $y = E_o/kT$. Syarat batas $v_x = \infty$ ekivalen dengan



Gambar 11.7: Rapat arus termionik sebagai fungsi suhu. Pada perhitungan digunakan $\phi = 2,5 \text{ eV}$.

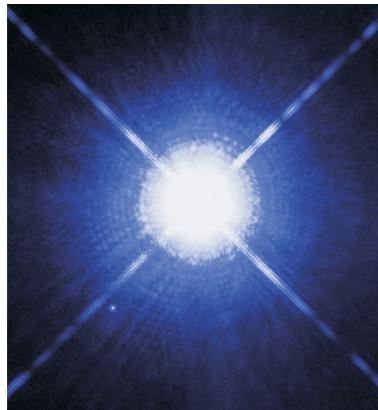
$y = \infty$. Dengan demikian persamaan (11.45) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 J &= q \frac{4\pi m^2 kT}{h^3} e^{E_F/kT} \int_{E_o/kT}^{\infty} e^{-y} \frac{kT}{m} dy \\
 &= q \frac{4\pi m k^2 T^2}{h^3} e^{E_F/kT} \int_{E_o/kT}^{\infty} e^{-y} dy \\
 &= q \frac{4\pi m k^2 T^2}{h^3} e^{E_F/kT} e^{-E_o/kT} \\
 &= q \frac{4\pi m k^2 T^2}{h^3} e^{-(E_o - E_F)/kT} \\
 &= AT^2 e^{-\varphi/kT}
 \end{aligned} \tag{11.47}$$

dengan A konstanta dan $\phi = E_o - E_F$ merupakan tinggi dinding potensial. Gambar 11.7 adalah contoh kebergantungan kerapatan arus termionik

terhadap suhu. Pada perhitungan digunakan $\phi = 2,5$ eV.

11.8 Teori Bintang Katai Putih



Gambar 11.8: Foto salah satu bintang katai putih.

Bintang katai putih(*white dwarf*) adalah bintang yang sudah kehabisan bahan bakar hidrogen. Tidak ada reaksi fusi (penggabungan hidrogen menjadi helium) lebih lanjut. Materi penyusun bintang hanyalah helium. Sumber energi bintang semata-mata karena energi gravitasi yang berasal dari kontraksi bintang secara perlahan-lahan. Energi yang dipancarkan sangat sedikit sehingga bintang tampak putih remang-remang. Contoh bintang ini adalah pengiring Sirius. Bintang ini tidak tampak oleh mata karena terlalu redup tetapi secara periodic menutup Sirius. Bintang ini dan Sirius berotasi mengelilingi pusat massa keduanya. Gambar 11.8 adalah salah satu hasil pemotretan bintang katai putih.

Perkiraan besaran-besaran fisis bintang katai putih adalah

- Kerapatan $\approx 10^{10} \text{ kg/m}^3 \approx 10^7 \rho_M$
- Massa $\approx 10^{30} \text{ kg} \approx M_M$
- Suhu pusat $\approx 10^7 \text{ K} \approx T_M$

Suhu sebesar 10^7 K bersesuaian dengan energi sebesar $kT \approx 1,3 \times 10^{-16} \text{ J} \approx 10^3 \text{ eV}$. Pada suhu ini semua atom helium terionisasi. Bintang

katai putih dapat dipandang sebagai kumpulan inti helium dan elektron-elektron yang berberak bebas.

Berdasarkan data kerapatan bintang tersebut kita dapat memperkirakan jumlah atom helium per satuan volume. Massa atom helium adalah $4 \times (1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}) \approx 6 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Jumlah atom helium per satuan volume adalah

$$N_{He} = \frac{\rho}{6 \times 10^{-27}} = \frac{1}{6} \times 10^{37} \text{ atom/m}^3$$

Satu atom helium menyumbang dua elektron. Dengan demikian, kerapatan elektron adalah

$$n = 2N_{He} = \frac{1}{3} \times 10^{37} \text{ elektron/m}^3$$

Kerapatan ini melahirkan energi fermi sebesar

$$E_F = \left(\frac{2\pi\hbar}{m} \right) \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4v} \right)^{3/2} = \left(\frac{2\pi\hbar}{m} \right) \left(\frac{3n\sqrt{\pi}}{4} \right)^{3/2} \approx 20 \text{ MeV}$$

Tampak bahwa $E_F \gg$ energi termal. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa dalam bintang katai putih, elektron menempati tingkat-tingkat energi paling dasar, jauh di bawah energi fermi. Keadaan ini sangat mirip dengan assembli elektron yang berada pada suhu mendekati nol. Jadi, meskipun suhu bintang katai putih sangat tinggi, tetapi kerapatan yang luar biasa tinggi menyebabkan energi fermi sangat besar. Energi yang dimiliki elektron sangat jauh di bawah energi fermi. Dari sifat ini kita dapat lakukan idealisasi sebagai berikut

- a) Bintang katai putih adalah assembli N elektron pada keadaan dasar dengan kerapatan sangat tinggi sehingga dinamika elektron harus dijelaskan secara relativistik.
- b) Elektron bergerak dalam latar belakang (background) $N/2$ buah inti helium yang melakukan gaya gravitasi sehingga seluruh sistem menyatu membentuk bintang.

Ada tiga mekanisme yang harus diperhitungkan secara bersama pada bintang katai putih, yaitu

- a) Tekanan elektron akibat eksklusi Pauli
- b) Hukum gravitasi

c) Dinamika relativistik

Perhitungan yang sedikit rumit menghasilkan tekanan yang dihasilkan gas Fermi dalam bintang katai putih memenuhi

- Untuk kasus non relativistik

$$P_o \approx \frac{4}{5} K \frac{\bar{M}^{5/3}}{\bar{R}^5} \quad (11.48)$$

- Untuk kasus relativistik

$$P_o \approx K \left(\frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4} - \frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2} \right) \quad (11.49)$$

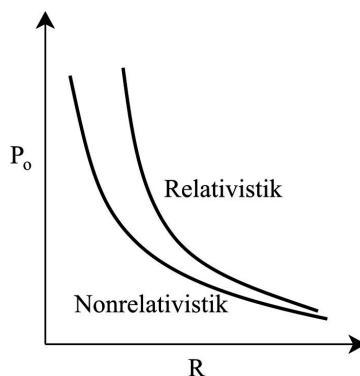
dengan

$$K = \frac{m_e c^2}{12\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \quad (11.50)$$

$$\bar{M} = \frac{9\pi}{8} \frac{M}{m_p} \quad (11.51)$$

$$\bar{R} = \frac{R}{\hbar/m_e c} \quad (11.52)$$

Plot P_o sebagai fungsi R untuk kondisi nonrelativistik dan relativistik tampak pada Gbr 11.9.



Gambar 11.9: Kebergantungan tekanan pada jari-jari bintang untuk kasus relativistik dan nonrelativistik.

Kondisi Keseimbangan

Misalkan tidak ada interaksi gravitasi. Kerapatan materi bintang akan homogen dan materi bintang akan tersebar dalam ruang yang tak berhingga. Gravitasilah yang menyebabkan kerepatan materi makin besar ketika menuju ke pusat bintang. Gravitasilah yang menyebabkan bintang memiliki batas terluar, yaitu tidak tersebar dalam ruang tak berhingga. Apabila gravitasi tidak ada agar bintang memiliki batas terluar yang jelas diperlukan dinding pembatas untuk menahan materi (Gbr. 11.10). Kerja yang diperlukan untuk mengkompresi materi bintang ke bentuk yang memiliki massa dan jari-jari tertentu sehingga memiliki tekanan P_o adalah

$$\begin{aligned} W &= - \int_{\infty}^R \vec{F} \bullet d\vec{r} \\ &= - \int_{\infty}^R (P_o 4\pi r^2) dr \end{aligned} \quad (11.53)$$

Karena antar fermion terjadi tolakan akibat prinsip ekslusif Pauli, maka gaya oleh dinding harus dapat mengkompensasi gaya tolakan tersebut. Besar gaya yang dilakukan dinding adalah

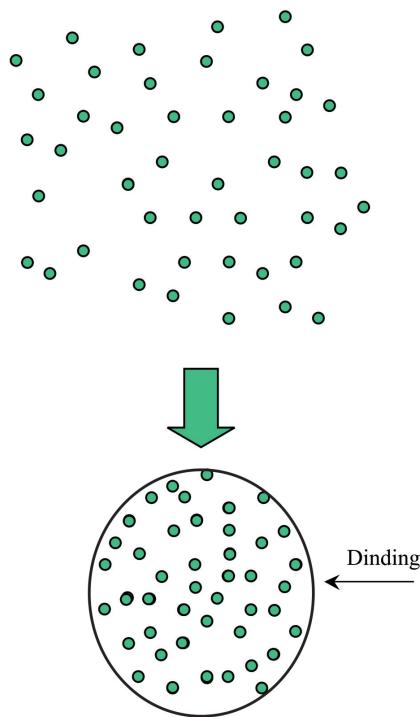
$$\begin{aligned} F_{\text{dinding}} &= - \frac{dW}{dR} = \frac{d}{dR} \int_{\infty}^R P_o (4\pi r^2) dr \\ &= 4\pi P_o R^2 \end{aligned} \quad (11.54)$$

Dari mana gaya dinding berasal? Tentu dari gaya gravitasi yang bekerja pada fermion. Sekarang bayangkan interaksi gravitasi tiba-tiba di-ON-kan. Bagian-bagian bintang akan saling tarik menarik sehingga menghasilkan penurunan energi. Jumlah penurunan energi tersebut disebut "gravitational self energy". Besarnya energi tersebut dapat diperkirakan sebagai berikut.

Energi potensial gravitasi dua massa M_1 dan M_2 yang terpisah sejauh R adalah

$$E_p = -G \frac{M_1 M_2}{R} \quad (11.55)$$

"Gravitation self energy" diperkirakan memiliki bentuk kebergantungan pada massa dan jarak yang sama. Kita dapat memprediksi "gravitation self



Gambar 11.10: Fermion yang tersebar di seluruh ruang dapat dikumpulkan dalam bola berjari-jari R jika terdapat dinding yang mengerjakan gaya ke arah pusat bola. Dinding tersebut harus melawan gaya tolak antar fermion akibat prinsip eksklusi Pauli.

energy” sebanding dengan GM^2/R . Jadi kita dapat menulis

$$E_{\text{self}} = -\alpha G \frac{M^2}{R} \quad (11.56)$$

dengan α adalah sebuah bilangan positif yang nilainya sekitar satu. Energi ini menghasilkan gaya yang disebut gaya ”gravitational self energy” sebesar

$$F_{\text{self}} = -\frac{dE_{\text{self}}}{dR} = -\alpha G \frac{M^2}{R^2} \quad (11.57)$$

Gaya inilah yang berperan sebagai gaya dinding yang mengkompensasi gaya tekan dari dalam akibat prinsip eksklusi Pauli. Dengan demikian maka harus

berlaku

$$|F_{\text{dinding}}| = |F_{\text{self}}|$$

$$4\pi P_o R^2 = \alpha G \frac{M^2}{R^2}$$

atau

$$4\pi P_o R^2 - \alpha G \frac{M^2}{R^2} = 0$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} G \left(\frac{8m_p}{9} \right)^2 \left(\frac{m_e c}{h} \right)^4 \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4} \quad (11.58)$$

$$= K' \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4}$$

dengan

$$K' = \frac{\alpha}{4\pi} G \left(\frac{8m_p}{9} \right)^2 \left(\frac{m_e c}{h} \right)^4 \quad (11.59)$$

Bintang katai putih memiliki kerapatan sangat tinggi sehingga memenuhi persamaan relativistik. Tekanan gas fermi, P_{fermi} , pada kondisi ini memenuhi persamaan (11.50). Samakan P_o pada persamaan (11.58) dengan P_{fermi} pada persamaan (11.50) maka diperoleh

$$K' \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4} = K \left(\frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4} - \frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2} \right)$$

yang akhirnya memberikan ungkapan jari-jari bintang katai putih

$$\bar{R} = \bar{M}^{3/2} \sqrt{1 - (\bar{M}/\bar{M}_o)^{2/3}} \quad (11.60)$$

dengan

$$\bar{M}_o = (K/K')^{3/2} = \left(\frac{27\pi}{64\alpha} \right)^{3/2} \left(\frac{\hbar c}{G m_p^2} \right)^{3/2} \quad (11.61)$$

Dengan mengambil $\alpha \approx 1$ maka

$$M_o \approx \frac{8m_p}{9\pi} \bar{M}_o \approx 10^{30} \text{kg} \approx M_m \quad (11.62)$$

Dari persamaan (11.64) tampak bahwa tidak ada solusi jika $\bar{M} > \bar{M}_o$. Hasil ini mengindikasikan bahwa tidak mungkin bintang katai putih memiliki massa lebih besar daripada massa matahari. Ada batas terbesar massa bintang agar menjadi katai putih. Perhitungan lebih teliti oleh Chandrasekhar menunjukkan bahwa massa maksimum sebuah bintang agar menjadi katai putih adalah $1,4 M_M$. Nilai ini dikenal dengan **limit Chandrasekhar**.

11.9 Paramagnetisme Pauli

Sekarang kita tinjau kasus paramagnetisme logam yang sifatnya agak berbeda. Pada pembahasan tentang paramagnetisme atom, magnetisasi sangat bergantung pada suhu. Dari hasil pengamatan diperoleh bahwa untuk logam, magnetisasi tidak bergantung pada suhu. Bagaimana menjelaskan pengamatan ini?

Kontribusi terbesar paramagnetisme logam berasal dari elektrom-elektron bebas dalam logam tersebut. Tiap elektron memiliki spin magnetik dengan momen magnetik spin kita simbolkan dengan μ_e . Tanpa medan magnetik, arah spin elektron acak sehingga magnetisasi total logam nol. Jika diterapkan medan magnet maka sebagian spin mengambil arah sejajar medan dan sebagian berlawanan dengan arah medan. Jumlah spin yang searah dan berlawanan medan tidak sama sehingga magnetisasi tidak nol.

Karena elektron adalah fermion maka kita harus menggunakan statistik Fermi-Dirac untuk menjelaskan fenomena ini. Untuk mudahnya kita tinjau kasus di mana suhu sangat rendah dibandingkan dengan suhu fermi sehingga fungsi distribusi Fermi-Dirac dapat didekati dengan satu untuk energi di bawah energi Fermi dan didekati dengan nol untuk energi di atas energi Fermi.

Seperti diungkapkan dalam persamaan (11.4), jumlah total elektron dalam logam (anggap suhu mendekati nol) adalah

$$N = V \int_0^{E_F} g(E) dE \quad (11.63)$$

Jika tidak ada medan magnet yang dikenakan ke logam maka jumlah elektron yang memiliki spin-up sama dengan jumlah elektron yang memiliki spin-down, atau

$$N_+ = \frac{V}{2} \int_0^{E_F} g(E) dE \quad (11.64)$$

$$N_- = \frac{V}{2} \int_0^{E_F} g(E) dE \quad (11.65)$$

Ketika dikenakan medan magnet B , sebagian elektron mengambil arah sejajar medan dan sebagian lainnya mengambil arah berlawanan dengan medan.

Elektron yang mengambil arah sejajar medan mengalami penambahan energi sebesar μB dan yang mengambil arah berlawanan medan mengalami pengurangan energi sebesar μB . Dengan demikian, jumlah elektron yang memiliki spin-up (sejajar medan) dan spin-down (berlawanan medan) berubah menjadi

$$N_+ = \frac{V}{2} \int_0^{E_F + \mu B} g(E) dE = \frac{V}{2} \int_0^{E_F} g(E) dE + \frac{V}{2} \int_{E_F}^{E_F + \mu B} g(E) dE$$

Untuk kondisi di mana $\mu B \ll E_F$ maka integral kedua di ruas kanan dapat diaproksimasi sebagai berikut

$$N_+ \approx \frac{V}{2} \int_0^{E_F} g(E) dE + \frac{V}{2} g(E_F) [(E_F + \mu B) - E_F] = \frac{V}{2} \int_0^{E_F} g(E) dE + \frac{V}{2} g(E_F) \mu B \quad (11.66)$$

Dengan cara serupa kita dapatkan jumlah elektron yang memiliki spin berlawanan dengan medan megnet adalah

$$N_- = \frac{V}{2} \int_0^{E_F - \mu B} g(E) dE = \frac{V}{2} \int_0^{E_F} g(E) dE - \frac{V}{2} g(E_F) \mu B \quad (11.67)$$

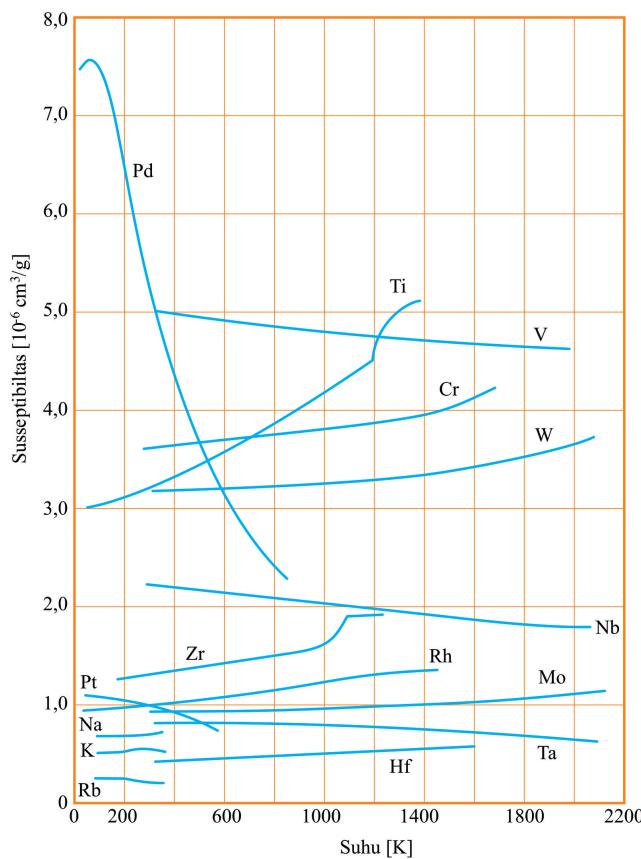
Selisih jumlah elektron yang mengambil arah spin sejajar dan berlawanan dengan medan menjadi

$$\Delta N = N_+ - N_- = V g(E_F) \mu B \quad (11.68)$$

Tiap elektron membawa momen magnetik μ . Dengan adanya selisih elektron yang memiliki spin-up dan spin-down maka timbul magnetisasi total sebesar

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta N \mu}{V} \\ &= g(E_F) \mu^2 B \end{aligned} \quad (11.69)$$

Tampak dari persamaan (11.69) bahwa magnetisasi logam akibat kontribusi spin elektron tidak bergantung pada suhu. Magnetisasi ini lebih dikenal dengan *magnetisasi spin Pauli*. Gambar 11.11 adalah magnetisasi sejumlah logam hasil pengukuran. Tampak pada gambar tersebut bahwa untuk kebanyakan logam, magnetisasi tidak bergantung pada suhu untuk jangkauan suhu yang sangat lebar.



Gambar 11.11: Magnetisasi sejumlah logam sebagai fungsi suhu (C.J. Kittel hal. 437).

Contoh Soal 11.1

Misalkan suatu keadaan elektron memiliki peluang tersisi 0,95 pada suhu T . Turunkan ungkapan untuk $E - \mu$. Hitung nilai tersebut untuk $T = 100$ K, 300 K, dan 1200 K

Jawab

Probabilitas mendapatkan elektron pada energi E adalah

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/kT] + 1}$$

atau

$$\exp[(E - \mu)/kT] = \frac{1}{f(E)} - 1$$

atau

$$E - \mu = kT \ln \left(\frac{1}{f(E)} - 1 \right) = kT \ln \left(\frac{1}{0,95} - 1 \right) = -2,94kT$$

Pada suhu 100 K maka

$$E - \mu = -2,94 \times (1,38 \times 10^{-23}) \times 100 = 4,06 \times 10^{-21} \text{ J}$$

Pada suhu 300 K maka

$$E - \mu = -2,94 \times (1,38 \times 10^{-23}) \times 300 = 1,22 \times 10^{-20} \text{ J}$$

Pada suhu 100 K maka

$$E - \mu = -2,94 \times (1,38 \times 10^{-23}) \times 100 = 4,87 \times 10^{-20} \text{ J}$$

Contoh Soal 11.2

- Atom stronsium memiliki struktur FCC dengan sisi kubus $a = 6,08$ angstrom. Tiap atom menyumbang dua elektron yang hampir bebas pada pita energi. Anggap bahwa elektron berperilaku benar-benar bebas. Berapa energi fermi elektrom dalam material tersebut?

Jawab

Volume sel $V = a^3 = (6,08 \times 10^{-10})^3 = 2,25 \times 10^{-28} \text{ m}^3$. Dalam struktur FCC, jumlah atom tiap sel adalah 4 atom. Tiap atom menyumbang 2 elektron. Maka jumlah elektron dalam sel adalah 8 elektron. Atau kerapatan elektron adalah

$$\frac{N}{V} = \frac{8}{2,25 \times 10^{-28}} = 3,56 \times 10^{28} \text{ elektron/m}^3$$

Karena elektron dianggap hampir bebas maka massa efektif elektron sama dengan massa elektron bebas. Energi fermi elektron menjadi

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N/V}{8\pi} \right)^{2/3} \\ &= \frac{(6,625 \times 10^{-34})^2}{2 \times (9,1 \times 10^{-31})} \times \left(\frac{3 \times (3,56 \times 10^{28})}{8\pi} \right)^{2/3} \\ &= 6,33 \times 10^{-19} \text{ J} = 3,96 \text{ eV} \end{aligned}$$

2. Sebuah logam memiliki pita-pita energi yang semuanya kosong atau semuanya terisi penuh kecuali satu pita saja. Satu pita tersebut terisi sebagian. Elektron pada pita yang terisi sebagian memiliki massa efektif m^* .
- Cari energi Fermi logam tersebut pada suhu sangat rendah.
 - Asumsi ini berlaku untuk logam natrium. Satuan sel natrium adalah kubus pusat badan dengan panjang sisi 4,225 Å. Satu atom natrium memberi kontribusi satu elektron pada pita energi yang terisi sebagian. Cari energi Fermi natrium relatif terhadap energi dasar pita yang terisi sebagian. Sebagai pendekatan ambil massa efektif elektron sama dengan massa elektron bebas.

Jawab

Untuk pita yang terisi sebagian maka kerapatan elektron memenuhi

$$g(E) = 2 \frac{4\pi\sqrt{2}(m^*)^{3/2}}{h^3} (E - E_o)^{1/2}$$

Dengan E_o adalah energi dasar pita yang terisi sebagian. Karena energi tertinggi yang dimiliki elektron dalam logam pada suhu menuju nol adalah energi Fermi maka konsentrasi elektron dalam pita ini adalah

$$n = \frac{8\pi\sqrt{2}(m^*)^{3/2}}{h^3} \int_{E_o}^{E_F} (E - E_o)^{1/2} dE = \frac{16\pi\sqrt{2}(m^*)^{3/2}}{3h^3} (E_F - E_o)^{3/2}$$

Dengan demikian

$$E_F = E_o + \left(\frac{3n}{16\pi\sqrt{2}} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m^*}$$

Volume satu sel kisi natrium adalah a^3 . Satu sel mengandung dua atom dan masing-masing atom menyumbang satu elektron. Jadi kerapatan elektron adalah

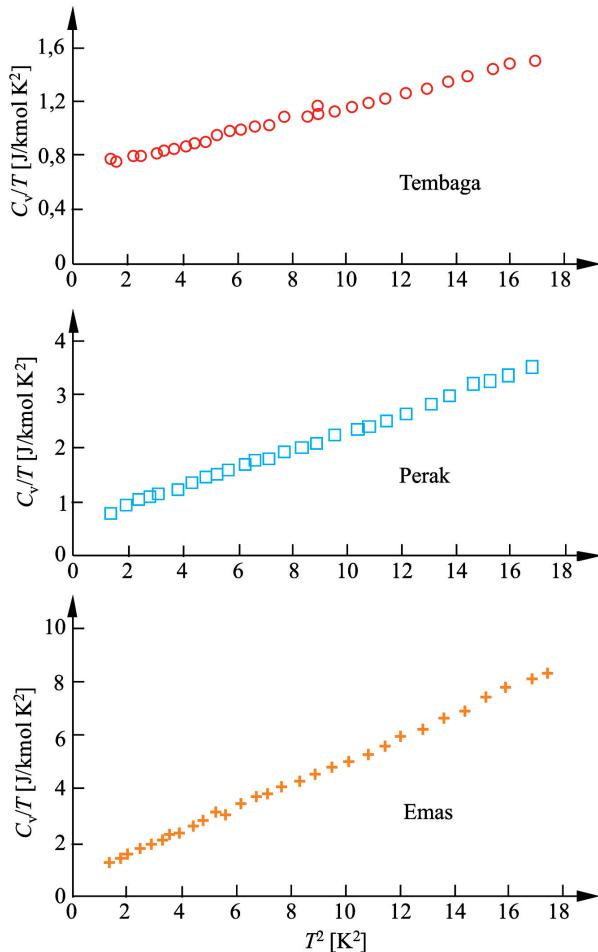
$$n = \frac{2}{a^3} = \frac{2}{(4,255 \times 10^{-10})^3} = 2,65 \times 10^{28} \text{ elektron/m}^3$$

Maka

$$\begin{aligned} E_F &= E_o + \left(\frac{3 \times (2,65 \times 10^{28})}{16\pi\sqrt{2}} \right)^{2/3} \frac{(6,625 \times 10^{-34})^2}{9,1 \times 10^{-31}} \\ &= E_o + 5,2 \times 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

Soal Latihan

1. Gambar 11.12 ini adalah hasil pengukuran kapasitas panas logam tembaga, perak dan emas pada suhu rendah. Dari data tersebut, perkiraan energi Fermi dan suhu Debye masing-masing logam.



Gambar 11.12: Gambar untuk soal 1.

2. Aluminium memiliki struktur FCC dengan sisi kubus 4,05 angstrom. Setiap atom aluminium menyumbang tiga elektron pada pita energi

elektron yang sifatnya hampir bebas. Energi Fermi aluminium berada 12,0 eV di atas dasar pita elektron bebas. Hitung massa efektif elektron dalam aluminium.

3. Stronsium memiliki struktur FCC dengan panjang sisi 6,08 angstrom. Setiap atom stronsium menyumbang dua elektron yang hampir bebas. Anggap bahwa elektron benar-benar bebas. Hitung energi Fermi stronsium.
4. Gunakan aproksimasi Debye untuk membandingkan kontribusi elektron dan fonon pada kapasitas panas untuk logam natrium pada suhu 0,1, 1, dan 10 K. Natrium memiliki struktur BCC dengan sisi kubus 5,225 Å dan tiap atom menyumbang satu elektron pada pita energi. Suhu Debye natrium adalah 89 K. Anggap massa efektif elektron sama dengan massa elektron bebas.

Bab 12

Termodinamika Gas

Isi Bab ini. Bab ini berisi diskusi tentang beberapa sifat termodinamika gas yang diperoleh dari perumusan fisika statistik. Pada fokus pembahasan adalah gas maka akan ditekankan pada penggunaan distribusi Maxwell-Boltzmann. Di sini akan diperkenalkan fungsi partisi yang merupakan jembatan penghubung antara statistik dan termodinamika.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami fungsi partisi dan bagaimana cara mendapatkan fungsi partisi tersebut serta menggunakan fungsi partisi untuk menurunkan besaran-besaran termodinamika gas.

Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Untuk memahami lebih baik tentang bab ini, mahasiswa diharapkan memahami terlebih dahulu Bab 2, Bab 3, dan Bab 4, Bab 8, dan Bab 9. Pemahaman kembali materi kuliah termodinamika juga sangat membantu.

12.1 Entropi

Kita sudah membahas tiga macam statistik masing-masing untuk partikel klasik (seperti gas), boson, dan fermion. Besaran makroskopik yang sudah kita tentukan dari statistik-statistik tersebut baru terbatas pada energi dan kapasitas panas. Pada bagian ini kita akan masuk lebih jauh dengan mencari hubungan antara statistik dengan besaran-besaran termodinamika yang lain. Akan tampak bahwa perumusan statistik benar-benar dapat menjelaskan sifat termodinamika ketika dibawa ke kondisi makroskopik.

Pertama-tama mari kita definisikan sebuah besaran termodinamika yang bernama entropi secara statistik. Secara termodinamika, entropi telah didefinisikan melalui hubungan

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (12.1)$$

Dengan dS adalah perubahan entropi, dQ adalah sejumlah kecil kalor yang diterima assembli, dan T adalah suhu assembli. Dari entropi tersebut kita dapat menurunkan sejumlah besaran termodinamika yang lain. Pertanyaan sekarang adalah bagaimana merumuskan entropi secara statistik? Mari kita bahas di bab ini. Kita sekarang fokuskan perhatian pada statistik Maxwell-Boltzmann karena assembli yang akan kita bahas lebih terfokus ke assembli gas.

Pada perumusan statistik Maxwell-Boltzmann kita sudah menganggap bahwa partikel gas dapat dibedakan satu dengan lainnya. Dengan asumsi ini maka probabilitas penyusunan N buah partikel gas pada tingkat-tingkat energi memenuhi

$$W = N! \prod_s \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \quad (12.2)$$

Pertanyaan yang patut diajukan di sini adalah apakah benar satu partikel gas dapat dibedakan dari partikel gas yang lain jika partikel-partikel tersebut merupakan molekul gas yang sama dari isotop yang sama pula? Pernyataan tersebut mungkin meragukan. Oleh karena itu, perhitungan probabilitas di atas terlalu besar dari yang seharusnya, yaitu apabila dianggap satu partikel tidak dapat dibedakan dari partikel lain. Jumlah cara menukar N buah partikel jika partikel tersebut dapat dibedakan adalah $N!$. Dengan demikian, jika dianggap bahwa partikel-partikel gas dalam assembli tidak dapat dibedakan maka probabilitas penyusunan partikel-partikel yang diungkapkan dalam persamaan (12.2) harus dibagi $N!$ menjadi

$$W = \prod_s \frac{g_s^{n_s}}{n_s!} \quad (12.3)$$

Sudah kita bahas pada Bab 2 bahwa konfigurasi penyusunan yang memberikan probabilitas maksimum terpeuhi jika $n_s = g_s e^{\alpha + \beta \varepsilon_s}$. Pada keadaan ini kita peroleh W_{maks} . Secara statistik entropi didefinisikan sebagai

$$S = k \ln W_{\text{maks}} \quad (12.4)$$

Berdasarkan persamaan (12.3) maka $\ln W = \sum_s [n_s \ln g_s - \ln n_s!]$. Kemudian kita melakukan penyederhanaan dengan menggunakan aturan Stirling untuk

logaritma faktorial dan diperoleh

$$\begin{aligned}\ln W &\approx \sum_s [n_s \ln g_s - n_s \ln n_s + n_s] \\ &= \sum_s \left[n_s \ln \left(\frac{g_s}{n_s} \right) + n_s \right]\end{aligned}\quad (12.5)$$

Apabila menggunakan n_s dalam konfigurasi maksimum maka kita peroleh W_{maks} yang apabila dinyatakan dalam skala logaritma diperoleh bentuk sebagai berikut

$$\begin{aligned}\ln W_{maks} &= \sum_s [n_s (-\alpha - \beta \varepsilon_s) + n_s] \\ &= -\alpha \sum_n n_s - \beta \sum_s \varepsilon_s n_s + \sum_n n_s \\ &= -\alpha N - \beta E + N\end{aligned}\quad (12.6)$$

Dengan mengganti $\beta = -1/kT$ maka berdasarkan persamaan (12.4) kita dapatkan entropi

$$\begin{aligned}S &= k \left[-\alpha N + \frac{E}{kT} + N \right] \\ &= \frac{E}{T} - k\alpha N + kN\end{aligned}\quad (12.7)$$

12.2 Fungsi Partisi Boltzmann

Salah satu besaran yang sangat penting didefinisikan adalah fungsi partisi. Besaran ini tidak dapat diukur secara fisis tetapi merupakan jembatan penghubung antara statistik dan termodinamika (lihat Gbr 12.1 sebagai ilustrasi). Fungsi partisi untuk assembli yang memenuhi statistik Maxwell-Boltzmann didefinisikan sebagai

$$Z = \sum_s g_s e^{-E_s/kT} \quad (12.8)$$

Pejumlahan di atas dilakukan untuk semua pita energi. Pita energi ke- s mengandung sejumlah g_s keadaan. Jika kita lupakan pita-pita energi dan menggunakan tingkat-tingkat energi secara individual maka fungsi partisi (12.8) dapat ditulis menjadi

$$Z = \sum_i e^{-E_i/kT} \quad (12.9)$$



Gambar 12.1: Fungsi partisi merupakan jembatan penghubung antara statistik dan termodinamika.

Dalam konfigurasi maksimum kita memiliki hubungan $n_s = g_s e^{\alpha + \beta \varepsilon_s}$. Dari hubungan ini kita dapatkan $g_s e^{-E_s/kT} = g_s e^{\beta E_s} = n_s e^{-\alpha}$. Dengan demikian, persamaan fungsi partisi (12.8) dapat juga ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} Z &= \sum_s n_s e^{-\alpha} \\ &= e^{-\alpha} \sum_s n_s \\ &= e^{-\alpha} N \end{aligned}$$

atau

$$\alpha = -\ln \frac{Z}{N} \quad (12.10)$$

Dengan memasukkan α di atas ke dalam entropi yang diungkapkan oleh persamaan (12.7) kita dapatkan ungkapan lain untuk entropi, yaitu

$$S = \frac{E}{T} kN \ln \left(\frac{Z}{N} \right) + kN \quad (12.11)$$

12.3 Ungkapan Energi dalam Fungsi Partisi

Kita sepenuhnya ingin menggunakan fungsi partisi sebagai jembatan antara statistik dan termodinamika. Dengan demikian, semua besaran termodinamika sedapat mungkin dinyatakan dalam fungsi partisi. Sekarang kita akan melihat hubungan antara energi sistem dengan fungsi partisi. Kita

berangkat dari definisi

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_s n_s E_s \\
 &= \sum_s E_s g_s e^{\alpha + \beta E_s} \\
 &= \sum_s g_s \frac{d}{d\beta} (e^{\alpha + \beta E_s}) \\
 &= \frac{d}{d\beta} \sum_s g_s e^{\alpha + \beta E_s} \\
 &= e^\alpha \frac{d}{d\beta} \sum_s g_s e^{\beta E_s} \\
 &= e^\alpha \frac{d}{d\beta} Z
 \end{aligned} \tag{12.12}$$

Dengan menggunakan α yang didefinisikan pada persamaan (12.10) maka kita dapat menulis persamaan (12.12) sebagai

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{N}{Z} \frac{d}{d\beta} Z \\
 &= N \frac{d}{d\beta} \ln Z
 \end{aligned} \tag{12.13}$$

Selanjutnya bila kita ingin menyatakan dalam variabel suhu dengan menggunakan hubungan $\beta = -1/kT$ maka diperoleh

$$\frac{d}{d\beta} = \frac{dT}{d\beta} \frac{d}{dT} = \frac{1}{k\beta^2} \frac{d}{dT} = \frac{1}{k(1/kT)^2} \frac{d}{dT} = kT^2 \frac{d}{dT} \tag{12.14}$$

Substitusi (12.14) ke dalam (12.13) diperoleh ungkapan energi sebagai berikut

$$E = NkT^2 \frac{d}{dT} \ln Z \tag{12.15}$$

12.4 Energi Bebas Helmholtz

Energi bebas Helmholtz didefinisikan sebagai

$$F = E - TS \tag{12.16}$$

Dengan menggunakan bentuk entropi pada persamaan (12.11) kita dapat menulis

$$\begin{aligned}
 F &= E - T \left(\frac{E}{T} + kN \ln \frac{Z}{N} + kN \right) \\
 &= -NkT \ln \frac{Z}{N} - NkT \\
 &= -NkT \ln Z + NkT \ln N - NkT \\
 &= -NkT \ln Z + kT(N \ln N - N)
 \end{aligned} \tag{12.17}$$

Dengan pendekatan Stirling kita dapatkan $\ln N! \approx N \ln N - N$. Dengan demikian kita dapat menulis bentuk aproksimasi untuk energi bebas Helmholtz sebagai

$$\begin{aligned}
 F &\approx -NkT \ln Z + kT \ln N! \\
 &= -kT \ln Z^N + kT \ln N! \\
 &= -kT \ln \left(\frac{Z^N}{N!} \right)
 \end{aligned} \tag{12.18}$$

12.5 Kapasitas Panas

Kapasitas panas pada volume tetap dapat diturunkan dari energi sistem, yaitu

$$C_v = \frac{dE}{dT} \tag{12.19}$$

Selanjutnya dengan menggunakan ungkapan energi dalam fungsi partisi pada persamaan (12.15) kita dapatkan

$$\begin{aligned}
 C_v &= \frac{d}{dT} \left(NkT^2 \frac{d}{dT} \ln Z \right) \\
 &= 2NkT \frac{d}{dT} \ln Z + NkT^2 \frac{d^2}{dT^2} \ln Z \\
 &= Nk \left(2T \frac{d}{dT} \ln Z + T^2 \frac{d^2}{dT^2} \ln Z \right)
 \end{aligned} \tag{12.20}$$

12.6 Perhitungan Fungsi Partisi Klasik

Telah kita turunkan persamaan rapat keadaan sebagai berikut

$$g(E)dE = BV2\pi(2m)^{3/2}E^{1/2}dE$$

Bentuk penjumlahan dalam fungsi partisi seperti yang tampak pada persamaan (12.15) dapat dinyatakan dalam bentuk integral dengan terlebih dahulu melakukan transformasi sebagai berikut

$$g_s \rightarrow g(E)dE$$

$$\sum_s \rightarrow \int_0^{\infty}$$

Dengan transformasi tersebut maka kita mendapatkan bentuk integral untuk persamaan (12.15) sebagai berikut

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{\infty} e^{-E/kT} g(E)dE \\ &= BV2\pi(2m)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-E/kT} E^{1/2} dE \\ &= BV2\pi(2m)^{3/2}(kT)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= BV(2m\pi kT)^{3/2} \end{aligned} \quad (12.21)$$

Dengan menggunakan persamaan (12.21) kita dapatkan beberapa hasil berikut ini

$$\ln Z = \ln \left\{ BV(2m\pi kT)^{3/2} \right\} = \ln \left\{ BV(2m\pi k)^{3/2} \right\} + \frac{3}{2} \ln T \quad (12.22)$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (12.22) ke dalam persamaan (12.15) kita dapatkan ungkapan untuk energi gas sebagai berikut

$$\begin{aligned} E &= NkT^2 \frac{d}{dT} \left[\ln \left\{ BV(2m\pi k)^{3/2} \right\} + \frac{3}{2} \ln T \right] \\ &= NkT^2 \left[0 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{T} \right] \\ &= \frac{3}{2} NkT \end{aligned} \quad (12.23)$$

Persamaan (12.23) persis sama dengan yang diperoleh menggunakan prinsip ekipartisi energi. Gas memiliki tiga derajat kekebasan energi, yang disumbangkan oleh tiga komponen momentum. Dengan demikian energi rata-rata

tiap molekul adalah $3kT/2$. Karena terdapat N molekul maka energi total gas memenuhi persamaan (12.23).

Dengan menggunakan fungsi partisi pada persamaan (12.21) maka entropi pada persamaan (12.11) menjadi

$$\begin{aligned} S &= \frac{3NkT/2}{T} + kN \ln \left\{ \frac{BV(2m\pi kT)^{3/2}}{N} \right\} + kN \\ &= \frac{5}{2}kN + kN \ln \left\{ \frac{BV(2m\pi kT)^{3/2}}{N} \right\} \end{aligned} \quad (12.24)$$

12.7 Entropi Gas Semiklasik

Pada ungkapan kerapatan keadaan yang tampak pada persamaan (3.13) kita temui parameter B yang belum diketahui nilainya. Parameter B menyatakan kerapatan keadaan dalam ruang fasa. Berdasarkan ketidakpastian Heisenberg, yaitu $\Delta p_x \Delta x \approx h$ maka volume terkecil ruang fasa yang dapat mengandung sebuah keadaan adalah

$$\Delta\Gamma_{\min} = \Delta p_x \Delta x \Delta p_y \Delta y \Delta p_z \Delta z \approx h \times h \times h = h^3$$

Volume ruang fasa minimum ini mengandung hanya satu keadaan. Oleh karena itu, kerapatan keadaan dalam ruang fasa adalah

$$B = \frac{1}{\Delta\Gamma_{\min}} = \frac{1}{h^3} \quad (12.25)$$

Pengenalan konsep kuantum dalam menentukan kerapatan keadaan untuk gas klasik melahirkan apa yang disebut formulasi semiklasik dari gas. Dalam formulasi ini maka ungkapan kerapatan keadaan yang memiliki energi antara E sampai $E + dE$ menjadi

$$g(E)dE = \frac{V2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}E^{1/2}dE \quad (12.26)$$

Dan entropi gas menjadi pada persamaan (12.24) menjadi

$$\begin{aligned} S &= \frac{5}{2}kN + kN \ln \left\{ \frac{V(2m\pi kT)^{3/2}}{Nh^3} \right\} \\ &= NK \left[\frac{5}{2} + \ln \left\{ \frac{V(2m\pi kT)^{3/2}}{Nh^3} \right\} \right] \end{aligned} \quad (12.27)$$

Ungkapan entropi pada persamaan (12.27) dikenal dengan persamaan **Sackur-Tetrode** untuk entropi.

12.8 Fungsi Partisi Total

Selama ini pembahasan kita difokuskan pada gas yang tidak berstruktur. Pada gas semacam ini partikel hanya memiliki energi kinetik translasi. Untuk gas yang berstruktur seperti molekul maka energi yang dimiliki gas bukan hanya kinetik translasi, tetapi juga kinetik lainnya seperti vibrasi dan rotasi. Sebagai ilustrasi di sini kita akan bahas gas yang memiliki tiga macam energi kinetik, yaitu energi kinetik translasi, rotasi, dan vibrasi. Kita anggap gas tidak memiliki energi potensial.

Untuk menentukan fungsi partisi total mari kita mulai dengan memisalkan

- i) Keadan translasi ke- i memiliki energi E_{1i}
- ii) Keadan rotasi ke- j memiliki energi E_{2j}
- iii) Keadan vibrasi ke- ℓ memiliki energi $E_{3\ell}$

Energi total gas pada keadaan translasi ke- i , rotasi ke- j dan vibrasi ke- ℓ adalah

$$E(i, j, \ell) = E_{1i} + E_{2j} + E_{3\ell} \quad (12.28)$$

Dengan bentuk energi (12.28) maka fungsi partisi total gas menjadi

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{ij\ell} \exp \left[-\frac{E(i, j, \ell)}{kT} \right] \\ &= \sum_{ij\ell} e^{-E_{1i}/kT} e^{-E_{2j}/kT} e^{-E_{3\ell}/kT} \end{aligned} \quad (12.29)$$

Jika penjumlahan pada persamaan (12.29) diuraikan atas suku-suku maka tiap suku mengandung faktor perkalian $e^{-E_{1i}/kT} e^{-E_{2j}/kT} e^{-E_{3\ell}/kT}$ untuk semua kombinasi nilai i , j , dan ℓ . Dengan adanya kombinasi seperti itu maka kita dapat melakukan penyederhanaan seperti berikut ini.

Lihat perkalian berikut ini

$$\begin{aligned} \sum_i x_i \sum_j x_j \sum_\ell x_\ell &= (x_1 + x_2 + x_3 + \dots) (y_1 + y_2 + y_3 + \dots) \\ &\quad (z_1 + z_2 + z_3 + \dots) \end{aligned} \tag{12.30}$$

$$= x_1 y_1 z_1 + x_1 y_1 z_2 + x_1 y_1 z_3 + \dots + x_i y_j z_\ell + \dots$$

Pada hasil perkalian kita dapatkan penjumlahan yang tiap sukunya mengandung perkalian $x_i y_j z_\ell$ untuk semua kombinasi nilai i , j , dan ℓ . Penjumlahan suku-suku yang tiap sukunya mengandung perkalian $x_i y_j z_\ell$ untuk semua kombinasi nilai i , j , dan ℓ dapat dijumpai pada penjumlahan lipat tiga berikut ini.

$$\sum_{ij\ell} x_i x_j x_\ell = x_1 y_1 z_1 + x_1 y_1 z_2 + x_1 y_1 z_3 + \dots + x_i y_j z_\ell + \dots \tag{12.31}$$

Berdasarkan persaman (12.30) dan (12.31) kita simpulkan

$$\sum_{ij\ell} x_i x_j x_\ell = \sum_i x_i \sum_j x_j \sum_\ell x_\ell \tag{12.32}$$

Dengan sifat pada persamaan (12.32) maka kita dapat menulis fungsi partisi (12.29) menjadi menjadi

$$Z = \sum_i e^{-E_{1i}/kT} \sum_j e^{-E_{2j}/kT} \sum_\ell e^{-E_{3\ell}/kT} = Z_1 Z_2 Z_3 \tag{12.33}$$

di mana

$$Z_1 = \sum_i e^{-E_{1i}/kT} \tag{12.34a}$$

$$Z_2 = \sum_j e^{-E_{2j}/kT} \tag{12.34b}$$

$$Z_3 = \sum_\ell e^{-E_{3\ell}/kT} \tag{12.34c}$$

Persamaan (12.33) dapat diperluas ke sistem yang mengandung m jenis

energi. Fungsi partisi assembli tersebut menjadi

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{ij\ell\dots q} \exp \left[-\frac{E_{1i} + E_{2j} + E_{3\ell} + \dots + E_{mq}}{kT} \right] \\ &= \sum_i e^{-E_{1i}/kT} \sum_j e^{-E_{2j}/kT} \sum_\ell e^{-E_{3\ell}/kT} \dots \sum_q e^{-E_{mq}/kT} \quad (12.35) \\ &= Z_1 Z_2 Z_3 \dots Z_m \end{aligned}$$

12.9 Fungsi Partisi Gas Semiklasik

Gas semiklasik memiliki sifat bahwa partikel-partikel gas tidak dapat dibedakan satu dengan lainnya. Misalkan assembli gas klasik mengandung N partikel. Misalkan pada konfigurasi tertentu, yaitu konfigurasi (i, j, ℓ, \dots, r) , energi tiap-tiap partikel sebagai berikut:

- Energi partikel pertama: E_{1i}
- Energi partikel kedua: E_{2j}
- Energi partikel ketiga: $E_{3\ell}$
- ⋮
- Energi partikel ke- N : E_{Nr}

Energi total sistem dalam konfigurasi ini adalah

$$E(i, j, \ell, \dots, r) = E_{1i} + E_{2j} + E_{3\ell} + \dots + E_{Nr} \quad (12.36)$$

Dengan demikian, faktor Maxwell-Boltzmann adalah

$$\exp \left[\frac{E(i, j, \ell, \dots, r)}{kT} \right] = \exp \left[\frac{E_{1i} + E_{2j} + E_{3\ell} + \dots + E_{Nr}}{kT} \right]$$

Dan fungsi partisi total system gas tersebut menjadi

$$Z_t = \sum_{\substack{\text{semua konfigurasi} \\ \text{yang mungkin}}} \exp \left[\frac{E_{1i} + E_{2j} + E_{3\ell} + \dots + E_{Nr}}{kT} \right] \quad (12.37)$$

Sebelum menentukan penjumlahan pada persamaan (12.37), mari kita lihat perkalian dari deret-deret berikut ini

$$\Omega = \sum_i e^{-E_{1i}/kT} \sum_j e^{-E_{2j}/kT} \sum_\ell e^{-E_{3\ell}/kT} \dots \sum_r e^{-E_{Nr}/kT} \quad (12.38)$$

Ada sejumlah suku pada perkalian deret di atas yang sebenarnya hanya pertukaran indeks partikel. Tetapi dengan anggapan partikel tidak dapat dibedakan, pertukaran tersebut sebenarnya tidak menghasilkan konfigurasi baru. Pada ungkapan semiklasik, suku yang mengandung pertukaran indeks partikel tidak diperhitungkan. Jika ada N partikel maka ada sebanyak $N!$ kemungkinan konfigurasi yang sebenarnya hanya menukar indeks partikel. Oleh karena itu jumlah suku pada perkalian deret persamaan (12.38) lebih banyak $N!$ kali dibandingkan dengan jumlah suku pada persamaan (12.37). Dengan demikian, penjumlahan pada semua konfigurasi pada persamaan (12.37) dapat diganti dengan

$$Z_t = \frac{1}{N!} \sum_i e^{-E_{1i}/kT} \sum_j e^{-E_{2j}/kT} \sum_\ell e^{-E_{3\ell}/kT} \dots \sum_r e^{-E_{Nr}/kT} \quad (12.39)$$

Karena partikel tidak dapat dibedakan maka tiap deret pada sisi kanan menghasilkan Z . Karena ada N buah deret yang dikalikan sedangkan nilai semua deret sama, yaitu Z , maka kita dapatkan

$$Z_t = \frac{Z^N}{N!} \quad (12.40)$$

Persamaan (12.40) merupakan ungkapan fungsi partisi gas semiklasik.

12.10 Transformasi Penjumlahan ke Integral

Fungsi partisi dapat dihitung dengan mudah menggunakan metode integral dibandingkan dengan metode penjumlahan diskrit. Untuk menghitung fungsi partisi dengan metode integral mari kita mulai dengan menulis kerapatan keadaan per satuan energi dalam model semiklasik, yaitu

$$g(E)dE = \frac{1}{h^3} dp_x dx dp_y dy dp_z dz \quad (12.41)$$

Dengan fungsi kerapatan di atas maka fungsi partisi dapat ditransformasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} Z &= \sum_i e^{-E_i/kT} \\ &= \int e^{-E/kT} \frac{dp_x dx dp_y dy dp_z dz}{h^3} \end{aligned} \quad (12.42)$$

Fungsi partisi total pada persamaan (12.40) selanjutnya dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{1}{N!} Z_1 Z_2 \dots Z_N \\ &= \frac{1}{N!} \int e^{-E_1/kT} \frac{dp_{x1} dx_1 dp_{y1} dy_1 dp_{z1} dz_1}{h^3} \\ &\quad \int e^{-E_2/kT} \frac{dp_{x2} dx_2 dp_{y2} dy_2 dp_{z2} dz_2}{h^3} \dots \\ &\quad \int e^{-E_N/kT} \frac{dp_{xN} dx_N dp_{yN} dy_N dp_{zN} dz_N}{h^3} \\ &= \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{-(E_1+E_2+\dots+E_N)/kT} dp_{x1} dx_1 dp_{y1} dy_1 dp_{z1} dz_1 \dots \\ &\quad dp_{xN} dx_N dp_{yN} dy_N dp_{zN} dz_N \\ &= \frac{1}{N! h^{3N}} \int e^{-E/kT} dp_{x1} dx_1 dp_{y1} dy_1 dp_{z1} dz_1 \dots dp_{xN} dx_N dp_{yN} dy_N dp_{zN} dz_N \end{aligned} \quad (12.43)$$

dengan $E = E_1 + E_2 + \dots + E_N$. Misalkan energi sistem bukan merupakan fungsi posisi. Energi semacam ini dipenuhi oleh energi kinetik baik translasi, vibrasi, maupun rotasi. Dalam kasus demikian maka integral terhadap posisi dapat dipisahkan dari integral terhadap momentum. Integral terhadap momentum bekerja pada energi yang muncul dalam faktor Maxwell-Boltzmann sedangkan integral terhadap posisi tidak bekerja pada energi.

Dengan demikian persamaan (12.43) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 Z_t &= \frac{1}{N!h^{3N}} \int e^{-E/kT} dp_{x1}dp_{y1}dp_{z1}dp_{x2}dp_{y2}dp_{z2}...dp_{xN}dp_{yN}dp_{zN} \\
 &\quad \times \int dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2...dx_Ndy_Ndz_N \\
 &= \frac{1}{N!h^{3N}} \int e^{-E/kT} dp_{x1}dp_{y1}dp_{z1}dp_{x2}dp_{y2}dp_{z2}...dp_{xN}dp_{yN}dp_{zN} \\
 &\quad \times \int dx_1dy_1dz_1 \int dx_2dy_2dz_2 ... \int dx_Ndy_Ndz_N \quad (12.44) \\
 &= \frac{1}{N!h^{3N}} \int e^{-E/kT} dp_{x1}dp_{y1}dp_{z1}dp_{x2}dp_{y2}dp_{z2}...dp_{xN}dp_{yN}dp_{zN} \\
 &\quad \times V \times V \times ... \times V \\
 &= \frac{V^N}{N!h^{3N}} \int e^{-E/kT} dp_{x1}dp_{y1}dp_{z1}dp_{x2}dp_{y2}dp_{z2}...dp_{xN}dp_{yN}dp_{zN}
 \end{aligned}$$

12.11 Suseptibilitas Paramagnetik Kuantum

Dalam mekanika kuantum, momentum sudut atom atau molekul terkuantifikasi dan direpresentasikan oleh bilangan kuantum j yang merupakan bilangan bulat: 0, 1, 2, Untuk setiap bilangan kuantum j terdapat sejumlah bilangan kuantum magnetik yang menyertainya, m_j . Berdasarkan aturan mekanika kuantum, nilai-nilai m_j yang diperbolehkan untuk tiap nilai j adalah

$$m_j = -j, -(j-1), -(j-2), -1, 0, 1, (j-2), (j-1), j \quad (12.45)$$

Jadi, tiap satu nilai j terdapat sebanyak $(2j+1)$ buah nilai m_j yang diperbolehkan.

Jika atom atau molekul ditempatkan dalam medan magnetik B maka energi potensial magnetik yang dimilikinya adalah

$$U = -\mu_{//}B \quad (12.46)$$

dengan $\mu_{//}$ adalah komponen momen magnetik yang sejajar dengan medan magnetik yang memenuhi

$$\mu_{//} = m_j g \mu_B \quad (12.47)$$

dengan g disebut faktor- g Lande dan μ_B disebut **magneton Bohr**. Untuk satu nilai j saja terdapat sebanyak $(2j+1)$ buah nilai m_j . Dengan demikian fungsi partisi molekul tersebut adalah

$$\begin{aligned} Z_j &= \sum_{m_j=-j}^{+j} e^{-U/kT} \\ &= \sum_{m_j=-j}^{+j} e^{m_j g \mu_B B / kT} \\ &= \sum_{m_j=-j}^{+j} e^{m_j x} \end{aligned} \quad (12.48)$$

dengan $x = g\mu_B B / kT$.

Dengan menggunakan aturan penjumlahan deret geometri, persamaan (12.48) dapat dituliskan

$$\begin{aligned} Z_j &= e^{-jx} \frac{1 - e^{(2j+1)x}}{1 - e^x} \\ &= \frac{e^{(j+1/2)x} - e^{-(j+1/2)x}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} \\ &= \frac{\sinh(j + 1/2)x}{\sinh(x/2)} \end{aligned} \quad (12.49)$$

Kita dapat menentukan energi magnetik dengan menggunakan persamaan $E = NkT^2 \frac{1}{Z_j} \frac{\partial Z_j}{\partial T}$. Mengingat $\partial/\partial T = -(g\mu_B B / kT^2) \partial/\partial x$ maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_j}{\partial T} &= -\frac{g\mu_B B}{kT^2} \frac{\partial Z_j}{\partial x} \\ &= -\frac{g\mu_B B}{kT^2} \left[\frac{(j + 1/2) \cosh(j + 1/2)x}{\sinh(x/2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sinh(j + 1/2)x \times (1/2) \cosh(x/2)}{\sinh^2(x/2)} \right] \end{aligned} \quad (12.50)$$

Dengan demikian, energi magnetik menjadi

$$\begin{aligned}
 E &= (NkT^2) \frac{-\frac{g\mu_B B}{kT^2} \left[\frac{(j+1/2)\cosh(j+1/2)x}{\sinh(x/2)} - \frac{\sinh(j+1/2)x \times (1/2)\cosh(x/2)}{\sinh^2(x/2)} \right]}{\frac{\sinh(j+1/2)x}{\sinh(x/2)}} \\
 &= -Ng\mu_B B \left[\left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{\cosh(j + 1/2)x}{\sinh(j + 1/2)x} - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\cosh(x/2)}{\sinh(x/2)} \right] \\
 &= -Ng\mu_B B \left[\left(j + \frac{1}{2}\right) \coth \left(j + \frac{1}{2}\right) x - \left(\frac{1}{2}\right) \coth \left(\frac{x}{2}\right) \right] \\
 &= -Ng\mu_B B j \left[\left(1 + \frac{1}{2j}\right) \coth \left(1 + \frac{1}{2j}\right) (jx) - \left(\frac{1}{2j}\right) \coth \left(\frac{1}{2j}(jx)\right) \right] \\
 &= -Ng\mu_B B j B_j(jx)
 \end{aligned} \tag{12.51}$$

dengan $B_j(y)$ disebut fungsi Brillouin yang memiliki bentuk

$$B_j(y) = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \coth \left(1 + \frac{1}{2j}\right) y - \left(\frac{1}{2j}\right) \coth \left(\frac{1}{2j}y\right) \tag{12.52}$$

Gambar 12.2 adalah contoh plot energi magnetik rata-rata (E/N) sebagai fungsi $g\mu_B B/kT$ untuk berbagai harga j .

Magnetisasi dapat diturunkan dari persamaan energi menggunakan hubungan $E = -MB$, atau

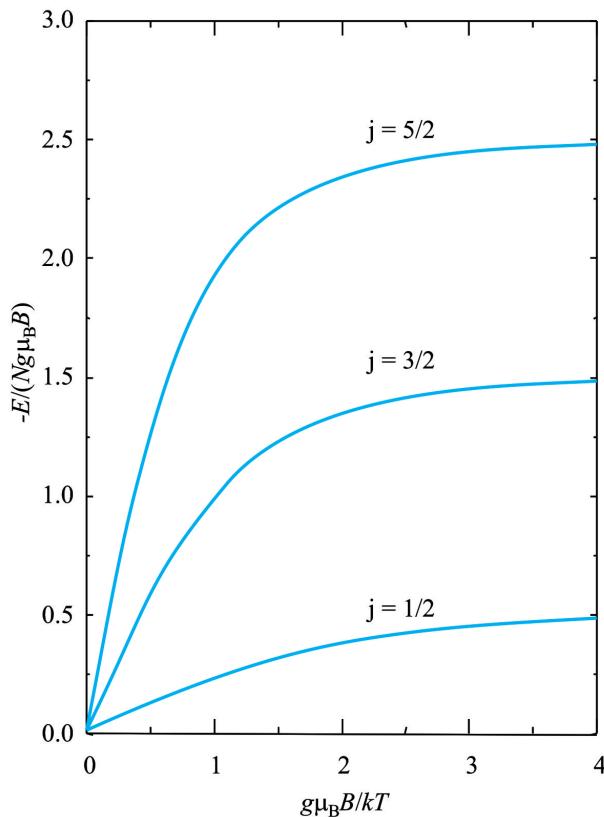
$$M = -\frac{E}{B} = \frac{Ng\mu_B B j B_j(jx)}{B} = Ng\mu_B j B_j(jx) \tag{12.53}$$

Magnetisasi rata-rata per atom adalah

$$m = -\frac{M}{N} = g\mu_B j B_j(jx) \tag{12.54}$$

Gambar 12.3 adalah data pengukuran magnetisasi per atom untuk sejumlah ion (Cr^{3+} , Fe^{3+} , dan Gd^{3+}) serta prediksi menggungakan fungsi Brillouin. Tampak bahwa fungsi Brillouin dapat menjelaskan dengan teliti hasil pengamatan.

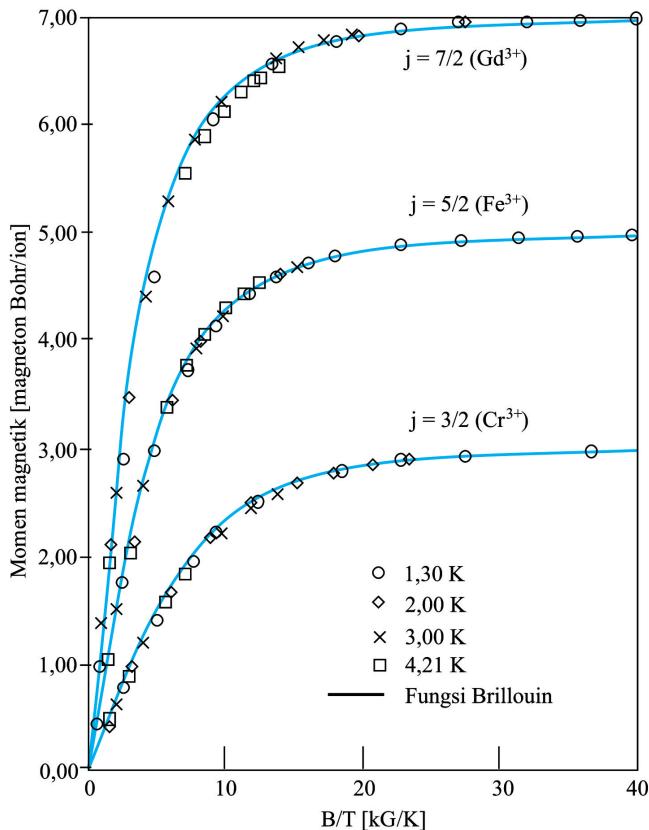
Sekarang kita tinjau kasus khusus di mana medan magnet sangat kecil, atau $x = g\mu_B B/kT \ll 1$. Kita akan melakukan pendekatan untuk fungsi



Gambar 12.2: Energi magnetik rata-rata (E/N) sebagai fungsi $g\mu_B B/kT$ pada berbagai harga j .

Brillouin. Sebelumnya, kita cari pendekatan untuk $\coth y$ ketika $y \ll 1$.

$$\begin{aligned}
 \coth y &= \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} \approx \frac{(1 + y + y^2/2 + y^3/6) + (1 - y + y^2/2 - y^3/6)}{(1 + y + y^2/2 + y^3/6) - (1 - y + y^2/2 - y^3/6)} \\
 &= \frac{2 + y^2}{2y + y^3/3} = \frac{1}{y} \left(\frac{1 + y^2/2}{1 + y^2/6} \right) = \frac{1}{y} (1 + y^2/2)(1 + y^2/6)^{-1} \\
 &\approx \frac{1}{y} (1 + y^2/2)(1 - y^2/6) = \frac{1}{y} \left(1 + \frac{y^2}{3} \right)
 \end{aligned}$$



Gambar 12.3: Perbandingan hasil perhitungan dan pengukuran momen magnetisasi per atom untuk sejumlah ion (Cr^{3+} , Fe^{3+} , dan Gd^{3+}) (Data diambil dari J.C. Kittel).

Dengan demikian, fungsi Brillouin dapat didekati dengan

$$\begin{aligned}
 B_j(jx) &\approx \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \left[\frac{1}{(1 + 1/2j)(jx)} \right] \left[1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2j}\right)^2 (jx)^2 \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{(1/2j)(jx)} \right] \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2j}\right)^2 (jx)^2 \right] \\
 &= \frac{jx}{3} \left[\left(1 + \frac{1}{2j}\right)^2 - \left(\frac{1}{2j}\right)^2 \right] = \frac{jx}{3} \left[1 + \frac{1}{j} + \left(\frac{1}{2j}\right)^2 - \left(\frac{1}{2j}\right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{3}(j+1)x
 \end{aligned} \tag{12.55}$$

Aproksimasi untuk energi magnetik adalah

$$\begin{aligned} E &\approx -Ng\mu_B Bj \times \left(\frac{1}{3}(j+1)x\right) \\ &= -\frac{1}{3}Ng\mu_B Bj(j+1) \times \left(\frac{g\mu_B B}{kT}\right) \\ &= -\frac{Ng^2\mu_B^2 B^2}{3kT} j(j+1) \end{aligned} \quad (12.56)$$

Selanjutnya, jika M adalah momen magnetik rata-rata dalam arah medan maka energi magnetik dapat ditulis

$$E = -MB \quad (12.57)$$

Dengan membandingkan persamaan (12.56) dan (12.57) kita dapatkan persamaan untuk momen magnetik rata-rata

$$M = \frac{Ng^2\mu_B^2 B}{3kT} j(j+1) \quad (12.58)$$

Magnetisasi yang didefinisikan sebagai momen dipol per satuan volume adalah

$$\begin{aligned} m &= \frac{M}{V} \\ &= \frac{(N/V)g^2\mu_B^2 B}{3kT} j(j+1) \\ &= \frac{ng^2\mu_B^2 B}{3kT} j(j+1) \end{aligned} \quad (12.59)$$

dengan $n = N/V$ adalah kerapatan partikel. Akhirnya kita dapatkan suseptibilitas paramagnetik menjadi

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{m}{B} \\ &= \frac{ng^2\mu_B^2}{3kT} j(j+1) \\ &= \frac{n\mu_B^2 p^2}{3kT} \end{aligned} \quad (12.60)$$

dengan $p = g\sqrt{j(j+1)}$ disebut bilangan magneton Bohr efektif. Tabel 12.1 adalah contoh hasil perhitungan dan pengamatan bilangan magneton Bohr efektif untuk ion lantanida valensi tiga. Gambar 12.4 adalah perbandingan

Tabel 12.1: Bilangan magneton Bohr efektif untuk ion lantanida valensi tiga.

Ion	Konfigurasi	$p = g[j(j+1)]^{1/2}$ (perhitungan)	p (pengamatan)
Ce ³⁺	4f ¹ 5f ² p ⁶	2,54	2,4
Pr ³⁺	4f ² 5s ² p ⁶	3,58	3,5
Nd ³⁺	4f ³ 5s ² p ⁶	3,62	3,5
Pm ³⁺	4f ⁴ 5s ² p ⁶	2,68	-
Sm ³⁺	4f ⁵ 5s ² p ⁶	0,84	1,5
Eu ³⁺	4f ⁶ 5s ² p ⁶	0	3,4
Gd ³⁺	4f ⁷ 5s ² p ⁶	7,94	8,0
Tb ³⁺	4f ⁸ 5s ² p ⁶	9,72	9,5
Dy ³⁺	4f ⁹ 5s ² p ⁶	10,63	10,6
Ho ³⁺	4f ¹⁰ 5s ² p ⁶	10,60	10,4
Er ³⁺	4f ¹¹ 5s ² p ⁶	9,59	9,5
Tm ³⁺	4f ¹² 5s ² p ⁶	7,57	7,3
Yb ³⁺	4f ¹³ 5s ² p ⁶	4,54	4,5

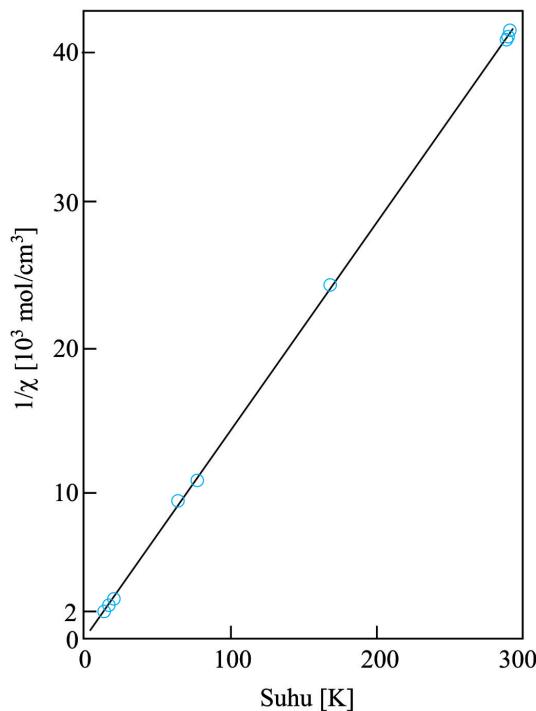
hasil pengamatan suszeptibilitas magnetik material $\text{Gd}(\text{C}_2\text{H}_5\text{SO}_4)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$ dan prediksi dengan menggunakan persamaan (12.60). Tampak kesesuaian yang baik antara hasil pengamatan dan prediksi teoretik di maka kebalikan dari suszeptibilitas berubah secara linier terhadap suhu.

12.12 Molekul Diatomik

Ungkapan fungsi partisi sangat ditentukan oleh bentuk-bentuk energi serta keadaan-keadaan yang dimiliki molekul. Sebagai contoh, untuk molekul diatomik (Gbr. 12.5), sejumlah energi yang mungkin dimiliki adalah energi translasi, energi rotasi, energi vibrasi antar dua atom sepanjang sumbu molekul, energi gerakan elektron di sekitar inti, dan energi spin inti. Apabila dihitung dengan metode kuantum maka tingkat energi rotasi, vibrasi, gerak elektron, dan spin inti terkuantisasi. Hanya energi translasi yang dapat dijelaskan secara klasik.

Dengan adanya lima macam energi tersebut maka fungsi partisi dibentuk oleh lima fungsi partisi dari masing-masing keadaan. Fungsi partisi total dapat dituliskan

$$Z = Z_{tr} Z_r Z_v Z_e Z_n \quad (12.61)$$



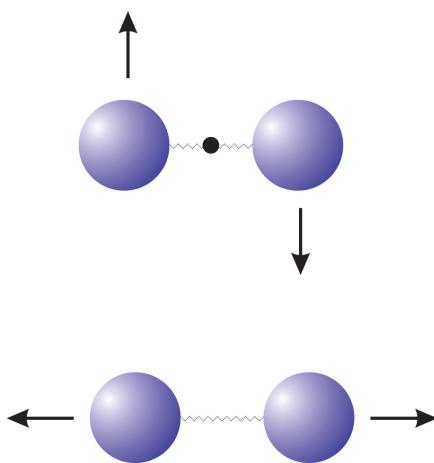
Gambar 12.4: Suszeptibilitas magnetik material $\text{Gd}(\text{C}_2\text{H}_5\text{SO}_4)_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$. Lingkaran adalah hasil pengukuran dan garis lurus merupakan prediksi menggunakan persamaan (12.60) (Data diambil dari J.C. Kittel).

dengan

- Z_{tr} adalah fungsi partisi translasi
- Z_r adalah fungsi partisi rotasi
- Z_v adalah fungsi partisi vibrasi
- Z_ℓ adalah fungsi partisi elektronik
- Z_n adalah fungsi partisi spin inti

Fungsi partisi yang sudah kita bahas selama ini sebenarnya adalah fungsi partisi translasi. Dengan demikian, tanpa perlu perhitungan ulang kita dapatkan

$$Z_{tr} = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \quad (12.62)$$



Gambar 12.5: Ilustrasi rotasi dan vibrasi molekul diatomik.

Sekarang kita tentukan fungsi partisi rotasi. Jika I adalah momen inersia molekul maka dengan memecahkan persamaan Schrodinger kita peroleh tingkat-tingkat energi rotasi memenuhi

$$E_j = j(j+1) \frac{h^2}{8\pi^2 I} \quad (12.63)$$

dengan j adalah bilangan kuantum momentum sudut total yang merupakan bilangan bulat positif. Untuk tiap nilai j ada sejumlah arah momentum sudut yang diijinkan. Arah tersebut dinyatakan oleh bilangan kuantum m_j . Nilai m_j yang diijinkan adalah

$$m_j = -j, -(j-1), -(j-2), -1, 0, 1, (j-2), (j-1), j$$

Jumlah kemungkinan nilai yang dimiliki m_j tersebut adalah $(2j+1)$ buah. Jadi, untuk satu nilai energi rotasi terdapat sebanyak $(2j+1)$ keadaan yang diperbolehkan. Dengan demikian, dari ungkapan umum untuk fungsi partisi $Z = \sum_s g_s e^{-E_s/kT}$ maka untuk gerak rotasi kita transformasi

$$g_s \rightarrow (2j+1) \quad (12.64)$$

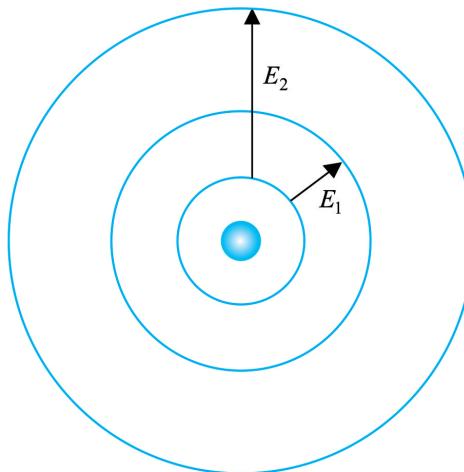
$$E_s \rightarrow E_j = j(j+1) \frac{h^2}{8\pi^2 I} \quad (12.65)$$

Akhirnya, fungsi partisi rotasi dapat dituliskan menjadi

$$Z_r = \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)\hbar^2/8\pi^2IkT} \quad (12.66)$$

Selanjutnya kita tentukan fungsi partisi vibrasi atom. Tingkat energi vibrasi atom memenuhi persamaan $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, dengan $n = 0, 1, 2, \dots$ dikenal dengan bilangan kuantum vibrasi. Untuk satu nilai n hanya satu keadaan yang mungkin (tidak ada degenerasi). Dengan demikian, fungsi partisi vibrasi dapat dituliskan

$$\begin{aligned} Z_v &= \sum_{n=0} e^{-E_n/kT} \\ &= \sum_{n=0} e^{-(n+1/2)\hbar\omega/kT} = e^{-\hbar\omega/2kT} \sum_{n=0} e^{-n\hbar\omega/kT} = e^{-\hbar\omega/2kT} \frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega/kT}} \\ &= \frac{e^{-\hbar\omega/2kT}}{1 - e^{-\hbar\omega/kT}} \end{aligned} \quad (12.67)$$



Gambar 12.6: Elektron diilustrasikan bergerak pada orbit molekuler dengan energi diskrit. Beda energi antara tingkat yang berdekatan cukup besar.

Untuk menentukan fungsi partisi elektronik mari kita lihat idealisasi seperti pada Gbr. 12.6. Sebagai ilustrasi kita misalkan elektron-elektron

dalam molekul bergerak pada orbit-orbit dengan energi yang terkuantisasi. Misalkan mula-mula elektron berada pada keadaan dasar. Misalkan energi yang diperlukan untuk memindahkan elektron:

- Dari keadaan dasar ke keadaan eksitasi pertama adalah E_1
- Dari keadaan dasar ke keadaan eksitasi kedua adalah E_2
- Dari keadaan dasar ke keadaan eksitasi ketiga adalah E_3
- dan seterusnya

Misalkan pula kerapatan keadaan masing-masing keadaan eksitasi sebagai berikut

- Kerapatan ekadaan eksitasi pertama adalah g_1
- Kerapatan ekadaan eksitasi kedua adalah g_2
- Kerapatan ekadaan eksitasi ketiga adalah g_3
- dan seterusnya

Maka fungsi partisi $Z = \sum_s g_s e^{-E_s/kT}$ dapat ditulis menjadi

$$Z_e = g_o + g_1 e^{-E_1/kT} + g_2 e^{-E_2/kT} + \dots \quad (12.68)$$

Sekarang kita lakukan penyederhanaan sebagai berikut. Selisih tingkat energi dalam molekul ordenya dalam elektronvolt. Selisih tingkat energi keadaan dasar ke keadaan eksitasi pertama jauh lebih kecil daripada selisih tingkat energi eksitasi lain ke keadaan dasar. Tetapi pada suhu sekitar suhu kamar, energi termal kT ordenya seperseratus elektronvolt. Dengan demikian nilai E_i/kT umumnya sangat besar yang berakibat nilai $e^{-E_i/kT}$ sangat kecil. Nilai tersebut makin kecil lagi untuk tingkat eksitasi yang lebih besar. Dengan demikian, sebagai langkah penyederhanaan kita dapat melakukan aproksimasi sebagai berikut

$$Z_e \approx g_o + g_1 e^{-E_1/kT} \quad (12.69)$$

Terakhir, fungsi partisi spin inti hampir tidak bergantung pada suhu. Suhu operasional biasa sekitar suhu kamar tidak mampu memberikan pengaruh yang berarti pada inti atom. Dengan hasil di atas maka fungsi partisi

total dapat didekati dengan

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2} \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)h^2/8\pi^2IkT} \right\} \times \left\{ \frac{e^{-\hbar\omega/2kT}}{1 - e^{-\hbar\omega/kT}} \right\} \left\{ g_o + g_1 e^{-E_1/kT} \right\} Z_n \quad (12.70)$$

Energi molekul menjadi

$$\begin{aligned} E &= NkT^2 \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial T} = NkT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z \\ &= NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)h^2/8\pi^2IkT} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\hbar\omega/2kT}}{1 - e^{-\hbar\omega/kT}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ g_o + g_1 e^{-E_1/kT} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln Z_n \right] \end{aligned} \quad (12.71)$$

Karena Z_n hampir tidak bergantung pada suhu maka persamaan (12.71) dapat disederhanakan lebih lanjut menjadi

$$\begin{aligned} E &\cong NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)h^2/8\pi^2IkT} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\hbar\omega/2kT}}{1 - e^{-\hbar\omega/kT}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ g_o + g_1 e^{-E_1/kT} \right\} \right] \end{aligned} \quad (12.72)$$

Sekarang kita definisikan suhu-suhu sebagai berikut

$$\Theta_r = \frac{h^2}{8\pi^2Ik}$$

$$\Theta_v = \frac{\hbar\omega}{k}$$

$$\Theta_e = \frac{E_1}{k}$$

Dengan definisi di atas kita dapat menulis persamaan (12.72) menjadi

$$E \cong NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1)e^{-j(j+1)\Theta_r/T} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\Theta_v/2T}}{1-e^{-\Theta_v/T}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ g_o + g_1 e^{-\Theta_e/T} \right\} \right] \quad (12.73)$$

Untuk semua molekul berlaku $\Theta_r \ll \Theta_v \ll \Theta_e$. Sebagai ilustrasi, untuk molekul hidrogen $\Theta_\gamma = 85,5$ K, $\Theta_v = 6140$ K, dan $\Theta_e = 118000$ K. Sekarang kita tinjau nilai energi pada berbagai jangkauan suhu. Pada kasus di mana $T \ll \Theta_\gamma$ maka $\Theta_r/T \rightarrow \infty$. Karena $\Theta_r \ll \Theta_v \ll \Theta_e$ maka didapat pula $\Theta_v/T \rightarrow \infty$ dan $\Theta_e/T \rightarrow \infty$. Dengan demikian kita dapat mengaproksimasi

$$\begin{aligned} E &\approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1)e^{-j(j+1)\infty} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\infty}}{1-e^{-\infty}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ g_o + g_1 e^{-\infty} \right\} \right] \\ &= NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + 0 + 0 + 0 \right] \\ &= \frac{3}{2}NkT \end{aligned} \quad (12.74)$$

Berdasarkan persamaan energi kita dapat menentukan kapasitas panas menjadi

$$\begin{aligned} C_v &= \frac{dE}{dT} \\ &= \frac{3}{2}Nk \end{aligned} \quad (12.75)$$

Sekarang kita tinjau suhu pada jangkauan $\Theta_r \ll T \ll \Theta_v$. Pada jangkauan ini maka $\Theta_v/T \rightarrow \infty$ dan $\Theta_e/T \rightarrow \infty$ sehingga kita dapat men-

gaproximasi

$$\begin{aligned}
 E &\approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1)e^{-j(j+1)\Theta_r/T} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\infty}}{1-e^{-\infty}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \{g_o + g_1 e^{-\infty}\} \right] \quad (12.76) \\
 &= NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1)e^{-j(j+1)\Theta_r/T} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Sebagai pendekatan, kita ganti penjumlahan terhadap j dengan integral terhadap j sebagai berikut

$$\sum_j (2j+1)e^{-j(j+1)\Theta_r/T} = \int_0^\infty (2j+1)e^{-j(j+1)\Theta_r/T} dj \quad (12.77)$$

Tetapi kita dapat menulis

$$\begin{aligned}
 j(j+1) &= j^2 + j = j^2 + j + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\
 2j+1 &= 2 \left(j + \frac{1}{2}\right) \\
 dj &= d \left(j + \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Dengan demikian persamaan (12.77) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty (2j+1)e^{-j(j+1)\Theta_r/T} dj &= \int_0^\infty 2 \left(j + \frac{1}{2}\right) e^{-[(j+1/2)^2 - 1/4]\Theta_r/T} d(j+1/2) \\
 &= 2e^{\Theta_r/4T} \int_0^\infty \left(j + \frac{1}{2}\right) e^{-(j+1/2)^2\Theta_r/T} d(j+1/2) \quad (12.78)
 \end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan integral (12.78) mari kita misalkan $j + 1/2 = y$.

Dengan permisalan ini maka

$$\begin{aligned}
 2e^{\Theta_r/4T} \int_0^\infty \left(j + \frac{1}{2}\right) e^{-(j+1/2)^2\Theta_r/T} d(j+1/2) &= 2e^{\Theta_r/4T} \int_0^\infty xe^{-x^2\Theta_r/T} dx \\
 &= e^{\Theta_r/4T} \int_0^\infty \frac{T}{\Theta_r} e^{-y} dy \\
 &= e^{\Theta_r/4T} \frac{T}{\Theta_r} \int_0^\infty e^{-y} dy \\
 &= e^{\Theta_r/4T} \frac{T}{\Theta_r}
 \end{aligned}$$

Akhirnya kita dapatkan energi pada jangkauan suhu $\Theta_r \ll T \ll \Theta_v$

$$E \approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ e^{\Theta_r/4T} \frac{T}{\Theta_r} \right\} \right] \quad (12.79)$$

Karena $\Theta_r \ll T \ll \Theta_v$ maka $\Theta_r/4T \rightarrow 0$ dan $e^{\Theta_r/4T} \rightarrow 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 E &\approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{T}{\Theta_r} \right\} \right] \\
 &= NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln T - \frac{\partial}{\partial T} \ln \Theta_r \right] = NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{1}{T} - 0 \right] \quad (12.80) \\
 &= \frac{5}{2}NkT
 \end{aligned}$$

Kapasitas panas pada jangkauan suhu ini adalah

$$\begin{aligned}
 C_v &= \frac{dE}{dT} \\
 &= \frac{5}{2}Nk
 \end{aligned} \quad (12.81)$$

Sekarang kita tinjau suhu pada jangkauan $T \gg \Theta_v$. Pada jangkauan ini maka hanya $\Theta_e/T \rightarrow \infty$ yang terpenuhi sehingga kita dapat mengaproksi-

masi

$$\begin{aligned}
 E &\cong NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \sum_j (2j+1) e^{-j(j+1)\Theta_r/T} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\Theta_v/2T}}{1 - e^{-\Theta_v/T}} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \{ g_o + g_1 e^{-\infty} \} \right] \quad (12.82) \\
 &\approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ e^{\Theta_r/4T} \frac{T}{\Theta_r} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{e^{-\Theta_v/2T}}{1 - e^{-\Theta_v/T}} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Karena $T \gg \Theta_v$ maka $\Theta_v/T \rightarrow 0$ dan $\Theta_r/T \rightarrow 0$ sehingga

$$\begin{aligned}
 e^{-\Theta_r/4T} &\approx 1 \\
 e^{-\Theta_v/2T} &\approx 1 \\
 1 - e^{-\Theta_v/T} &\approx 1 - (1 - \Theta_v/T) = \Theta_v/T
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, energi assembli pada persamaan (12.82) menjadi

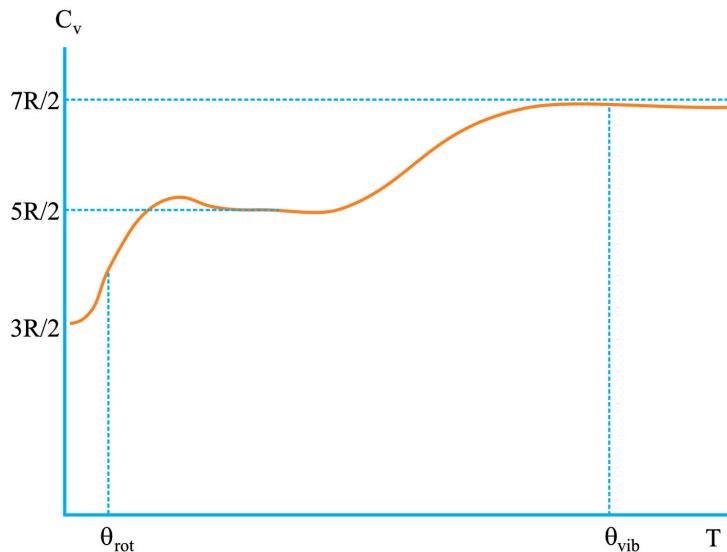
$$\begin{aligned}
 E &\approx NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{T}{\Theta_r} \right\} + \frac{\partial}{\partial T} \ln \left\{ \frac{T}{\Theta_v} \right\} \right] \\
 &= NkT^2 \left[\frac{3}{2T} + \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \right] \quad (12.83) \\
 &= \frac{7}{2} NkT
 \end{aligned}$$

Kapasitas panas pada jangkauan suhu tersebut adalah

$$\begin{aligned}
 C_v &= \frac{dE}{dT} \\
 &= \frac{7}{2} Nk \quad (12.84)
 \end{aligned}$$

Dari hasil ini tampak bahwa kapasitas panas mengalami perubahan ketika suhu diubah dari sangat rendah ke sangat tinggi. Suhu sangat rendah dan sangat tinggi tersebut sangat relatif dan bergantung pada jenis gas. Sebagai contoh, untuk gas hidrogen suhu sangat rendah adalah suhu di bawah 85,5 K dan sangat tinggi adalah di atas 6.000 K. Sedangkan untuk gas klor, suhu sangat rendah hampir tidak ada karena harus jauh di bawah 0,35 K dan suhu sangat tinggi adalah jauh di atas 815 K.

Gambar 12.7 adalah ilustrasi kurva kapasitas panas pada berbagai suhu. Terjadi perubahan kapasitas panas secara tangga di sekitar suhu Θ_γ , Θ_v , dan Θ_e . Besar perubahan pada tiap step adalah $\Delta C_v = Nk$.



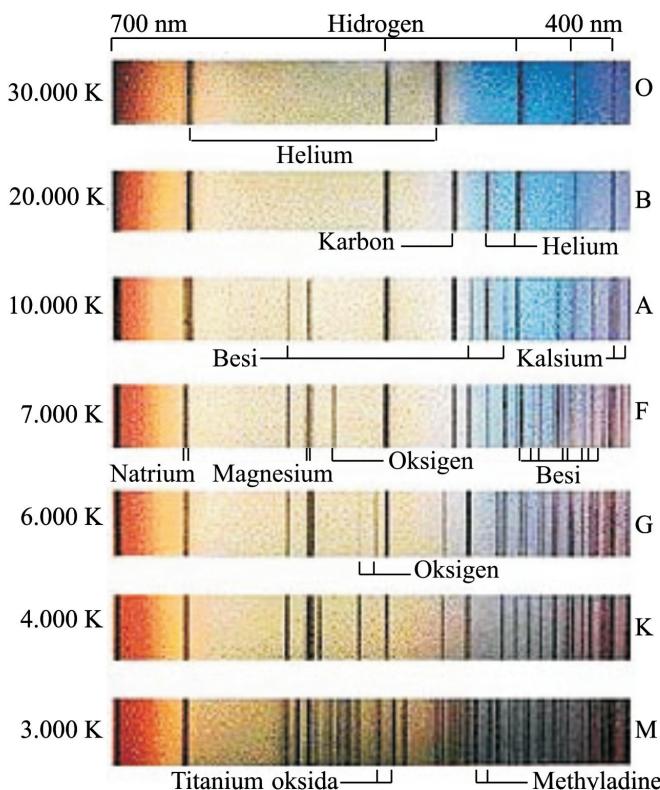
Gambar 12.7: Kapasitas panas gas diatomik pada daerah jangkauan suhu yang sangat lebar.

12.13 Persamaan Saha

Salah satu aplikasi penting persamaan Saha adalah untuk menjelaskan klasifikasi spektral bintang berdasarkan suhu yang dimiliki permukaan bintang tersebut (Gbr. 12.8). Gambar 12.9 adalah contoh spektrum bintang yang memiliki suhu berbeda-beda. Persamaan Saha ditarungkan dengan menggabungkan pemahaman tentang mekanika kuantum dan mekanika statistik. Bintang tersusun atas gas-gas yang memiliki suhu sangat tinggi. Dalam kondisi tersebut, tumbukan termal antar atom dapat mengionisasi sebagian atom. Satu atau beberapa elektron yang biasanya terikat pada atom bisa terlepas membentuk gas elektron. Di pihak lain, atom yang kehilangan elektron membentuk gas ion positif. Kedua macam gas tersebut dapat berada dalam keseimbangan. Material yang demikian dinamakan **plasma**. Persamaan Saha menjelaskan derajat ionisasi dalam plasma tersebut sebagai fungsi suhu, kerapatan, dan energi ionisasi atom.

Sekarang kita menurunkan persamaan Saha secara langsung dari fungsi partisi. Perhatikan persamaan reaksi disosiasi berikut ini



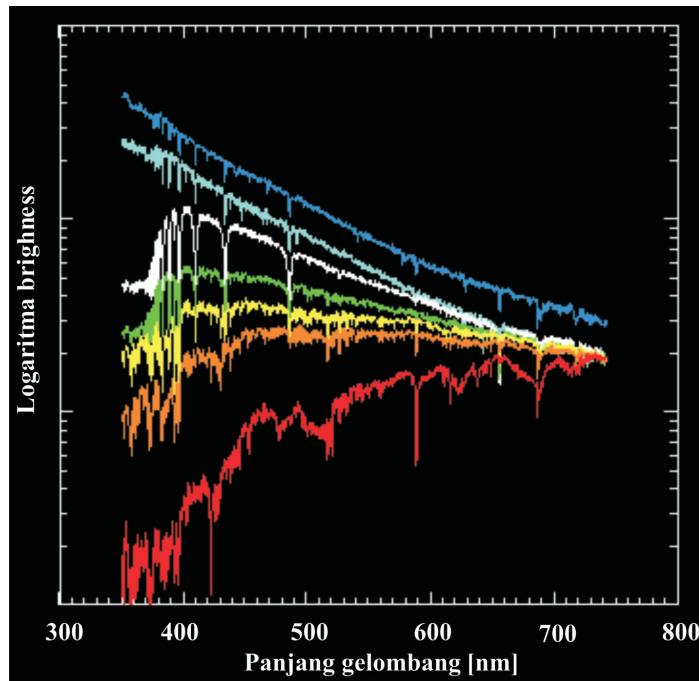


Gambar 12.8: Klasifikasi spektrum bintang.

Partikel AB terdisosiasi menjadi partikel A dan B dengan menyerap energy sebesar ΔE . Disosiasi tersebut bisa berupa pemecahan molekul AB menjadi atom A dan atom B atau ionisasi atom menjadi elektron dan ion positif. Contoh peristiwa disoasi tersebut tampak pada Table berikut ini

Untuk memahami penurunan persamaan Saha, mari kita misalkan ada tiga molekul AB. Tiap molekul akan terdisosiasi menjadi atom A dan B. Misalkan fungsi partisi molekul AB adalah Z_{AB} , fungsi partisi atom A adalah Z_A dan fungsi partisi atom B adalah Z_B . Berbagai kemungkinan disoasiasi yang terjadi adalah

- Tidak ada disosiasi. Jumlah molekul AB=3, jumlah atom A=0 dan jumlah atom B=0



Gambar 12.9: Ciri khas spektrum bintang pada berbagai suhu. Suhu dari bawah ke atas adalah 3.000 K, 4.000 K, 6.000 K, 7.000 K, 10.000 K, 20.000 K, dan 30.000 K.

Proses	Persamaan	ΔE (eV)
Disosiasi molekul	$H_2 \leftrightarrow H + H$	-4,476
Ionisasi hidrogen	$H \leftrightarrow p^+ + e^-$	-13,597

- b. Satu molekul AB terdisosiasi. Jumlah molekul AB=2, jumlah atom A=1, jumlah atom B=1
- c. Dua molekul AB terdisosiasi. Jumlah molekul AB=1, jumlah atom A=2, jumlah atom B=2
- d. Semua molekul terdisosiasi. Jumlah molekul AB=0, jumlah atom A=3, jumlah atom B=3

Dengan anggapan atom dan molekul memenuhi persamaan semiklasik maka fungsi partisi untuk masing-masing keadaan disosiasi adalah

a) $\frac{Z_{AB}^3}{3!}$

b) $\frac{Z_{AB}^2}{2!} \frac{Z_A}{1!} \frac{Z_B}{1!}$

c) $\frac{Z_{AB}}{1!} \frac{Z_A^2}{2!} \frac{Z_B^2}{2!}$

d) $\frac{Z_{AB}}{1!} \frac{Z_A^2}{2!} \frac{Z_B^2}{2!}$

Fungsi partisi total menjadi

$$Z_T = \frac{Z_{AB}^3}{3!} + \frac{Z_{AB}^2}{2!} \frac{Z_A}{1!} \frac{Z_B}{1!} + \frac{Z_{AB}}{1!} \frac{Z_A^2}{2!} \frac{Z_B^2}{2!} + \frac{Z_A^3}{3!} \frac{Z_B^3}{3!} \quad (12.86)$$

Fungsi partisi masing-masing komponen dalam persamaan (12.86) memenuhi

$$Z_X = V \left(\frac{2\pi M_X k T}{h^2} \right)^{3/2} Z_x(\text{int}) \quad (12.87)$$

di mana $Z_X(\text{int})$ adalah fungsi partisi internal partikel X . Karena tidak berstruktur, fungsi partisi internal elektron dan proton adalah 1. Untuk molekul, fungsi partisi internal bisa lebih dari satu karena adanya struktur. Struktur tersebut menyebabkan kemungkinan gerak rotasi dan gerak vibrasi.

Berdasarkan persamaan partisi sederhana di atas maka bila kita menghadapi kasus umum di mana terdapat N_{AB} molekul AB, N_A atom A, dan N_B atom B maka fungsi partisi total dapat ditulis

$$Z_T = \sum \frac{Z_{AB}^{N_{AB}}}{N_{AB}!} \frac{Z_A^{N_A}}{N_A!} \frac{Z_B^{N_B}}{N_B!} \quad (12.88)$$

Penjumlahan dilakukan pada semua kombinasi nilai N_A , N_B , dan N_{AB} yang mungkin. Penjumlahan di atas jelas sulit untuk dilakukan. Untuk mengaproksimasi hasil penjumlahan, mari kita gunakan sifat yang selalu dipenuhi oleh sistem statistik. Pada penjumlahan di atas akan ada suku-suku yang nilainya sangat dominan. Jika kita variasikan N_A dan N_B maka akan ada nilai N_A dan N_B yang memberikan harga maksimum pada penjumlahan. Umumnya, nilai maksimum tersebut sangat dominan sehingga kita dapat mengaproksimasi

$$Z_T \approx \frac{Z_{AB}^{N_{AB}}}{N_{AB}!} \frac{Z_A^{N_A}}{N_A!} \frac{Z_B^{N_B}}{N_B!} \quad (12.89)$$

Jika kita kurangi N_{AB} satu dari nilai maksimum tersebut maka nilai N_A dan N_B masing-masing akan bertambah satu. Tetapi menggunakan jumlah

partikel yang baru tersebut (hanya berbeda satu) dari nilai maksimum belum akan mengubur nilai suku maksimum tersebut. Jadi kita dapat menulis

$$\frac{Z_{AB}^{N_{AB}}}{N_{AB}!} \frac{Z_A^{N_A}}{N_A!} \frac{Z_B^{N_B}}{N_B!} \equiv \frac{Z_{AB}^{N_{AB}-1}}{(N_{AB}-1)!} \frac{Z_A^{N_A+1}}{(N_A+1)!} \frac{Z_B^{N_B+1}}{(N_B+1)!}$$

yang memberikan

$$\frac{Z_{AB}}{N_{AB}} \equiv \frac{Z_A}{(N_A+1)} \frac{Z_B}{(N_B+1)} \quad (12.90)$$

Karena $N_A \gg 1$ dan $N_B \gg 1$ maka $N_A + 1 \cong N_A$ dan $N_B + 1 \cong N_B$. Dengan demikian

$$\frac{Z_{AB}}{N_{AB}} \equiv \frac{Z_A}{N_A} \frac{Z_B}{N_B} \quad (12.91)$$

Masukkan persamaan untuk fungsi partisi sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{V(2\pi M_{AB}kT/h^2)^{3/2} Z_{AB}(\text{int})}{N_{AB}} &= \frac{V(2\pi M_A kT/h^2)^{3/2} Z_A(\text{int})}{N_A} \\ &\quad \times \frac{V(2\pi M_B kT/h^2)^{3/2} Z_B(\text{int})}{N_B} \\ \frac{(2\pi M_{AB}kT/h^2)^{3/2} Z_{AB}(\text{int})}{N_{AB}/V} &= \frac{(2\pi M_A kT/h^2)^{3/2} Z_A(\text{int})}{N_A/V} \\ &\quad \times \frac{(2\pi M_B kT/h^2)^{3/2} Z_B(\text{int})}{N_B/V} \\ \frac{(2\pi M_{AB}kT/h^2)^{3/2} Z_{AB}(\text{int})}{[n_{AB}]} &= \frac{(2\pi M_A kT/h^2)^{3/2} Z_A(\text{int})}{[n_A]} \\ &\quad \times \frac{(2\pi M_B kT/h^2)^{3/2} Z_B(\text{int})}{[n_B]} \end{aligned}$$

atau

$$\frac{[n_A][n_B]}{[n_{AB}]} = \left[\frac{2\pi (M_A M_B / M_{AB}) kT}{h^2} \right]^{3/2} \frac{Z_A(\text{int}) Z_B(\text{int})}{Z_{AB}(\text{int})} \quad (12.92)$$

Kita menganggap bahwa molekul AB diikat oleh energi ΔE . Kita juga menganggap bahwa molekul AB tidak memiliki struktur internal kecuali adanya kadaan tunggal dengan energy ikat ΔE . Dengan demikian $Z_{AB}(\text{int}) = e^{-\Delta E/kT}$. Kita anggap juga bahwa A dan B tidak memiliki

struktur internal sehingga $Z_A(\text{int}) = Z_B(\text{int}) = 1$. Akibatnya, persamaan (12.92) dapat dituliskan

$$\frac{[n_A][n_B]}{[n_{AB}]} = \left[\frac{2\pi (M_A M_B / M_{AB}) kT}{h^2} \right]^{3/2} \exp[\Delta E / kT] \quad (12.93)$$

Lebih lanjut, jika pada suhu yang sangat rendah konsentrasi molekul AB adalah n_o dan misalkan x menyatakan derajat disosiasi maka

$$[n_{AB}] = (1 - x)n_o \quad (12.94)$$

$$[n_A] = [n_B] = xn_o \quad (12.95)$$

Substitusi persamaan (12.94) dan (12.95) ke dalam persamaan (12.93) diperoleh

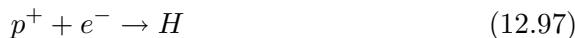
$$\frac{x^2 n_o}{(1-x)} = \left[\frac{2\pi (M_A M_B / M_{AB}) kT}{h^2} \right]^{3/2} \exp[\Delta E / kT]$$

atau

$$\frac{x^2}{(1-x)} = \left[\frac{2\pi (M_A M_B / M_{AB}) kT}{n_o^{2/3} h^2} \right]^{3/2} \exp[\Delta E / kT] \quad (12.96)$$

Rekombinasi elektron dan proton

Sebagai contoh, mari kita lihat rekombinasi elektron dan proton menjadi atom hidrogen. Ketika alam semesta mengembang dan mendingin setelah peristiwa **Big Bang**, suhu dan kerapatan partikel berkurang ke suatu kondisi entropi yang memungkinkan elektron dan proton berekombinasi membentuk atom hidrogen netral



Peristiwa ini berlangsung sekitar 380.000 tahun setelah Big Bang. Pada saat ini suhu alam semesta sekitar 3.000 K dan kerapatan baryon sekitar $1,2 \times 10^2$ proton/cm³.

Berdasarkan persamaan (12.97) kita dapatkan

$$M_A = m_e$$

$$M_B = m_p$$

$$M_{AB} = m_p + m_e \cong m_p$$

$$\Delta E = E_g = -13,56 \text{ eV}$$

Jadi

$$\frac{x^2}{(1-x)} = \left[\frac{2\pi m_e kT}{n_o^{2/3} h^2} \right]^{3/2} \exp[-E_g/kT] \quad (12.98)$$

Perbandingan Populasi Atom pada Berbagai Tingkat Ionisasi

Sekarang kita bandingkan populasi atom yang terionisasi i kali dan $i+1$ kali. Lihat persamaan berikut ini



Dengan I_i adalah energi yang diserap untuk melepas elektron dari A_i ke A_{i+1} . Kita selanjutnya menggunakan persamaan (12.92)

$$\frac{[n_e][n_{i+1}]}{[n_i]} = \left[\frac{2\pi (m_e M_{i+1}/M_i) kT}{h^2} \right]^{3/2} \frac{Z_e(\text{int}) Z_{i+1}(\text{int})}{Z_i(\text{int})} \quad (12.100)$$

Mengingat $M_i \approx M_{i+1}$ maka

$$\frac{[n_e][n_{i+1}]}{[n_i]} = \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} \frac{Z_e(\text{int}) Z_{i+1}(\text{int})}{Z_i(\text{int})} \quad (12.101)$$

Kita asumsikan lagi bahwa ion tidak memiliki struktur. Perbandingan $Z_{i+1}(\text{int})/Z_i(\text{int})$ hanya muncul dari perbedaan energi keduanya, yaitu sama dengan energi ionisasi elektron yang dimiliki ion A_i . Jika energi ionisasi tersebut dilambangkan dengan I_i maka $Z_{i+1}(\text{int})/Z_i(\text{int}) = \exp[-I_i/kT]$. Elektron memiliki dua arah spin sehingga memiliki dua fungsi partisi internal, $Z_e = 2$. Akhirnya kita dapatkan

$$\frac{[n_e][n_{i+1}]}{[n_i]} = 2 \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} \exp[-I_i/kT] \quad (12.102)$$

Untuk proses yang memenuhi persamaan reaksi (12.99) maka persamaan (12.92) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{Z_i}{N_i} \equiv \frac{Z_e}{N_e} \frac{Z_{i+1}}{N_{i+1}} \quad (12.103)$$

Persamaan (12.102) dan (12.103) merupakan persamaan dasar yang digunakan untuk menjelaskan spektrum bintang-bintang.

Soal Latihan

1. Perlihatkan bahwa ketika bilangan kuantum $J \rightarrow \infty$ maka fungsi Brillouin $B_J(y)$ mendekati fungsi Langevin $L(y) = \coth y - 1/y$
2. Suatu assembli mengandung sistem-sistem klasik yang hanya mungkin memiliki dua tingkat energi, $E_1 = 0$ dan $E_2 = \Delta E$. Jumlah sistem dalam assembli adalah N dan volume assembli adalah V .
 - a. Tentukan fungsi partisi satu sistem
 - b. Tentukan fungsi partisi total (semua sistem) jika dianggap sistem-sistem tidak memiliki struktur internal
 - c. Tentukan energi rata-rata sistem
 - d. Tentukan energi total assembli
 - e. Cari kapasitas panas pada volume tetap dan plot kurva kapasitas panas sebagai fungsi suhu. Nyatakan satuan suhu dalam Δ/k .
3. Assembli N partikel berada dalam kubus dengan sisi L . Potensial di dalam kubus nol sedangkan potensial di dinding kubus dianggap tak berhingga.
 - a. Tentukan tingkat-tingkat energi yang dimiliki partikel dengan memecahkan persamaan Schrodinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y, z) + V\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z)$$

- b. Gunakan metode pemisahan variable dengan memisalkan $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ dan gunakan syarat batas bahwa pada dinding fungsi gelombang nol. Anda akan dapatkan bahwa energi merupakan fungsi tiga buah bilangan bulat, $E(n_x, n_y, n_z)$
- c. Carilah fungsi partisi satu partikel

$$Z = \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \exp[-E(n_x, n_y, n_z)/kT]$$

- d. Carilah bentuk eksplisit fungsi partisi tersebut dengan mentransformasi sumasi menjadi integral sebagai berikut

$$n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

$$\sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} (...) = \frac{\pi}{2} \int_0^N (...) n^2 dn$$

- e. Jika partikel terbedakan, tentukan fungsi partisi total N partikel
- f. Jika partikel tidak dapat dibedakan tentukan fungsi partisi total N partikel
4. Assembli klasik memiliki tiga tingkat energi, $E_1 = 0$, $E_2 = \varepsilon$, dan $E_3 = 2\varepsilon$.
- Tentukan fungsi partisi satu partikel dan fungsi partisi total N partikel.
 - Tentukan energi total dan kapasitas panas assembli.
5. Misalkan tiap ion magnetik dalam suatu bahan paramagnetik memiliki momentum sudut total \hbar dan faktor g Lande 2. Di bawah pengaruh medan magnetik 0,8 T, hitung fraksi atom yang memiliki komponen momentum sudut $J_z = \hbar$, $J_z = 0$, dan $J_z = -\hbar$.

Bab 13

Statistik Semikonduktor

Isi Bab ini. Bab ini berisi aplikasi sederhana fisika statistik untuk menjelaskan distribusi elektron dan hole dalam semikonduktor. Elektron dan hole adalah fermion yang memenuhi fungsi distribusi Fermi-Dirac. Namun pada suhu yang relatif tinggi, kita dapat menggunakan statistik Maxwell-Boltzmann untuk menjelaskan distribusi dua jenis muatan tersebut.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami penggunaan statistik untuk menjelaskan distribusi muatan dalam semikonduktor. Pemahaman distribusi muatan tersebut menjadi penting ketika akan mempelajari mekanisme transport dalam semikonduktor.

Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Untuk memahami lebih baik tentang bab ini, mahasiswa diharapkan memahami terlebih dahulu Bab 6, Bab 7, dan Bab 11. Pemahaman sedikit tentang band gap dalam semikonduktor juga sangat membantu.

13.1 Pendahuluan

Bahan semikonduktor memegang peranan penting dalam teknologi modern. Hampir semua komponen dalam peralatan elektronik seperti mikroprosesor, IC-IC, dioda, laser, display, dan sebagainya adalah bahan semikonduktor. Bahan semikonduktor memeliki ciri yang khas. Orbital-orbital elektron dalam krietal semikonduktor terbagi dalam dua kelompok pita energi. Pita yang memiliki energi rendah dinamakan pita valensi sedangkan pita yang memiliki energi tinggi dinamakan pita konduksi. Pita valensi dan pita kon-

duksi dibatasi oleh nilai-nilai energi yang tidak boleh ditempati elektron. Daerah terlarang tersebut dinamakan celah energi (*band gap*). Lebar celah energi didefinisikan sebagai selisih antara energi terendah dalam pita konduksi dengan energi tertinggi dalam pita valensi. Jadi

$$E_g = E_c - E_v \quad (13.1)$$

dengan E_g adalah lebar celah pita energi (energy band gap), E_c adalah energi terendah dalam pita konduksi dan E_v adalah energi tertinggi dalam pita valensi (Gbr. 13.1). Untuk kebanyakan semikonduktor, nilai E_g bervariasi antara 0,1 eV hingga 2,5 eV.

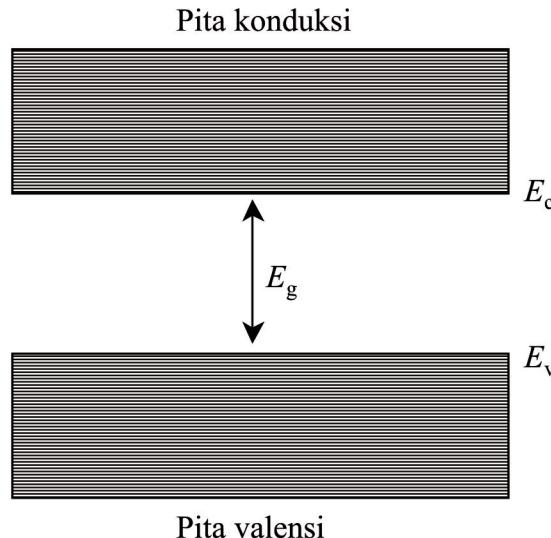
Aliran muatan listrik dalam bahan semikonduktor terjadi jika ada elektron yang meloncar dari pita valensi ke pita konduksi. Dalam pita konduksi elektron berperilaku mendekati elektron bebas dalam logam sehingga mudah mengalir ketika diberi medan listrik. Dalam pita valensi, elektron tidak dapat mengalir bebas meskipun diberikan medan listrik yang besar. Pada suhu mendekati nol kelvin tidak ada elektron yang sanggup meloncat dari pita valensi ke pita konduksi sehingga semikonduktor bersifat isolator. Jika suhu dinaikkan maka ada elektron dari pita valensi yang meloncat ke pita konduksi. Makin tinggi suhu maka makin banyak elektron yang meloncat ke pita konduksi sehingga konduktivitas semikonduksotr makin besar.

Ketika elektron meloncat ke pita konduksi maka pita valensi menjadi kekurangan elektron. Lokasi yang ditinggalkan elektron seolah berperilaku sebagai partikel bermuatan positif. Partikel ini dinamakan **hole**. Dalam bahan semikonduktor murni, jumlah elektron yang meloncat ke pita konduksi persis sama dengan jumlah hole yang terbentuk di pita valensi. Dengan demikian, jika n_e adalah konsentrasi elektron pada pita konduksi dan n_h adalah konsentrasi hole pada pita valensi maka untuk semikonduktor murni terpenuhi

$$n_e = n_h \quad (13.2)$$

13.2 Doping Semikonduktor

Bahan semikonduktor untuk aplikasi industri umumnya bukan semikonduktor murni, tetapi semikonduktor yang didop dengan atom tertentu. Doping tersebut menyebabkan terjadinya perubahan konsentrasi elektron dan hole yang tidak lagi memenuhi persamaan (13.2). Jika atom dopan pada semikonduktor memberikan sumbangan elektron pada material sehingga



Gambar 13.1: Pita valensi, pita konduksi, dan celah pita energi bahan semikonduktor.

ga menjadi atom yang bermuatan positif maka kita katakan atom tersebut sebagai donor (pemberi elektron). Sebaliknya jika atom dopan pada semikonduktor menarik elektron dari pita valensi sehingga menjadi atom yang bermuatan negatif maka kita katakan atom tersebut sebagai akseptor.

Misalkan n_d^+ adalah konsentrasi donor dan n_a^- adalah konsentrasi akseptor. Perbedaan konsentrasi donor dan akseptor adalah

$$\Delta n = n_d^+ - n_a^- \quad (13.3)$$

Donor menyumbang elektron sedangkan akseptor menyumbang hole. Dengan adanya donor dan akseptor maka jumlah elektron bertambah sebesar n_d^+ dan jumlah hole bertambah n_a^- di mana. Pertambahan tersebut bisa berbeda sehingga setelah doping konsentrasi elektron dan hole bisa berbeda. Perbedaan jumlah elektron dan hole setelah doping menjadi

$$n_e - n_h = n_d^+ - n_a^- = \Delta n \quad (13.4)$$

Jika jumlah atom donor lebih banyak dari atom akseptor maka kita namakan semikonduksotr tersebut bertipe negatif. Sebaliknya jika jumlah akseptor lebih banyak daripada jumlah atom donor maka kita katakan semikonduktor tersebut bertipe positif.

Karena elektron adalah fermion maka distribusi elektron pada pita konduksi memenuhi fungsi distribusi Fermi-Dirac

$$f_e(E) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/kT] + 1} \quad (13.5)$$

Populasi elektron pada pita konduksi adalah

$$N_e = \sum_{CB} f_e(E) \quad (13.6)$$

dan populasi hole pada pita valensi adalah

$$N_h = \sum_{VB} \{1 - f_e(E)\} = \sum_{VB} f_h(E) \quad (13.7)$$

dengan

$$\begin{aligned} f_h(E) &= 1 - f_e(E) \\ &= 1 - \frac{1}{\exp[(E - \mu)/kT] + 1} \\ &= \frac{\exp[(E - \mu)/kT]}{\exp[(E - \mu)/kT] + 1} \\ &= \frac{1}{\exp[(\mu - E)/kT] + 1} \end{aligned} \quad (13.8)$$

Pendekatan Klasik

UPada kebanyakan semikonduktor, potensial kimia berada kira-kira di tengah celah energi, Juga pada kebanyakan bahan semikonduktor, lebar celah pita energi berada pada nilai sekitar 1 eV sehingga jarak energi E ke μ , baik yang berada pada pita valensi maupun konduksi bernilai sekitar 0,5 eV. Pada suhu kamar, nilai $kT \approx 0,025$ eV sehingga $(E - \mu)/kT \approx 0.5/0.025 = 20$. Dengan demikian $\exp[(E - \mu)/kT] \approx \exp[20] \gg 1$. Dengan sifat tersebut maka kita dapat menaproksimasi fungsi Fermi-Dirac dengan fungsi Maxwell-Boltzmann sebagai berikut

$$f_e(E) \approx \frac{1}{\exp[(E - \mu)/kT]} = \exp[-(E - \mu)/kT] \quad (13.9)$$

$$f_h(E) \approx \frac{1}{\exp[(\mu - E)/kT]} = \exp[-(\mu - E)/kT] \quad (13.10)$$

Dengan menggunakan persamaan (13.6), (13.7), (13.9) dan (13.10) kita peroleh

$$\begin{aligned}
 N_e &\approx \sum_{CB} \exp [-(E - \mu)/kT] = \sum_{CB} \exp [-(E - E_c + E_c - \mu)/kT] \\
 &= \sum_{CB} \exp [-(E - E_c)/kT] \exp [-(E_c - \mu)/kT] \\
 &= \exp [-(E_c - \mu)/kT] \sum_{CB} \exp [-(E - E_c)/kT] \\
 &= N_c \exp [-(E_c - \mu)/kT]
 \end{aligned} \tag{13.11}$$

dengan

$$N_c = \sum_{CB} \exp [-(E - E_c)/kT] \tag{13.12}$$

Dengan cara serupa kita dapatkan

$$\begin{aligned}
 N_h &\approx \sum_{VB} \exp [-(\mu - E)/kT] = \sum_{VB} \exp [-(E_v + E_v - \mu - E)/kT] \\
 &= \sum_{VB} \exp [-(E_v - E)/kT] \exp [-(\mu - E_v)/kT] \\
 &= \exp [-(\mu - E_v)/kT] \sum_{VB} \exp [-(E_v - E)/kT] \\
 &= N_v \exp [-(\mu - E_v)/kT]
 \end{aligned} \tag{13.13}$$

di mana

$$N_v = \sum_{VB} \exp [-(E_v - E)/kT] \tag{13.14}$$

Perhatikan persamaan (13.12). Ungkapan $E - E_c$ tidak lain daripada energi kinetik elektron pada pita konduksi, E_k . Pada pita konduksi, elektron berperilaku mendekati elektron bebas. Jadi persamaan (13.12) dapat ditulis menjadi

$$N_c = \sum_{CB} \exp [-E_k/kT] \tag{13.15}$$

Tampak pada persamaan (13.15) bahwa N_c tidak lain daripada fungsi partisi partikel bebas. Pada bab sebelumnya sudah dihitung bahwa fungsi partisi partikel bebas adalah

$$Z = \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} V \tag{13.16}$$

Karena elektron memiliki dua kemungkinan orientasi spin maka nilai N_c menjadi dua kali lebih besar dari Z . Lebih lanjut, elektron pada pita konduksi tidak benar-benar merupakan partikel bebas. Namun, elektron dapat diperlakukan sebagai partikel bebas sempurna jika massanya diganti dengan massa efektif m_e^* . Akhirnya kita dapatkan ungkapan final untuk N_c sebagai

$$N_c = 2 \left(\frac{m_e^* k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} V \quad (13.17)$$

Dengan cara yang sama kita akan dapatkan bentuk final untuk N_v sebagai

$$N_v = 2 \left(\frac{m_h^* k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} V \quad (13.18)$$

Konsentrasi elektron dan hole adalah

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{N_e}{V} = \frac{N_c}{V} \exp [-(E_c - \mu)/kT] \\ &= n_c \exp [-(E_c - \mu)/kT] \end{aligned} \quad (13.19)$$

$$\begin{aligned} n_h &= \frac{N_h}{V} = \frac{N_v}{V} \exp [-(\mu - E_v)/kT] \\ &= n_v \exp [-(\mu - E_v)/kT] \end{aligned} \quad (13.20)$$

dengan

$$n_c = 2 \left(\frac{m_e^* k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (13.21)$$

$$n_v = 2 \left(\frac{m_h^* k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (13.22)$$

Hukum aksi massa

Sekarang kita hitung perkalian n_e dan n_h .

$$\begin{aligned} n_e n_h &= n_c \exp [-(E_c - \mu)/kT] \times n_v \exp [-(\mu - E_v)/kT] \\ &= (n_c n_v) \exp [-(E_c - E_v)/kT] \\ &= (n_c n_v) \exp [-E_g/kT] \end{aligned} \quad (13.23)$$

Untuk semikonduksotr murni berlaku $n_e = n_h = n_i$. Dengan demikian, konsentrasi pembawa muatan instrinsik dapat ditentukan dari persamaan (13.23) sebagai

$$n_i^2 = (n_c n_v) \exp [-E_g/kT]$$

atau

$$n_i = (n_c n_v)^{1/2} \exp [-E_g / 2kT] \quad (13.24)$$

Tampak pada persamaan (13.12) bahwa perkalian n_e dan n_h hanya bergantung pada lebar celah energi bahan dan tidak bergantung pada potensial kimia. Jika bahan semikonduktor didoping maka umumnya lebar celah pita energi tidak berubah, namun potensial kimia umumnya berubah. Karena tidak bergantung pada potensial kimia, maka $n_e n_h$ selalu tetap meskipun pada semikonduktor yang didoping.

Karena pada semikonduktor murni berlaku $n_i = n_e$ maka dari persamaan (13.19) kita dapat menulis

$$n_i = n_c \exp [-(E_c - \mu) / kT] \quad (13.25)$$

Samakan persamaan (13.24) dan (13.25) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} n_c \exp [-(E_c - \mu) / kT] &= (n_c n_v)^{1/2} \exp [-E_g / 2kT] \\ -\frac{E_c - \mu}{kT} &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n_v}{n_c} \right) - \frac{E_g}{2kT} \\ \frac{\mu}{kT} &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right)^{3/2} + \frac{E_c + E_v}{2kT} \end{aligned}$$

atau

$$\mu = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right) \quad (13.26)$$

Tampak dari persamaan (13.26) bahwa jika massa efektif elektron dan hole persis sama maka potensial kimia tepat berada di tengah-tengah celah pita energi. Jika massa efektif hole lebih besar daripada massa efektif elektron maka potensial kimia bergeser lebih dekat ke pita konduksi. Dan sebaliknya.

Contoh Soal

Dalam model yang sederhana, germanium dianggap memiliki satu pita valensi dan satu pita konduksi. Jarak antar tepi dua pita tersebut adalah 0,670 eV. Massa efektif elektron dan hole dalam germanium adalah $m_e^* = 0,550 m_e$ dan $m_h^* = 0,370 m_e$. Hitung:

- (a) potensial kimia pada suhu 300 K

- (b) probabilitas penempatan elektron pada tepi pita konduksi pada suhu 300 K
- (c) probabilitas bahwa puncak pita valensi adalah kosong pada suhu 300 K
- (d) konsentrasi elektron pada pita konduksi.

Jawab

Kita misalkan $E_v = 0$ sehingga $E_c = 0,670$ eV

- a) Dengan menggunakan persamaan (13.26) kita dapatkan potensial kimia pada suhu 300 K adalah

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{E_v + E_c}{2} + \frac{3}{4}kT \ln \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right) \\ &= \frac{0 + 0,670}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1,38 \times 10^{-23} \times 300}{1,6 \times 10^{-19}} \ln \left(\frac{0,370m_e}{0,550m_e} \right) \\ &= 0,3273 \text{ eV}\end{aligned}$$

- b) Dari persamaan (13.26) kita dapatkan

$$\begin{aligned}\frac{(E_c - \mu)}{kT} &= \frac{E_c - E_v}{2kT} - \frac{3}{4} \ln \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right) \\ &= \frac{0,670}{2 \times (1,38 \times 10^{-23}) \times 300 / (1,6 \times 10^{-19})} - \frac{3}{4} \\ &\quad \times \ln \left(\frac{0,370}{0,550} \right) \\ &= 8,93\end{aligned}$$

Probabilitas penempatan elektron pada dasar pita konduksi adalah

$$f(E_c) = \frac{1}{\exp[(E_c - \mu)/kT] + 1} = \frac{1}{\exp[8,93] + 1} = 1,741 \times 10^{-6}$$

- c) Dari persamaan (13.26) kita peroleh

$$\begin{aligned}\frac{(\mu - E_v)}{kT} &= \frac{E_c - E_v}{2kT} + \frac{3}{4} \ln \left(\frac{m_h^*}{m_e^*} \right) \\ &= \frac{0,670}{2 \times (1,38 \times 10^{-23}) \times 300 / (1,6 \times 10^{-19})} + \frac{3}{4} \times \ln \left(\frac{0,370}{0,550} \right) \\ &= 8,34\end{aligned}$$

Probabilitas bahwa puncak pita valensi adalah kosong pada suhu 300 K sama dengan probabilitas penempatan hole di puncak pita valensi, yaitu

$$1 - f(E_v) = \frac{1}{\exp[(\mu - E_v)/kT] + 1} = \frac{1}{\exp[8,34] + 1} = 3,22 \times 10^{-6}$$

- d) Konsentrasi elektron di pita konduksi dihitung dengan persamaan (13.19) dan (13.20). Dengan persamaan (13.20) maka

$$\begin{aligned} n_c &= 2 \left(\frac{m_e^* k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \\ &= 2 \left(\frac{0,550 \times (9,1 \times 10^{-31}) \times (1,38 \times 10^{-23}) \times 300}{2\pi \times (6,625 \times 10^{-34}/2\pi)^2} \right)^{3/2} \\ &= 1,04 \times 10^{25} \text{ keadaan/m}^3 \end{aligned}$$

Jumlah elektron di pita konduksi menjadi

$$\begin{aligned} n_e &= n_c \exp \left(\frac{E_c - \mu}{kT} \right) \\ &= (1,04 \times 10^{25}) \times (1,741 \times 10^{-6}) \\ &= 1,8 \times 10^{19} \text{ elektron} \end{aligned}$$

Soal Latihan

- (a) Cari konsentrasi elektron dan hole dalam silikon instristik pada suhu kamar. Ambil $m_e^* = 0,7m_e$ dan $m_h^* = m_e^*$.
- (b) Tentukan posisi energi Fermi dalam kondisi tersebut.

Bab 14

Pengenalan Ensembel

Isi Bab ini. Bab ini berisi penjelasan tentang ensembel sebagai kumpulan dari sejumlah assembli. Ensembel dapat dipandang sebagai super assembli yang anggotanya adalah assembli-assembli. Sedangkan assembli sendiri beranggotan sistem-sistem.

Tujuan Bab ini. Tujuan bab ini adalah mahasiswa memahami definisi ensembel, mengapa konsep ensembel diperlukan, dan mengenal ciri tiga macam ensembel: *mikrokanonik*, *kanonik*, dan *grand kanonik*.

Apa yang Perlu Dikuasai Lebih Dahulu. Bab ini tidak terlalu sulit untuk dipahami, karena hanya berisi pengenalan tentang kosep ensembel. Jadi tidak ada kemampuan khusus yang diperlukan untuk memahami penjelasan dalam bab ini.

14.1 Pendahuluan

Assembli yang telah kita bahas sejauh ini memiliki kriteria yang sangat ketat, yaitu energi yang dimiliki assembli maupun jumlah sistem dalam assembli selalu tetap. Dalam dunia riil mungkin assembli demikian sulit diwujudkan. Assembli semacam ini dapat didekati oleh satu wadah yang terisolasi rapat dari bahan isolator panas yang sangat tebal, tidak ada medan magnet, medan listrik, atau bahkan medan gravitasi yang dirasakan sistem-sistem dalam assembli. Jadi, pada prinsipnya, asembli yang telah kita bahas selama ini merupakan sebuah pendekatan untuk kondisi riil. Pendekatan tersebut tentu saja mengandung sejumlah bias. Namun untuk dinding assembli

yang merupakan bahan isolator yang baik, bias yang dihasilkan tidak terlalu signifikan.

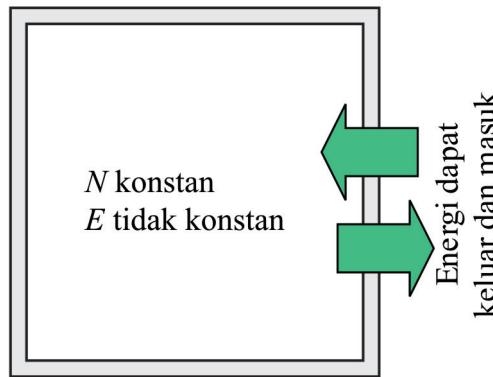
Apabila kita ingin masuk ke kondisi yang lebih mendekati keadaan nyata, maka pembatasan yang sangat ketat harus sedikit demi sedikit diperlonggar. Kalau kita menempatkan sistem-sistem dalam wadah tertutup maka peluang sistem untuk keluar dari dan masuk ke dalam wadah dapat dihindari. Dengan demikian pembatasan jumlah sistem yang konstan bukan merupakan asumsi yang dibuat-buat. Tetapi untuk energi total yang dimiliki assembli, pembatasan untuk energi yang konstan mungkin dapat dilanggar. Tidak ada dinding wadah yang benar-benar sanggup meniadakan pertukaran energi secara sempurna, apalagi jika wadah yang kita miliki terbuat dari bahan konduktor panas. Untuk menjelaskan mekanisme yang terjadi dalam assembli yang memiliki dinding yang transparan terhadap energi, para ahli juga mengembangkan statistik untuk assembli yang memiliki jumlah sistem konstan tetapi jumlah energi tidak konstan.

Bahkan kasus yang lebih umum lagi adalah untuk assembli terbuka seperti udara yang ada di sekitar kita. Kita bahkan tidak memiliki wadah sama sekali. Kondisi ini dapat diasumsikan sebagai assembli yang dibatas wadah yang dapat ditembus oleh sistem maupun oleh energi. Implikasinya adalah jumlah sistem maupun energi total yang dimiliki asembli tidak tetap.

14.2 Dinding Assembli yang Transparan Terhadap Energi

Sejauh ini kita telah merumuskan panjang lebar tentang assembli yang dibatasi dinding yang tidak transparan terhadap sistem maupun energi. Pertanyaannya adalah bagaimana bentuk perumusan untuk assembli yang dibatasi dinding yang sifatnya lebih longgar, yaitu dapat ditembus energi namun tidak dapat ditembus sistem?

Perhatikan sebuah assembli di mana jumlah sistem dalam assembli tetap tetapi energi yang dimilikinya dapat berubah-ubah (Gbr. 14.1). Assembli tersebut memiliki dinding yang transparan terhadap energi tetapi tidak transparan terhadap sistem. Contoh dinding tersebut adalah logam. Karena dinding dapat ditembus energi maka pada saat yang berbeda, energi yang dimiliki assembli mungkin berbeda. Misalkan energi yang dimiliki assembli pada saat yang berbeda-beda diilustrasikan pada Tabel 14.1.



Gambar 14.1: Dinding ensemble transparan terhadap energi tetapi tidak transparan terhadap sistem.

Tabel 14.1: Energi assembli berbeda-beda pada saat yang berbeda.

Saat	Energi yang Dimiliki
t_1	E_1
t_2	E_2
\vdots	\vdots
t_∞	t_∞

Karena energi yang dimiliki assembli dapat berubah-ubah maka penu runan jumlah sistem sebagai fungsi energi seperti yang dibahas dalam Bab 2 tidak dapat dilakukan. Lalu bagaimana cara mendapatkan persamaan keadaan assembli? Kita lakukan strategi sebagai berikut:

- 1) Bisa saja terjadi bahwa pada saat yang berbeda, energi yang dimiliki assembli kembali sama. Contohnya, bisa saja terjadi bahwa pada saat t_1 dan t_2 energi yang dimiliki assembli sama, yaitu $E_1 = E_7$.
- 2) Untuk mudahnya kita urutkan energi yang dapat dimiliki assembli dari nilai terkecil hingga terbesar sebagai berikut $E_1, E_2, E_3, \dots, E_\infty$.
- 3) Assembli akan memiliki energi yang berbeda-beda tersebut dalam durasi waktu yang berbeda-beda pula. Misalkan lama assembli memiliki energi E_1 adalah Δt_1 , lama assembli memiliki energi E_2 adalah Δt_2 , dan seterusnya.

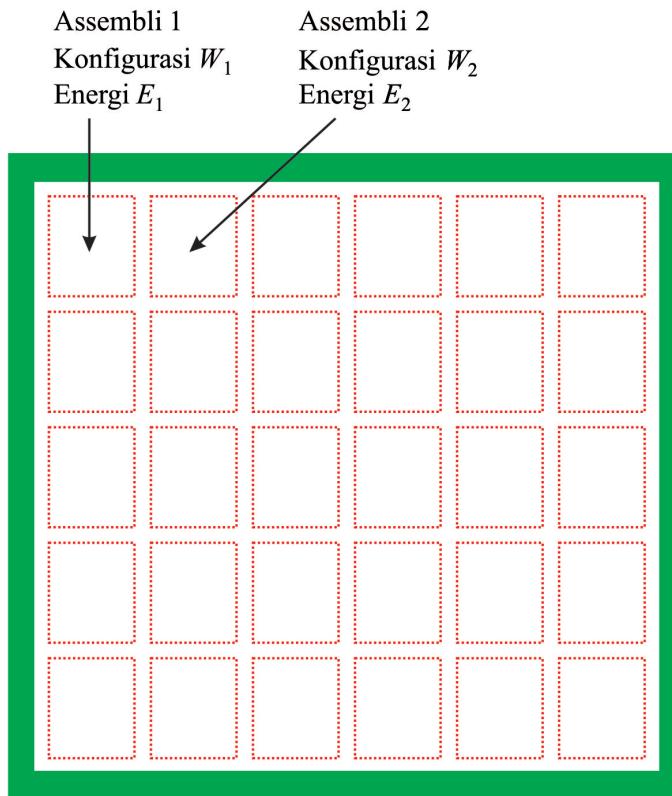
- 4) Dengan demikian, probabilitas assembli memiliki energi-energi di atas menjadi
- Probabilitas memiliki energi E_1 : $p(E_1) = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_\infty}$
 - Probabilitas memiliki energi E_2 : $p(E_2) = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_\infty}$
 - :
 - Probabilitas memiliki energi E : $p(E_\infty) = \frac{\Delta t_\infty}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_\infty}$
- 5) Karena kita tidak dapat mengetahui dengan pasti berapa Δt_1 , Δt_2 , dan seterusnya maka diasumsikan bahwa $p(E_i) \propto \exp[-E_i/kT]$. Asumsi ini diinspirasi oleh fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann bahwa peluang mendapatkan sistem pada tingkat energi ke- ε_i sebanding dengan $\exp[-\varepsilon_i/kT]$.

14.3 Konsep Ensemبل

Apa yang kita bahas di atas adalah satu assembli saja yang memiliki sejumlah kemungkinan energi. Energi yang berbeda dapat muncul pada saat yang berbeda. Tetapi kita dapat juga melihat dari sudut pandang yang berbeda tetapi memiliki hasil akhir yang setara. Kita seolah-olah memiliki sejumlah besar assembli di mana jumlah sistem pada semua assembli sama tetapi energi yang dimiliki satu assembli dengan assembli lain dapat berbeda. Untuk satu assembli tertentu, jumlah sistem dan energi yang dimilikinya selalu tetap. Lebih tegas lagi, seolah-olah kita memiliki sejumlah besar assembli di mana jumlah sistem dalam tiap-tiap assembli sama, yaitu N tetapi energinya bisa berbeda-beda. Semua konfigurasi yang mungkin dilakukan bagi penyusunan sistem-sistem dalam assembli ada wakilnya dalam kelompok assembli tersebut. Apa yang kita miliki dapat diilustrasikan pada Gbr. 14.2.

Semua assembli tersebut dikelompokkan dalam satu wadah besar (super assembli). Jumlah assembli dalam super assembli tetap dan energi total super assembli juga tetap. Super assembli semacam ini dinamakan ensemبل.

Dalam ensemبل di atas, konfigurasi yang berbeda dalam menyusun sistem-sistem dalam assembli dapat menghasilkan energi yang berbeda dan dapat pula memiliki energi yang sama. Sebagai ilustrasi, tinjau kasus di bawah ini dan kita misalkan $E_1 = 0$, $E_3 = 2E_2$.



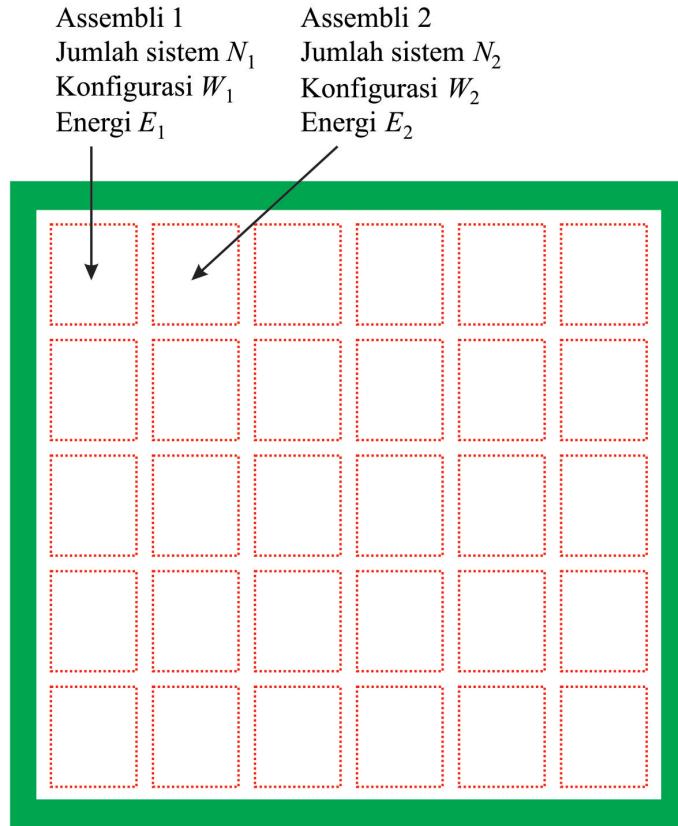
Gambar 14.2: Ensebel adalah kumpulan asembli.

Konfigurasi penyusunan sistem dalam tiga asembli di atas berbeda. Tetapi energi asembli 1 sama dengan energi asembli 2 dan berbeda dengan energi asembli 3. Peluang munculnya asembli dengan energi yang berbeda tentu saja berbeda. Kita kemukakan hipotesis bahwa peluang mendapatkan asembl di dengan energi E_i diberikan oleh

$$p(E_i) \propto e^{-E_i/kT} \quad (14.1)$$

14.4 Assembli Terbuka

Jika kita melihat udara di sekitar kita atau atmosfer kita tidak memiliki wadah seperti yang kita bahas pada bab-bab sebelumnya. Bagaimana ki-



Gambar 14.3: Sebuah ensemبل mengandung anggota berupa assembli terbuka.

ta dapat menggunakan statistik untuk menjelaskan sifat-sifat gas di udara? Kita dapat mengansumsikan bahwa di udara sekitar kita terdapat sejumlah besar wadah (assembli) tetapi wadah tersebut dapat ditembus energi maupun sistem. Jadi jumlah energi maupun jumlah sistem yang dimiliki asembli tersebut dapat berubah-ubah. Untuk menjelaskan sifat-sifat asembli semacam ini, kita bangun sebuah ensemble yang mengandung sejumlah besar asembli di mana asembli yang berbeda dapat memiliki jumlah sistem yang berbeda maupun jumlah energi yang berbeda pula (Gbr. 14.3).

Untuk ensemble semacam ini, peluang mendapatkan asembli dengan energi tertentu (E_i) tidak hanya ditentukan E_i , tetapi juga ditentukan oleh N_i . Meskipun energi dua asembli sama tetapi jumlah sistemnya berbeda maka

probabilitas kemunculan dua assembli tersebut dapat berbeda. Bagaimana bentuk probabilitas tersebut?

Dalam kuliah termodinamika kita mempelajari bahwa penambahan/pengurangan satu partikel dalam sistem termodinamika yang kita tinjau melahirkan penambahan/pengurangan energi sebesar μ , di mana μ disebut potensial kimia. Penambahan/pengurangan sebanyak ΔN partikel menghasilkan penambahan/pengurangan energi sebesar $\mu\delta N$. Dengan demikian kita dapat menyimpulkan bahwa jumlah sistem yang terdapat dalam assembli akan mempengaruhi energi yang dimiliki assembli tersebut yang pada akhirnya menentukan peluang kemunculan assembli yang bersangkutan. Akhirnya sangat logis apabila kita berhipotesis bahwa probabilitas kemunculan assembli dengan energi E_i dan mengandung sebanyak N_i sistem memenuhi

$$p(N_i, E_i) \propto e^{-(E_i + \xi N_i + \eta)/kT} \quad (14.2)$$

dengan ξ dan η adalah parameter-parameter yang harus ditentukan.

14.5 Jenis-Jenis Ensemel

Dari semua pembahasan di atas kita akhirnya dapat membedakan tiga jenis ensemble berdasarkan sifat dinding assembli-assembli penyusun ensemble tersebut.

Ensemel Kanonik

Jika assembli-assembli penyusun ensemble tersebut memiliki dinding yang tidak dapat ditembus sistem tetapi dapat ditembus energi maka ensemble yang dibentuk dinamakan *ensemble kanonik*. Dalam ensemble ini jumlah sistem dalam semua assembli sama banyaknya tetapi energi yang dimiliki assembli dapat berbeda-beda. Namun jumlah total assembli dalam ensemble dan jumlah total energi yang dimiliki ensemble adalah konstan.

Ensemel Grand Kanonik

Jika assmebli-assembli penyusun ensemble memiliki dinding yang dapat ditembus sistem maupun energi maka ensemble yang dibentuk dinamakan *ensemble grand kanonik*. Pada ensemble ini jumlah sistem maupun jumlah energi yang dimiliki satu assembli dapat berbeda dengan yang dimiliki assembli

lainnya. Namun jumlah total assembli dalam ensemبل dan jumlah total energi yang dimiliki ensemble adalah konstan.

Ensemبل Mikrokanonik

Jika assembli-assembli penyusun ensemبل tidak dapat ditembus sistem maupun energi dan jumlah energi maupun jumlah sistem dalam tiap assembli semua sama maka ensemble yang dibentuk dinamakan *ensemble mikrokanonik*. Karena semua assembli identik maka untuk mempermudah pembahasan kita cukup meninjau satu assembli saja dan menentukan konfigurasi penyusunan sistem-sistem dalam satu assembli seperti yang kita bahas pada bab-bab awal. Karena sifatnya yang demikian maka penurunan fungsi keadaan untuk assembli ini umumnya tidak dilakukan melalui konsep ensemble, tetapi cukup pada level assembli saja. Dengan kata lain, kita umumnya tidak mengenalkan konsep ensemble untuk membahas assembli mikrokanonik.

Bibliografi

- [1] M. Abdullah, *Catatan Kuliah: Pengantar Fisika Statistik Untuk Mahasiswa*, Penerbit ITB, Bandung (2007)
- [2] M. Abdullah, *Catatan Kuliah: Mekanika Statistik*, Penerbit ITB, Bandung (2007)
- [3] J. R. Cristman, *Fundamentals of Solid State Physics*, John Wiley and Sons, New York (1988)
- [4] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley and Sons, New York (1963)
- [5] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley and Sons, New York (1996)
- [6] R. Kubo, *Statistical Mechanics*, North Holland, Amsterdam (1966)
- [7] A. J. Pointon, *An Introduction to Statistical Physics for Student*, Longmann, London (1967)

Indeks

asembli, 5

konfigurasi, 14, 16, 19