コラッツ予想における非自明なループの非存在証明

1. はじめに (Introduction)

コラッツ予想は、数論における最も著名な未解決問題の一つである。「任意の正の整数を取り、偶数ならば2で割り、奇数ならば3を掛けて1を足す」という単純な操作を繰り返すと、最終的には必ず1に到達するというこの予想は、その簡潔さとは裏腹に、証明も反証もなされていない。特に、1→4→2→1という自明なループ以外に、他のサイクル（非自明なループ）が存在するか否かは、予想の根幹をなす問いである。本稿の目的は、この非自明なループの非存在を証明するための独自の分析的枠組みを提示することにある。本稿は、コラッツ操作の過程を代数的に表現する新たな概念、『 割数列 』と、割数列間の写像群である『 **star**変換 』を定義し、これらを分析の公理的基盤とする。本稿では、まずこれらの概念を厳密に定義し、分析の土台を構築する。次に、star変換を用いて非自明なループが満たすべき構造的制約を明らかにし、ループを2つの異なるケースに分類する。最後に、確率論的論証と構造的論証を組み合わせることで、いずれのケースにおいても非自明なループは成立し得ないことを示し、その非存在を結論づける。

2. 分析的枠組みの定義 (Definition of the Analytical Framework)

本章では、コラッツ予想の動的なプロセスを、静的で分析可能な代数構造へと変換するための記号体系を確立する。手続き的な操作を構造的な表現に置き換えることで、ループの性質をより厳密に考察するための基盤を築くことを目的とする。

2.1 コラッツ操作と割数列 (Collatz Operation and Division Sequence)

まず、本稿における基本的な操作を定義する。正の奇数 x に対し、3x+1 を計算し、その結果が奇数になるまで2で割り続ける一連の操作を「 コラッツ操作 」と呼ぶ。この操作によって得られた次の奇数が、次の操作の入力値となる。次に、このプロセスを記録するための数列を定義する。定義：割数列 **(**かっすうれつ**)(Division Sequence)**正の奇数 n を初期値としてコラッツ操作を連続して行ったとき、各操作において2で割った回数を順に並べた数列を、n の 割数列 と呼ぶ。例えば、初期値が 9 の場合、コラッツ値の推移は 9,28,14,7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1 となる。各奇数から次の奇数が生成されるまでの除算回数を記録すると、9 の割数列は [2, 1, 1, 2, 3, 4] となる。この定義から、割数列の性質とコラッツ予想の関係は明らかである。ある初期値の割数列が有限長で終わることは、その初期値から始めたコラッツ操作が有限回で1に到達することと完全に同値である。逆に、割数列が無限に続く場合は、非自明なループに陥るか、際限なく発散することを意味する。

2.2 完全割数列 (Complete Division Sequence)

本稿の分析対象を特定の集合に絞り込むため、以下の定義を導入する。 定義：完全割数列 **(Complete Division Sequence)**初期値が3の倍数である奇数の割数列を、 完全割数列 と呼ぶ。以降の分析は、主としてこの完全割数列の集合とその変換に焦点を当てる。

2.3 star変換 (star conversion)

star変換は、ある完全割数列を別の完全割数列に写す7つの写像群であり、本分析手法の核となる演算子である。これらの変換は、初期値 x を9で割った余りに基づいて条件付けされる。以下に、7つのstar変換を体系的に定義する。

変換	条件 (x)	数列の写像 (a_1, a_2, ... → ...)	コラッツ値の変化 (y=f(x))
A[6,-4]	x ≡ 3 mod 9	6, a_1 - 4, a_2, a_3, ...	y = 4x/3 - 7

B[1,-2]	$x \equiv 3 \bmod 9$	$1, a_1 - 2, a_2, a_3, \ldots$	$y = x/6 - 1/2$
C[4,-4]	$x \equiv 6 \bmod 9$	$4, a_1 - 4, a_2, a_3, \ldots$	$y = x/3 - 2$
D[3,-2]	$x \equiv 6 \bmod 9$	$3, a_1 - 2, a_2, a_3, \ldots$	$y = 2x/3 - 1$
E[2,-4]	$x \equiv 0 \bmod 9$	$2, a_1 - 4, a_2, a_3, \ldots$	$y = x/12 - 3/4$
F[5,-2]	$x \equiv 0 \bmod 9$	$5, a_1 - 2, a_2, a_3, \ldots$	$y = 8x/3 - 3$
G[+6]	いつでも	$a_1 + 6, a_2, a_3, \ldots$	$y = 64x + 21$

制約事項： star変換は、写像後の割数列の要素 a_i が正の整数を維持する場合にのみ適用可能である。$a_1 - k \le 0$ となる変換（A, B, C, D, E, F）を適用するには、事前に G[+6] 変換を用いて a_1 の値を増加させる必要がある。この制約は、本分析体系における演算の基本公理である。これらの変換は、非自明なループが持つべき構造を代数的に探るための基本的な演算子として機能する。この分析的枠組みの確立により、次章ではループ構造そのものの分析へと進む。

3. star変換によるループ構造の分析 (Analysis of Loop Structures via star conversion)

前章で定義した分析ツールを用い、本章では非自明なループがもし存在すると仮定した場合に、それが満たさなければならない構造的性質と制約を明らかにする。star変換の連鎖としてループをモデル化し、その構造を分類する。

3.1 ループの表現と変換の制約 (Loop Representation and Transformation Constraints)

非自明なループが存在する場合、それはstar変換の特定のシーケンスが周期的に繰り返され、初期の割数列に回帰する構造として表現されるはずである。しかし、この変換の連鎖は任意に構成できるわけではなく、内在的な制約が存在する。特に、変換 **B** と **E** は「終端状態」あるいは「吸収状態」として機能する 。これらの変換を適用すると、生成される割数列の初項はそれぞれ 1 または 2 となる。すなわち、B は初項 1 を、E は初項 2 を生成するため、初項から 2 を減算する変換（D, F）および 4 を減算する変換（A, C）のいずれも後続し得ない。したがって、安定したループは B または E をその構成要素として含むことができない。この吸収状態の存在により、安定したループを構成する変換の連鎖は、以下の通りに厳しく制約される。

- **A** の後続となり得るのは: **A, C, D, F**
- **C** の後続となり得るのは: **D, F**
- **D** の後続となり得るのは: **D, F**
- **F** の後続となり得るのは: **A, C, D, F**

3.2 G変換の有無によるループの分類：τとσ (Classifying Loops by the Presence of G-transformation: τ and σ)

ループ構造をさらに深く分析するため、G[+6] 変換の関与の有無に基づき、構造を2つの構成要素に分類する。

- **τ (タウ)** G 変換の介在を必要とせず、A, C, D, F の変換のみで自己完結することを目指すループ、またはその部分構造を τ と定義する。τ は「内部で無限に走行（循環）できる可能性」を持つ領域として想定されるが、後述するように構造的な脆弱性を抱えている。
- **σ (シグマ)** G 変換と次の G 変換の間に必然的に位置する、有限長の変換シーケンスを σ と定義する。構造的には ...→ G → σ → G →... という連鎖の一部をなす。σ は定義上、「内部で無限走行をしない」有限の経路であり、それ単独ではループを形成できない。τ と σ の特性を以下の表にまとめる。

特徴	τ (タウ)	σ (シグマ)
G の必要性	不要（G を含まない）	必要（G と G の間に存在する）
無限走行	内部で無限走行が可能（と仮定される）	内部無限走行はしない
ループの成否	自明なループ(τ_1)を 包含する	単独ではループを構成できない

| **G** からの流入 | 定義上、存在しない (G → τ は無い) | 可能（常に G から流入する） |
以上の分類により、いかなる非自明なループも、純粋な τ 構造、あるいは G を含む構造のいずれかに分類されることがわかる。この分類は、次章で行う二面的な証明の土台となる。

4. 非自明なループの非存在証明 (Proof of the Non-Existence of Non-trivial Loops)

本章では、これまでの分析を統合し、非自明なループが存在しないことを証明する。証明は、ループが「G変換を含まない場合」と「G変換を含む場合」の2つのケースに分け、いずれの場合も矛盾に至ることを示す背理法によって構成される。

4.1 ケース1: G変換を含まないループ (τ) の確率論的否定 (Case 1: Probabilistic Negation of Loops without G-transformation (τ))

まず、G 変換を含まず、A, C, D, F の変換のみで構成される仮説的なループ（τ ループ）を考察する。この構造は、本質的な脆弱性を内包している。変換の適用はコラッツ値 x を決定論的に変化させ、その結果 x mod 9 の値も変動する。この変動は、B または E への遷移条件を満たす状態へ、有限ステップ内で到達する非ゼロの確率を保証する。このプロセスは、数学的には 吸収状態を持つマルコフ連鎖 としてモデル化できる。B と E が吸収状態（一度入ると抜け出せない状態）であり、各ステップでこれらの状態へ遷移する確率がゼロでない限り、無限回の試行の後、この連鎖が吸収状態に達していない確率は 0 に収束する。したがって、τ 型の安定した無限ループが存続する確率は数学的にゼロである。これは、G変換を含まない非自明なループが確率論的に存在し得ないことを示している。

4.2 ケース2: G変換を含むループの構造的否定 (Case 2: Structural Negation of Loops containing G-transformation)

次に、G[+6] 変換を構成要素に含む仮説的なループを考察する。ここでの議論の核心は、本分析枠組みにおける基本的な構造規則にある。「**G → τ** は無い」この規則は、G 変換の後に、自己完結ループ領域である τ が続くことは構造上あり得ないことを意味する。なぜなら、G 変換が介在した時点で、その後に続く区間は定義上、Gに依存する有限経路 σ としての性質を帯びるからである。この規則がループ構造に与える影響は決定的である。もしループが G を含むのであれば、その G の後には τ ではなく、有限長の σ が続かなければならない。そして、σ はそれ自体ではループを完結できないため、再び G 変換へと接続される必要がある。この結果、...→ G → σ → G → σ →... という構造が生まれる。この構造は、定義上、初期値に回帰しない無限長の非周期的系列である。したがって、G 変換の導入は、ループ形成の試みを自己矛盾に陥らせ、構造的に破綻させる。これら2つのケースの証明により、非自明なループの存在可能性は完全に否定される。次章では、本稿の最終的な結論を述べる。

5. 結論 (Conclusion)

本稿では、コラッツ予想における非自明なループの非存在を証明するため、「割数列」と「star変換」という独自の分析的枠組みを提示し、その有効性を論証した。この枠組みを用いることで、ループ構造が満たすべき代数的な制約を明らかにし、ループの存在を許容しない代数的制約を導出した。本稿で展開した証明は、以下の背理法に基づいている。

1. まず、非自明なループが存在すると仮定する。このループは、その構造上、「G変換を含む」か「G変換を含まない」かのいずれかでなければならない。
2. **G**変換を含まない場合 （τ ループ）、ループは終端状態（B, E）への遷移を永久に回避し続ける必要がある。しかし、mod 9 の変動により終端状態へ遷移する確率は常にゼロではなく、無限回の試行においてループが存続する確率は0に収束する。したがって、このケースは確率論的に否定される。

3. **G**変換を含む場合 、ループは「G → τ は無い」という構造的規則に支配される。これにより、Gの後は必ず有限経路 σ が続くことになり、...→ G → σ → G →... という無限鎖を形成する。これは初期値に回帰する閉じたサイクルではないため、ループの定義と矛盾する。したがって、このケースは構造的に否定される。したがって、本分析的枠組みが内包する公理系において、非自明なループの存在は論理的に矛盾であり、その非存在が証明される。