コラッツ予想における非自明なループの不存在に関する証明

1.0 序論

1.1 背景と目的

コラッツ予想とは、「任意の正の整数nに対し、nが偶数なら2で割り、奇数なら3を掛けて1を足すという操作を繰り返すと、必ず1に到達する」という数学上の未解決問題である。この操作系列は最終的に「4→2→1」という自明なループに収束することが知られているが、これ以外のサイクル、すなわち「非自明なループ」の存在可能性は未証明のままである。本稿の目的は、独自のフレームワークである **star**変換 と **τ-σ**システム を公理系として用い、「4→2→1」以外の非自明なループが存在しないことを論理的に証明することにある。

1.2 証明戦略の概観

本証明は、非自明なループが存在するという仮定の下、そのループ構造が「G変換」という特殊な操作を含むか否かによって場合分けを行い、いずれの仮定も成立し得ないことを示す二分法によって構成される。証明は、以下の二つの論理的支柱によって確立される。

- 確率論的必然性: G変換を含まないループは、無限試行の過程で確率的に消滅する。
- 構造的矛盾: G変換を含むループは、τ-σシステムの公理系において構造的自己矛盾を内包する。これら二つの論理的帰結は、いかなる場合においても非自明なループが永続的に存在し得ないことを示す。次章では、本証明の論理基盤となる諸概念を厳密に定義する。

2.0 証明の基礎となる定義

本証明を厳密に理解するためには、いくつかの独自の概念を正確に定義する必要がある。これらの定義は、後続する証明における論理の基盤として機能する。

2.1 コラッツ操作と割数列

本稿における基本的な操作と数列を以下のように定義する。

- コラッツ操作: 本稿では「コラッツ操作」を、奇数 x に対して (3x+1) を計算し、その結果を2で割れるだけ割る一連の操作と定義する。
- 割数列: 正の奇数を初期値としてコラッツ操作を連続して行った際、各操作で2で割った回数を順に並べた数列を「割数列」と定義する。例えば、初期値9の割数列は、9 → 28(÷2^2) → 7 → 22(÷2^1) → 11 → ... というプロセスを経て、**[2, 1, 1, 2, 3, 4]** となる。
- 完全割数列: 初期値が3の倍数である場合の割数列を、特に「完全割数列」と定義する。

2.2 star変換

star変換 とは、ある完全割数列を別の完全割数列に写す一連の操作規則である。この変換は、元のコラッツ値 x を9で割った剰余に応じて適用可能な規則が分岐し、それに加えて常時適用可能な G 変換が存在する。

条件 (x mod 9)	変換記号	数列操作 (a_1, a_2, ... から)	コラッツ値の変化関数 (y=...)
x ≡ 3	A[6,-4]	6, a_1 - 4, a_2, ...	y = 4x/3 - 7
x ≡ 3	B[1,-2]	1, a_1 - 2, a_2, ...	y = x/6 - 1/2
x ≡ 6	C[4,-4]	4, a_1 - 4, a_2, ...	y = x/3 - 2
x ≡ 6	D[3,-2]	3, a_1 - 2, a_2, ...	y = 2x/3 - 1

x ≡ 0	E[2,-4]	2, a_1 - 4, a_2, ...	y = x/12 - 3/4
x ≡ 0	F[5,-2]	5, a_1 - 2, a_2, ...	y = 8x/3 - 3
いつでも	G[+6]	a_1 + 6, a_2, ...	y = 64x + 21

重要な制約: star変換の適用において、割数列の要素が0や負になる変換は禁止される。例えば、27[1,2,1,...] という数列に対して F[5,-2] を適用しようとすると、第二項が 1-2 = -1 となるため、この変換は禁止される。この制約を回避するため、必要に応じて事前に G[+6] を適用し、数列の初項を十分に大きくしてから他の変換を行う場合がある。

2.3 τ-σシステム

τ-σシステム は、G変換を含むループの構造を抽象的に分析するためのモデルであり、以下の3つの構成要素から成る。

- **τ (タウ):** 自律的に開始し、内部で無限走行する性質を持つ。Gへの流出点のみを持つ。
- **σ (シグマ):** Gに挟まれる形で存在し、内部では無限走行しない（有限である）。Gからの流入点とGへの流出点を持つ。
- **G:** 他の要素を繋ぐハブとして機能する。このシステムの基本的な遷移フローは τ -> G -> σ -> G -> σ -> ... となる。このシステムには以下の公理が存在する。最重要公理: **G -> τ** という遷移は存在しない。Gからτへの遷移は禁止されており、この公理が後段の証明における核心的な役割を担う。本章で定義した「割数列」「star変換」「τ-σシステム」の各概念は、次章以降で非自明なループの存在を否定するための論理的道具として機能する。

3.0 論理I：G変換を含まないループの確率論的消滅

本節では、非自明なループが存在すると仮定し、そのループがG変換を含まない場合に導かれる論理的帰結を分析する。ここでの論証は、当該ループの存続が確率論的に不可能であることを示す。

3.1 ループ存続の構造的制約

G変換の非存在下でループを構成するためには、変換A, B, C, D, E, Fが無限に継続し、かつ元の状態に回帰する必要がある。しかし、この継続性には構造的な制約が付随する。変換 **B** および **E** は「行き止まり」として機能する。これらの変換を実行すると、生成される割数列の初項はそれぞれ 1 または 2 となる。他の主要なstar変換（A, C, D, F）は、割数列の初項から2または4を減らす操作を伴うため、初項が2以下となった後ではこれらの変換は適用不可能となる。この制約は確率的な選択の問題ではなく、決定論的な経路を生む。例えば、コラッツ値 x が x ≡ 3 mod 9 を満たす場合、適用可能な変換は A (6, a_1-4, ...) または B (1, a_1-2, ...) のみである。ここで、もし割数列の初項 a_1 が $a_1 < 4$ であれば、a_1-4 が負となるため変換Aは禁止され、システムは必然的に「行き止まり」である変換Bへ遷移させられる。したがって、G変換を含まないループが存続するためには、このような決定論的、あるいは確率的に発生する「行き止まり」への遷移を永久に回避し続けなければならない。

3.2 無限試行における脱落確率

ループが存続するために「行き止まり」を永久に回避し続けなければならないという状況は、「吸収状態を持つマルコフ連鎖」としてモデル化される。各変換ステップにおいて、後続の変換が制限される特定の条件（例：x mod 9 の値と割数列初項の組み合わせ）に陥り、行き止まりへの遷移を強制される正の確率 p が存在する。このようなループからの逸脱を「脱落」と定義する。ループが永続するためには、この確率 p を持つ事象を無限回の試行にわたって一度も発生させることなく継続しなければならない。

3.3 確率の収束とループの不可能性

n 回の変換を経ても一度も脱落しない、すなわちループが存続している確率は (1-p)^n で表される。ここで p は $0 < p \leq 1$ を満たす正の確率である。n が無限に近づく極限（n -> ∞）において、この存続確率は0に収束する。$\lim (n\to\infty)\ (1-p)^n = 0$この数学的事実から、次の結論が導かれる。G変換を含まない非自明なループは、無限の試行の中でほぼ確実に消滅するため、永続的に存在し得ない。G変換を含まない場合のループの不可能性が示されたため、残された可能性、すなわちG変換を含む場合について検証する。

4.0 論理II：G変換を含むループの構造的矛盾

本節では、もう一方の可能性である「G変換を含むループ」に焦点を当て、τ-σシステムの公理を用いることで、この仮定が構造的な自己矛盾を内包することを証明する。

4.1 τ-σシステムの公理とループの構造

証明に先立ち、τ-σシステムの基本公理を再確認する。

1. **τは内部無限走行する:** τはシステムの起点であり、それ自体が無限に連続する性質を持つ。
2. **σは内部無限走行しない（有限である）:** σはGとGの間に存在する遷移要素であり、その内部は有限である。
3. **G -> τ の遷移は禁止される:** Gからτへの遷移は、システムの公理によって禁止される。

4.2 ループ存在の仮定と矛盾の導出

ここで、「G変換を含む非自明なループが存在する」と仮定する。矛盾は以下の演繹的段階を経て導出される。

1. ループ構造の定式化: ループは定義上、無限に連続する。当該ループがG変換を含む場合、その構造は必然的に ... -> G -> (内部要素) -> G -> ... という形式で表現される。
2. 内部要素の同定: τ-σシステムの公理によれば、GとGの間に挟まれた「内部要素」は、定義上 **σ** でなければならない。公理3 (G -> τ の禁止) により、Gの後に続く要素はσ以外に存在しない。
3. **σ**の性質の適用: 公理2によれば、σは「内部無限走行しない（有限である）」という性質を持つ。
4. 矛盾の導出: 上記の2と3を結合すると、「無限に連続するループが、有限の性質を持つ構成要素σによって構成されている」という結論に至る。これにより、「無限に連続するというループの定義」と、「その構成要素σが有限でなければならないという公理」の間に、解消不可能な論理的矛盾が生じる。

4.3 構造的矛盾によるループの否定

前項で導出された矛盾は、最初の仮定「G変換を含む非自明なループが存在する」が偽であったことを証明するものである。したがって、τ-σシステムの公理系において、G変換を含むループは構造的に成立し得ないと断定する。これまでの二つの論理、すなわち確率論的消滅と構造的矛盾は、非自明なループが存在し得るあらゆる可能性を否定した。この結果をもって、最終的な結論を述べる。

5.0 結論

本稿は、star変換とτ-σシステムというフレームワークを用い、コラッツ予想における非自明なループの存在を否定する論理的証明を構築した。証明は、ループがG変換を含むか否かによる二段構えの論理によって展開され、以下の結論が確立された。

1. **G**変換を含まないループは、確率論的必然性により永続できない。 ループの存続を妨げる構造的「行き止まり」の存在により、無限回の試行においてループが維持される確率は0に収束する。
2. **G**変換を含むループは、**τ-σ**システムの公理との間に構造的矛盾を生むため、存在し得ない。 無限に連続するループが、有限の性質を持つ要素「σ」で構成されるという根源的な論理的破綻が発生する。以上の二つの論理は互いに排他的かつ網羅的であり、非自明なループが存在し得る全ての可能性を尽くしている。したがって、「4-2-1」という自明なループ以外の非自明なループは存在しないと結論付ける。