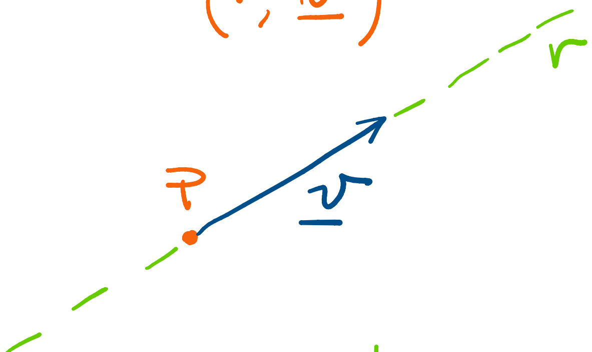
Lezione 3

domenica 23 febbraio 2025 11:54

RICHIAMI SULLA LEZIONE PRECEDENTE

VETTORE APPLICATO $(P, \underline{v})$



r = retta di applicazione = retta passante per P che contiene $\underline{v}$

MOMENTO (POLARE) DEL V.A. DI POLO Ω

$$\underline{M}_{\Omega} = \Omega P \wedge \underline{v}$$

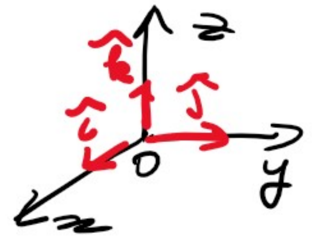
prodotto vettoriale

es. Introdotto il sistema di riferimento $Oxyz$

es. Introdotto il sistema di riferimento $Oxyz$

sia $OP = (3, -1, 2)$

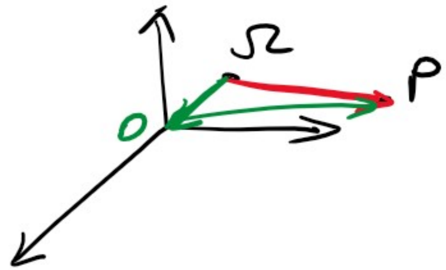
$\underline{v} = (1, 0, 5)$



Per il vettore applicato $(P, \underline{v})$ determinare il momento di polo O e il momento di polo Ω con $O\Omega = (-2, 1, 0)$

$$\underline{M}_O = OP \wedge \underline{v} = \det \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(-5) - \hat{\jmath}(15-2) + \hat{k}(1) =$$

$$= -5\hat{\imath} - 13\hat{\jmath} + \hat{k}$$



$$\underline{M}_\Omega = \Omega P \wedge \underline{v}$$

$$\Omega P = \Omega O + OP = -O\Omega + OP =$$

$$= -(-2, 1, 0) + (3, -1, 2) = (2, -1, 0) + (3, -1, 2) =$$

$$= (5, -2, 2)$$

$$\det \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \end{vmatrix}$$

$$\underline{M}_{\Omega} = \Omega P \wedge \underline{v} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \hat{i}(-10) - \hat{j}(25-2) + \hat{k}(2) =$$

$$= -10\hat{i} - 23\hat{j} + 2\hat{k} = (-10, -23, 2)$$

SISTEMA DI V. A.

Def. Si dice sistema di v.a. un insieme di vettori applicati

$$(P_k, \underline{v}_k) \quad \text{con } k = 1, \dots, n$$

Notazione: Un sistema di vettori applicati è indicato con Σ_a

es. fisici: un insieme di forze applicate al corpo che stiamo studiando. L'insieme delle es. fisici: un insieme di forze applicate al corpo che stiamo studiando, l'insieme delle velocità dei punti di un sistema meccanico, ecc.

N.B. Per ogni vettore applicato $(P_J, \underline{v}_J)$ è possibile individuare la retta di applicazione
$\Rightarrow \exists$ n rette di applicazione (una per ciascun vettore)

IL RISULTANTE DI UN Σ_a

Def Dato un Σ_a $(P_K, \underline{v}_K)$ con $K = 1, \dots, n$ si definisce risultante del sistema di v.a. il vettore LIBERO

$$\underline{R} = \sum_{K=1}^{n} \underline{v}_K$$

IL MOMENTO DI POLO Ω DEL Σ_a

Def Dato un Σ_a $(P_K, \underline{v}_K)$ con $K=1,\dots,n$ e scelto un polo Ω, si definisce momento di polo Ω del sistema di v.a. il vettore LIBERO

$$\underline{M}_\Omega = \sum_{k=1}^{n} \Omega P_K \wedge \underline{v}_K$$

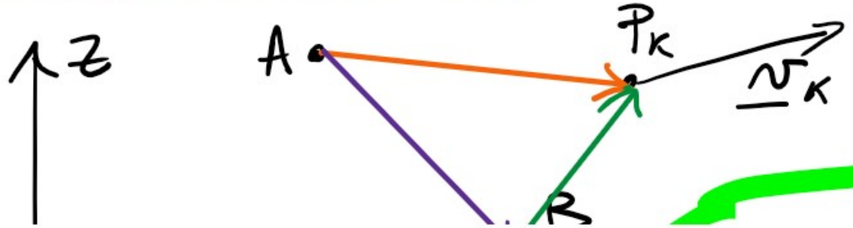
N.B. $\underline{M}_\Omega$ dipende da Ω

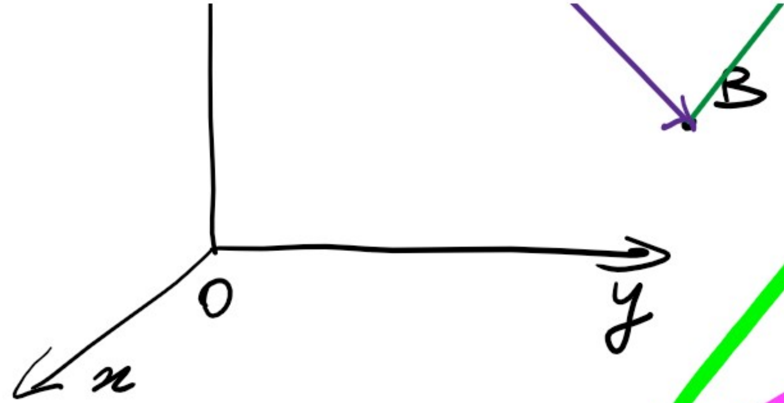
LEGGE DI DISTRIBUZIONE DEL MOMENTO

Dato un Σ_a $(P_K, \underline{v}_K)$ con $K=1,\dots,n$ e scelti due punti A e B, allora

$$\boxed{\underline{M}_A = \underline{M}_B + AB \wedge \underline{R}}$$

DIM





$$\underline{M}_A \underset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} AP_k \wedge \underline{v}_k$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{M}_B \underset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} BP_k \wedge \underline{v}_k$$

$$\underline{M}_A = \sum_{k=1}^{n} AP_k \wedge \underline{v}_k = \sum_{k=1}^{n} (AB + BP_k) \wedge \underline{v}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (AB \wedge \underline{v}_k + BP_k \wedge \underline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} AB \wedge \underline{v}_k + \sum_{k=1}^{n} BP_k \wedge \underline{v}_k =$$

$$= \underline{M}_B + \sum_{k=1}^{n} AB \wedge \underline{v}_k = \underline{M}_B + AB \wedge \sum_{k=1}^{n} \underline{v}_k = \underline{R}$$

$$= \underline{M}_B + AB \wedge \underline{R} \qquad \square$$

RIASSUMENDO LA LEGGE DI DISTRIBUZIONE DEL MOMENTO GARANTISCE CHE

$$\underline{M}_A = \underline{M}_B + AB \wedge \underline{R}$$

$\forall A, B$ e $\forall \Sigma_a$

INVARIANTE DI UN Σ_a

Dato un $\Sigma_a (P_k, \underline{v}_k)$ con $k = 1, \dots, n$ si dice invariante lo scalare

$$I = \underline{R} \cdot \underline{M}_A$$

N.B. I è detto INVARIANTE PERCHÉ NON VARIA CAMBIANDO IL POLO A, INFATTI

$$I = \underline{R} \cdot \underline{M}_A$$

$$\underline{I}' = \underline{R} \cdot \underline{M}_B \underset{\uparrow}{=} \underline{R} \cdot (\underline{M}_A + BA \wedge \underline{R}) =$$

legge di
distrib. del momento

$$= \underline{R} \cdot \underline{M}_A + \cancel{\underline{R} \cdot BA \wedge \underline{R}} = \underline{I}$$

$\cancel{\underline{R} \cdot BA \wedge \underline{R}} = 0$ perché
il prodotto misto contiene
due vettori uguali

Domanda I può essere nullo?

$$I = \underline{R} \cdot \underline{M}_A = 0 \quad \text{se} \quad \begin{array}{l} 1)\ \underline{R} = \underline{0} \\ 2)\ \underline{M}_A = \underline{0} \\ 3)\ \underline{R} \perp \underline{M}_A \end{array}$$

DALLA LEGGE DI DISTRIBUZIONE DEL

DALLA LEGGE DI DISTRIBUZIONE DEL MOMENTO

$$\underline{M}_A = \underline{M}_B + AB \wedge \underline{R}$$

QUANDO $\underline{M}_A = \underline{M}_B$?

se $AB \wedge \underline{R} = \underline{0}$ ovvero

1) $AB = \underline{0}$ ovvero $A \equiv B$ (caso banale)
2) $\underline{R} = \underline{0}$ (caratteristica del Σ_a)
3) $AB \parallel \underline{R}$ (scelta di A e B opportuna)

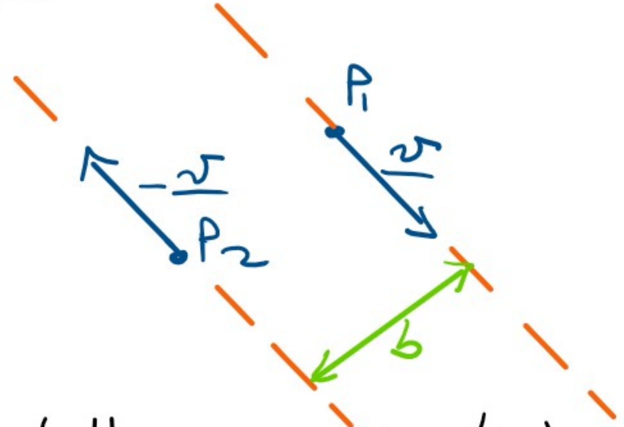
Concludiamo che 1) se Σ_a ha $\underline{R} = \underline{0}$ il momento $\underline{M}_A = \underline{M}_B$ $\forall A, B$ NON DIPENDE DALLA SCELTA DEL POLO,
2) se Σ_a presenta $\underline{R} \neq \underline{0}$ $\underline{M}_A \neq \underline{M}_B$ in generale (tranne che per $AB \parallel \underline{R}$)

CASO 1 $\underline{R} = \underline{0}$

$$\Sigma_a \quad (P_k, \underline{v}_k) \quad \text{con} \quad \underline{R} = \sum_{k=1}^{n} \underline{v}_k = \underline{0}$$

$$\underline{M}_A = \underline{M}_B = \underline{M} \qquad \forall A, B$$

es. COPPIA DI V.A.



$$\Sigma_a : (P_1, \underline{v}) \text{ e } (P_2, -\underline{v})$$

$$\underline{R} = \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$$

Si dimostra che $\underline{M}$ momento della coppia è tale che

$$|M| = |v| \, b$$

$\hookrightarrow$ braccio = distanza tra le 2 rette di applicazione

Si parla di coppia di v.a di braccio nullo se i 2 vettori applicati presentano la stessa retta di applicazione $\Rightarrow b = 0$

se i 2 vettori applicati presentano la stessa retta di applicazione $\Rightarrow b=0$

esempio fisico di coppia di v.a. = coppia di forze

CASO 2 Σ_a con $\underline{R} \neq \underline{0}$

$$\underline{M}_A = \underline{M}_B + \underbrace{AB \wedge \underline{R}}_{\perp \underline{R}}$$

Al variare del polo il momento cambia in direzione $\perp \underline{R}$

$$\underline{M}_A = \underline{p}_A + \underline{N}_A \quad \text{con } \underline{p}_A \,//\, \underline{R} \text{ e } \underline{N}_A \perp \underline{R}$$

$\underline{R}\, \cdot$

$$\underbrace{\underline{R} \cdot \underline{M}_A} = \underline{R} \cdot \underline{p}_A + \cancel{\underbrace{\underline{R} \cdot \underline{N}_A}_{=0}} \quad \underline{R} \perp \underline{N}_A$$

$= 0 \quad \underline{R} \perp \underline{N}_A$

$$\mathcal{I} = \underline{R} \cdot \underline{p}_A$$

Se $\underline{p}_A \parallel \underline{R} \Rightarrow \underline{p}_A = \beta \underline{R}$ con $\beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{I} = \underline{R} \cdot \underline{p}_A = \underline{R} \cdot \beta \underline{R} = \beta (\underline{R} \cdot \underline{R}) = \beta |\underline{R}|^2$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\mathcal{I}}{|\underline{R}|^2}$$

Dunque
$$\underline{M}_A = \underline{p}_A + \underline{N}_A = \frac{\mathcal{I}}{|\underline{R}|^2} \underline{R} + \underline{N}_A$$

ovvero $\underline{M}_A$ è la somma di 2 vettori:
uno $\parallel \underline{R}$ che non dipende da A
e l'altro $\perp \underline{R}$ che dipende da A

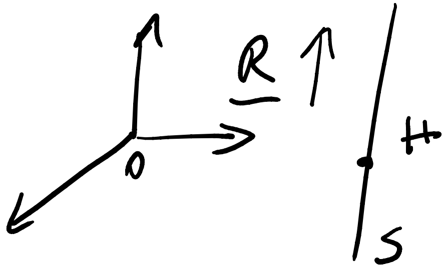
DOMANDA: TRA GLI INFINITI POLI ESISTONO DEI PUNTI C TALI CHE $\underline{M}_C = \mathcal{I} \underline{R}$ ovvero $\underline{N}_C = 0$?

$$\underline{M}_C = \frac{I\,\underline{R}}{|R|^2} \quad \text{ovvero} \quad \underline{N}_C = \underline{0}\ ?$$

Sì, in quanto si dimostra che esiste una retta $s /\!/ \underline{R}$ di punti tali che se

$$H \in s \qquad \underline{M}_H = \frac{I\,\underline{R}}{|R|^2}$$

tale retta è detta ASSE CENTRALE



$$\boxed{OH = \frac{1}{|R|^2}\,\underline{R} \wedge \underline{M}_O + x\,\underline{R} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}}$$

EQUAZIONE DELL'ASSE CENTRALE

es. $\Sigma_a : (P_k, \underline{v}_k)$ con $k = 1, \dots, 5$

$OP_1 = (0,1,0) \qquad \underline{v}_1 = (3,-1,0)$

$OP_2 = (-3,-2,0) \qquad \underline{v}_2 = (0,0,5)$

$R\ ?$

$OP_2 = (-5,-2,0) \qquad \underline{v}_2 = (0,0,5)$

$OP_3 = (1,1,2) \qquad \underline{v}_3 = (1,1,0)$

$OP_4 = (-1,0,-1) \qquad \underline{v}_4 = (0,0,-3)$

$OP_5 = (0,-2,0) \qquad \underline{v}_5 = (0,1,1)$

$\underline{R}\,?$

$\underline{M}_0\,?$

$\underline{I}\,?$

$$\underline{R} = \sum_{k=1}^{5} \underline{v}_k = (4,1,3)$$

$$\underline{M}_0 = \sum_{k=1}^{5} OP_k \wedge \underline{v}_k$$

$$OP_1 \wedge \underline{v}_1 = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\,0 - \hat{j}\cdot 0 + \hat{k}(-3) = -3\hat{k}$$

$$OP_2 \wedge \underline{v}_2 = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(-10) - \hat{j}(-15) + \hat{k}(0) =$$

$$= -10\hat{i} + 15\hat{j}$$

$$OP_3 \wedge \underline{v}_3 = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(-2) - \hat{j}(-2) + \hat{k}(0) =$$

$$\underline{OP}_3 \wedge \underline{v}_3 = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\imath}(-2) - \hat{\jmath}(-2) + \hat{k}(0) =$$
$$= -2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$$

$$OP_4 \wedge \underline{v}_4 = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \hat{\imath} \cdot 0 - \hat{\jmath}(3) + \hat{k} \cdot 0 =$$
$$= -3\hat{\jmath}$$

$$OP_5 \wedge \underline{v}_5 = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \hat{\imath}(-2) - \hat{\jmath}(0) + \hat{k}\, 0 =$$
$$= -2\hat{\imath}$$

$$\underline{M}_O = \sum_{k=1}^{5} OP_k \wedge \underline{v}_k = (-3\hat{k}) + (-10\hat{\imath} + 15\hat{\jmath}) + (-2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) +$$
$$+ (-3\hat{\jmath}) + (-2\hat{\imath}) =$$
$$= (-10 - 2 - 2)\hat{\imath} + (15 + 2 - 3)\hat{\jmath} - 3\hat{k} =$$
$$= -14\hat{\imath} + 14\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

$$\underline{I} = \underline{R} \circ \underline{M}_O = (4\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} + 3\hat{k}) \cdot (-14\hat{\imath} + 14\hat{\jmath} - 3\hat{k}) =$$

$$= 4\cdot(-14) + 1\cdot(14) + 3(-3) =$$
$$= -56 + 14 - 9 = -51$$

Come si calcola $\underline{M}_A$ se $OA = (2,0,1)$

$$\underline{M}_A = \underline{M}_O + AO \wedge \underline{R}$$

$$AO = -OA = (-2,0,-1)$$

$$AO \wedge \underline{R} = \det\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}\cdot 1 - \hat{j}(-6+4) + \hat{k}(-2) =$$
$$= \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\underline{M}_A = \underline{M}_O + AO \wedge \underline{R} = (-14\hat{i} + 14\hat{j} - 3\hat{k}) + (\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) =$$
$$= -13\hat{i} + 16\hat{j} - 5\hat{k}$$

OPERAZIONI ELEMENTARI SU UN SISTEMA DI V.A.

SU UN SISTEMA DI V.A.

Assegnato un Σ_a si definiscono le seguenti operazioni elementari

1) aggiungere o sopprimere una coppia di v.a. di braccio nullo

2) sostituire a più vettori applicati in uno stesso punto S il vettore somma applicato in S o viceversa

3) trasportare/traslare un v.a. lungo la sua retta di applicazione (si potrebbe ottenere applicando 1) e 2))

SISTEMI EQUIVALENTI

Def Due sistemi di v.a. Σ_a e Σ_a' si dicono equivalenti se è possibile passare dall'uno all'altro tramite operazioni elementari.

dall'uno all'altro tramite operazioni elementari.

Notazione $\Sigma_a = \Sigma'_a$

N.B. La definizione precedente è chiara e semplice, ma non è operativa, nel senso che in generale non è possibile individuare facilmente la sequenza di operazioni elementari che porti eventualmente da Σ_a a Σ'_a.

TEOREMA DI RIDUZIONE DI UN Σ_a

Un sistema di v.a. Σ_a è SEMPRE riducibile ad un sistema di v.a. Σ'_a equivalente formato da un v.a. in un punto scelto P e da una coppia di v.a.. P è detto POLO DI RIDUZIONE.

TEOREMA DI EQUIVALENZA DI 2 SISTEMI DI V.A.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due sistemi di v.a. Σ_a e Σ'_a siano equivalenti è che abbiano uguali i risultanti ed i momenti rispetto ad uno stesso polo

$$\Sigma_a = \Sigma'_a \iff \begin{array}{l} \underline{R} = \underline{R}' \\ \underline{M}_\Omega = \underline{M}'_\Omega \end{array}$$

N.B. L'equivalenza matematica coincide con l'equivalenza fisica SOLO se i v.a. si riferiscono a CORPI INDEFORMABILI (RIGIDI)

DOMANDA: Se "Σ_a e Σ'_a sono equivalenti $\iff \underline{R} = \underline{R}'$ e $\underline{M}_\Omega = \underline{M}'_\Omega$"?

il sistema di v.a. ridotto secondo il teorema di riduzione come è fatto?

$$\Sigma_a \quad (P_k, \underline{v}_k) \quad k=1, \dots n \qquad \underline{R} = \sum_{k=1}^{n} \underline{v}_k ; \quad \underline{M}_\Omega = \sum_{k=1}^{n} \Omega P_k \wedge \underline{v}_k$$

$\Sigma'_a \qquad \Omega \ \underline{w} \qquad + \qquad$ coppia di v.a. $(A, \underline{b}), (B, -\underline{b})$

$$\underline{R}' = \underline{w} + \underline{b} - \underline{b} = \underline{w}$$

Se $\Sigma_a = \Sigma'_a \Rightarrow \underline{R} = \underline{R}' = \underline{w} \Rightarrow \underline{w} = \underline{R}$

$\underline{M}'_\Omega = \cancel{\Omega\Omega \wedge \underline{w}} +$ Momento della coppia

Se $\Sigma_a = \Sigma'_a \Rightarrow \underline{M}_\Omega = \underline{M}'_\Omega =$ Momento della coppia