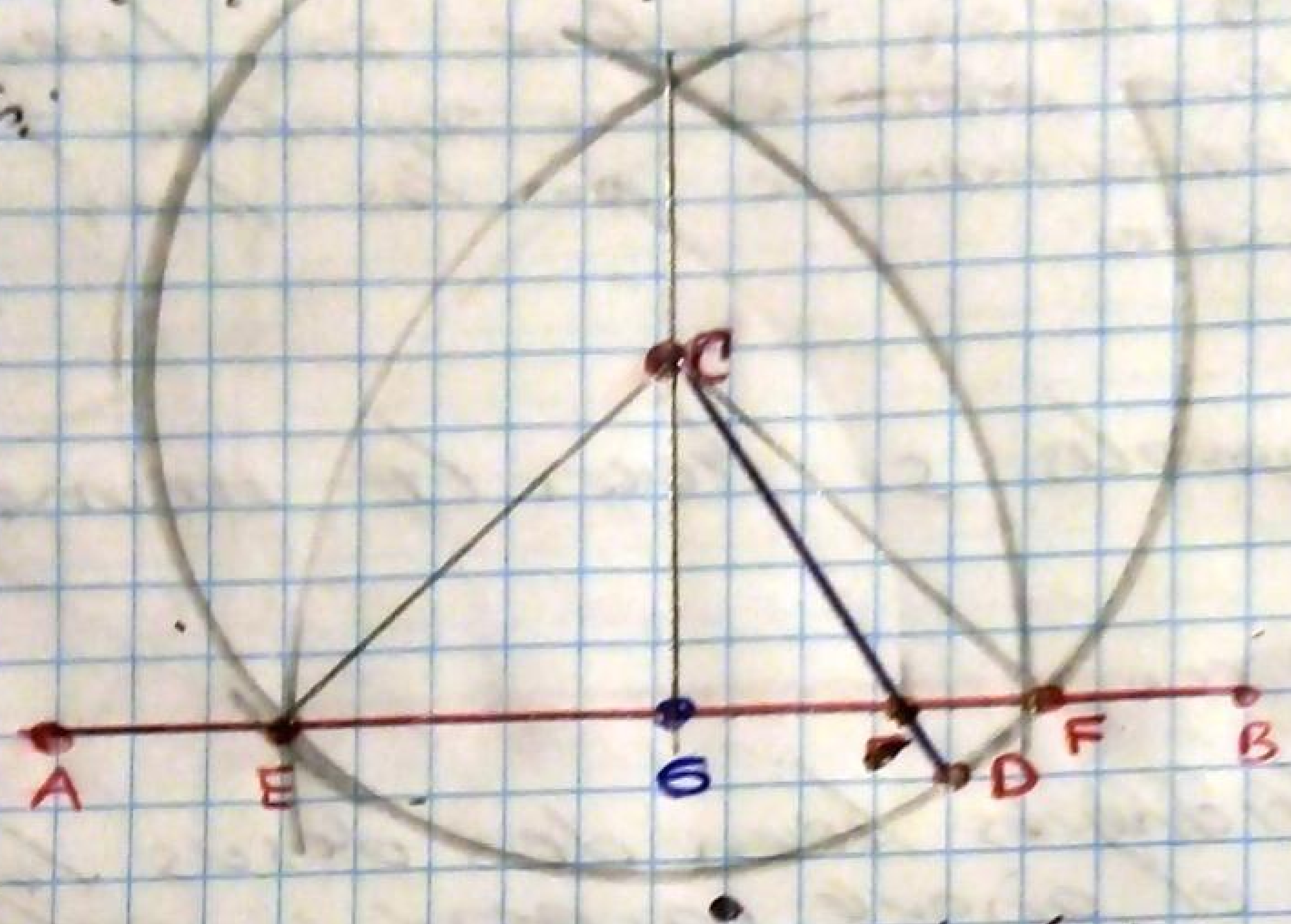
Demostración Proposición · I. 12

Dado un segmento y un punto fuera de él, trazar un segmento perpendicular al dado que pasa por dicho punto.

Hipótesis: Sea $\overline{AB}$ un segmento y C un punto que no está en $\overline{AB}$

Tesis: Construir un segmento $\overline{CG}$ que pase por el punto C y que sea perpendicular al segmento $\overline{AB}$

Demostración:



Paso 1: Trazamos un punto D del lado opuesto a C de la recta $\overline{AB}$.

Paso 2. trazamos una linea recta del punto C al punto D por el postulado 1 "Una recta puede trazarse de un punto cualquiera a otro"

Paso 3. Construimos una circunferencia C_1 con centro en el punto C y radio CD.

Usando el Postulado 3 "Un circulo puede describirse con un centro y un radio"

Llamamos E y F a los puntos de intersección de la circunferencia con el segmento $\overline{AB}$

Paso 4. Construimos el segmento $\overline{EF}$ uniendo los puntos E y F

Paso 5. Por la Proposición 1.10 "Dividir en dos partes iguales un segmento de recta dado" se puede bisecar el segmento $\overline{EF}$ en el punto G

Paso 6. Por el postulado 7 podemos construir el segmento $\overline{CF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{CE}$.

Afirmamos que $\overline{CG}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ apartir del punto C

Tenemos los siguientes triángulos. $\triangle CEG$ y $\triangle CFG$

Sabemos que el segmento $\overline{EG}$ y el segmento $\overline{GF}$ son iguales, y $\overline{CG}$ es el lado común.
Además los segmentos $\overline{CE}$ y $\overline{CF}$ también son iguales puesto el radio de la circunferencia es $\overline{C}$ y que los puntos de intersección son E y F

$\overline{EG} = \overline{GF}$ Por el paso 5 de bisectar la recta EF

$\overline{CE} = \overline{CF}$ Por el paso 3 de construir la circunferencia con centro en C y que tiene como puntos E y F

Por la proposición I.8 que dice "Si los tres lados de un triangulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro, entonces los dos triángulos son iguales (LLL)

Por lo tanto el triangulo $\triangle CEG$ y $\triangle CFG$ los triángulos son iguales.

También los ángulos $\measuredangle CGE$ y $\measuredangle CGF$ son iguales y adyacentes

La definición I.10 dice "Cuando una línea recta encuentra otra formando con ella ángulos adyacentes iguales entre sí, estos ángulos se llaman rectos, y las rectas son perpendiculares entre sí."

Por lo que $\measuredangle CGE$ y $\measuredangle CGF$ son rectos

Se puede concluir que las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{CG}$ son perpendiculares entre sí.