Conjuntos $B\mathcal{F}$-inductivos

1 Inducción

En este ejercicio vamos a generalizar una característica potente de los números naturales: La posibilidad de hacer demostraciones por inducción.

Esto es posible en los números naturales porque todos los números naturales se pueden construir a partir del 0 y de la función $f(x) = x + 1$ ($0 = 0$, $1 = f(0)$, $2 = f(f(0))$, $3 = f(f(f(0)))$, etc.).

En ese mismo sentido, todos los números enteros se pueden construir a partir del 0 y de las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$
$(..., g(g(0)) = -2, g(0) = -1, 0, f(0) = 1, f(f(0)) = 2, ...)$.

¿Podríamos hacer pruebas inductivas sobre el conjunto de los números enteros? Necesitamos precisar nuestra definición de inducción pero sí. ¡Podemos hacer pruebas inductivas en cualquier conjunto que se "construya" a partir de un conjunto de elementos y un conjunto de operaciones! Estos conjuntos no tienen que ser conjuntos de números.

Vamos a precisar qué quiere decir que un conjunto se "construya" a partir de un conjunto de elementos B y un conjunto de funciones $\mathcal{F}$.

Definición 1.1. *Sea U un conjunto no vacío y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que f es una operación de aridad n sobre U si $f : U^n \to U$. Es decir $f(u_1, ..., u_n) = u$ con $u_1, ..., u_n, u \in U$.*

Definición 1.2. *Sea U un conjunto no vacío, $c \subseteq U$ y f una operación sobre U de aridad n. Decimos que c es cerrado bajo f si para cualesquiera $u_1, \ldots, u_n \in c$ se cumple que $f(u_1, \ldots, u_n) \in c$.*

1. ¿Los siguientes conjuntos c son cerrados bajo todas las operaciones en $\mathcal{F}$? Demuestra tu respuesta o escribe un ejemplo.
   (a) $U = \mathbb{N}$, $c = \{n \in U \mid n = 2k, k \in U\}$ y $\mathcal{F} = \{f\}$ con $f(x) = 2x + 4$
   (b) $U = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $c = U$ y $\mathcal{F} = \{f, g\}$ con $f(x, y) = xy$ y $g(x, y) = x + y$
2. Sean $a, b \subset U$ cerrados bajo $f : U^n \to U$, demuestra que $a \cap b$ es cerrado bajo f.
3. ¿Si $a, b \subset U$ son cerrados bajo $f : U^n \to U$ entonces $a \cup b$ es cerrado bajo f? Demuestra tu respuesta o escribe un ejemplo.

Definición 1.3. *Sea U un conjunto no vacío, $B \subseteq U$ y $c \subseteq U$ y $\mathcal{F}$ un conjunto de operaciones sobre U. Decimos que c es $B\mathcal{F}$-inductivo si es cerrado bajo todas las operaciones de $\mathcal{F}$ y $B \subseteq c$.*

Por ejemplo, si $B = \{0\}$ y $\mathcal{F} = \{f(x) = x+1\}$ entonces $\mathbb{N}$ es $B\mathcal{F}$-inductivo. Si $B = \{0\}$ y $\mathcal{F} = \{f(x) = x+1, g(x) = x - 1\}$ entonces $\mathbb{Z}$ es $B\mathcal{F}$-inductivo.

4. (Construcción por abajo) Sea $B \subseteq U$ y $\mathcal{F}$ un conjunto de operaciones sobre U. Definimos $\mathcal{C}_0 = B$, para $n \in \mathbb{N}$
$$\mathcal{C}_{n+1} = \{f(u_1, ..., u_k) \in U \mid f \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}, u_1, ..., u_k \in \mathcal{C}_n\} \cup \mathcal{C}_n,$$
   y $\mathcal{C}_* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$.
   (a) Demuestra que $B \subseteq \mathcal{C}_*$.
   (b) Demuestra que $\mathcal{C}_*$ es cerrado bajo las funciones de $\mathcal{F}$.
5. (Construcción por arriba) Sean $B \subseteq U$, $\mathcal{F}$ un conjunto de operaciones sobre U, y sea
$$C = \{c \subseteq U \mid c \text{ es B}\mathcal{F}\text{- inductivo}\}.$$

(a) Demuestra que el conjunto C no es vacío.

(b) Demuestra que $B \subseteq \mathcal{C}^*$ donde

$$\mathcal{C}^* = \{x \in U \mid \forall c \in C \quad x \in c\}.$$

(c) Demuestra que $\mathcal{C}^*$ es cerrado bajo las funciones de $\mathcal{F}$.

(d) Demuestra que si $c \subseteq U$ es $B\mathcal{F}$-inductivo entonces $\mathcal{C}^* \subseteq c$

6. Demuestra que $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}_*$. (Sugerencia: una de las contenciones es inmediata por el último inciso del ejercicio anterior.) Decimos que $\mathcal{C} = \mathcal{C}^* = \mathcal{C}_*$ está **generado** por $\mathcal{F}$ en B.

7. (Principio de inducción para conjuntos $B\mathcal{F}$-inductivos) Sean U un conjunto no vacío, $B \subseteq U$, $\mathcal{F}$ un conjunto de operaciones sobre U, $\mathcal{C} = \mathcal{C}^* = \mathcal{C}_*$ y P una propiedad sobre los elementos de U. Demuestra que:

   (a) Si todos los elementos de B cumplen la propiedad P y

   (b) la propiedad P se preserva bajo todas las funciones de $\mathcal{F}$

   entonces todos los elementos de $\mathcal{C}$ tienen la propiedad P. (Sugerencia: considera el conjunto de todos los elementos de U que cumplen la propiedad P.)

8. El conjunto $\mathbb{R}$ es $B\mathcal{F}$-inductivo para $B = \{0\}$ y $\mathcal{F} = \{f(x) = x+1\}$. ¿Por qué el ejercicio anterior no garantiza que podamos hacer inducción sobre $\mathbb{R}$?

9. Enuncia y demuestra el principio de inducción para fórmulas bien formadas. (Sugerencia: muestra que el conjunto de fórmulas bien formadas es $B\mathcal{F}$-inductivo para ciertos conjuntos B y $\mathcal{F}$.)

2 Recursión

Ahora vamos a generalizar la propiedad de los números naturales de hacer definiciones recursivas. Algunos ejemplos de definiciones recursivas para $\mathbb{N}$ son:

(i) La multiplicación por un número natural a (la tabla de multiplicar de a):

$$(0) * a = 0$$

$$(n+1) * a = a + n * a$$

(ii) El factorial de n:

$$0! = 1$$

$$(n+1)! = n! * n$$

(iii) La función exponencial (con exponente natural y base $a \in \mathbb{R}$):

$$a^0 = 1$$

$$a^{n+1} = a^n * a$$

¿Estas funciones están bien definidas para todos los naturales? Estamos acostumbrados a definir funciones a través de reglas de correspondencia explicítas que sólo dependan de la variable independiente. El teorema de recursión para números naturales garantiza que si definimos una cierta función para 0 y si suponemos definida esa función para un número n para definir la función en el número $n+1$ entonces existe una única función sobre todos los naturales que cumple esas dos propiedad. No es de nuestro interés demostrar este teorema, ni siquiera enunciarlo con precisión. Nuestro objetivo es otro. enunciar, demostrar y aplicar un teorema de recursión que aplique a los conjuntos $\mathcal{C}$ generados por $\mathcal{F}$ en B. Algo como:

> Definimos una función $f : \mathcal{C} \to U$ de la siguiente manera:
> Determinamos el valor de f para cada elemento de B.
> Suponiendo que hemos definido el valor de f en un elemento $x \in \mathcal{C}$ entonces determinamos el valor de $f(g(x))$ para cada $g \in \mathcal{F}$.
> Entonces habremos definido f en cada elemento de $\mathcal{U}$.

Suena prometedor, pero no es suficiente.

10. Tomemos $\mathcal{C} = \mathbb{Z}$, $B = \{0\}$, $\mathcal{F} = \{f(x) = x + 1, g(x) = x - 1\}$. Definamos $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ como $h(0) = 0$, supongamos definida h para un cierto número $z \in \mathbb{Z}$ y definamos $h(g(z)) = h(z) + 2$ y $h(f(z)) = h(z) + 1$. ¿Por qué la función h NO está bien definida?

Definición 2.1. *Sean $U \neq \emptyset$, $B \subseteq U$, $\mathcal{F}$ un conjunto de operaciones sobre U y $\mathcal{C} \subseteq U$. Decimos que $\mathcal{C}$ es libremente generado por B y $\mathcal{F}$ si está generado por B y $\mathbb{F}$ y*

(i) Las funciones en $\mathcal{F}$ son inyectivas.
$f(u_1, ..., u_n) = f(u'_1, ..., u'_n) \Leftrightarrow (u_1, ..., u_n) = (u'_1, ..., u'_n)$ *para toda $f \in \mathcal{F}$ y n la aridad de f.*

(ii) Las imágenes de las funciones en $\mathcal{F}$ son disjuntas dos a dos.
$\forall f, g \in \mathcal{F} \quad f[U] \cap g[U] = \emptyset$

(iii) Las imagenes de las funciones en $\mathcal{F}$ son disjuntas con B.
$\forall f \in \mathcal{F} \quad f[U] \cap B = \emptyset$

Intuitivamente, si un conjunto es libremente generado entonces cada elemento se puede construir de manera única.

11. Sea $\mathcal{A}$ el alfabeto del lenguaje proposicional, $U = \mathbb{E}\mathrm{xp}_{\mathcal{A}}$ el conjunto de todas las expresiones en este alfabeto, B el conjunto de letras proposicionales y $\mathcal{F} = \{f_\neg, f_\rightarrow, f_\wedge, f_\vee, f_\leftrightarrow\}$. Demuestra que el conjunto de fórmulas bien formadas es libremente generado. ¿A qué teorema te recuerda esto?

Vamos a enunciar con precisión el teorema.

Teorema 2.1. *Sea U un conjunto, $B \subseteq U$, $\mathcal{F}$ un conjunto de operaciones sobre U y $\mathcal{C}$ un conjunto libremente generado por $\mathcal{F}$ en B.*
Si existe V un conjunto,

(i) existe $h : B \to V$, y

(ii) para cada $f \in \mathcal{F}$ con $f : U^n \to U$ existe $\hat{f} : V^n \to V$.

Entonces existe una única $h^* : \mathcal{C} \to V$ tal que:

a) $h^*(b) = h(b)$ para todo $b \in B$

b) Para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in \mathcal{C}$ se cumple que

$$h^*(f(x_1, ..., x_n)) = \hat{f}(h^*(x_1), ..., h^*(x_n)).$$

La demostración no la incluiremos porque es muy técnica y no aporta mucho a la intuición, pero pueden consultarla en el artículo [1].

Referencia

[1] José Alfredo Amor. “Inducción y Recursión”. *Miscelánea Matemática* 26 (Nov. 1997).