Geometría Moderna I

Material para el curso intersemestral en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: Agosto, 2020

Victory won't come to us unless we go to it.

Unidad 2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

Cuadriláteros cíclicos

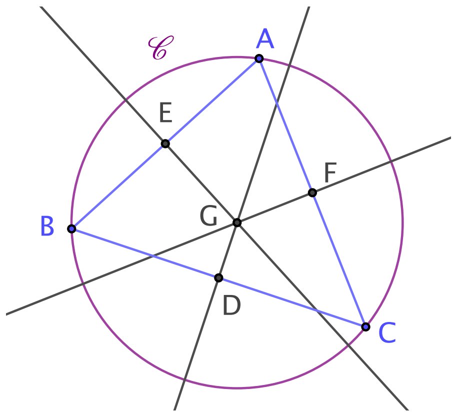
Para comenzar esta sección, hagamos una reflexión sobre las siguientes preguntas: ¿Cuántos puntos determinan una única circunferencia? Si se tienen dos puntos A y B, ¿cuántas circunferencias se pueden trazar tales que pasen por esos puntos? ¿Cuál de éstas es la de radio menor?
Dados tres puntos, ¿cuántas circunferencias que pasen por ellos se pueden trazar?

Teorema 0.1

Por tres puntos no colineales, pasa siempre una única circunferencia. ♡

Demostración

Sean A, B y C tres puntos no colineales, entonces podemos trazar el triángulo $\triangle ABC$. Luego, trazamos las mediatrices y el punto de concurrencia de éstas, el circuncentro G, será el centro de la circunferencia que pasa por A, B y C. **QED**



Ahora bien, si consideramos cuatro puntos, ¿cuántas circunferencias, si es que hay, pasan por esos cuatro puntos dados? ¿qué condiciones se deben cumplir para que exista una circunferencia como la que se pide?

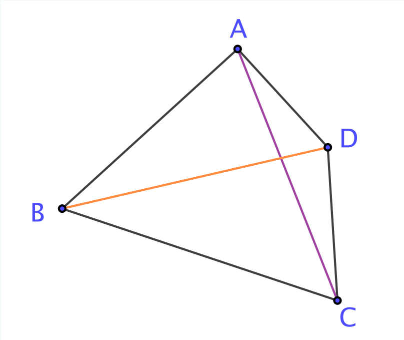
Definición 0.1

- *Cuando cuatro puntos (o más) se encuentran sobre una circunferencia decimos que son cíclicos.*
- *Decimos que un polígono es inscrito en una circunferencia cuando todos sus vértices están sobre una misma circunferencia. Al círculo generado, se le llama circunscrito al polígono. También se dice que el polígono es cíclico.*
- *Un cuadrilátero es un polígono con cuatro lados, es decir con cuatro vértices.*
- *En un cuadrilátero se llaman lados adyacentes a los lados que tienen un vértice en común. A aquellos lados que no tienen un vértice en común se llaman lados opuestos.*
- *Decimos que dos vértices son adyacentes si pertenecen a un mismo lado, de lo contrario se les llama vértices opuestos.*

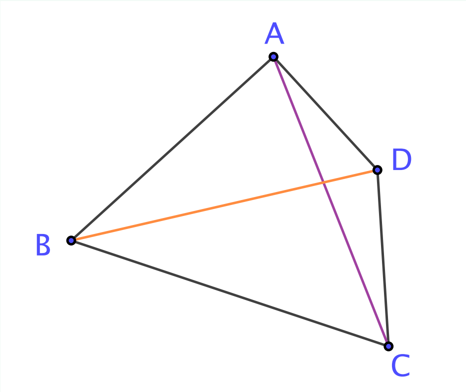
♣

Definición 0.2

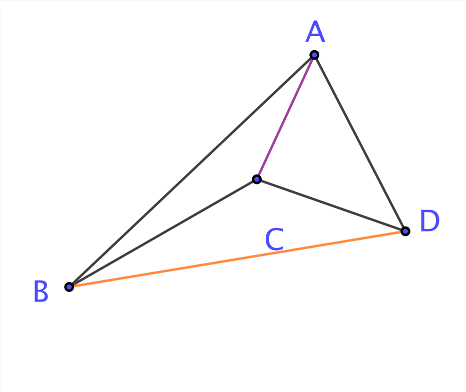
- *Las rectas que unen vértices opuestos de un cuadrilátero se llaman diagonales. Por ejemplo en la siguiente imagen, el cuadrilátero $ABCD$ tiene a las rectas AC y BD como diagonales.*



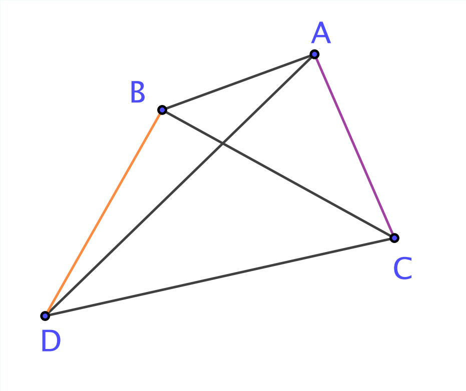
- *Existen tres tipos de cuadriláteros que se distinguen por tener dos, una o alguna de sus diagonales dentro del cuadrilátero. A estos se les conoce como* **convexo**, **entrante**, **cruzado**.



Convexo



Entrante



Cruzado

♣

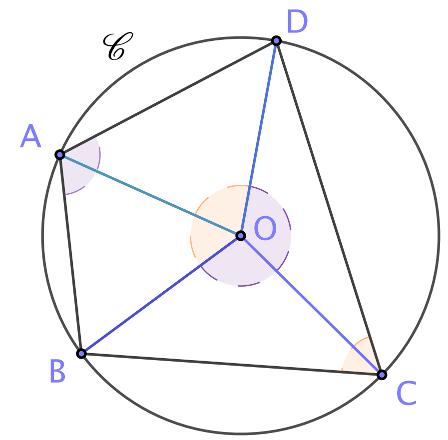
Teorema 0.2

Un cuadrilátero convexo es cíclico si y solamente si tiene dos ángulos opuestos cuya suma es igual a dos rectos, es decir son suplementarios. ♡

Demostración

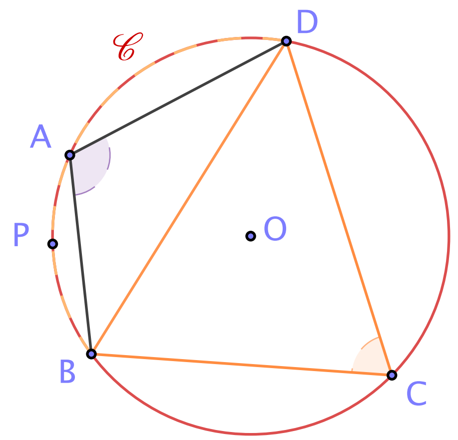
$\Rightarrow$] Supongamos que el cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico, es decir está inscrito en una circunferencia, entonces queremos demostrar que tiene dos ángulos opuestos suplementarios.

Consideremos los puntos B y D fijos sobre la circunferencia, entonces por un corolario de las notas 1 tenemos que los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DCB$ o son iguales o son suplementarios. Así tenemos que $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$ y $\angle DCB = \frac{1}{2}\angle DOB$. Luego $\angle BAD + \angle DCB = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle DOB) = \frac{1}{2}(360°) = 180°$. Por tanto los ángulos $\angle BAD$ y $\angle DCB$ son suplementarios. Ahora bien, notemos que podemos tomar como puntos fijos a A y C, de donde nuevamente los ángulos opuestos $\angle ADC$ y $\angle CBA$ también son suplementarios.



$\Leftarrow$] Supongamos que el cuadrilátero convexo $ABCD$ tiene dos ángulos opuestos suplementarios, queremos demostrar que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, es decir que los cuatro vértices del cuadrilátero están sobre la misma circunferencia.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con dos ángulos opuestos suplementarios, digamos sin pérdida de generalidad que éstos son $\angle BAD$ y $\angle DCB$. Ahora consideremos el circuncírculo $\mathscr{C}$ del $\triangle BCD$, por un corolario (de las notas 1) sabemos que el conjunto de los puntos P que están en el arco $\widehat{DB}$ opuesto al ángulo $\angle DCB$ son suplementarios a este ángulo, es decir, $\angle DCB + \angle BPD = 180°$ y por otro corolario de las notas 1, éstos son los únicos puntos P, por lo que A debe estar sobre el mismo arco. Por tanto $ABCD$ es cíclico. **QED**



Definición 0.3

- *Un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. A los lados paralelos del trapecio se les llama bases. Si los lados no paralelos del trapecio son iguales decimos que el trapecio es isósceles.*
- *Un paralelogramo es un cuadrilátero en el cual ambos pares de lados opuestos son paralelos.*
- *Un rombo es un paralelogramo cuyos lados son todos congruentes entre sí.*
- *Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son todos rectos.*
- *Un cuadrado es un rectángulo cuyos lados son todos congruentes entre sí.* ♣

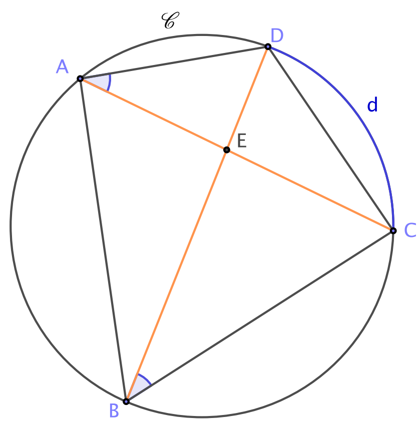
Definición 0.4

Dos circunferencias son concéntricas si tienen el mismo centro. ♣

Teorema 0.3

Un cuadrilátero convexo es cíclico si y sólo si el ángulo entre un lado y una diagonal es igual al ángulo entre el lado opuesto y la otra diagonal. ♡

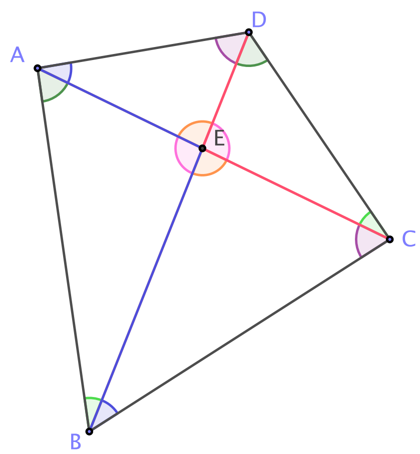
Demostración



$\Rightarrow$] Supongamos que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces queremos demostrar que el ángulo entre un lado y una diagonal es igual al ángulo entre el lado opuesto y la otra diagonal.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en la circunferencia $\mathscr{C}$ y sean AC y DB diagonales del cuadrilátero. Ahora se tiene que $\angle CAD$ y $\angle CBD$ son inscritos y subtienden el mismo arco $\overset{\frown}{CD}$ de la circunferencia, por lo que los ángulos son iguales.

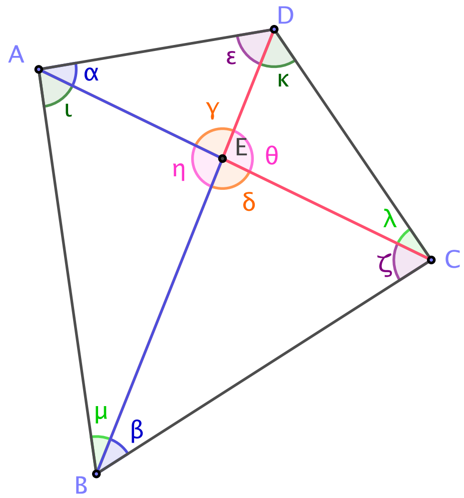
$\Leftarrow$] Supongamos que tenemos un cuadrilátero convexo tal que el ángulo entre un lado y una diagonal es igual al ángulo entre el lado opuesto y la otra diagonal, por demostrar que el cuadrilátero es cíclico.



Sea $ABCD$ un cuadrilátero, tal que $\angle CAD = \angle\alpha = \angle CBD = \angle\beta$. Luego llamemos E al punto de intersección de las diagonales, entonces tenemos que $\angle BEC = \angle DEA$ por ser opuestos por el vértice. De aquí tenemos que $\angle ECB = \angle ADE$ y $\triangle EBC \approx \triangle EAD$, por lo que los lados correspondientes están en la misma proporción, es decir $\frac{AE}{BE} = \frac{DE}{CE}$... (1). También tenemos que el $\angle CED = \angle AEB$ por ser opuestos por el vértice E.

Además de (1) se tiene que $\frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}$, por lo que por el criterio LAL de semejanza se tiene que $\triangle CED \approx \triangle BEA$ y $\angle DCE = \angle EBA$ y $\angle EDC = \angle BAE$.
Ahora bien, considerando el $\triangle CDA$ tenemos que $\angle EAD + \angle DCE + (\angle ADE + \angle EDC) = 180°$, luego $(\angle CBE + \angle EBA) + (\angle ADE + \angle EDC) = 180°$. Por lo que los ángulos opuestos del cuadrilátero $\angle CBA$ y $\angle ADC$ son suplementarios. Por tanto el cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico.

De esta proposición, se tiene que en un cuadrilátero convexo cíclico los ángulos formados por las diagonales cumplen que: $\angle\alpha = \angle\beta$, $\angle\epsilon = \angle\zeta$, $\angle\kappa = \angle\iota$, $\angle\lambda = \angle\mu$



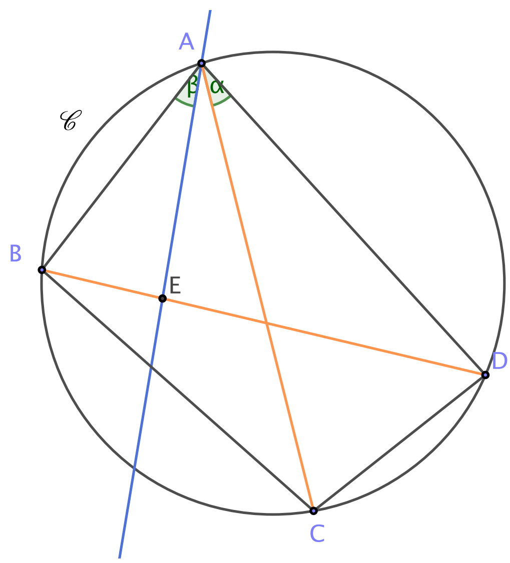
Teorema 0.4. Teorema de Ptolomeo

Si un cuadrilátero convexo es cíclico, entonces el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.

Demostración

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cíclico y sean AC y BD sus diagonales.

Tracemos una recta por el vértice A tal que $\angle BAE = \angle CAD$, llamemos E al punto de intersección de dicha recta con BD.
Tenemos que $\angle DCA = \angle DBA = \angle EBA$ pues son ángulos inscritos que abarcan el mismo arco de circunferencia. Luego en los triángulos $\triangle ACD$ y $\triangle ABE$ se tiene que $\angle ADC = \angle AEB$. Por lo que por el criterio de semejanza AAA, $\triangle ACD \approx \triangle ABE$.
De aquí se sigue que $\frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AB}$, luego:
$(CD)(AB) = (AC)(BE)$...(1).



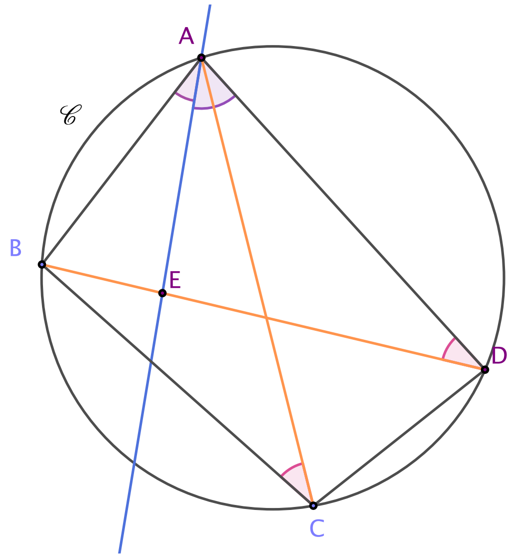
También tenemos que $\angle BAC = \angle EAD$ por construcción, y $\angle ACB = ADB = \angle ADE$ pues subtienden el mismo arco. Luego por el criterio (AA) de semejanza $\triangle ABC \approx \triangle AED$, es decir, $\frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD}$. Entonces $(BC)(AD) = (AC)(ED)$...(2).

Sumando (1) y (2) tenemos:

$$(CD)(AB) + (BC)(AD) = (AC)(BE) + (AC)(ED)$$

$$(CD)(AB) + (BC)(AD) = (AC)(BE + ED)$$

$$(CD)(AB) + (BC)(AD) = (AC)(BD)$$



Por tanto el producto de las diagonales es igual a la suma del producto de los lados opuestos. **QED**

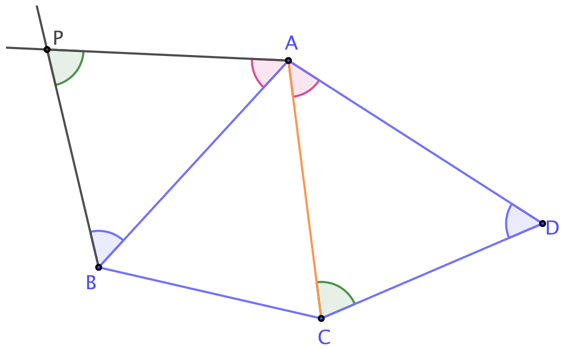
Teorema 0.5. Recíproco del Teorema de Ptolomeo

Si el producto de las diagonales de un cuadrilátero convexo es igual a la suma de los productos de los lados opuestos, entonces el cuadrilátero es cíclico. ♡

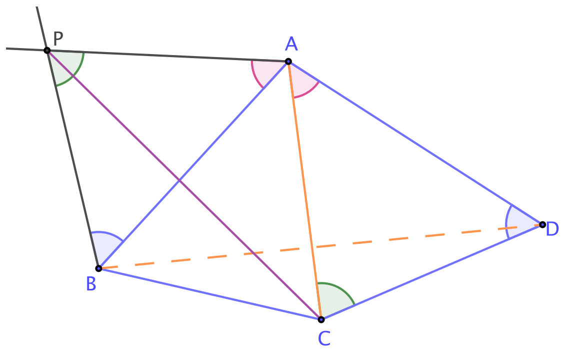
Demostración

La demostración la haremos por contrapositiva, es decir supondremos que el cuadrilátero no es cíclico, luego demostraremos que $(AC)(BD) < (CD)(AB) + (BC)(AD)$.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con AC y BD diagonales. Sea P un punto tal que $\angle DCA = \angle BPA$ y $\angle CAD = \angle PAB$. Luego $\triangle ACD \approx \triangle APB$. Por lo que $\frac{AP}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{PB}{CD}$...(1).



Ahora consideremos los triángulos $\triangle PAC$ y $\triangle BAD$, en los cuales $\angle PAC = \angle BAD$ y por (1) $\frac{AP}{AC} = \frac{AB}{AD} = \frac{PB}{CD}$, luego $\frac{AB}{AP} = \frac{AD}{AC}$. Entonces, por el criterio de semejanza LAL tenemos que $\triangle PAC \approx \triangle BAD$, por lo que $\frac{BD}{PC} = \frac{AD}{AC}$...(2).



Por otro lado, sabemos que un cuadrilátero es cíclico si y sólo si tiene dos ángulos opuestos suplementarios. Es decir:

$ABCD$ es cíclico $\Leftrightarrow \angle CBA + \angle ADC = 180°$ esto pasa si y sólo si P, B y C son colineales, es decir si y sólo si $PC = PB + BC$.

Por tanto, $ABCD$ no es cíclico $\Leftrightarrow PC < PB + BC$...(3).

Ahora bien, de (2) tenemos que $PC = \frac{(AC)(BD)}{AD}$ y de (1) se tiene $PB = \frac{(AB)(CD)}{AD}$.

Sustituyendo lo anterior en (3) $PC = \frac{(AC)(BD)}{AD} < \frac{(AB)(CD)}{AD} + BC$, luego

$(AC)(BD) < \left(\frac{(AB)(CD)}{AD} + BC\right)(AD)$, es decir, $(AC)(BD) < (AB)(CD) + (BC)(AD)$.

Por lo que, si $ABCD$ no es cíclico entonces $(AC)(BD) < (AB)(CD) + (BC)(AD)$.

Por tanto si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo tal que $(AC)(BD) = (CD)(AB) + (BC)(AD)$ con AC y BD diagonales, entonces el cuadrilátero es cíclico. **QED**

Proposición 0.1

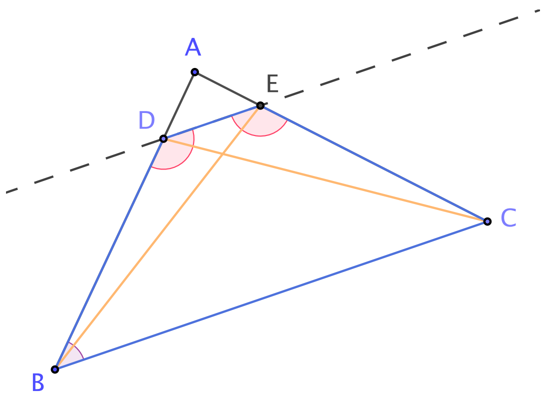
Si una recta corta dos círculos concéntricos determinando la cuerda XY en el más grande y la cuerda PQ en el menor, entonces $XP = QY$. ♠

Demostración La demostración se deja como actividad para el alumno.

Proposición 0.2

Sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con $AB = AC$. Si por un punto D en el lado AB se traza una paralela al lado BC con E el punto de intersección de la paralela con AC, entonces el cuadrilátero $BCED$ es cíclico (inscriptible). ♠

Demostración



Consideremos el $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con $AB = AC$. Tomemos un punto D en el lado AB y tracemos la paralela por D al lado BC, llamemos E al punto de intersección de la paralela con AC. Consideremos el cuadrilátero $BCED$, en el cual $DE \parallel BC$ por construcción y el $\angle CBD = \angle ECB$ por ser ángulos del triángulo isósceles $\triangle ABC$. Ahora, consideremos la recta DB transversal a las paralelas BC y DE, de donde $\angle CBD + \angle BDE = 180°$, de igual forma, al considerar la recta transversal CE se tiene que $\angle ECB + \angle DEC = 180°$. Luego como $\angle CBD = \angle ECB$, entonces $\angle CBD + \angle DEC = 180°$. Por lo que en el cuadrilátero sus ángulos opuestos son suplementarios. Por tanto, el cuadrilátero $BCED$ es cíclico. **QED**

Proposición 0.3

Demostrar que los únicos paralelogramos cíclicos son los rectángulos.

Demostración

Por definición los lados y ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales. Luego, sabemos que para que un cuadrilátero sea cíclico, los ángulos opuestos deben ser suplementarios, es decir, suman $180°$. Por lo que los ángulos opuestos del paralelogramo deben ser rectos. Por tanto el cuadrilátero debe ser un rectángulo.

Proposición 0.4

Demuestra que todo trapecio isósceles es cíclico.

Demostración La demostración se deja como tarea para el alumno.

Ejercicios para ir pensando

1. Todo pentágono regular es inscriptible.
2. Todo polígono regular es inscriptible.