Examen

Rigoberto Canseco López

1. Indique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justifica tu respuesta con una demostración o un contra ejemplo.

a) x2 + y2 = 25 Es la ecuación de una circunferencia con radio 5.

Es verdadero

b) Todo lugar geométrico cumple al menos una de las simetrías respecto a ejes, planos (coordenados) o el origen.

Es verdadero

2. En cada inciso halle la ecuación cartesiana para la superficie de revolución generada por el lugar geométrico G y la recta L.

a) G : “x2 + 2y2 + 6y − 7 = 1, z = 0” L es el eje X.

Sean $C \in eje\ X, Q \in \mathscr{G}$ y $P \in \mathscr{R}$

Como $\mathscr{G}$:” $x^2+2y^2+6y-7=1$ ” por lo tanto

Se hace un cambio de variable $w = x$

$$w = x = \sqrt{8-2y^2-6y}$$

- Por el lema 2 y el corolario 2 podemos deducir los valores de C y Q.

  Donde $C=(0,y,0)$, $Q=(w,y,0)$, $P(x,y,z)$ y $v=e_2=(0,1,0)$.

  - Probar que $(C-P)\perp v$:

    $$\begin{aligned}(C-P)\perp e_2 &= ((0,y,0)-(x,y,z))\cdot(0,1,0)\\ &= (0-x,y-y,0-z)\cdot(0,1,0)\\ &= (-x,0,-z)\cdot(0,1,0)\\ &= (0,0,0)\end{aligned}$$

    Por lo tanto $(C-P)$ es perpendicular a e_2

  - Probar que $(C-Q)\perp v$:

    $$\begin{aligned}(C-Q)\perp e_2 &= ((0,y,0)-(w,y,0))\cdot(0,1,0)\\ &= (0-w,y-y,0-0)\cdot(0,1,0)\\ &= (-w,0,0)\cdot(0,1,0)\\ &= (0,0,0)\end{aligned}$$

    Por lo tanto $(C-Q)$ es perpendicular a e_2

  - Probar que $d(P,C)=d(Q,C)$:

    $$\begin{aligned}d(P,C) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\\ &= \sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2+(z-0)^2}\\ &= \sqrt{(x)^2+(0)^2+(z)^2}\\ &= \sqrt{x^2+z^2}\\ d(Q,C) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\\ &= \sqrt{(w-0)^2+(y-y)^2+(0-0)^2}\\ &= \sqrt{(w)^2+(0)^2+(0)^2}\\ &= \sqrt{(w)^2}=w\end{aligned}$$

    Desarrollamos la igualdad

    $$\begin{gathered}d(P,C)=d(Q,C)\\ \sqrt{x^2+z^2}=w\end{gathered}$$

    Como $w=\sqrt{8-2y^2-6y}$

$$\sqrt{x^2+z^2} = \sqrt{8-2y^2-6y}$$
$$x^2+z^2 = 8-2y^2-6y$$
$$x^2+z^2-8+2y^2+6y = 0$$

Por lo tanto los puntos $(x,y,z) \in \mathscr{R}$ tiene que ser $x^2+z^2-8+2y^2+6y=0$

b) G : “x2 + 8y = 1, z = 0” y L el eje Y

Sean $C \in eje\ Y$, $Q \in \mathscr{G}$ y $P \in \mathscr{R}$

Como $\mathscr{G}$:” $x^2+8y=1$ ” por lo tanto

Se hace un cambio de variable $w=y$

$$w = y = \frac{1-x^2}{8}$$

Por el lema 3 y el corolario 3 podemos deducir los valores de C y Q.

Donde $C=(x,0,0)$, $Q=(x,w,0)$, $P(x,y,z)$ y $v=e_1=(1,0,0)$

- Probar que $(C-P)\perp v$:

$$\begin{aligned}(C-P)\perp e_1 &= ((x,0,0)-(x,y,z))\cdot(1,0,0)\\ &= (x-x,0-y,0-z)\cdot(1,0,0)\\ &= (0,-y,-z)\cdot(1,0,0)\\ &= (0,0,0)\end{aligned}$$

  Por lo tanto $(C-P)$ es perpendicular a e_1

- Probar que $(C-Q)\perp v$:

$$\begin{aligned}(C-Q)\perp e_1 &= ((x,0,0)-(x,w,0))\cdot(1,0,0)\\ &= (x-x,0-w,0-0)\cdot(1,0,0)\\ &= (0,-w,0)\cdot(1,0,0)\\ &= (0,0,0)\end{aligned}$$

  Por lo tanto $(C-Q)$ es perpendicular a e_1

- Probar que $d(P,C)=d(Q,C)$:

$$\begin{aligned}d(P,C) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\\ &= \sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}\\ &= \sqrt{(0)^2+(y)^2+(z)^2}\\ &= \sqrt{y^2+z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(Q,C) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\\ &= \sqrt{(x-x)^2+(w-0)^2+(0-0)^2}\\ &= \sqrt{(0)^2+(w)^2+(0)^2}\\ &= \sqrt{(w)^2} = w\end{aligned}$$

  Desarrollamos la igualdad

$$d(P,C) = d(Q,C)$$
$$\sqrt{y^2+z^2} = w$$

Como $w = \frac{1-x^2}{8}$

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \frac{1 - x^2}{8}$$
$$y^2 + z^2 = \frac{(1 - x^2)^2}{64}$$
$$y^2 + z^2 - \frac{(1 - x^2)^2}{64} = 0$$

Por lo tanto los puntos $(x, y, z) \in \mathscr{R}$ tiene que ser la ecuación cartesiana $y^2 + z^2 - \frac{(1-x^2)^2}{64} = 0$