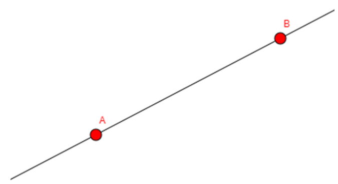
## Segmentos dirigidos

El uso de los segmentos dirigidos (u orientados) precede, históricamente hablando, al de los vectores. En cursos como los de geometría analítica y mecánica vectorial se acostumbra hacer una presentacióon de los segmentos dirigidos como una introducción al estudio de los vectores y sus aplicaciones.

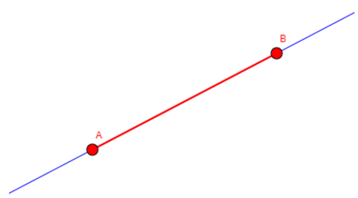
**Recta**

**Definición 1.** *Una recta está determinada por cualesquiera dos de sus puntos*

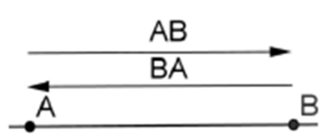



**Segmento**

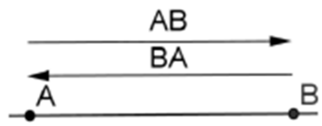
**Definición 2.** *Dados dos puntos A y B sobre una recta, el pedazo de recta comprendido entre estos dos puntos, incluyendo los puntos, le llamamos el segmento AB.*




Los puntos extremos A y B del segmento podemos ordenarlos, estos es, tomar uno de ellos por primero y el otro por segundo. El primer extremo recibe el nombre de origen del segmento; el segundo se llama fin del segmento.
Un segmento de extremos ordenados se denomina orientado o dirigido.
Así pues, AB y BA, en este caso, son segmentos que se diferencian por su orientación.
Cada segmento tiene una longitud determinada. La longitud es un número no negativo. Es nula sólo en caso en que los extremos del segmento coincidan, esto es, cuando el segmento se reduce a un punto.
Además de la longitud, el segmento dirigido puede llevar un cierto signo que se le asigna de acuerdo a su orientación. Por ejemplo en la figura siguiente, al segmento que va de A a B se le asigna un signo positivo y esto se denota AB.
Mientras que al mismo segmento pero que va de B a A se le asigna un signo negativo que se denota -BA.



**Segmentos dirigidos.** En general, tenemos que el segmento AB es igual al segmento BA. Cuando al segmento AB le asignamos un sentido, por ejemplo de A a B, tenemos el segmento dirigido AB, mientras que si lo vemos de B a A tenemos el segmento dirigido BA. Las magnitudes de los segmentos dirigidos AB y BA son las mismas, pero sus direcciones son opuestas. Entonces el segmento BA tendrá sentido opuesto a AB, y esto lo señalamos expresando $AB = -BA$.




O, equivalentemente, pero escrito de manera más simétrica:

$$AB + BA = 0 \tag{1}$$

**Teorema 1.** *(Fórmula de Chasles). Si A, B y C son tres puntos alineados, entonces*

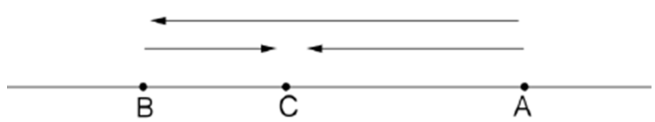
$$AB + BC + CA = 0$$

*para cualquier orden de los puntos A, B y C.*

*Demostración.* 1. Si B y C están en semirrectas diferentes determinadas por el punto A, esto es A está en medio de B y C se tiene que AB y AC tienen sentidos opuestos y que AC y BC tienen el mismo sentido


por lo tanto, $AB + BC = -BA + BC = AC$. Independientemente de la semirrecta en que están B y C, la demostración es la misma, siempre y cuando A esté en medio.

2. Si B y C están en la misma semirrecta determinada por el punto A, y C está en medio de AB se tiene que AB y AC tienen el mismo sentido y que AC y BC tienen sentido opuesto.




por lo tanto, $AB + BC = AB - CB = AC$. La demostración es análoga para el caso en que B está en medio de A y C.
Observe que en el caso de que no se estén considerando los segmentos dirigidos la fórmula $AB + BC = AC$ sólo es válida cuando B está en medio de A y C. Pero si se consideran los segmentos dirigidos, en todos los casos $AB + BC = AC$ y por tanto, $AB + BC + CA = AC + CA = 0$.

Si B es un punto interior del segmento AC, tenemos que

$$AB + BC = AC$$

y según (2)

$$AB + BC + CA = AC + CA = 0$$

□

**Teorema 2.** *Fórmula de Euler.*
*Si A, B, C y D son cuatro puntos alineados, entonces*

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$$

*Demostración.* Ya que $AB + BC = AC$, para cualesquiera tres puntos colineales A, B y C,

$$AB = AD + DB, \quad AC = AD + DC, \quad BC = BD + DC$$

De estas tres igualdades se obtiene

$$AB = DB - DA, \quad AC = DC - DA \;\; y \;\; BC = DC - DB,$$

por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC &= (DB - DA)CD + (DC - DA)DB + (DC - DB)AD \\ &= DB \cdot CD - DA \cdot CD + DC \cdot DB - DA \cdot DB + DC \cdot AD - DB \cdot AD, \end{aligned}$$

y reagrupando,

$$DB(CD + DC) - DA(CD + DC) - DB(DA + AD) = DB(0) - DA(0) - DB(0) = 0$$

□

**Teorema 3.** *Fórmula de Stewart.*
*Si A, B, C y D son cuatro puntos alineados, entonces*

$$DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0$$

*Demostración.* Usando las identidades siguientes

$$AB + BC = AC \;\Rightarrow\; AB = CB - CA$$

$$DC + CA = DA \;\Rightarrow\; CA = DA - DC \;\Rightarrow\; -CA = DC - DA$$

$$DC + CB = DB \;\Rightarrow\; CB = DB - DC \;\Rightarrow\; BC = DC - DB$$

obtenemos:

1. Para el término $DA^2 \cdot BC$

$$\begin{aligned} DA^2 \cdot BC &= DA^2 \cdot (DC - DB) \\ &= DA^2 \cdot DC - DA^2 \cdot DB \end{aligned}$$

2. Para el término $DB^2 \cdot CA$

$$\begin{aligned} DB^2 \cdot CA &= DB^2 \cdot (DA - DC) \\ &= DB^2 \cdot DA - DB^2 \cdot DC \end{aligned}$$

3. Para el término $DC^2 \cdot AB$

$$\begin{aligned} DC^2 \cdot AB &= DC^2 \cdot (DB - DA) \\ &= DC^2 \cdot DB - DC^2 \cdot DA \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} AB \cdot BC \cdot CA &= (DB - DA) \cdot (DC - DB) \cdot (DA - DC) \\ &= (DB \cdot DC + DB^2 - DA \cdot DC + DA \cdot DB)(DA - DC) \end{aligned}$$

esto es

$$\begin{aligned} AB \cdot BC \cdot CA = DB \cdot DC \cdot DA - DB \cdot DC^2 - DB^2 \cdot DA + DB^2 \cdot DC - DA^2 \cdot DC + \\ DA \cdot DC^2 + DA^2 \cdot DB - DA \cdot DB \cdot DC \\ = -DB \cdot DC^2 - DB^2 \cdot DA + DB^2 \cdot DC - DA^2 \cdot DC + DA \cdot DC^2 + DA^2 \cdot DB \end{aligned}$$

La primera parte nos da

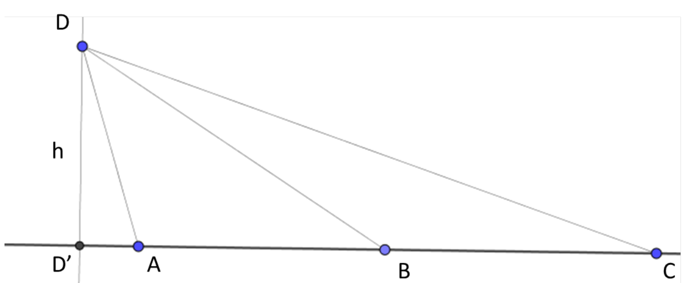
$$DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot AB = DA^2 \cdot DC - DA^2 \cdot DB + DB^2 \cdot DA - DB^2 \cdot DC + DC^2 \cdot DB - DC^2 \cdot DA \tag{2}$$

La segunda parte nos da

$$AB \cdot BC \cdot CA = -DB \cdot DC^2 - DB^2 \cdot DA + DB^2 \cdot DC - DA^2 \cdot DC + DA \cdot DC^2 + DA^2 \cdot DB \tag{3}$$

Al sumar (2) y (3) obtenemos el resultado □

Para la fórmula de Stewart. En el caso en que D no esta en alineado con A,B y C, se considera la proyección D' en la recta que contiene a los puntos A, B y C



Se tiene entonces que

$$DA^2 = h^2 + D'A^2 \;\Rightarrow\; DA^2 \cdot BC = h^2 \cdot BC + D'A^2 \cdot BC$$

$$DB^2 = h^2 + D'B^2 \;\Rightarrow\; DB^2 \cdot CA = h^2 \cdot CA + D'B^2 \cdot CA$$

$$DC^2 = h^2 + D'C^2 \;\Rightarrow\; DC^2 \cdot BC = h^2 \cdot BC + D'C^2 \cdot AB$$

Sumando tenemos

$$\begin{aligned} DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot BC &= h^2 \cdot BC + D'A^2 \cdot BC + h^2 \cdot CA + D'B^2 \cdot CA + h^2 \cdot BC + D'C^2 \cdot AB \\ &= h^2(BC + CA + BC) + D'A^2 \cdot BC + D'B^2 \cdot CA + D'C^2 \cdot AB \\ &= -AB \cdot BC \cdot CA \end{aligned}$$