Conjuntos y Lógica

Cecilia Chávez Aguilera

Facultad de Ciencias
CU

14 de octubre de 2020

Definición

Un lenguaje de primer orden consta de los siguientes símbolos:

- Un conjunto de variables individuales $V = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$
- Un conjunto de símbolos de predicado $P = \{A_i^j : i, j \in \mathbb{N}\}$
- Un conjunto de símbolos de función $F = \{f_i^j : i, j \in \mathbb{N}\}$
- Un conjunto de símbolos de constantes individuales $C = \{c_i : i \in \mathbb{N}\}$
- Símbolos de conectivos $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- Símbolos para cuantificar $\{\forall, \exists\}$
- Símbolos de puntuación $\{), (, , \}$

Términos

1. Para toda $x_i \in V$, x_i es un término
2. Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos y $f_i^n \in F$, entonces $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$
3. Sólo aquellas expresiones formadas mediante un número finito de pasos de los casos 1 y 2 es un término

Dado un lenguaje de primer orden L denotamos al conjunto de términos de L mediante T_L

Definición

Dado un lenguaje de pimer orden L, con P su conjunto de predicados, el conjunto de fórmulas atómicas está formado por el conjunto de expresiones de la forma:

$$A_i^n(t_1, \dots, t_n)$$

con $A_i^n \in P$, y $t_1, \dots t_n \in T_L$. Al conjunto de fórmulas atómicas de un lenguaje lo denotaremos mediante $\mathcal{A}$

Definición

Dado L lenguaje de primer orden, definimos su conjunto de fórmulas de manera recursiva de la siguiente manera

- Para toda $\alpha \in \mathcal{A}$, α es una fórmula
- Si α, β son fórmulas, entonces las siguientes son fórmulas: $(\neg\alpha), (\alpha \wedge \beta),\ (\alpha \vee \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ son fórmulas.
- Si α es fórmula y $x_i \in V$, entonces las siguientes son fórmulas $((\forall x_i)\alpha), ((\exists x_i)\alpha)$.
- Sólo aquellas expresiones formadas mediante un número finito de pasos basados en los casos anteriores es fórmula.

Definición

- En una fórmula del tipo $((\forall x_i)\alpha)$ decimos que α es el *alcance* del cuantificador $\forall$.
- En una fórmula del tipo $((\exists x_i)\alpha)$ decimos que α es el *alcance* del cuantificador $\exists$

- $\neg((\forall x_1)\alpha) \equiv ((\exists x_1)\neg\alpha)$
- $\neg((\exists x_1)\alpha) \equiv ((\forall x_1)\neg\alpha)$