# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Grupo: 4083

Álgebra Superior II

2o Examen parcial

**Recuerda escribir en tu resolución: Fecha, Nombre, No. de Cuenta y los números de los problemas que resuelves.**

## Sección A.

1. Demuestra la unicidad de $q$ y $r$ en el algoritmo de la división.
2. Demuestra que la relación definida en $\mathbb{Z}$ como

$$a \sim b \Leftrightarrow b - a \in m\mathbb{Z}$$

   es de equivalencia. Describe sus clases de equivalencia.

3. Demuestra que si $2^m - 1$ es primo, con $m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$, entonces el número

$$n = 2^{m-1}(2^m - 1)$$

   es **perfecto**, es decir, es la suma de sus divisores impropios.

## Sección B.

1. Demuestra que $2 \mid n^2 - n$
2. Demuestra que 3 divide al producto de cualesquiera tres enteros positivos
3. Si $a \in \mathbb{Z}$ es un número impar entonces el residuo de dividir $a^2$ entre 4, es 1.

## Sección C.

1. Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ definida como $f(z) = [z]$. Demuestra que $f$ es un morfismo de anillos.
2. Demuestra que si $A$ es un anillo conmutativo con unitario en el que se cumple la cancelación para el producto, entonces $A$ es dominio entero.

## Comodines

1. Sean $A$ un anillo ordenado con clase positiva $P$ y $a, b, c \in A$, demuestra que:
   a) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
   b) $a < b$ y $c \in P \Rightarrow ac < bc$
2. Sean $A$ un anillo ordenado con clase positiva $P$ y $a, b, c \in A$, demuestra que:
   a) Se cumple una y solamente una de las siguientes: $a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$
   b) Si $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$

3. Sean $A$ un anillo ordenado con clase positiva $P$ y $a, b, c \in A$, demuestra que:

   *a*) Si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 \in P$

   *b*) Se cumple una y solamente una de las siguientes: $0 < a$ ó $a = 0$ ó $a < 0$

4. Sean $A$ un anillo ordenado con clase positiva $P$ y $a, b, c \in A$, demuestra que:

   *a*) Si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow bc < ac$

   *b*) Si $a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow 0 < ab$

5. Demuestra que si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$

6. Demuestra que si $a|b$ y $b|a$ entonces $a = b \ \vee \ a = -b$

7. Demuestra que si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$

8. Demuestra que si $ac|bc$ entonces $a|b$

9. Demuestra que si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|bx + cy$, para calquier par de enteros $x, y$.