Inducción

1. Demuestra por inducción sobre $n \geq 0$, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

2. Demuestra por inducción sobre $n \geq 0$, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. Demuestra por inducción sobre $n \geq 5$, que $2^n > n^2$.

4. Demuestra por inducción sobre $n \geq 0$, que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

5. Se define $S \subseteq \mathbb{N} \text{ X } \mathbb{N}$ como sigue: $(0,0) \in S$. Si $(m,n) \in S$, entonces $(m+2, n+3) \in S$. Demuestra por inducción sobre $n \geq 0$ que para todo $(m,n) \in S$, $m+n$ es múltiplo de 5.

6. Demuestra por inducción que para toda $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$, un tablero de ajedrez de tamaño $n \times m$ tiene exactamente el mismo número de cuadros blancos, que negros.

7. El coeficiente binomial $\displaystyle\binom{n}{r}$, para n, $r \in \mathbb{N}, r \leq n$ se define como el número de formas de escoger r cosas de n sin reemplazo, esto es:
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$
demuestra por inducción que $\binom{n}{r} \in \mathbb{N}$. **Hint:** Usa la fórmula de Pascal

8. Demuestra por inducción sobre n que $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$.

9. ¿Qué está mal en la siguiente "demostración"? Afirmamos que $6n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se demuestra por inducción sobre $n \geq 0$. Claramente, si $n = 0$, entonces $6n = 0$. Suponemos $n > 0$. Sea $n = a + b$ y por hipótesis de inducción $6a = 0$ y $6b = 0$. Por lo tanto,
$$6n = 6(a+b) = 6a + 6b = 0 + 0 = 0$$

10. Demuestra por inducción que un polígono convexo de n lados tiene $\displaystyle\frac{n(n-3)}{2}$ cuerdas.

11. Demuestra por inducción para $n \geq 0$ que:
$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

12. ***Principio del palomar.*** Supón que existen n nidos y $n+1$ palomas. Demuestra por inducción que hay por lo menos un nido que contiene al menos dos palomas.

13. Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que si $x > 1$, entonces $x^n > x$, $\forall n \geq 2$.

14. Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que si $0 < x < 1$, entonces $x^n < x$, $\forall n \geq 2$.

15. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Demuestra que si $0 < a < b$, entonces $0 < a^n < b^n$, $\forall n \geq 2$.

16. Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestra que si $x > -1$, entonces $(1+x)^n > 1 + nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

17. Después de transcurrir n meses en un experimento de invernadero, el número p_n de plantas ahí cultivadas satisface las ecuaciones:

$$p_0 = 3,\ p_1 = 7 \text{ y } p_n = 3p_{n-1} - 2p_{n-2},\ \forall n \geq 2$$

Demuestra por inducción fuerte que $p_n = 2^{n+2} - 1$.