1. LOS AXIOMAS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1. Sean a y b conjuntos.

(1) Muestre que $a = b$ si y solamente si $\{a\} = \{b\}$.

(2) Muestre que los conjuntos

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots, \{\ldots\{\emptyset\}\ldots\}\ldots$$

son todos distintos entre sí.

1.2. Demuestre la unicidad del conjunto C asegurado por el Axioma del Par.

1.3. Demuestre la unicidad del conjunto U asegurado por el Axioma de Unión.

1.4. Muestre que para cualesquiera conjuntos A, B, y C existe un único conjunto P tal que $x \in P$ si y sólo si $X = A$ o $x = B$ o $x = C$.

1.5. Sea A un conjunto A. Demuestre que $A \subseteq \{A\}$ si sólo si $A = \emptyset$.

1.6. Sean A y B conjuntos. A continuación se describen colecciones definidas mediante una propiedad. Determine qué colecciones SÍ definen a un conjunto. Justifique su respuesta.

(1) $\{x : x \notin B\}$.

(2) $\{y : \exists x \in A \cup B(y = \{\{x\}\})\}$.

(3) $\{x : \emptyset \notin x\}$.

(4) $\{a \cup b : a \in A \wedge b \in B\}$.

(5) $\{\mathscr{P}(a) : a \in A\}$.

1.7. Suponga que A y B son conjuntos y pruebe lo siguiente:

(1) Si $A \subseteq B$, entonces $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$ y $\bigcup A \subseteq \bigcup B$.

(2) $\mathscr{P}(\bigcup A) = A$.

(3) $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$. ¿Será cierta la otra contención?

1.8. Pruebe que si A y B son conjuntos no vacíos, entonces no es posible que ocurran simultaneamente que $A \in B$ y $B \in A$.

1.9. Demuestre que para cualquier conjunto X existe un conjunto a de tal forma que $a \notin X$. (Sugerencia: Modifique la paradoja de Russell).

1.10. Demuestre que para cualquier conjunto X es falso que $\mathscr{P}(X) \subseteq X$. Utilice este hecho para demostrar que la colección de todos los conjuntos no es un conjunto.

1.11. Considere los siguientes axiomas:

Axioma débil de existencia: Existe un conjunto.

Axioma débil del par: Si A y B son conjuntos, entonces existe un conjunto C que tiene como elementos a A y B.

Axioma débil de unión: Si A es un conjunto, entonces existe un conjunto U tal que si $x \in S$ y $S \in A$ entonces $x \in U$.

Axioma débil del conjunto potencia: Si A es un conjunto, entonces existe un conjunto P tal que si $B \subseteq A$ entonces $B \in P$.

(1) Utilice una LTC-fórmula para escribir cada uno de los axiomas anteriores.

(2) Deduzca el Axioma de Existencia, el Axioma del Par, el Axioma de Unión y el Axioma del Conjunto Potencia, usando las versiones débiles. (Sugerencia: utilice el Axioma Esquemático de Comprensión).