Capítulo 1

Axioma del supremo

En esta sección estudiaremos el axioma del supremo. Para ello veremos algunos conceptos previos que necesitamos para poder abordar el tema.

Cotas

Definiciones:

- Sea S un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número real b tal que
$$x \leq b \qquad \text{para todo } x \in S.$$
Entonces decimos que S está acotado superiormente por b y que b es una cota superior de S.

  Observación:

  En la definición anterior decimos que b es **una** cota superior pues si $\alpha > b$ entonces α tiene la misma propiedad.

- Sea S un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número real c tal que
$$c \leq x \qquad \text{para todo } x \in S.$$
Entonces decimos que S está acotado inferiormente por c y que c es una cota inferior de S.

- Un conjunto S está acotado si está acotado tanto superior como inferiormente.

- Por convención el conjunto vacío está acotado.

Ejemplos

1. $A = \{-2, 1, 30\}$. A está acotado.
2. $B = \left(-\infty, \dfrac{3}{5}\right)$. B está acotado superiormente.
3. $C = \{0, 2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$. C está acotado inferiormente.
4. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$. D está acotado.
5. $E = \left\{ \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

   Solución:

   Observemos que
$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \right\}$$

de donde

$$E \subset (0,1],$$

entonces E está acotado.

Definición

- Si una cota superior b de S pertenece a S, entonces b se llama el *elemento máximo* de S, es decir,
  - $x \leq b \qquad$ para todo $x \in S$.
  - $b \in S$.

  Se denota como $\max S = b$.
- Si una cota inferior c de S pertenece a S, entonces c se llama el *elemento mínimo* de S, es decir,
  - $c \leq x \qquad$ para todo $x \in S$.
  - $c \in S$.

  Se denota como $\min S = c$.

Ejemplos

1. $A = \{-2, 1, 30\}$. $\quad \max A = 30$, $\min A = -2$.
2. $B = \left(-\infty, \dfrac{3}{5}\right)$. $\quad B$ no tiene ni mínimo ni máximo.
3. $C = \{0, 2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$. $\quad \min C = 0$.
4. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 3\}$.

   Solución:

   Observemos que

   $$\begin{array}{rcl} x^2 & \leq & 3 \\ |x| & \leq & \sqrt{3}, \end{array}$$

   es decir,

   $$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

   De donde $D = \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$. Así $\max D = \sqrt{3}$ y $\min D = -\sqrt{3}$.

5. $E = \left\{ \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

   Solución:

   Podemos escribir E como
$$E = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots \right\}$$
   entonces $\max E = 1$ y E no tiene mínimo.

Observaciones

1. Si $S \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente (inferiormente) tiene una infinidad de cotas superiores (inferiores).
2. Si $S \subset \mathbb{R}$ tiene máximo (mínimo) está acotado superiormente (inferiormente).
3. Puede suceder que un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente (inferiormente) no tenga máximo (mínimo).

Ejemplo

- $A = (a, b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.

  Solución:

  Si $x \in A$ entonces
$$a < x < b,$$
  de donde A está acotado superiormente por b e inferiormente por a. Sin embargo A no tiene ni máximo ni mínimo.

  P.D. A no tiene máximo.

  Haremos la demostración por contradicción.

  Supongamos que $\max A = c$, entonces
$$\begin{aligned} c &\in (a, b) \\ x &\leq c \qquad \forall\, x \in (a, b) \end{aligned}$$
  Como $c \in (a, b)$ entonces
$$c < b$$
  de donde
$$c < \frac{c+b}{2} < b$$
  y además
$$a < c < \frac{c+b}{2} < b$$
  así
$$\frac{c+b}{2} \in (a, b)$$

y

$$c < \frac{c+b}{2}$$

lo cual es una contradicción, porque encontramos un elemento del conjunto mayor que el máximo.

Definiciones

- Si $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$ y está acotado superiormente, entonces a la mínima cota superior se le llama el supremo del conjunto y se denota por $\sup S$, es decir, $b = \sup S$ si
  - $x \leq b$ para todo $x \in S$.
  - $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ x \in S$ tal que $b - \varepsilon < x$.

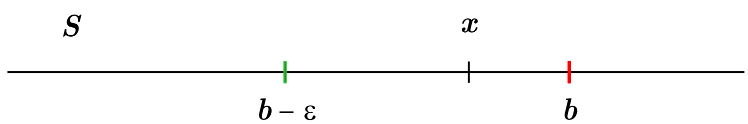

Figura 1-1

- Si $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$ y está acotado inferiormente, entonces a la máxima cota inferior se le llama el ínfimo del conjunto y se denota por $\text{ínf}\, S$, es decir, $c = \text{ínf}\, S$ si
  - $c \leq x$ para todo $x \in S$.
  - $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ x \in S$ tal que $x < c + \varepsilon$.

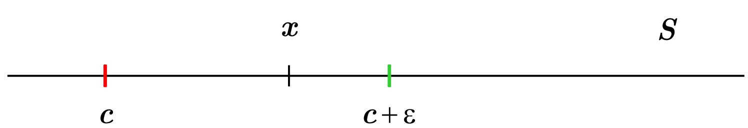

Figura 1-2

Teorema

i) Si $S \subset \mathbb{R}$ tiene máximo, entonces S tiene supremo y $\sup S = \text{máx}\, S$.

ii) Si $S \subset \mathbb{R}$ tiene mínimo, entonces S tiene ínfimo y $\text{ínf}\, S = \text{mín}\, S$.

Demostración:

Probaremos solo el inciso (i).
Sea $\alpha = \max S$, entonces

$$\begin{array}{rcll} x & \leq & \alpha & \quad \text{para todo } x \in S \\ \alpha & \in & S. & \end{array}$$

Si α' es una cota superior de S, entonces

$$x \leq \alpha' \qquad \text{para todo } x \in S$$

en particular

$$\alpha \leq \alpha'$$

lo cual muestra que $\alpha = \sup S$.

■

Observación:
Si S no tiene supremo (ínfimo), entonces S no tiene máximo (mínimo).
Teorema

i) El supremo de un conjunto S es único.

ii) El ínfimo de un conjunto S es único.

Demostración:

Probaremos el primer inciso.
Supongamos que c y d son dos supremos de S.

$$\begin{array}{ll} \text{Por ser } d \text{ supremo de } S & d \leq c \\ \text{Por ser } c \text{ supremo de } S & c \leq d \end{array}$$

de donde $c = d$.

■

Ejemplos

1. Sea $S = \{x \in \mathbb{R} \;\; x^2 \leq 3|\}$. Probar que $\sup S = \sqrt{3}$.

   Solución:

   Si $x \in S$ entonces

   $$\begin{array}{rcl} x^2 & \leq & 3 \\ |x| & \leq & \sqrt{3} \end{array}$$

   de donde

   $$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3},$$

   es decir, $S = \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$.

Por ser un intervalo cerrado, S está acotado superior e inferiormente.

$$\begin{array}{rl} \sqrt{3} & \text{es una cota superior} \\ -\sqrt{3} & \text{es una cota inferior.} \end{array}$$

Además como $\sqrt{3} \in S$ entonces $\max S = \sqrt{3}$. Análogamente $\min S = -\sqrt{3}$.

P.D. $\sup S = \sqrt{3}$.

Sea α una cota superior de S, entonces

$$x \leq \alpha \qquad \text{para todo } x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right].$$

Supongamos que $\alpha < \sqrt{3}$, entonces

$$\alpha < \frac{\alpha + \sqrt{3}}{2} < \sqrt{3}$$

de donde $\dfrac{\alpha + \sqrt{3}}{2} \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$, entonces α no es cota superior de S lo cual es una contradicción. Así

$$\sqrt{3} \leq \alpha \qquad \text{y} \qquad \sup S = \sqrt{3}.$$

2. Sea $C = (a, b)$. Probar que C no tiene máximo y que $\inf C = a$.

   Solución:

   P.D. C no tiene máximo.

   Supongamos que $\beta = \max C$, entonces

   $$x \leq \beta \qquad \text{para todo } x \in C$$

   y

   $$\beta \in C,$$

   entonces

   $$a < \beta < b$$

   de donde

   $$a < \beta < \frac{\beta + b}{2} < b;$$

   así

   $$\frac{\beta + b}{2} \in C,$$

   pero

   $$\beta < \frac{\beta + b}{2}$$

   lo cual es una contradicción.

   P.D. $\inf C = a$.

Si $x \in C$, entonces

$$a < x < b$$

de donde, a es una cota inferior de C.

Supongamos que γ es una cota inferior de C, entonces

$$\gamma \leq x \qquad \text{para todo } x \in C$$

y supongamos además que $\gamma > a$, entonces

$$a < \frac{a+\gamma}{2} < \gamma < b.$$

Así

$$\frac{a+\gamma}{2} \in (a,b)$$

lo cual es una contradicción ya que γ es cota inferior de C, entonces

$$\gamma \leq a$$

es decir, a es la mayor de las cotas inferiores, por tanto $\inf C = a$.

Axioma del supremo

Axioma del supremo

Todo conjunto $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$ acotado superiormente tiene supremo, es decir, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$b = \sup S.$$

Teorema

Todo conjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}$, acotado inferiormente tiene ínfimo, es decir, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$c = \inf S.$$

Demostración:

Sea

$$-S = \{-x \mid x \in S\}$$

entonces $-S$ es no vacío. Como S está acotado inferiormente entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} M &\leq x \qquad \text{para todo } x \in S \\ -M &\geq -x \qquad \text{para todo } x \in S \end{aligned}$$

así $-S$ está acotado superiormente. Por el axioma del supremo existe α el supremo de $-S$, es decir,

$$\alpha = \sup(-S).$$

P.D. $-\alpha = \inf S$.

Como $\alpha = \sup(-S)$ entonces

$$-x \leq \alpha \qquad \text{para todo } x \in S$$

de donde

$$x \geq -\alpha \qquad \text{para todo } x \in S$$

es decir, $-\alpha$ es cota inferior de S.

Falta probar que es la mayor de las cotas inferiores.

Sea β una cota inferior de S, entonces

$$\beta \leq x \qquad \text{para todo } x \in S$$

de donde

$$-\beta \geq -x \qquad \text{para todo } x \in S,$$

es decir, $-\beta$ es cota superior de $-S$. Como $\alpha = \sup(-S)$ entonces α es la menor de las cotas superiores de $-S$, de donde

$$\alpha \leq -\beta$$

así

$$-\alpha \geq \beta$$

entonces $-\alpha$ es la mayor de las cotas inferiores, es decir,

$$-\alpha = \inf S.$$

Entonces $-\alpha$ es la c que estábamos buscando.

■

Teorema

El conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales no está acotado superiormente.

Demostración:

Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente.

Como $\mathbb{N} \neq \varnothing$ entonces, por el axioma del supremo, $\mathbb{N}$ tiene supremo. Sea $b = \sup \mathbb{N}$.

Ahora

$$b - 1 < b$$

$b - 1$ no es cota superior de $\mathbb{N}$, entonces existe un natural n tal que

$$b - 1 < n$$

de donde

$$b < n + 1$$

y como $n + 1 \in \mathbb{N}$ entonces b no puede ser cota superior de $\mathbb{N}$. Lo cual es una contradicción.

Por tanto, $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

$\blacksquare$

Daremos a continuación un teorema que es conocido como el Postulado de Arquímedes y que ahora obtenemos como consecuencia del teorema anterior.

Teorema

Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

Demostración:

Si no existiera tal n, entonces

$$n \leq x \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

esto implica que x es cota superior de $\mathbb{N}$ lo cual es una contradicción al teorema anterior.

$\blacksquare$

Ejemplo

- Sea $S = \left\{ \frac{1}{n} \middle| \; n \in \mathbb{N} \right\}$. Probar que $\max S = 1$ y $\inf S = 0$.

  Solución:

  Como

  $$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

  entonces 1 es cota superior de S y como $1 \in S$ entonces $\max S = 1 = \sup S$. El 0 es cota inferior de S.

  P.D. S no tiene mínimo.

  Supongamos que $\alpha = \min S$, entonces

  $$\alpha \leq \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

  y

  $$\alpha \in S,$$

  entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha = \frac{1}{m}$.

  Como

  $$\begin{aligned} m+1 &> m \\ \frac{1}{m+1} &< \frac{1}{m} = \alpha \end{aligned}$$

  pero $\frac{1}{m+1} \in S$ lo cual contradice que α sea el mínimo.

  Por tanto, S no tiene mínimo.

  P.D. $\inf S = 0$.

Como

$$0 < \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

entonces 0 es una cota inferior de S.

Sea β cualquier cota inferior de S. P.D. $\beta \leq 0$.

Supongamos que $\beta > 0$. Por ser β cota inferior de S tenemos

$$\beta < \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por el Principio de Arquímedes tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\beta} < m$$

de donde

$$0 < \frac{1}{m} < \beta$$

pero $\frac{1}{m} \in S$ lo cual contradice que β sea cota inferior de S. Entonces $\beta \leq 0$ y tenemos que

$$\text{ínf } S = 0.$$

■

Teorema

Si $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $a = 0$.

Demostración:

Como

$$a \leq \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

entonces a es una cota inferior del conjunto $S = \left\{ \frac{1}{n} \middle| \; n \in \mathbb{N} \right\}$ y como $\text{ínf } S = 0$, entonces

$$a \leq 0.$$

Como por hipótesis $a \geq 0$, entonces

$$a = 0.$$

■

Teorema

Si $x > 0$ y y es un real arbitrario, existe un entero n tal que $nx > y$.

Demostración:

Aplicamos el Principio de Arquímedes a $\frac{y}{x}$, entonces

$$\frac{y}{x} < n \qquad \text{para algún } n \in \mathbb{N}$$

de donde

$$y < nx.$$

■

Teorema

Para cualquier $b \in \mathbb{R}$ existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$m - 1 \leq b < m.$$

Demostración:

Haremos la demostración considerando dos casos.

- **Caso 1**:
  Si $b > 0$, entonces haciendo $x = 1$, $y = b$ en el último teorema de la página (12), tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < n$, así
  $$0 < b < n.$$

- **Caso 2**:
  Si $b \leq 0$, entonces $b < 1$. Además
  $$b \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad -b \geq 0,$$
  por el Principio de Arquímedes existe $-p \in \mathbb{N}$ tal que
  $$-b < -p \qquad \Rightarrow \qquad b > p.$$
  De donde
  $$p < b < 1.$$

Por tanto,

$$p < b < q \qquad \text{con } p, q \in \mathbb{Z}.$$

Ahora consideramos los conjuntos

$$\{p, p+1, \cdots, p + (q-p) = q\} \qquad \text{y} \qquad S = \{n \in \mathbb{N} \mid \; p + n > b\}$$

$S \neq \varnothing$ ya que si $n = q - p$, como $q > b$ entonces $q - p \in S$.
Sea n_0 el primer elemento de S.entonces

$$m = p + n_0 \qquad \Rightarrow \qquad b < m.$$

Como $n_0 \in S$ y n_0 es el primer elemento de S.entonces $n_0 - 1 \notin S$, de donde

$$m - 1 = p + n_0 - 1 \leq b.$$

Por tanto,

$$m - 1 \leq b < m.$$

■

Propiedades del ínfimo y supremo de un conjunto

Teorema
Sea $\varepsilon > 0$ y $S \subset \mathbb{R}$

i) Si S tiene supremo, existe $x \in S$ tal que

$$\sup S - \varepsilon < x.$$

ii) Si S tiene ínfimo, existe $x \in S$ tal que

$$x < \text{ínf}\, S + \varepsilon.$$

Demostración:

i) Supongamos que

$$x \leq \sup S - \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in S$$

entonces $\sup S - \varepsilon$ es una cota superior de S, pero

$$\sup S - \varepsilon < \sup S$$

lo cual es una contradicción, entonces existe $x \in S$ tal que $\sup S - \varepsilon < x$.

ii) Supongamos que

$$x \geq \text{ínf}\, S + \varepsilon \qquad \text{para todo } x \in S$$

entonces $\text{ínf}\, S + \varepsilon$ es una cota inferior de S, pero

$$\text{ínf}\, S < \text{ínf}\, S + \varepsilon$$

lo cual es una contradicción, entonces existe $x \in S$ tal que $x < \text{ínf}\, S + \varepsilon$.

■

Teorema
Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, $\qquad A, B \neq \varnothing$. Sea C el conjunto

$$C = A + B = \{a + b \ | \, a \in A, \ b \in B\}.$$

i) Si A y B tiene supremo entonces C tiene supremo y

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

ii) Si A y B tiene ínfimo entonces C tiene ínfimo y

$$\text{ínf}\, C = \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B.$$

Demostración:

Solo probaremos el segundo inciso.

Si $x \in C$ entonces $x = a + b$ con $a \in A$ y $b \in B$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} \text{ínf}\, A \leq a \\ \text{ínf}\, B \leq b \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B \leq a + b = x,$$

es decir, $\text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B$ es cota inferior de C, entonces

$$\text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B \leq \text{ínf}\, C,$$

de donde

$$\text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B - \text{ínf}\, C \leq 0. \tag{1.1}$$

Sea $\varepsilon = \dfrac{1}{2n}$ con $n \in N$, por el teorema anterior existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que

$$\left.\begin{array}{l} a < \text{ínf}\, A + \dfrac{1}{2n} \\ \\ b < \text{ínf}\, B + \dfrac{1}{2n} \end{array}\right\} \Rightarrow a + b < \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B + \frac{1}{n}$$

de donde

$$-\frac{1}{n} + a + b < \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B$$

Por otro lado tenemos que

$$\text{ínf}\, C \leq x,$$

es decir,

$$\text{ínf}\, C \leq a + b$$

entonces

$$-\frac{1}{n} + \text{ínf}\, C \leq -\frac{1}{n} + a + b.$$

Así

$$-\frac{1}{n} + \text{ínf}\, C \leq -\frac{1}{n} + a + b < \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B$$

de donde

$$-\frac{1}{n} < \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B - \text{ínf}\, C. \tag{1.2}$$

Usando 1.1 y 1.2 tenemos

$$-\frac{1}{n} < \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B - \text{ínf}\, C \leq 0,$$

de donde

$$0 \leq -\,\text{ínf}\, A - \text{ínf}\, B + \text{ínf}\, C < \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

entonces

$$\text{ínf}\, C = \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B.$$

■

Teorema

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, $\quad A, B \neq \varnothing$ tales que

$$a \leq b \qquad \forall\, a \in A \quad \text{y} \quad \forall\, b \in B,$$

entonces A tiene supremo, B tiene ínfimo y

$$\sup A \leq \inf B.$$

Demostración:

Como

$$a \leq b$$

entonces cada $b \in B$ es cota superior de A, entonces A tiene supremo y

$$\sup A \leq b \qquad \forall\, b \in B,$$

de donde el $\sup A$ es cota inferior de B, entonces B tiene ínfimo y

$$\sup A \leq \inf B.$$

■

Teorema
Sea $A \subset \mathbb{R}$, $\quad A \neq \varnothing$ y acotado, entonces

i) $\sup cA = c \sup A \quad$ si $c > 0$.

ii) $\sup cA = c \inf A \quad$ si $c < 0$.

Demostración:

i) Sea $c > 0$.

$$\begin{array}{rcll} a & \leq & \sup A & \qquad \text{para todo } a \in A \\ ca & \leq & c \sup A & \qquad \text{para todo } a \in A \end{array}$$

de donde $c \sup A$ es una cota superior de cA, entonces

$$\sup cA \leq c \sup A. \tag{1.3}$$

Ahora

$$\begin{array}{rcl} ca & \leq & \sup cA \\ a & \leq & \dfrac{1}{c} \sup cA, \end{array}$$

de donde $\dfrac{1}{c} \sup cA$ es una cota superior de A, entonces

$$\begin{array}{rcl} \sup A & \leq & \dfrac{1}{c} \sup cA \\ c \sup A & \leq & \sup cA. \end{array} \tag{1.4}$$

Así de 1.3 y 1.4 se sigue la igualdad.

ii) Sea $c < 0$.

$$\begin{aligned} \inf A &\leq a \qquad \text{para todo } a \in A \\ c \inf A &\geq ca \qquad \text{para todo } a \in A \end{aligned}$$

de donde $c \inf A$ es una cota superior de cA, entonces

$$\sup cA \leq c \inf A. \tag{1.5}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} ca &\leq \sup cA \qquad \text{para todo } a \in A \\ a &\geq \frac{1}{c} \sup cA, \end{aligned}$$

de donde $\frac{1}{c} \sup cA$ es cota inferior de A, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \sup cA &\leq \inf A \\ \sup cA &\geq c \inf A. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Así de 1.5 y 1.6 se sigue la igualdad.

■

Resultados de funciones continuas

Probaremos ahora algunos resultados importantes acerca de las funciones continuas que vimos en el curso anterior.

Lema

Sea f contínua en c y supongamos que $f(c) \neq 0$. Existe entonces un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ en el que f tiene el mismo signo que $f(c)$.

Demostración:

- Supongamos que $f(c) > 0$. Como f es continua en c, entonces dada $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Dada $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2} > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{f(c)}{2}$$

es decir,
$$-\delta < x - c < \delta \Rightarrow -\frac{f(c)}{2} < f(x) - f(c) < \frac{f(c)}{2},$$
de donde
$$c - \delta < x < \delta + c \Rightarrow f(c) - \frac{f(c)}{2} < f(x) < f(c) + \frac{f(c)}{2}.$$
Simplificando tenemos
$$c - \delta < x < \delta + c \Rightarrow \frac{f(c)}{2} < f(x) < \frac{3f(c)}{2}.$$
Así
$$c - \delta < x < \delta + c \Rightarrow 0 < \frac{f(c)}{2} < f(x).$$
Por tanto, $f(x) > 0$ si $x \in (c-\delta, c+\delta)$.

- Si $f(c) < 0$, elegimos $\varepsilon = -\frac{f(c)}{2} > 0$.

Nota: En el caso de que sólo haya continuidad lateral en c, entonces existe el intervalo $[c, c+\delta)$ o $(c-\delta, c]$ en el cual f tiene el mismo signo que $f(c)$.

■

Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en cada punto del intervalo cerrado $[a,b]$ y supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Entonces existe por lo menos un número $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

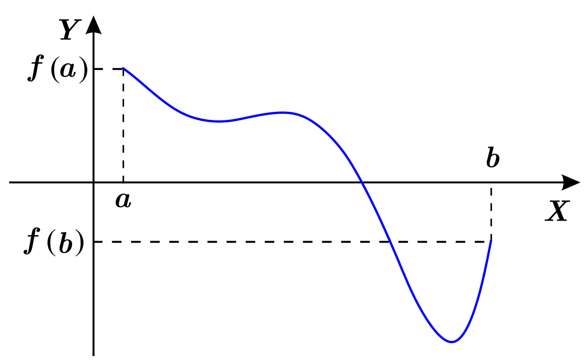

Figura 1-3

En la figura $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.

Demostración:

Supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$.
Sea
$$S = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0\}.$$

Como $f(a) < 0$, entonces $a \in S$, así $S \neq \varnothing$.

Además $S \subset [a, b]$, de donde b es cota superior de S. Por tanto, S tiene supremo, sea

$$c = \sup S.$$

P.D. $f(c) = 0$.

- Si $f(c) > 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in (c-\delta, c+\delta)$ $\quad$ (o $(c-\delta, c]$ si $c = b$)

$$f(x) > 0.$$

Entonces ningún punto de S puede estar a la derecha de $c - \delta$, ya que los puntos de S son tales que $f(x) \leq 0$.

Esto implica que $c - \delta$ es una cota superior de S pero $c - \delta < c$ y $c = \sup S$, entonces $c - \delta$ no puede ser una cota superior de S.

Por tanto, $f(c) \ngtr 0$.

- Si $f(c) < 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $\forall\ x \in (c-\delta, c+\delta)$ $\quad$ (o $[c, c+\delta)$ si $c = a$)

$$f(x) < 0.$$

Esto implica que $f(x) < 0$ para algún $x > c$, de donde c no es cota superior de S, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $f(c) = 0$, pero $f(a) \neq 0 \neq f(b)$, entonces $c \neq a$ y $c \neq b$ lo cual implica que $c \in (a, b)$.

■

El teorema del valor intermedio es una consecuencia del teorema de Bolzano.

Teorema del valor intermedio

Sea f una función continua en cada punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que $f(a) \neq f(b)$. Entonces la función toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ por lo menos una vez en el intervalo (a, b). Es decir, si K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = K$.

Demostración:

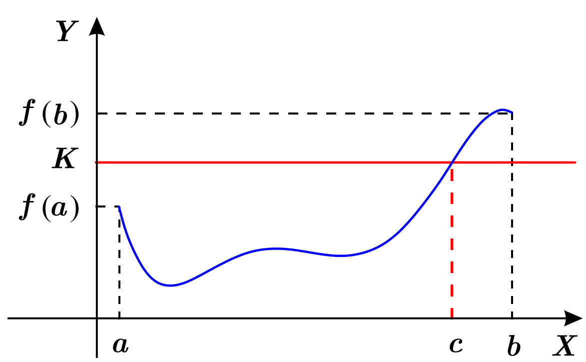

Figura 1-4

Supongamos que $f(a) < f(b)$ y sea K tal que

$$f(a) < K < f(b).$$

Consideremos la función g definida como

$$g(x) = f(x) - K.$$

Como

$$\begin{array}{l} f \text{ es continua en } [a, b] \\ K \text{ es una función constante} \Rightarrow K \text{ es continua} \end{array}$$

y suma de funciones continuas es continua, entonces g es continua en $[a, b]$.

$$\begin{array}{ll} g(a) = f(a) - K < 0 & \text{ya que } f(a) < K \\ g(b) = f(b) - K > 0 & \text{ya que } K < f(b). \end{array}$$

Entonces como se satisfacen las hipótesis del teorema de Bolzano, tenemos que $\exists\, c \in (a, b)$ tal que

$$g(c) = 0$$

pero

$$0 = g(c) = f(c) - K$$

de manera que

$$f(c) = K.$$

■

Veamos ahora que las hipótesis del teorema del valor intermedio no se pueden debilitar.

1. El teorema pide que f sea continua en $[a, b]$.

   Si f es continua en todos los puntos de $[a, b]$ excepto en a entonces en la siguiente figura observamos que

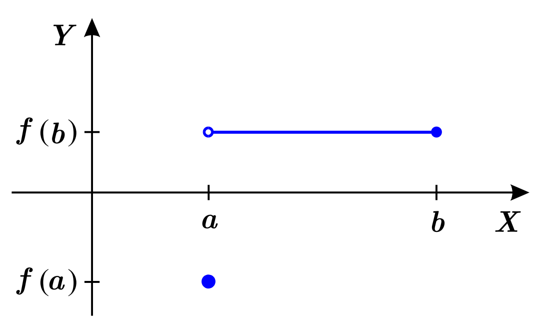

Figura 1-5

a pesar de ser $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ no existe ningún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

2. Ahora veremos que es necesario que sea en todo un intervalo.
   Sea $f : [0,3] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ con regla de correspondencia $f(x) = x^2 - 2$, entonces

$$\begin{aligned} f(0) &= -2 < 0 \\ f(3) &= 7 > 0. \end{aligned}$$

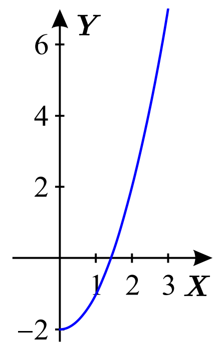

Figura 1-6

   sin embargo no existe $c \in [0,3] \cap \mathbb{Q}$ tal que $f(c) = 0$, ya que la c que cumple con $f(c) = 0$ es $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Veamos ahora una aplicación del teorema del valor intermedio.
Teorema

Sea $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces existe un único $b \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$b^n = a.$$

Demostración:

Sea $c > 1$ tal que $0 < a < c$.
Sea $f(x) = x^n$ definida en el intervalo $[0,c]$. f es continua en $[0,c]$ y,

$$f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(c) = c^n.$$

Como

$$0 < a < c < c^n$$

entonces

$$f(0) < a < f(c)$$

y por el teorema del valor intermedio existe $b \in (0,c)$ tal que

$$f(b) = a,$$

es decir,

$$b^n = a.$$

Como f es estrictamente creciente en $[0,c]$, este valor es único.

■

Ejemplos

1. Sea f una función continua en $[0,1]$. Supongamos que $0 < f(x) < 1$ para todo $x \in [0,1]$. Demostrar que existe por lo menos un punto $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = c$.

Solución:

Queremos encontrar $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = c$, es decir, tal que $f(c) - c = 0$.

Definimos una función

$$g(x) = f(x) - x \qquad \text{con } x \in [0,1].$$

Como f y la identidad son funciones continuas en $[0,1]$ y suma de continuas es continua, entonces g es continua en $[0,1]$. Además

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - 0 = f(0) > 0 \\ g(1) &= f(1) - 1 < 0. \end{aligned}$$

Por el teorema de Bolzano existe $c \in (0,1)$ tal que $g(c) = 0$, es decir

$$\begin{aligned} f(c) - c &= 0 \\ f(c) &= c. \end{aligned}$$

Cuando una función tiene un punto con esta propiedad se dice que posee un punto fijo.

2. Encontrar los puntos fijos de la función $f(x) = x^5 - 4x^3$.

Solución:

Debemos encontra los puntos c tales que $f(c) = c$, entonces consideramos la recta $y = x$, y localizamos los puntos de intersección de esta recta con la función f. Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} y &= x^5 - 4x^3 \\ y &= x. \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} x^5 - 4x^3 &= x \\ x^5 - 4x^3 - x &= 0 \\ x\left(x^4 - 4x^2 - 1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Así

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

Para resolver la ecuación $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$, hacemos un cambio de variable. Llamamos $z = x^2$, entonces la ecuación es

$$\begin{aligned} z^2 - 4z - 1 &= 0 \\ z &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-1)}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} \\ &= 2 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

De donde las soluciones son

$$z = 2 + \sqrt{5} \approx 4.24 \qquad \text{y} \qquad z = 2 - \sqrt{5} = -0.24.$$

Como $z = x^2$, entonces sólo es solución $z = 2 + \sqrt{5}$, es decir,

$$|x| = \sqrt{2 + \sqrt{5}}.$$

Las soluciones de la ecuación son

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad x = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx 2.06 \qquad x = -\sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx -2.06.$$

Por tanto, la función $f(x) = x^5 - 4x^3$ tiene tres puntos fijos, a saber, $x = 0$, $x = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$, $x = -\sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

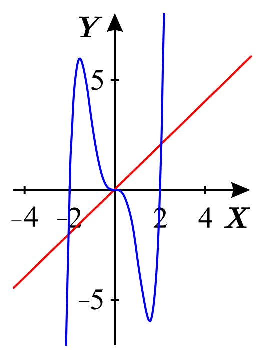

Figura 1-7

A continuación probaremos algunos resultados que nos llevarán finalmente a probar el teorema más importante de funciones continuas.

Definiciones:

- Decimos que f está acotada superiormente si $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}$ está acotado superiormente, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \leq M \qquad \text{para todo } x \in \operatorname{Dom} f.$$

- Decimos que f está acotada inferiormente si $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom} f\}$ está acotado inferiormente, es decir, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que

$$N \leq f(x) \qquad \text{para todo } x \in \operatorname{Dom} f.$$

- Decimos que f está acotada si lo está tanto superior como inferiormente.

Teorema

Una función f está acotada si y sólo si existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$.

Demostración:

$\Longleftarrow$) Si existe $K > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq K$$

entonces

$$-K \leq f(x) \leq K,$$

esto implica que f está acotada superior e inferiormente, entonces f está acotada.

$\Longrightarrow$) Supongamos que f está acotada entonces

$$\begin{array}{lllll} f \text{ está acotada superiormente} & \Rightarrow & \exists\ M \in \mathbb{R} & \text{tal que} & f(x) \leq M \\ f \text{ está acotada inferiormente} & \Rightarrow & \exists\ N \in \mathbb{R} & \text{tal que} & N \leq f(x). \end{array}$$

Sea $K = \max\{|M|, |N|\}$.

Si $K = |M|$, entonces como

$$M \leq |M|$$

entonces

$$f(x) \leq |M|.$$

Además $|N| \leq |M|$ entonces

$$-|M| \leq N \leq |M|$$

y sabemos que

$$N \leq f(x)$$

entonces

$$-|M| \leq f(x).$$

Por tanto,

$$|f(x)| \leq |M|.$$

El razonamiento si $K = |N|$ es análogo.

■

Teorema de acotación para funciones contínuas

Sea f continua en $[a, b]$. Entonces f es acotada en $[a, b]$, es decir, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in [a, b]$.

Demostración:

La demostración será por contradicción y utilizaremos la técnica de bipartición.

Supongamos que f no está acotada en $[a, b]$ y sea c el punto medio de $[a, b]$.

Como f no está acotada en $[a, b]$, entonces tampoco lo está en alguno de los intervalos $[a, c]$ o $[c, b]$.

Llamamos $[a_1, b_1]$ al intervalo donde f no está acotada, si no está acotada en ambos tomamos el intervalo de la izquierda.

Repetimod el proceso, o sea, $[a_n, b_n]$ lo partimos a la mitad y tomamos $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ el intervalo donde f no está acotada o el intervalo de la izquierda si en ambos no está acotada.

$$\begin{aligned}
\text{long } [a,b] &= b-a \\
\text{long } [a_1,b_1] &= \frac{b-a}{2} \\
&\vdots \\
\text{long } [a_n,b_n] &= \frac{b-a}{2^n}.
\end{aligned}$$

Sea $A = \{a, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ el conjunto de los extremos izquierdos, $A \neq \varnothing$ ya que $a \in A$ y está acotado superiormente por b, entonces tiene supremo. Sea $\alpha = \sup A$, $\alpha \in [a,b]$.

Como $\alpha \in [a,b]$, entonces f es continua en α, así para $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$x \in [a,b] \quad \text{y} \quad |x-\alpha| < \delta \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - f(\alpha)| < 1,$$

de donde

$$|f(x)| - |f(\alpha)| < |f(x) - f(\alpha)| < 1$$

así

$$|f(x)| < 1 + |f(\alpha)| \qquad \text{para } x \in [a,b] \cap (\alpha-\delta, \alpha+\delta).$$

Entonces f está acotada en $[a,b] \cap (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$.

Si $\alpha = a$ se tiene $[a, a+\delta)$ y si $\alpha = b$ se tiene $(b-\delta, b]$.

Pero para n suficientemente grande para que

$$\frac{b-a}{2^n} < \delta$$

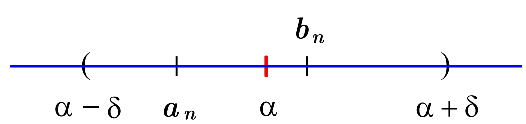

Figura 1-8

se tiene

$$[a_n, b_n] \subset (\alpha-\delta, \alpha+\delta)$$

y

$$\alpha - \delta < a_n < \alpha$$

por ser $\alpha = \sup A$.

Entonces f está acotada en $[a_n, b_n]$, lo que es una contradicción.

Por tanto, f está acotada en $[a,b]$.

■

De lo anterior podemos concluir que si f es continua en $[a,b]$, entonces el conjunto

$$F = \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$$

está acotado superior e inferiormente lo cual implica que existen el supremo y el ínfimo de F.
Denotamos por

$$\begin{aligned} \sup f &= \sup \{ f(x) \mid x \in [a,b] \} \\ \text{ínf } f &= \text{ínf } \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}, \end{aligned}$$

entonces

$$\text{ínf } f \leq f(x) \leq \sup f \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Teorema de valores extremos para funciones continuas

Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces existen c y $d \in [a,b]$ tales que

$$f(c) = \sup f \qquad \text{y} \qquad f(d) = \text{ínf } f.$$

Demostración:

P.D. $\exists\ c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \sup f$.
Sea $M = \sup f$.
Supongamos que no existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = M$.
Sea $g(x) = M - f(x)$. La función g es continua por ser suma de funciones continuas.
Como $f(x) < M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$g(x) = M - f(x) > 0 \qquad \text{para todo } x \in [a,b],$$

de donde $\dfrac{1}{g(x)}$ es continua para todo $x \in [a,b]$. Por el teorema anterior existe $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{1}{g(x)} \right| = \frac{1}{g(x)} < C \qquad \text{para todo } x \in [a,b].$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &< g(x) = M - f(x) \\ \frac{1}{C} &< M - f(x) \\ f(x) &< M - \frac{1}{C} \qquad \text{para todo } x \in [a,b], \end{aligned}$$

es decir, $M - \dfrac{1}{C}$ es cota superior de $\{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$ y

$$M - \frac{1}{C} < M,$$

lo cual es una contradicción.

Por tanto, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = M$.

P.D. $\exists \ d \in [a,b]$ tal que $f(d) = \inf f$.

Habíamos probado que $\inf f = -\sup(-f)$. Como f es continua en $[a,b]$, entonces $-f$ es continua en $[a,b]$. Por el teorema anterior se alcanza el $\sup(-f)$, es decir, $\exists \ d \in [a,b]$ tal que

$$\begin{aligned} -f(d) &= \sup(-f) \\ f(d) &= -\sup(-f) \\ &= \inf f. \end{aligned}$$

■

Observación:

Este teorema muestra que si f es continua en $[a,b]$, entonces $\sup f$ es el máximo absoluto e $\inf f$ es el mínimo absoluto, más aún, aplicando el teorema del valor intermedio tenemos

$$f : [a,b] \longrightarrow [\inf f, \sup f].$$