Geometría Moderna I

Material para el curso intersemestral en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: Julio 20, 2020

La victoria no vendrá a nosotros a menos que vayamos por ella.

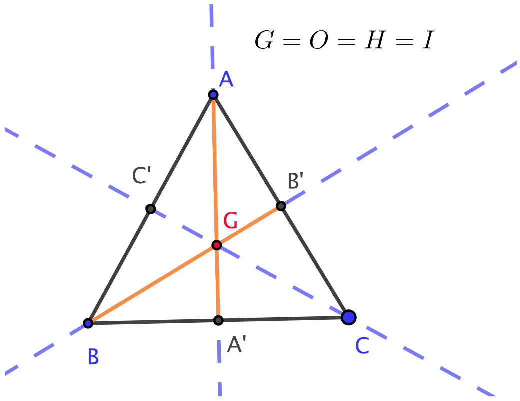
Unidad 1. La geometría del triángulo

Puntos y rectas notables

Proposición 0.1

En todo triángulo equilátero, el incentro, centroide, ortocentro y circuncentro coinciden. ♠

Demostración



Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero, es decir $AB = BC = CA$ y sus tres ángulos son iguales. Tracemos los puntos medios A', B' y C' de los lados BC, CA y AB respectivamente, luego tracemos las medianas AA' y BB' de los lados BC y CA respectivamente, por tanto, su intersección es el centroide G del triángulo.
Ahora sabemos que un punto P está en la mediatriz de un segmento AB si $AP = PB$. De aquí se sigue que el punto A está en la mediatriz de BC, de igual forma el punto B está en la mediatriz del segmento CA. Ahora, por definición las mediatrices son las rectas que pasan por el punto medio de un segmento y que son perpendiculares a él, por lo que las mediatrices de los segmentos BC y CA pasan por A' y B' respectivamente. Así tenemos que la mediatriz de BC es la recta que pasa por A y por A', de igual manera la mediatriz de CA es la recta que pasa por B y B'. Por tanto AA' y BB' son mediatrices de los segmentos BC y CA respectivamente, las cuales por ser mediatrices son perpendiculares a dichos segmentos. Luego la intersección de las mediatrices es el circuncentro O del triángulo. Luego $G = O$.
De lo anterior se sigue que AA' y AB' son rectas perpendiculares a los segmentos BC y CA que pasan por A y B respectivamente, luego entonces AA' y BB' son alturas del $\triangle ABC$, cuya intersección es el ortocentro H. Por tanto $G = O = H$
Ahora consideremos los triángulos $\triangle HBA'$, $\triangle HCA'$ y $\triangle HCB'$ los cuales son congruentes, así tenemos que $HL = HM$, con A' y B' pies de las perpendiculares sobre los lados BC y CA del ángulo $\angle ACB$, por tanto el punto H está en la bisectriz del ángulo $\angle ACB$. De manera análoga podemos ver que H está en las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle CBA$. Por lo que H es el incentro I de las bisectrices del triángulo $\triangle ABC$. Por tanto $G = O = H = I$. **QED.**

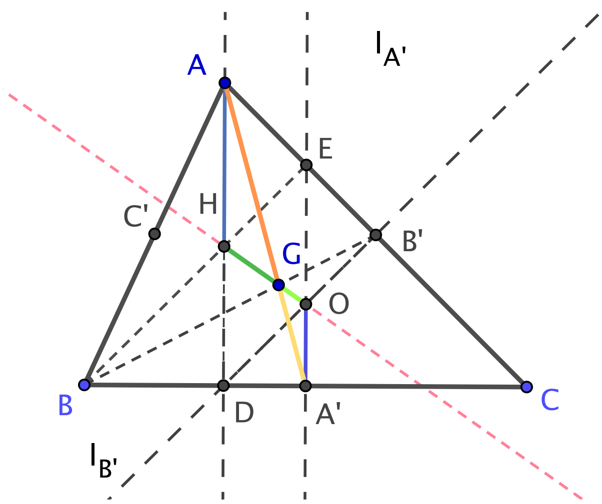
La recta de Euler

En la sección anterior demostramos que en un triángulo equilátero, el incentro, centroide, ortocentro y circuncentro coinciden. ¿Existirán otros triángulos, no equiláteros, en los que estos puntos sean colineales?¿Cuáles serían las condiciones para que esto suceda, o bien para que al menos una terna de estos puntos sean colineales?

Teorema 0.1

En todo triángulo [no equilátero], el circuncentro, centroide y ortocentro son colineales y la distancia del ortocentro al centroide es el doble de la distancia del centroide al circuncentro. ♡

Demostración



Sea ABC un triángulo y sean A', B' y C' puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente. Trazamos las medianas AA' y BB', las cuales se intersectan en el centroide G. Luego trazamos las alturas AD y BE, con D y E pies de dichas alturas que además se intersecan en el ortocentro H del triángulo. Finalmente trazamos las mediatrices $l_{A'}$ y $l_{B'}$ que se intersecan en el circuncentro O del triángulo.
Por un lema anterior sabemos que $AH = 2A'O$, con A' punto medio de BC. Además sabemos que el centroide G triseca a las medianas por lo que $AG = 2GA'$. También tenemos que las rectas AD y $l_{A'}$ son paralelas por construcción y la recta AA' es transversal a las paralelas anteriores, por lo que $\angle GA'O = \angle HAG$. De aquí tenemos por el criterio de semejanza LAL que $\triangle AHG \approx \triangle A'OG$ con una razón de semejanza 2:1. En particular tenemos que $\angle AGH = \angle A'GO$, por lo tanto H, G y O son colineales y $HG = 2GO$. **QED.**

Cabe mencionar que si el triángulo es equilátero, el circuncentro, el centroide y el ortocentro no sólo son colineales si no que además coinciden, como ya lo demostramos en la proposición anterior.

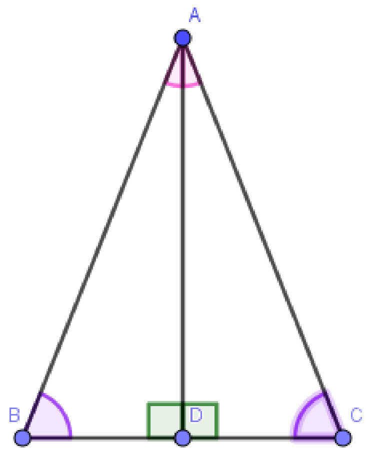
Definición 0.1

La recta donde se encuentran el circuncentro, el centroide y el ortocentro de un triángulo se conoce como la **Recta de Euler** ♣

Problema: *Si en un triángulo coinciden un par entre la mediana, la altura y la bisectriz de uno de sus lados, entonces la tercera de éstas coincide también y el triángulo es isósceles.*

Demostración La demostración la haremos por casos.
Caso 1. Supongamos que la mediana y la altura de un triángulo coinciden. Por demostrar que la bisectriz también coincide y que el triángulo es isósceles.

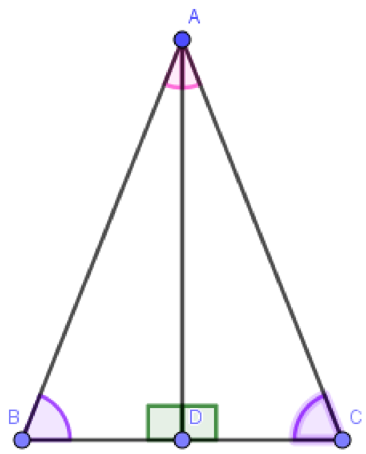
Sea ABC un triángulo tal que la altura y la mediana en el lado BC coinciden.
Sea AD dicha altura y mediana, es claro que D es un pie de perpendicular que está en el lado BC y D también es punto medio por lo que $BD = DC$. AD divide al triángulo ABC en dos triángulos rectángulos, ABD y ADC por lo que $\angle ADC = \angle CDA = 90$.
Como $BD = DC$ y AD es lado común a los triángulos ABD y ADC y $\angle ADC = \angle CDA$, entonces por (LAL) los triángulos ABD y ADC son congruentes; entonces $AB = AC$ y $\angle CBA = \angle ACB$, por lo tanto el triángulo ABC es isósceles.
Además $\angle BAD = \angle DAC$, estos ángulos son adyacentes a los lados AB, AC y AD.
Por lo tanto AD es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$.



Caso 2. Supongamos que la mediana y la bisectriz coinciden. Por demostrar que la altura también coincide y que el triángulo es isósceles.
La demostración de este caso se deja como ejercicio para pensar para el alumno.

Caso 3. Supongamos que la altura y la bisectriz coinciden. Por demostrar que la mediana también coincide y que el triángulo es isósceles.

Sea ABC un triángulo tal que la altura y la bisectriz en el lado BC coinciden, es claro que D es un pie de la perpendicular.



Como AD es altura, $\angle ADB = \angle CDA = 90$....(1)
Como AD es la bisectriz, $\angle BAD = \angle DAC$....(2)

AD divide al triángulo ABC en los triángulos ABD y ADC, AD es un lado común y por (1) y (2), los triángulos ABD y ADC son congruentes por el criterio (ALA), entonces $BD = DC$, por lo que D es un punto medio de BC.
Por lo tanto AD es bisectriz.

Retomando la congruencia mencionada, $\angle CBA = \angle ACB$ y $AB = AC$. Por lo tanto el triángulo ABC es isósceles.
Por lo tanto, en la conclusión de los tres casos anteriores acabamos de probar que si en un triángulo coinciden un par entre la mediana, la altura y la bisectriz de uno de sus lados, entonces la tercera de estas coincide también y el triángulo es isósceles.
Q.E.D

Problema: *En un triángulo isósceles, el incentro, centroide, ortocentro y circuncentro son colineales.*

Demostración
Sea ABC un triángulo isósceles, sea I su incentro, G su centroide, H su ortocentro y C' su circuncentro. Estos puntos los podemos obtener porque sabemos que las bisectrices, las medianas, las alturas y las mediatrices son concurrentes en los respectivos puntos que nombramos.

Sea AD la altura con pie de perpendicular en D, por el ejercicio anterior sabemos que AD es también la bisectriz y la mediana, entonces si prolongamos el segmento AD, AD resulta ser también la mediatriz del segmento BC.
Ahora, sabemos que cada mediana del triángulo ABC contiene a su centroide, cada altura a su ortocentro, cada mediatriz a su circuncentro y cada bisectriz a su incentro.
Como AD es bisectriz, altura, mediana y mediatriz, entonces contiene a C', G, I y H.
Por lo tanto C', G, I y H están en AD que es justamente una definición de ser colineales, que estén en una misma recta. **Q.E.D**