Capítulo 4

Métodos de integración

Integración por sustitución o cambio de variable

Supongamos que P y f son funciones tales que

$$P'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \text{ en algún intervalo.}$$

Sea $Q(x) = P(g(x))$ entonces

$$\begin{aligned} Q'(x) &= P'(g(x))\, g'(x) \\ &= f(g(x))\, g'(x), \end{aligned}$$

usando el 2^o T.F.C. obtenemos

$$\int f(x)\; dx = P(x) + C \tag{4.1}$$

y

$$\int f(g(x))\, g'(x)\; dx = P(g(x)) + C \tag{4.2}$$

escribiendo $u = g(x)$ obtenemos

$$\frac{du}{dx} = g'(x)$$

y sustituyendo en (4.2)

$$\int f(u) \frac{du}{dx}\, dx = P(u) + C.$$

Comparando con (4.1), quisieramos escribir

$$\frac{du}{dx}\, dx = du$$

sin embargo recordemos que dx, du son sólo símbolos y no pueden tratarse como números reales, pese a ello, puesto que se obtiene una fórmula que de antemano se conocía, es común escribir:

$$du = g'(x)\; dx$$

y entonces sustituyendo en (4.2), obtenemos

$$\int f(u)\; du = P(u) + C.$$

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\, dx$.

   Solución:

   Hacemos

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x+1} \\ du &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\, dx, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx &= 2\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}\,dx \\
&= 2\int \operatorname{sen} u\,du \\
&= -2\cos u + C \\
&= -2\cos\sqrt{x+1} + C.
\end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}\,dx.$

Solución:

Hacemos

$$\begin{aligned}
u &= 1+x^2 \\
du &= 2x\,dx \\
\frac{du}{2} &= x\,dx,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u+\sqrt{u^3}}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u+u\sqrt{u}}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u\,(1+\sqrt{u})}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1+\sqrt{u}}}
\end{aligned}$$

Hacemos otro cambio de variable

$$\begin{aligned}
v &= 1+\sqrt{u} \\
dv &= \frac{du}{2\sqrt{u}},
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1+\sqrt{u}}} \\
&= \int \frac{du}{2\sqrt{u}\sqrt{1+\sqrt{u}}} \\
&= \int \frac{dv}{\sqrt{v}} \\
&= \int v^{-\frac{1}{2}}\,dv \\
&= \frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
&= 2v^{\frac{1}{2}} + C \\
&= 2\sqrt{1+\sqrt{u}} + C \\
&= 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.
\end{aligned}$$

El método de sustitución también puede emplearse para calcular integrales definidas.
Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{\left(x^2+2x+2\right)^3}\,dx$.

   Solución:

   Hacemos

$$\begin{aligned}
u &= x^2+2x+2 \\
du &= (2x+2)\;dx = 2\,(x+1)\;dx.
\end{aligned}$$

   Así

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{\left(x^2+2x+2\right)^3}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^3} \\
&= \frac{1}{2}\int u^{-3}\,du \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^{-2}}{-2} + C \\
&= \frac{-1}{4u^2} + C \\
&= \frac{-1}{4\left(x^2+2x+2\right)^2} + C.
\end{aligned}$$

Puesto que hemos encontrado una primitiva, sólo hace falta utilizar el 2^o TFC, de manera que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}\,dx &= \left.\frac{-1}{4\,(x^2+2x+2)^2}\right|_0^1\\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{2^2}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{4}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{4-25}{100}\right)\\ &= \frac{21}{400}.\end{aligned}$$

Observamos que resolvimos la integral indefinida en términos de u e hicimos el cambio a x antes de evaluar.

Es posible evaluar en términos de u cambiando los extremos de integración.

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\sqrt{4-\operatorname{sen} 2x}\,dx.$

Solución:

Hacemos

$$\begin{aligned} u &= 4-\operatorname{sen} 2x\\ du &= -2\cos 2x\,dx.\end{aligned}$$

Ahora hacemos el cambio en los límites de integración

$$\begin{aligned} x &= 0 &&\Longrightarrow && u = 4-\operatorname{sen} 0 = 4\\ x &= \frac{\pi}{4} &&\Longrightarrow && u = 4-\operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4-1 = 3.\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\sqrt{4-\operatorname{sen} 2x}\,dx &= -\frac{1}{2}\int_4^3 \sqrt{u}\,du\\ &= \frac{1}{2}\int_3^4 \sqrt{u}\,du\\ &= \left.\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_3^4\\ &= \left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_3^4\\ &= \frac{4^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{3^{\frac{3}{2}}}{3}.\end{aligned}$$

El siguiente teorema justifica el procedimiento anterior.
Teorema

Sean g continua con derivada continua en un intervalo $[a, b]$, f continua en un intervalo $[c, d]$ tal que $g(t) \in [c, d]$ para todo $t \in [a, b]$. Entonces

$$\int_a^b f(g(t))\, g'(t)\; dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\; dx.$$

Demostración:

Sea F una primitiva de f, es decir,

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \in [c, d].$$

La función $F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g)\, g'$ ya que

$$\begin{aligned} (F \circ g)'(t) &= F'(g(t))\, g'(t) \\ &= f(g(t))\, g'(t) \qquad \forall\, t \in [a, b], \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(t))\, g'(t)\; dt &= (F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\; dx. \end{aligned}$$

■

Ejemplos

1. Probar que $\int_a^b f(x)\; dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\; dx$.

   Solución:

   Sea

$$\begin{aligned} g(x) &= x - c \\ g'(x) &= 1, \end{aligned}$$

   entonces

$$\begin{aligned} g(a+c) &= a + c - c = a \\ g(b+c) &= b + c - c = b. \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\ dx &= \int_{a+c}^{b+c} f(g(t))\, g'(t)\ dt \\ &= \int_{g(a+c)}^{g(b+c)} f(x)\ dx \\ &= \int_a^b f(x)\ dx.\end{aligned}$$

2. Probar que $\displaystyle\int_{ca}^{cb} f(t)\ dt = c\int_a^b f(ct)\ dt.$

3. Calcular $\displaystyle\int \sec x\, dx.$

   Solución:

$$\begin{aligned}\int \sec x\, dx &= \int \sec x\, \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx\end{aligned}$$

   Hacemos

$$\begin{aligned}u &= \sec x + \tan x \\ du &= \left(\sec^2 x + \sec x \tan x\right)\ dx\end{aligned}$$

   de donde

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

Integración por partes

Sean f y g dos funciones derivables, entonces

$$(f(x)\, g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

al integral obtenemos

$$\int (f(x)\,g(x))'\ dx = \int f'(x)\,g(x)\ dx + \int f(x)\,g'(x)\ dx$$

pero

$$\int (f(x)\,g(x))'\ dx = f(x)\,g(x) + C$$

entonces tenemos

$$\int f(x)\,g'(x)\ dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\ dx + C$$

A esta igualdad se la conoce como la fórmula de integración por partes.

Para calcular $\int k(x)\ dx$ utilizando este método tenemos que escribir

$$k(x) = f(x)\,g'(x)$$

y el problema se reduce a calcular $\int f'(x)\,g(x)\ dx$. Sin embargo, nada afirma que calcular la última integral sea más fácil que la original, es decir, el método no siempre es aplicable.

En el caso de integrales definidas la fórmula se escribe

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\ dx = f(x)\,g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\ dx,$$

es decir

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\ dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f'(x)\,g(x)\ dx.$$

También podemos escribir la fórmula de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & f(x) & \qquad & dv & = & g'(x)\ dx \\ du & = & f'(x)\ dx & & v & = & g(x), \end{array}$$

así

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Ejemplos

1. Calcular $\int e^x x^2\,dx$.

   Solución:

   Sea

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & x^2 & \qquad & dv & = & e^x\,dx \\ du & = & 2x\,dx & & v & = & e^x, \end{array}$$

de donde

$$\begin{aligned}\int e^x x^2\,dx &= e^x x^2 - \int e^x 2x\,dx \\ &= e^x x^2 - 2\int e^x x\,dx.\end{aligned}$$

La integral que obtuvimos es más sencilla que la original pero para resolverla hay que aplicar nuevamente el método de integración por partes.

Calculamos $\int e^x x\,dx$.

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& x & \qquad & dv &=& e^x\,dx \\ du &=& dx & & v &=& e^x, \end{array}$$

así

$$\begin{aligned}\int e^x x\,dx &= e^x x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int e^x x^2\,dx &= e^x x^2 - 2\int e^x x\,dx \\ &= e^x x^2 - 2\left(xe^x - e^x\right) + C \\ &= e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x + C \\ &= \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x + C.\end{aligned}$$

Si hubiéramos elegido

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& e^x & \qquad & dv &=& x^2\,dx \\ du &=& e^x\,dx & & v &=& \dfrac{x^3}{3}, \end{array}$$

entonces

$$\int e^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3}e^x - \int e^x \frac{x^3}{3}\,dx.$$

En este caso la integral obtenida es más complicada que la original. Esto muestra que aún cuando el método es aplicable, la elección de u y v es muy importante.

2. Calcular $\int \ln x\,dx$ si $x > 0$.

   Solución:

   Sea

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& \ln x & \qquad & dv &=& dx \\ du &=& \dfrac{1}{x}\,dx & & v &=& x, \end{array}$$

de donde

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= x\ln x - \int \frac{x}{x}dx \\ &= x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

3. Calcular $\displaystyle\int x^{-1}\, dx$.

   Solución:

   Sea

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= x^{-2}\, dx \\ du &= dx & v &= -x^{-1}, \end{aligned}$$

   de donde

$$\begin{aligned}\int x^{-1}\, dx &= -1 - \int -x^{-1}\, dx \\ &= -1 + \int x^{-1}\, dx.\end{aligned}$$

   En este caso llegamos a la misma integral, entonces este método no es aplicable a esta función.

   Sin embargo, con este ejemplo podemos ver la importancia que tiene escribir la constante C, pues de otro modo tendríamos que

$$\int x^{-1}\, dx = -1 + \int x^{-1}\, dx$$

   de donde

$$0 = -1$$

   lo cual es una contradicción.

4. Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\; dx$.

   Solución:

   Sea

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen}(\ln x) & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{x}\cos(\ln x)\, dx & v &= x, \end{aligned}$$

   de donde

$$\int \operatorname{sen}(\ln x)\; dx = x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x)\; dx.$$

Calculamos $\displaystyle\int \cos(\ln x)\ dx$ aplicando nuevamente el método:

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & \cos(\ln x) & \qquad & dv & = & dx \\ du & = & \dfrac{-\operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx & & v & = & x, \end{array}$$

así

$$\begin{aligned} \int \cos(\ln x)\ dx &= x\cos(\ln x) - \int -\operatorname{sen}(\ln x)\ dx \\ &= x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx &= x\operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx \\ 2\int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx &= x\operatorname{sen}(\ln x) - x\cos(\ln x) \\ \int \operatorname{sen}(\ln x)\ dx &= \frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C. \end{aligned}$$

5. Calcular $\displaystyle\int \sec^3 x\, dx$.

   Solución:

   Sea

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & \sec x & \qquad & dv & = & \sec^2 x\ dx \\ du & = & \sec x \tan x\, dx & & v & = & \tan x, \end{array}$$

   de donde

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x\, dx &= \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\, dx \\ &= \sec x\tan x - \int \sec x\left(\sec^2 x - 1\right)\ dx \\ &= \sec x\tan x - \int \sec^3 x - \sec x\, dx \\ 2\int \sec^3 x\, dx &= \sec x\tan x + \int \sec x\, dx \\ \int \sec^3 x\, dx &= \frac{1}{2}\left(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C. \end{aligned}$$

6. Calcular $\displaystyle\int \sec^5 x\, dx$.

   Solución:

Sea

$$\begin{aligned} u &= \sec^3 x & dv &= \sec^2 x\ dx \\ du &= 3\sec^2 x \sec x \tan x\, dx & v &= \tan x, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \sec^5 x\, dx &= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^3 x \tan^2 x\, dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^3 x \left(\sec^2 x - 1\right)\ dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^5 x - \sec^3 x\, dx \\ 4\int \sec^5 x\, dx &= \sec^3 x \tan x + 3\int \sec^3 x\, dx \end{aligned}$$

Por el ejercicio anterior ya sabemos cuánto vale $\displaystyle\int \sec^3 x\, dx$ entonces

$$\begin{aligned} \int \sec^5 x\, dx &= \frac{1}{4}\left(\sec^3 x \tan x + \frac{3}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right)\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C. \end{aligned}$$

7. Calcular $\displaystyle\int \tan\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}\, dx$.

Solución:

Primero hacemos un cambio de variable

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx &= dt \\ dx &= 2\sqrt{x}\, dt \\ dx &= 2t\, dt, \end{aligned}$$

entonces escribimos la integral como

$$\int \tan\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}\, dx = \int 2t \tan t \sec^2 t\, dt$$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$\begin{aligned} u &= 2t & dv &= \tan t \sec^2 t\, dt \\ du &= 2\, dt & v &= \frac{\tan^2 t}{2}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\int 2t\tan t\sec^2 t\,dt &= t\tan^2 t - \int 2\left(\frac{\tan^2 t}{2}\right)\,dt\\ &= t\tan^2 t - \int \tan^2 t\,dt\\ &= t\tan^2 t - \int \sec^2 t - 1\,dt\\ &= t\tan^2 t - \tan t + t + C\\ &= \sqrt{x}\tan^2\sqrt{x} - \tan\sqrt{x} + \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

La importancia de la constante en la integración

Veremos algunos ejemplos clásicos en técnicas de integración pero vistos desde otros puntos de vista, o bien, usando métodos más rápidos.

Los primeros ejemplos que veremos aquí serán sobre la importancia de la constante de integración cuando usamos integración por partes.

Recordemos que la fórmula para utilizar integración por partes es:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

elegimos u y dv de manera que dv sea fácil de integrar y tratando que $v\ du$ sea una integral más sencilla que la original. En general se escoge la constante de integración igual a cero, sin embargo, ésta no es siempre la mejor elección, como veremos más adelante.

Supongamos que queremos calcular

$$\int f(x)\, g(x)\ dx$$

si tomamos

$$\begin{array}{lll} u = f(x) & dv = g(x)\ dx & \\ du = f'(x)\ dx & v = G(x) & \text{donde } G'(x) = g(x) \end{array}$$

entonces

$$\int f(x)\, g(x)\ dx = f(x)\, G(x) - \int f'(x)\, G(x)\ dx$$

pero también es cierto que

$$\begin{array}{lll} u = f(x) & dv = g(x)\ dx & \\ du = f'(x)\ dx & v = G(x) + C & \text{para cualquier constante } C \end{array}$$

de donde

$$\int f(x)\,g(x)\;dx = f(x)\,(G(x)+C) - \int f'(x)\,(G(x)+C)\;dx$$

Siempre se desea que la integral que resulta después de aplicar la integración por partes sea fácil de calcular. Así si elegimos adecuadamente la constante C podemos lograr lo deseado.

En muchos casos al elegir $C = 0$ es la mejor elección, sin embargo, muchas veces no nos detenemos a pensar en esto y lo hacemos automáticamente. Veamos algunos ejemplos donde se ilustra este caso.

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int x\arctan x\;dx$.

   Solución:

   Si hacemos

$$u = \arctan x \qquad dv = x\;dx$$

$$du = \frac{1}{1+x^2}\;dx \qquad v = \frac{x^2}{2} + C$$

   tomando $C = 0$ tenemos que:

$$\int x\arctan x\;dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2\,(1+x^2)}\;dx$$

   la integral que resulta se puede calcular como:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{2\,(1+x^2)}\;dx &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\;dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\;dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \frac{1}{1+x^2}\;dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x - \arctan x\right] + C.
\end{aligned}$$

   Así

$$\begin{aligned}
\int x\arctan x\;dx &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\left[x - \arctan x\right] + C \\
&= \frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

Sin embargo pudimos habernos evitado el cálculo de la integral resultante, eligiendo $C = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x \; dx &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \arctan x - \int \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \; dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \arctan x - \int \left(\frac{x^2+1}{2}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \; dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \arctan x - \int \frac{1}{2} \; dx \\
&= \left(\frac{x^2+1}{2}\right) \arctan x - \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

2. Calcular $\int \ln(x+7) \; dx$.

Solución:

Si hacemos

$$u = \ln(x+7) \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x+7} \; dx \qquad v = x + C$$

Tomando $C = 0$ tenemos

$$\int \ln(x+7) \; dx = x \ln(x+7) - \int \frac{x}{x+7} \; dx$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x+7} \; dx &= \int \frac{x+7-7}{x+7} \; dx \\
&= \int dx - \int \frac{7}{x+7} \; dx \\
&= x - 7\ln(x+7) + C.
\end{aligned}$$

Pero si hubiéramos escogido $C = 7$, entonces

$$\begin{aligned}
\int \ln(x+7) \; dx &= (x+7)\ln(x+7) - \int \frac{x+7}{x+7} \; dx \\
&= (x+7)\ln(x+7) - x + C.
\end{aligned}$$

Distintas técnicas para integrar funciones que usualmente se integran por partes

Veremos ahora algunos ejemplos que comúnmente se resuelven por integración por partes, ahora lo haremos de forma diferente.

Ejemplos

1. Calcular $\int \sec^3 x\ dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x\ dx &= \frac{1}{2}\int \sec^3 x + \sec^3 x\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^3 x + \sec x \left(\sec^2 x\right)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^3 x + \sec x \left(1 + \tan^2 x\right)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^3 x + \sec x + \sec x \tan^2 x\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sec x\ dx + \frac{1}{2}\int \sec^3 x + \sec x \tan^2 x\ dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\sec x + \tan x\right| + \frac{1}{2}\int \sec^3 x + \sec x \tan^2 x\ dx.
\end{aligned}$$

   Pero la derivada de $f(x) = \sec x \tan x$ es

$$f'(x) = \sec x \left(\sec^2 x\right) + \tan x \left(\sec x \tan x\right)$$

   Así

$$\int \sec^3 x\ dx = \frac{1}{2}\ln\left|\sec x + \tan x\right| + \frac{1}{2}\sec x \tan x + C.$$

2. Calcular $\int \csc^3 x\ dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int \csc^3 x\ dx &= \frac{1}{2}\int \left(\csc^3 x + \csc^3 x\right)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int \csc^3 x + \csc x \left(\csc^2 x\right)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int \csc^3 x + \csc x \left(\cot^2 x + 1\right)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int \csc^3 x + \csc x \cot^2 x + \csc x\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int \csc x\ dx + \frac{1}{2}\int \csc^3 x + \csc x \cot^2 x\ dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left|\csc x + \cot x\right| + \frac{1}{2}\int \csc^3 x + \csc x \cot^2 x\ dx
\end{aligned}$$

   Pero la derivada de $f(x) = \csc x \cot x$ es

$$f'(x) = \csc x \left(-\csc^2 x\right) + \cot x \left(-\csc x \cot x\right)$$

Así

$$\int \csc^3 x \; dx = -\frac{1}{2} \ln |\csc x + \cot x| - \frac{1}{2} \csc x \cot x + C.$$

3. Calcular $\displaystyle\int \sec^5 x \; dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int \sec^5 x \; dx &= \frac{1}{2}\int \left(\sec^5 x + \sec^5 x\right) \; dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^5 x + \sec^2 x \left(\sec^3 x\right) \; dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^5 x + \left(1 + \tan^2 x\right) \sec^3 x \; dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^5 x + \sec^3 x + \sec^3 x \tan^2 x \; dx.
\end{aligned}$$

   Utilizando el mismo método que en los ejemplos anteriores vemos que

$$\left(\sec^3 x \tan x\right)' = \sec^5 x + 3 \sec^3 x \tan^2 x$$

   entonces debemos sumar y restar $2\sec^3 x \tan^2 x$ dentro de la integral.

$$\begin{aligned}
\int \sec^5 x \; dx &= \frac{1}{2}\int \sec^5 x + 3\sec^3 x \tan^2 x \; - 2\sec^3 x \tan^2 x + \sec^3 x \, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\sec^3 x \tan x\right)' dx + \frac{1}{2}\int - 2\sec^3 x \tan^2 x + \sec^3 x \, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\sec^3 x \tan x\right) + \frac{1}{2}\int - 2\sec^3 x \left(\sec^2 x - 1\right) + \sec^3 x \, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\sec^3 x \tan x\right) + \frac{1}{2}\int - 2\sec^5 x + 2\sec^3 x + \sec^3 x \, dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\sec^3 x \tan x\right) - \int \sec^5 x \; dx + \frac{3}{2}\int \sec^3 x \; dx.
\end{aligned}$$

   De donde

$$2\int \sec^5 x \; dx = \frac{1}{2}\left(\sec^3 x \tan x\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + \frac{1}{2}\sec x \tan x\right) + k.$$

   Por tanto

$$\int \sec^5 x \; dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + \frac{3}{8}\sec x \tan x + C.$$

4. Demostrar la siguiente fórmula de reducción para calcular integrales de potencias impares de la secante.

$$\int \sec^{2n+1} x \; dx = \frac{1}{2n}\left[\sec^{2n-1} x \tan x + (2n-1)\int \sec^{2n-1} x \; dx\right]$$

Solución:

Hay dos formas de demostrar esta fórmula.

- Utilizando integración por partes

$$u = \sec^{2n-1} x \qquad\qquad dv = \sec^2 x\, dx$$

$$du = (2n-1)\sec^{2n-2} x \sec x \tan x\ dx \qquad v = \tan x$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int \sec^{2n+1} x\ dx &= \sec^{2n-1} x \tan x - (2n-1)\int \sec^{2n-1} x \tan^2 x\, dx \\
&= \sec^{2n-1} x \tan x - (2n-1)\int \sec^{2n-1} x \left(\sec^2 x - 1\right)\ dx \\
&= \sec^{2n-1} x \tan x - (2n-1)\int \sec^{2n+1} x\ dx + (2n-1)\int \sec^{2n-1} x\, dx
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
(2n-1+1)\int \sec^{2n+1} x\ dx &= \sec^{2n-1} x \tan x + (2n-1)\int \sec^{2n-1} x\, dx \\
\int \sec^{2n+1} x\ dx &= \frac{1}{2n}\left(\sec^{2n-1} x \tan x + (2n-1)\int \sec^{2n-1} x\, dx\right)
\end{aligned}$$

- Utilizando el método que hemos aplicado en esta sección

$$\begin{aligned}
\int \sec^{2n+1} x\ dx &= \frac{1}{2}\int \sec^{2n+1} x\ + \sec^{2n+1} x\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^{2n+1} x\ + \sec^{2n-1} x \sec^2 x\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^{2n+1} x\ + \sec^{2n-1} x \left(\tan^2 x + 1\right)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^{2n+1} x\ + \sec^{2n-1} x \tan^2 x + \sec^{2n-1} x\ dx \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Observamos que:

$$\begin{aligned}
\left(\sec^{2n-1} x \tan x\right)' &= \sec^{2n-1} x \sec^2 x\ + (2n-1)\sec^{2n-2} x \sec x \tan x \tan x \\
&= \sec^{2n+1} x + (2n-1)\sec^{2n-1} x \tan^2 x
\end{aligned}$$

Sumamos y restamos $(2n-1)\sec^{2n-1} x \tan^2 x$ dentro de la integral, entonces la última expresión de (4.3) es igual a:

$$= \frac{1}{2}\int \sec^{2n+1} x + (2n-1)\sec^{2n-1} x \tan^2 x - (2n-2)\sec^{2n-1} x \tan^2 x + \sec^{2n-1} x \; dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sec^{2n-1} x \tan x)' \, dx + \frac{1}{2}\int (-2n+2)\sec^{2n-1} x \tan^2 x + \sec^{2n-1} x \; dx$$

$$= \frac{1}{2}\sec^{2n-1} x \tan x + \frac{(-2n+2)}{2}\int \sec^{2n-1} x \left(\sec^2 x - 1\right) \; dx + \frac{1}{2}\int \sec^{2n-1} x \; dx$$

$$= \frac{1}{2}\sec^{2n-1} x \tan x + (1-n)\int \sec^{2n+1} x - \sec^{2n-1} x \, dx + \frac{1}{2}\int \sec^{2n-1} x \; dx$$

$$= \frac{1}{2}\sec^{2n-1} x \tan x + (1-n)\int \sec^{2n+1} x \; dx + \frac{2n-1}{2}\int \sec^{2n-1} x \; dx.$$

De donde

$$(n-1+1)\int \sec^{2n+1} x \; dx = \frac{1}{2}\sec^{2n-1} x \tan x + \frac{2n-1}{2}\int \sec^{2n-1} x \; dx.$$

Por tanto

$$\int \sec^{2n+1} x \; dx = \frac{1}{2n}\left[\sec^{2n-1} x \tan x + (2n-1)\int \sec^{2n-1} x \; dx.\right]$$

Integración por partes rápida

Hay muchas integrales que se resuelven utilizando el método de integración por partes aplicándolo varias veces. Ahora veremos un método rápido y sencillo para hacer estas integrales.

Probaremos que

$$\int fg \, dx = fg_1 - f\,'g_2 + \cdots + (-1)^{n-1} f^{\,(n-1)} g_n + (-1)^n \int f^{\,(n)} g_n \; dx \tag{4.4}$$

donde

$$f^{\,(i+1)} = \frac{d}{dx} f^{\,(i)} \qquad \text{y} \qquad g_{i+1} = \int g_i \; dx.$$

La cual es solamente una aplicación sucesiva del método de integración por partes, el cuál probaremos ahora usando el método de inducción.

Demostración:

Si $n = 2$ entonces para $\int fg \; dx$ utilizamos el método de integración por partes:

$$u = f \qquad dv = g \; dx$$

$$du = f\,' \, dx \qquad v = \int g \; dx = g_1$$

entonces

$$\int fg\ dx = fg_1 - \int f\,'g_1\ dx$$

Integrando nuevamente por partes, tenemos:

$$u = f\,' \qquad\qquad dv = g_1\ dx$$

$$du = f^{\,(2)}\,dx \qquad\qquad v = \int g_1\ dx = g_2$$

Así

$$\int f\,'g_1\ dx = f\,'g_2 - \int f^{\,(2)}g_2\ dx$$

Sustituyendo

$$\int fg\ dx = fg_1 - f\,'g_2 + \int f^{\,(2)}g_2\ dx.$$

Obviamente el resultado obtenido es el mismo que se obtiene de sustituir $n = 2$ en el fórmula (4.4).

Supongamos cierta la fórmula para $n = k$ esto es la hipótesis de inducción.

$$\int fg\,dx = fg_1 - f\,'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{\,(k-1)}g_k + (-1)^k \int f^{\,(k)}g_k\ dx$$

probaremos ahora el resultado para $n = k + 1$, es decir,

$$\int fg\,dx = fg_1 - f\,'g_2 + \cdots + (-1)^k f^{\,(k)}g_{k+1} + (-1)^{k+1} \int f^{\,(k+1)}g_{k+1}\ dx$$

Para ello basta con integrar por partes la última integral que aparece en la hipótesis de inducción:

$$\int f^{\,(k)}g_k\ dx$$

Entonces

$$u = f^{\,(k)} \qquad\qquad dv = g_k\ dx$$

$$du = f^{\,(k+1)}\ dx \qquad\qquad v = \int g_k\ dx = g_{k+1}$$

de donde

$$\int f^{\,(k)}g_k\ dx = f^{\,(k)}g_{k+1} - \int f^{\,(k+1)}g_{k+1}\ dx$$

Sustituyendo en la hipótesis de inducción, tenemos que $\displaystyle\int fg\,dx$ es igual a:

$$= fg_1 - f\,'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{\,(k-1)} g_k + (-1)^k \left[f^{\,(k)} g_{k+1} - \int f^{\,(k+1)} g_{k+1}\; dx \right]$$

$$= fg_1 - f\,'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{(k-1)} g_k + (-1)^k f^{\,(k)} g_{k+1} - (-1)^k \int f^{\,(k+1)} g_{k+1}\; dx$$

$$= fg_1 - f\,'g_2 + \cdots + (-1)^{k-1} f^{\,(k-1)} g_k + (-1)^k f^{\,(k)} g_{k+1} + (-1)^{k+1} \int f^{\,(k+1)} g_{k+1}\; dx$$

$$= fg_1 - f\,'g_2 + \cdots + (-1)^k f^{\,(k)} g_{k+1} + (-1)^{k+1} \int f^{\,(k+1)} g_{k+1}\; dx$$

Como queríamos demostrar.

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int x^5 \cos x\; dx$.

   Solución:

   Sean

   $$f\,(x) = x^5 \qquad \text{y} \qquad g\,(x) = \cos x$$

   Formamos dos columnas, en la primera aparecen f y sus derivadas hasta que $f^{(n)}\,(x) = 0$. En la segunda aparecen g y sus integrales con respecto a x, tantas como sea necesario para que la columna tenga el mismo tamaño que la de f.

   Se unen las dos columnas con flechas de tal manera que la flecha vaya de la 1^a de f a la 2^a de g y así con flechas diagonales les asignamos los signos $+$ o $-$ alternando, empezando siempre con $+$.

   $$\begin{array}{lcl}
   x^5 & & \cos x \\
   & \searrow^{+} & \\
   5x^4 & & \operatorname{sen} x \\
   & \searrow^{-} & \\
   20x^3 & & -\cos x \\
   & \searrow^{+} & \\
   60x^2 & & -\operatorname{sen} x \\
   & \searrow^{-} & \\
   120x & & \cos x \\
   & \searrow^{+} & \\
   120 & & \operatorname{sen} x \\
   & \searrow^{-} & \\
   0 & & -\cos x
   \end{array}$$

entonces $\int x^5 \cos x \; dx$ es igual a

$$x^5 \operatorname{sen} x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \operatorname{sen} x - 60x^2 \cos x + 120x \operatorname{sen} x + 120 \cos x + C$$

Este método puede utilizarse cuando el integrando es un producto de la forma

$$x^n \cos x \qquad \text{o} \qquad x^n \operatorname{sen} x.$$

Pero no es indispensable que aparezca la función seno o coseno en el producto, basta con que la función que hará el papel de g sea fácilmente integrable tantas veces como se requiera.

2. Calcular $\int x^3 (1-x)^{10} \; dx$.

Solución:

Elegimos
$$f(x) = x^3 \qquad \text{y} \qquad g(x) = (1-x)^{10}$$

entonces

$$\begin{array}{ccc}
x^3 & & (1-x)^{10} \\
 & \searrow^{+} & \\
3x^2 & & -\dfrac{(1-x)^{11}}{11} \\
 & \searrow^{-} & \\
6x & & \dfrac{(1-x)^{12}}{(12)(11)} \\
 & \searrow^{+} & \\
6 & & -\dfrac{(1-x)^{13}}{13(12)(11)} \\
 & \searrow^{-} & \\
0 & & \dfrac{(1-x)^{14}}{14(13)12(11)}
\end{array}$$

Por tanto $\int x^3 (1-x)^{10} \; dx$ es igual a

$$x^3 \left(-\frac{(1-x)^{11}}{11} \right) - 3x^2 \frac{(1-x)^{12}}{(12)(11)} + 6x \left(-\frac{(1-x)^{13}}{13(12)(11)} \right) - 6 \left(\frac{(1-x)^{14}}{(14)(13)(12)(11)} \right)$$

es decir, la integral $\int x^3 (1-x)^{10} \; dx$ es igual a

$$-\frac{x^3 (1-x)^{11}}{11} - \frac{3x^2 (1-x)^{12}}{12(11)} - \frac{6x (1-x)^{13}}{13(12)11} - \frac{6(1-x)^{14}}{14(13)12(11)} + C$$

3. Calcular $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\ dx$.

   Solución:

   Sean
$$f(x)=e^{ax} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\operatorname{sen} bx$$

   Procedemos como en el primer ejemplo, pero en este caso la derivada de f nunca será cero, entonces continuamos derivando hasta que alguna derivada multiplicada por la integral que aparece en ese renglón sea una constante por el integrando original.

$$\begin{array}{ccc}
e^{ax} & & \operatorname{sen} bx \\
& \searrow^{+} & \\
ae^{ax} & & -\dfrac{1}{b}\cos bx \\
& \searrow^{-} & \\
a^2e^{ax} & \longleftarrow^{+} & -\dfrac{1}{b^2}\operatorname{sen} bx
\end{array}$$

   de donde
$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\ dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\operatorname{sen} bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\ dx$$

   despejando tenemos:
$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\ dx &= e^{ax}\left(-\frac{1}{b}\cos bx+\frac{a}{b^2}\operatorname{sen} bx\right)\\
\left(\frac{b^2+a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\ dx &= e^{ax}\left(-\frac{1}{b}\cos bx+\frac{a}{b^2}\operatorname{sen} bx\right)\\
\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\ dx &= \frac{b^2e^{ax}}{a^2+b^2}\left(\frac{-b\cos bx+a\operatorname{sen} bx}{b^2}\right)\\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(-b\cos bx+a\operatorname{sen} bx\right)+C.
\end{aligned}$$

   Por tanto
$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\ dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(-b\cos bx+a\operatorname{sen} bx\right)+C.$$

4. Calcular $\int xe^{x}\operatorname{sen} x\ dx$.

   Solución:

$$\begin{array}{ccc}
xe^{x} & & \operatorname{sen} x \\
& \searrow^{+} & \\
(x+1)\,e^{x} & & -\cos x \\
& \searrow^{-} & \\
(x+2)\,e^{x} & \longleftarrow^{+} & -\operatorname{sen} x
\end{array}$$

Aquí nos detuvimos al aparecer en el producto el integrando original multiplicado por una constante y una integral del tipo del ejemplo 3.

Así

$$\int xe^x \operatorname{sen} x \; dx = -xe^x \cos x + (x+1)\, e^x \operatorname{sen} x - \int (x+2)\, e^x \operatorname{sen} x \; dx$$

Analizando la última integral tenemos:

$$\int (x+2)\, e^x \operatorname{sen} x \; dx = \int xe^x \operatorname{sen} x \; dx + 2\int e^x \operatorname{sen} x \; dx$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int xe^x \operatorname{sen} x \; dx &= \\ -xe^x \cos x + (x+1)\, e^x \operatorname{sen} x - \int (x+2)\, e^x \operatorname{sen} x \; dx &= \\ -xe^x \cos x + (x+1)\, e^x \operatorname{sen} x - \int xe^x \operatorname{sen} x \; dx - 2\int e^x \operatorname{sen} x \; dx &= \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} 2\int xe^x \operatorname{sen} x \; dx &= -xe^x \cos x + (x+1)\, e^x \operatorname{sen} x - 2\int e^x \operatorname{sen} x \; dx \\ \int xe^x \operatorname{sen} x \; dx &= \frac{1}{2}\left(-xe^x \cos x + (x+1)\, e^x \operatorname{sen} x - 2\int e^x \operatorname{sen} x \; dx\right). \end{aligned}$$

Utilizando el resultado del ejemplo 3, haciendo $a = 1$ y $b = 1$ obtenemos que:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \; dx = \frac{e^x}{2}\left(\operatorname{sen} x - \cos x\right).$$

De donde $\int xe^x \operatorname{sen} x \; dx$ es igual a

$$= \frac{1}{2}\left(-xe^x \cos x + (x+1)\, e^x \operatorname{sen} x - 2\left(\frac{e^x}{2}\left(\operatorname{sen} x - \cos x\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-xe^x \cos x + (x+1)\, e^x \operatorname{sen} x - e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x\right).$$

Por tanto

$$\int xe^x \operatorname{sen} x \; dx = \frac{e^x}{2}\left((1-x)\cos x + x \operatorname{sen} x\right) + C.$$