5 Demuestra que si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$

Suponemos que $a|b$ y $b|c$

Ahora $a|b$ significa que $am=b$ para algún m

y $b|c$ significa que $bn=c$ para algún n

Por lo tanto, $amn=c$, entonces $a|c$. ■

9. Demuestra que si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|bx+cy$, para cualquier par de enteros x, y.

Supongamos $a|b$ y $a|c$

Ahora $a|b$ significa que $am=b$ para algún m

y $a|c$ significa que $an=c$ para algún n

Entonces $bx+cy = amx + any = a(mx+ny)$

Por lo tanto $a|bx+cy$. ■

Si $a \in \mathbb{Z}$ es un número impar entonces el residuo de dividir a^2 entre 4 es 1

Supongamos que a es un entero impar, entonces

$a = 2k+1$, con $k \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto $a^2 = (2k+1)(2k+1)$

$= 4k^2 + 2k + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2+k)+1$

Ahora $k^2+k \in \mathbb{Z}$. Luego, $k^2+k = k$

Tenemos que $a^2 = 4k+1$

Por el teorema del algoritmo de la división tenemos que

$a = qb + r$, donde $a = a^2$, $b = 4$, $q = k$ y $r = 1$

Por lo tanto el residuo (r) de dividir a^2 entre 4 es 1 ∎