

# Examen

Rigoberto Canseco López

**1. Indique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justifica tu respuesta con una demostración o un contra ejemplo.**

**a)  $x^2 + y^2 = 25$  Es la ecuación de una circunferencia con radio 5.**

Es verdadero

**b) Todo lugar geométrico cumple al menos una de las simetrías respecto a ejes, planos (coordenados) o el origen.**

Es verdadero



2. En cada inciso halle la ecuación cartesiana para la superficie de revolución generada por el lugar geométrico G y la recta L.

a) G : " $x^2 + 2y^2 + 6y - 7 = 1, z = 0$ " L es el eje X.

Sean  $C \in \text{eje X}$ ,  $Q \in \mathcal{G}$  y  $P \in \mathcal{R}$

Como  $\mathcal{G}$  : " $x^2 + 2y^2 + 6y - 7 = 1$ " por lo tanto

Se hace un cambio de variable  $w = x$

$$w = x = \sqrt{8 - 2y^2 - 6y}$$

- Por el lema 2 y el corolario 2 podemos deducir los valores de C y Q.

Donde  $C = (0, y, 0)$ ,  $Q = (w, y, 0)$ ,  $P(x, y, z)$  y  $e_2 = (0, 1, 0)$ .

- Probar que  $(C - P) \perp v$ :

$$\begin{aligned}(C - P) \perp e_2 &= ((0, y, 0) - (x, y, z)) \cdot (0, 1, 0) \\ &= (0 - x, y - y, 0 - z) \cdot (0, 1, 0) \\ &= (-x, 0, -z) \cdot (0, 1, 0) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Por lo tanto  $(C - P)$  es perpendicular a  $e_2$

- Probar que  $(C - Q) \perp v$ :

$$\begin{aligned}(C - Q) \perp e_2 &= ((0, y, 0) - (w, y, 0)) \cdot (0, 1, 0) \\ &= (0 - w, y - y, 0 - 0) \cdot (0, 1, 0) \\ &= (-w, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Por lo tanto  $(C - Q)$  es perpendicular a  $e_2$

- Probar que  $d(P, C) = d(Q, C)$ :

$$\begin{aligned}d(P, C) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y - y)^2 + (z - 0)^2} \\ &= \sqrt{(x)^2 + (0)^2 + (z)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(Q, C) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ &= \sqrt{(w - 0)^2 + (y - y)^2 + (0 - 0)^2} \\ &= \sqrt{(w)^2 + (0)^2 + (0)^2} \\ &= \sqrt{(w)^2} = w\end{aligned}$$

Desarrollamos la igualdad

$$\begin{aligned}d(P, C) &= d(Q, C) \\ \sqrt{x^2 + z^2} &= w\end{aligned}$$

Como  $w = \sqrt{8 - 2y^2 - 6y}$

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{8 - 2y^2 - 6y}$$

$$x^2 + z^2 = 8 - 2y^2 - 6y$$

$$x^2 + z^2 - 8 + 2y^2 + 6y = 0$$

Por lo tanto los puntos  $(x, y, z) \in \mathcal{R}$  tiene que ser  $x^2 + z^2 - 8 + 2y^2 + 6y = 0$

**b) G : “ $x^2 + 8y = 1, z = 0$ ” y L el eje Y**

Sean  $C \in \text{eje } Y, Q \in \mathcal{G}$  y  $P \in \mathcal{R}$

Como  $\mathcal{G} : “x^2 + 8y = 1”$  por lo tanto

Se hace un cambio de variable  $w = y$

$$w = y = \frac{1 - x^2}{8}$$

Por el lema 3 y el corolario 3 podemos deducir los valores de  $C$  y  $Q$ .

Donde  $C = (x, 0, 0), Q = (x, w, 0), P(x, y, z)$  y  $v = e_1 = (1, 0, 0)$

- Probar que  $(C - P) \perp v$ :

$$\begin{aligned}(C - P) \perp e_1 &= ((x, 0, 0) - (x, y, z)) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (x - x, 0 - y, 0 - z) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, -y, -z) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Por lo tanto  $(C - P)$  es perpendicular a  $e_1$

- Probar que  $(C - Q) \perp v$ :

$$\begin{aligned}(C - Q) \perp e_1 &= ((x, 0, 0) - (x, w, 0)) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (x - x, 0 - w, 0 - 0) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, -w, 0) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Por lo tanto  $(C - Q)$  es perpendicular a  $e_1$

- Probar que  $d(P, C) = d(Q, C)$ :

$$\begin{aligned}d(P, C) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x - x)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2} \\ &= \sqrt{(0)^2 + (y)^2 + (z)^2} \\ &= \sqrt{y^2 + z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d(Q, C) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x - x)^2 + (w - 0)^2 + (0 - 0)^2} \\ &= \sqrt{(0)^2 + (w)^2 + (0)^2} \\ &= \sqrt{(w)^2} = w\end{aligned}$$

Desarrollamos la igualdad

$$\begin{aligned}d(P, C) &= d(Q, C) \\ \sqrt{y^2 + z^2} &= w\end{aligned}$$

Como  $w = \frac{1-x^2}{8}$

$$\begin{aligned}\sqrt{y^2 + z^2} &= \frac{1-x^2}{8} \\ y^2 + z^2 &= \frac{(1-x^2)^2}{64} \\ y^2 + z^2 - \frac{(1-x^2)^2}{64} &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto los puntos  $(x, y, z) \in \mathcal{R}$  tiene que ser la ecuación cartesiana  $y^2 + z^2 - \frac{(1-x^2)^2}{64} = 0$

