Cálculo diferencial e integral II

Tarea 1

1. Si $A = (a, b)$, probar que A no tiene mínimo y sí tienen ínfimo, $inf\ A = a$.

- **Demostración: De que A no tiene mínimo.**

  Si $x \in A$ entonces existe c y es el mínimo, $minA = c$, entonces $c \in (a, b)$ y $c \leq x\ \forall x \in (a, b)$.

  Como $c \in (a, b)$ y $a < c$ por lo tanto podemos encontrar un elemento medio en a y c , tenemos que:

  $$a < (a + c)/2 < c$$

  Esto además es menor a b

  $$a < (a + c)/2 < c < b$$

  Como $(a + b)/2$ pertenece al conjunto A , es decir, $(a + c)/2 \in (a, b)$ y además

  $$(a + c)/2 < c$$

  Contradicción, porque existe otro elemento del conjunto A que es menor a C, y nosotros habíamos considerado c cómo el mínimo, por lo tanto no tiene mínimo.

- **Demostración: De que A tiene ínfimo $inf\ A = a$.**

  Si $x \in A$ entonces $a < x < b$, y se encuentra acotado superiormente por b e inferiormente por a.

  Supongamos que existe otra cota inferior de A, que llamaremos α , por lo tanto $\alpha \leq x\ \forall x \in A$ y además $\alpha > a$.

  Tenemos que $a < \alpha < b$, ahora consideremos un elemento medio en a y α

  $$a < (a + \alpha)/2 < \alpha < b$$

  Como $(a + \alpha)/2 \in A$ y además $(a + \alpha)/2 < \alpha$ encontramos otra cota inferior, lo cual es una contradicción ya que α era cota inferior.

  Por lo tanto $\alpha \leq a$ y es la mayor cota inferior. Por lo tanto $inf\ A = a$.

2. Si $A = (a, b)$, probar que A no tiene máximo y sí tiene supremo, $sup\ A = b$.

- **Demostración de que A no tiene máximo.**

  Si $x \in A$ entonces $a < x < b$ se encuentra acotado inferiormente por a y superiormente por b.

  Supongamos que existe c y es el máximo, $max\ A = c$entonce $c \geq x\ \forall x \in (a, b)$.

  Como $c \in (a, b)$ por lo tanto $c < b$, podemos encontrar un elemento medio en c y b, por lo tanto tenemos que:

  $$c < (c + b)/2 < b$$

Además $a < c < (c+b)/2 < b$

Como $(c+b)/2 \in A$ y además encontramos $(c+b)/2 > c$, lo cual es una contradicción por que existe otro elemento del conjunto A que es mayor a c, y se había considerado a c como el máximo.

Por lo tanto A no tiene máximo.

- **Demostración de que A tiene supremo,** $sup\ A = b$

  Si $x \in A$ entonces $a < x < b$, donde A se encuentra acotado inferiormente por a y superiormente por b.

  Supongamos que existe una cota superior en A que llamaremos β, por lo tanto $\beta \geq x\ \forall x \in A$ y además $beta < b$.

  Tenemos que $a < \beta < b$, ahora consideramos un elemento medio en β y b,

  $$a < \beta < (\beta+b)/2 < b$$

  Como $(\beta+b)/2 \in A$ y además $(\beta+b)/2 > \beta$ encontramos otra cota superior.

  Lo anterior es una contradicción, ya que β era cota superior.

  Por lo tanto $\beta \geq b$ y es la mínima cota superior, $sup\ A = b$.

3. Probar que si S tienen mínimo entonces S tiene ínfimo y $inf\ S = min\ S$.

- **Demostración de que** $inf\ S = min\ S$

  Si $x \in S$ y además $a \leq x \leq b$, como $a = min\ S$, entonces $a \in S$ y $x \geq a\ \forall x \in S$.

  Supongamos que existe c que es $inf\ S$ es decir, $inf\ S = c$, como es el ínfimo cumple que:

  - c es una cota inferior de S
  - ningún número mayor que c es cota inferior para A

  Por lo tanto tenemos que, $x \geq c\ \forall x \in S$ y $c \in S$, entonces,

  $x \geq a$ y $x \geq c$, por lo tanto a, c debe de ser los mismo.

  $a = c$

  Tenemos que el $inf\ S = a$ y $a = min\ S$. Por lo tanto queda demostrado que $inf\ S = min\ S$.

4. Probar que el ínfimo de un conjunto es único.

- **Demostración**

  Sean a y a' dos extremos inferiores(ínfimos) para el conjunto L por lo tanto cumple que ningún número mayor que a es cota inferior para L, $a \leq a'$

  Pero también cumple que ningún número mayor que a' es cota inferior para L, $a' \leq a$.

  Por lo tanto $a = a'$

5. Probar que el axioma de ínfimo implica el teorema del supremo

- **Axioma del ínfimo:** *Todo conjunto $L \in \mathbb{R}, L \neq \emptyset$ acotado inferiormente tiene ínfimo, es decir, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = Inf\ L$.*
- **Teorema del supremo:** *Todo conjunto no vacío $L \in \mathbb{R}$, acotado superiormente tiene supremo, es decir, existe c tal que $c \in \mathbb{R}, c = sup\ L$.*

- **Demostración:**

  Sea $-L = \{x | x \in L\}$ y $L \neq \emptyset$, como L está acotado superiormente existe $N \in \mathbb{R}$ tal que

  $$N \geq x \; \forall x \in L$$
  $$- N \leq -x \; \forall x \in L$$

  El conjunto $-L$ está acotado inferiormente por el axioma del ínfimo existe β es el ínfimo de $-L$, es decir $\beta = inf(-L)$.

  Por demostrar $-\beta = sup \; L$

  Como $\beta = inf(-L)$ entonces

  $$-x \geq \beta \; \forall x \in L$$
  $$x \leq -\beta \; \forall x \in L$$

  Es decir $-\beta$ es cota superior de L. Por probar que es la mínima cota superior

  Sea α una cota superior de L, entonces

  $$\alpha \geq x \; \forall x \in L$$
  $$- \alpha \leq -x \; \forall x \in L$$

  Es decir, $-\alpha$ es cota inferior de $-L$. Como $\beta = inf(-L)$ entonces β es la mayor de las cotas inferiores de $-L$.

  $$\beta \geq \alpha$$
  $$- \beta \leq -\alpha$$

  Entonces $-\beta$ es la menor de las cotas superiores, es decir $-\beta = sup \; L$

  Entonces $-\beta$ es la c que buscábamos, $c = sup \; L$.

6. Probar que:

- $inf \; (A + B) = inf \; A + inf \; B$

  Si $x \in C$ entonces $x = a + b$ con $a \in A$ y $b \in B$ por lo tanto tenemos que $infA \leq a$ y $infB \leq b$

  $$infA + infB \leq a + b = x$$

  Es decir $inf \; A + inf \; B$ es cota inferior de C por lo tanto C tiene ínfimo y además

  $$inf \; A + inf \; B \leq inf \; C \qquad (1)$$

  Sea ahora n un número positivo cualquiera, según el teorema que dice: *Sea h un número positivo dado y S un conjunto de números reales.*

  - *Si S tiene ínfimo, para un cierto x de S se tiene $x \leq inf \; S + h$*

  Tenemos un $h = 1/n$ y existe un a en A y un b en B tales que

  $$a < inf \; A + 1/n \quad , \quad b < inf \; B + 1/n$$

  Sumando las desigualdades

  $$a + b < inf \; A + inf \; B + 2/n$$

  Es igual a

  $$-2/n + inf \; C \leq -2/n + a + b < inf \; A + inf \; B$$
  $$- 2/n + inf \; C < -2/n + a + b < inf \; A + inf \; B$$
  $$- 2/n < inf \; A + inf \; B - inf \; C \qquad (2)$$

  Utilizando la ecuación (1) y (2) tenemos que

  $$-2/n < inf \; A + inf \; B - inf \; C \leq 0$$

  Es igual a

  $$0 \leq -inf \; A - inf \; B + inf \; C < 2/n$$

  Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$

Por lo tanto $inf\ C = inf\ A + inf\ B$

- $inf\ cA = cinf\ A \qquad si\ c > 0$

  Sea $c > 0$,

  $$a \geq inf\ A\ \forall a \in A$$
  $$ca \geq cinf\ A\ \forall a \in A$$

  $cinf\ A$ es una cota inferior de cA por lo tanto $inf\ cA \geq cinf\ A \quad (1)$

  Como

  $$ca \geq inf\ cA$$
  $$a \geq 1/c\ inf\ cA$$

  Tenemos que $1/c\ inf\ cA$ es una cota inferior de A, por lo tanto

  $$inf\ A \geq 1/cinf\ cA$$
  $$c\ inf\ A \geq inf\ cA \quad (2)$$

  Por lo tanto $inf\ cA = c\ inf\ A$

- $inf\ cA = cinf\ A \qquad si\ c > 0$

  Sea $c < 0$,

  $$sup\ A \geq a\ \forall a \in A$$
  $$c\ sup\ A \leq ca\ \forall a \in A$$

  Donde $c\ sup\ A$ es cota inferior de cA, entonces

  $$inf\ c\ A \geq c\ sup\ A \quad (1)$$

  Tenemos que

  $$ca \geq inf\ cA\ \forall a \in A$$
  $$a \leq 1/c\ inf\ cA$$

  Donde $1/c\ inf\ cA$ es cota superior de A, entonces

  $$1/c\ inf\ cA$$
  $$inf\ cA \leq c\ sup\ A \quad (2)$$

  De la desigualdad (1) y (2) tenemos que

  $$inf\ cA \geq c\ sup\ A inf\ cA \leq c\ sup\ A$$

  Por lo tanto $inf\ cA = c\ sup\ A$

7. Sea $S = \{\frac{1}{n} - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Encontrar, si existen: el máximo, el mínimo, el supremo y el ínfimo. Probar las afirmaciones.

- **Demostración** $max\ S = 0 = sup\ 0$

  Como $S = \{0, -1/2, -2/3, -3/4, \dots\}$ para $n \in \mathbb{N}$

  Por lo tanto $-1 < 1/n - 1 \leq 0$

  La cota superior es 0 y como $0 \in S$ entonces $max\ S = 0 = sup\ S$

- **Demostración que S no tiene mínimo**

  Supongamos que $\alpha = min\ S$, por lo tanto

  $$\alpha \leq 1/n - 1\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha \in S$$

  Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha = 1/m$

  Como

  $$m + 1 > m$$
  $$1/(m+1) < 1/m = \alpha$$

Pero $1/(m+1) \in S$, por lo que contradice que α sea el mínimo, por lo tanto no tiene mínimo.

- **Demostrar que** $inf\ S = -1$

  Como $-1 < 1/n - 1\ \forall n \in \mathbb{N}$

  Entonces -1 es la cota inferior de S

  Sea β cualquier cota inferior de S por demostrar $\beta \leq -1$

  Supongamos que $\beta > -1$. Por ser cota inferior de S tenemos $\beta < 1/n - 1\ \forall n \in \mathbb{N}$

  Por el principio de Arquímides tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/\beta < m$ donde $-1 < 1/m < \beta$, pero $1/m \in S$,lo cual contradice que β sea cota inferior de S.

  Entonces $\beta \leq -1$ por lo tanto tenemos que $inf\ S = -1$