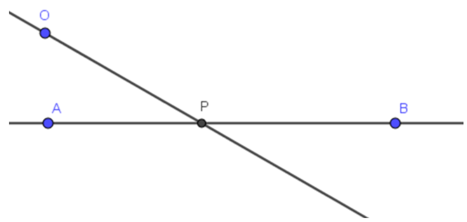
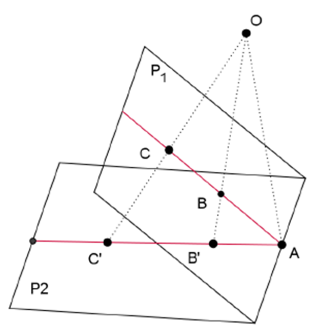
Puntos al infinito

Consideremos una línea AB y un punto O fuera de ella.

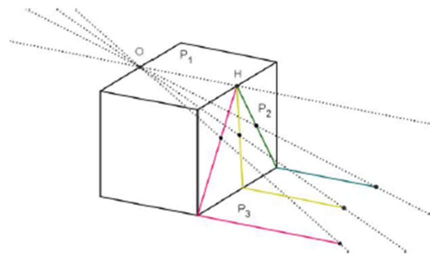
Cualquier línea no paralela a AB y que pasa por O interseca a AB en un punto P y si esta línea gira con centro O, el punto P se mueve a lo largo de la línea de AB.



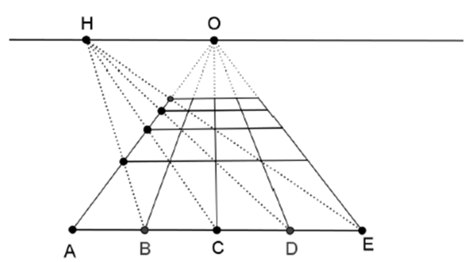
Más aún, cada punto de AB está determinado como la intersección de AB con una línea que pasa por O. Si el punto P de la línea AB es apareado con la línea OP se establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de AB y las líneas que pasan por O, con la sola excepción de la línea que pasa por O y es paralela a AB.
De acuerdo con la definición euclideana estamos acostumbrados a considerar dos líneas paralelas como aquellas que no tienen ningún punto en común. Aunque este punto de vista puede ser más satisfactorio a nuestra intuición es lógicamente permisible y aun deseable, asociar la línea AB con un punto ideal llamado **punto al infinito**, en AB, el cual tiene la propiedad de que la línea que pasa por O paralela a AB, interseca con AB eb este punto. Si esto se realiza, la excepción antes mencionada desaparece, y podemos decir que cualquier línea del plano que pasa por O, interseca a la línea AB. Uno de los puntos de intersección es el **punto al infinito** en AB. Todos los puntos que restan son los puntos reales de la línea AB.
Definición 1. *Se define una proyección central del plano P_1 en el plano P_2, desde un punto O, que no está en ninguno de los dos planos, asociando a cada punto R en el plano P_1, un punto R', su imagen, en el plano P_2 de tal forma que R, R' y O sean colineales.*



La imagen de un punto es un punto, ya que la recta por O y cualquier punto de P_1 corta al plano P_2 en un punto. En la figura la imagen de B es B' y la de C es C'. Además, en el caso del punto A que está en la intersección de los dos planos, su imagen es el mismo punto A.
Si A, B y C son colineales, entonces las rectas OA, OB y OC están en un tercer plano, el determinado por la recta que contiene a estos puntos y a O. Por lo tanto, las intersecciones de las rectas OA, OB y OC con el plano P2 están sobre la intersección de P2 con este tercer plano, esto es, sobre una recta. Se tiene entonces, que la imagen de una recta bajo la proyección es una recta. Es fácil comprobar que las distancias y los ángulos no se conservan bajo la proyección.



Al hacer la proyección de un plano sobre otro, hay puntos que pueden no tener imagen. Por ejemplo, en la figura se ha proyectado el plano P_2 sobre el plano P_3, desde el punto O que está en el plano P_1 paralelo a P_3.
Las tres rectas en P_2 y concurrentes en el punto H, que está en la intersección de P_1 y P_2, se proyectan en tres rectas paralelas, ya que la recta OH no interseca al plano P_3, por estar en un plano paralelo. De hecho, cualquier punto que está en la recta de intersección de los planos P_1 y P_2 no tiene imagen bajo la proyección de P_2 sobre P_3 desde O. Si ahora, se piensa en la proyección del plano P_3 sobre el plano P_2, desde el punto O, se tiene que las rectas paralelas se transforman en rectas que se intersecan en el punto H, que por cierto no es imagen de ningún punto de P_3.
A través de los antiguos métodos de la perspectiva se introdujeron los llamados puntos de fuga, que no son más que los **puntos al infinito** o puntos ideales que en la geometría proyectiva se tratan como puntos cualesquiera. Así, para resolver el problema de la representación en perspectiva de un adoquinado compuesto por cuadrados, Alberti desarrolló un método usando precisamente los puntos de fuga sobre una recta, la línea del horizonte.



Estas son algunas de las ideas que dieron pie a la inclusión de los **puntos al infinito** en el plano euclidiano. Ahora, regresando al plano euclidiano. En primer lugar, se introducirá alguna notación que permitirá ser más claro en la exposición.

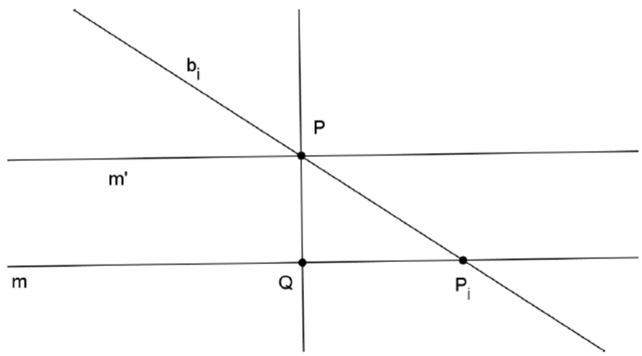
Notación Sea P un punto cualquiera en el plano, se llamará el haz de rectas con vértice en P, o sim-

plemente el haz de rectas por P, al conjunto de rectas concurrentes en P. Al punto P se le llama el centro o vértice del haz.
Conviene notar que un haz de rectas contiene una recta en cada dirección del plano.

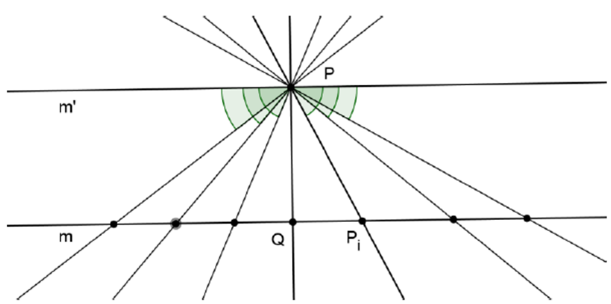
Notación Sea m una recta cualquiera en el plano, se llamará hilera de puntos en m, a cualquier conjunto de puntos en m.

Teorema 1. *Sean m una recta y P un punto que no está en m. Existe una correspondencia biunívoca entre las rectas del haz por P, excepto la paralela a m, y los puntos de la recta m.*

Demostración. Sean PQ la perpendicular a m por P y m' la paralela a m por P. Sea b_i una recta distinta de m' que pasa por P, por tanto, b_i no es paralela a m y corta a m en un único punto P_i (postulado 1). Se establece la correspondencia $b_i \to P_i$?.

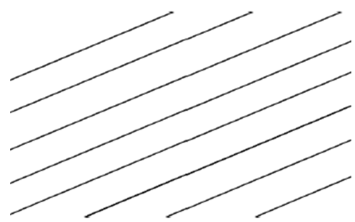


Esta correspondencia es biunívoca, ya que a cada recta por P distinta de m' corresponde un único punto en m, su punto de intersección con ella. Además, dos rectas distintas por P intersecan a m en puntos distintos y para cualquier punto P_j en m existe la recta PP_j en el haz (postulado 2).
Ahora, se puede observar en la figura que mientras menor es el ángulo que forma una recta del haz con la recta m', en cualquiera de los dos semiplanos determinados por PQ, el punto asociado a la recta en m está más alejado de Q, en los dos sentidos de la recta. Esto es, mientras una recta del haz se acerca más a la recta a m', la paralela a m por P, su punto asociado se aleja más de Q. Uno de los propósitos para ampliar las rectas con un punto al infinito es garantizar que las rectas m y m' se corten.



Se amplia, entonces, cada recta m con un punto ideal, llamado el punto al infinito de esa recta, y se define como el punto de intersección de m con todas sus paralelas. Se tiene que cada conjunto de rectas paralelas en una dirección en el plano comparte el mismo punto al infinito. Se define la recta al infinito como el lugar geométrico de los puntos al infinito. Cabe mencionar que cada punto al infinito está asociado con una dirección en el plano, la dirección de las rectas paralelas que se intersecan en ese punto. La ampliación del plano por los puntos al infinito permite incluir al plano euclidiano en el plano proyectivo. El plano euclidiano ampliado constituye un modelo del plano proyectivo, que permite trabajar con las propiedades heredadas del plano euclidiano. La principal ventaja de trabajar con el plano ampliado es que una serie de propiedades de incidencia de puntos y rectas no tienen ya excepciones; por ejemplo, el teorema se puede enunciar como: Sean m una recta y P un punto que no está en m. Existe una correspondencia biunívoca entre las rectas del haz por P y los puntos de la recta m. □

De acuerdo con la demostración anterior, solamente faltaba asociarle un punto en m a la recta m', la paralela a m por P. El punto que se le asocia a la recta m' es igualmente el punto de intersección de m y m', que es el punto al infinito que comparten por ser paralelas en el sentido euclidiano.
Asimismo, se puede extender el concepto de haz de rectas a las rectas concurrentes en un punto al infinito, que son rectas paralelas en el sentido euclidiano, tal y como se presenta en la figura



Teorema 2. *Cualesquiera dos puntos P y Q en el plano euclidiano ampliado determinan una única recta.*

Demostración. Se tienen

Caso 1 Los dos puntos P y Q son ordinarios, esto es, no son puntos al infinito.
De acuerdo con el postulado 1, existe una única recta ordinaria por P y Q. La única otra recta que se ha incorporado al plano ampliado es la recta al infinito que no contiene puntos ordinarios, por tanto, la recta en el plano euclidiano ampliado que pasa por P y Q es única.

Caso 2 Los dos puntos P y Q son puntos al infinito.
De acuerdo con la definición de la recta al infinito, ésta contiene a todos los puntos al infinito, por tanto, P y Q están en la recta al infinito. Ahora, ya que toda recta ordinaria contiene sólo un punto al infinito, no existe ninguna recta ordinaria que contenga a los dos puntos al infinito, por tanto, en este caso también la recta en el plano euclidiano ampliado que pasa por P y Q es única.

Caso 3 El punto P es un punto ordinario y Q es un punto al infinito.
De acuerdo con la definición de un punto al infinito, como la intersección de rectas paralelas en una dirección dada y como por un punto ordinario P solamente pasa una paralela euclidiana en una dirección dada, la recta en el plano euclidiano ampliado que pasa por P y Q es única.

□

Teorema 3. *Cualesquiera dos rectas m y n en el plano euclidiano ampliado determinan (se intersecan) en un único punto.*

Demostración. Se tienen

Caso 1 Las dos rectas p y q son ordinarias y no paralelas en el sentido euclidiano.
Como consecuencia del postulado 1 y de la definición de rectas paralelas, la intersección de las rectas p y q es un único punto ordinario. Los otros puntos que se han incorporado al plano ampliado son los puntos al infinito y como p y q son rectas ordinarias no paralelas, no comparten ningún punto al infinito, por tanto, la intersección de p y q en el plano euclidiano ampliado es un único punto, ordinario en este caso.

Caso 2 Las dos rectas p y q son ordinarias y paralelas en el sentido euclidiano.
Como consecuencia del postulado 1 y de la definición de rectas paralelas, no existe un punto ordinario que sea intersección de p y q. Ahora bien, como p y q son rectas ordinarias paralelas en el sentido euclidiano, comparten un único punto al infinito, por tanto, la intersección de p y q en el plano euclidiano ampliado es un único punto, al infinito en este caso.

Caso 3 La recta p es una recta ordinaria y q es la recta al infinito.
De acuerdo con la definición de recta al infinito, como la colección de todos los puntos al infinito, la intersección de p y q es el punto al infinito que contiene p, que es único.

□