Lógica de Predicados de Primer Orden

- La lógica proposicional puede ser no apropiada para expresar ciertos tipos de conocimiento. Por ejemplo:

$$Algunas\ manzanas\ son\ rojas$$

- Esta afirmación no se refiere específicamente a ningún conjunto de manzanas, solo está diciendo que existe un conjunto de manzanas que son rojas.

- ¿cómo podríamos representar esta afirmación en LP?

- La LP también puede puede ser no apropiada para modelar cierto tipo de razonamiento.

- Veamos el siguiente razonamiento correcto:

$$\begin{array}{l} \text{Juan ayuda a todas las personas que gustan de la lógica.} \\ \text{A Juan es persona y le gusta la lógica.} \\ \hline \text{Juan ayuda a Juan} \end{array}$$

- En estos ejemplos hemos visto que la LP no permite referirse en forma sencilla a todos los elementos de un dominio.

- Más aún, si los elementos del dominio son infinitos, simplemente no puede expresar conocimiento acerca de todos los individuos.

- La LP tampoco es capaz de representar propiedades de objetos, solo proposiciones.

- La lógica de primer orden (LPO) soluciona estos problemas en este sentido:

  - Permite hacer cuantificación sobre los objetos de un dominio. Ej: "Todos los perros son animales", "Algunos sapos lloran".
  - Permite representar propiedades a través de relaciones y funciones.

- Un lenguaje $\mathcal{L}$ de la lógica de predicados esta compuesto por los siguientes elementos:

  – Un conjunto $\mathbf{C}$, finito o enumerable, de constantes para designar objetos. Ej:

$$\{C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots\},$$

Para evitar confusiones, usaremos siempre mayúsculas para denotar los símbolos constantes.

– Un conjunto $\mathbf{F}$, de símbolos de función. Ejemplo:

$$\{f, g, h, \ldots\}.$$

A cada función se le asocia una $aridad$, que es un número natural y que corresponde a la cantidad de argumentos de la función.

– Un conjunto $\mathbf{P}$ finito o infinito enumerable de símbolos para predicados

$$\{P, Q, R, S, \ldots\},$$

que se utilizan para designar propiedades de objetos. A éstos también se les asocia una aridad positiva.

- Los tres conjuntos anteriores, se agrupan normalmente en un solo conjunto de símbolos $S = \langle \mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathbf{C} \rangle$. En el que se ubican primero los predicados, luego las funciones y finalmente las constantes. En nuestro ejemplo,

$$S = \langle \langle P, Q, R, S, \ldots \rangle, \langle f, g, h, \ldots \rangle, \langle C_1, C_2, \ldots \rangle \rangle$$

Además de estos elementos un lenguaje de primer está compuesto de fórmulas que pueden contener los siguientes elementos:

1. $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$: conectivos lógicos usuales.
2. $=$: un predicado especial para la igualdad.
3. $\exists$, $\forall$: cuantificadores existencial y universal.
4. $x_1, x_2, \ldots$: conjunto enumerable de variables, el cual informalmente podríamos llamar por x, z, u, etc.
5. $($, $,$, $)$: símbolos de puntuación.

- Aún nos falta definir cómo se forman exactamente las fórmulas.

- Veamos ahora un pequeño adelanto:

  Sea $S = \langle\langle A, GL\rangle, \langle padre\rangle, \langle Maria, Pedro, Andres, Juan\rangle\rangle$. Un conjunto de símbolos, donde

  - GL, de aridad 1 tal que $GL(x)$ es verdadero ssi a x le gusta la lógica.
  - A, de aridad 2 es tal que $A(x, y)$ es verdadero exactamente cuando x ayuda a y.

  Además, la función $padre(x)$ representa al padre del objeto x.

¿Qué creen que expresan las siguientes fórmulas?

$$\forall y(GL(y) \rightarrow A(Juan, y))$$
$$\exists x A(x, Juan)$$
$$GL(Juan)$$
$$\exists y(A(Juan, y) \wedge \forall x(A(x, y)))$$
$$\exists y, z(A(Juan, y) \wedge z = padre(y) \wedge \forall x(A(z, x)))$$

- Aparte de especificar cómo se escriben las fórmulas debemos darle una semántica.
- Notemos que los lenguajes de primer orden hablan de objetos, propiedades y funciones. Estos elementos del lenguaje deben tener una contra parte, en cierto dominio real (dominio de discurso).
- Es posible usar el meta-lenguaje matemático para describir el dominio de discurso a través de $estructuras$. Veremos esto más adelante...

Sintaxis de LPOP

- Ahora definiremos formalmente la sintaxis de LPOP.

- Partiremos con la definición de qué es un **término**.

  Definición 14. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden construido a partir de un conjunto S de símbolos. Un término se forma a partir de la aplicación sucesiva de las siguientes reglas.*

  1. *Toda constante de S es un término.*
  2. *Toda variable es un término.*
  3. *Si f es una función de aridad n ($f \in S$) y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos entonces $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es un término.*

  En nuestro ejemplo anterior, los siguientes son términos

$$x_1, y, Juan, padre(padre(Juan))$$

- Usando esto como base podemos definir una fórmula

Definición 15. *Una fórmula se obtiene, solamente, mediante una aplicación finita de las siguientes reglas:*

1. *Si* t_1 *y* t_2 *son términos, entonces* $t_1 = t_2$ *es una fórmula.*
2. *Si* P *es un símbolo de predicado* n*-ario y* $t_1, \ldots, t_n$ *son términos, entonces* $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *es una fórmula.*
3. *Si* φ *y* ψ *son fórmulas, entonces* $\neg\varphi$ *y* $(\varphi * \psi)$ *son fórmulas (*$*$ *es un conectivo binario).*
4. *Si* ϕ *es una fórmula y* x *es una variable, entonces* $\exists x \phi$ *y* $\forall x \phi$ *también son fórmulas.*

- El lenguaje de primer orden de todas las fórmulas que se generan a partir de un conjunto de símbolos S se anota como $L(S)$.

- Continuando con nuestro ejemplo, las siguientes son fórmulas del lenguaje:

$$\forall x(A(x,z) \rightarrow A(x, padre(u))),$$

$$\forall x \forall y A(x,y), \qquad \text{(*)}$$

$$\forall x(A(y, Juan) \rightarrow \exists y(GL(y) \wedge \neg A(y,x))),$$

$$\exists y A(x,y). \qquad \text{(**)}$$

La fórmula (*) se acostumbra a escribir como $\forall xyA(x, y)$

En la fórmula (**) la variable x no está afectada por ningún cuantificador. En este caso decimos que x es una variable libre.

Además, las relaciones binarias también se pueden anotar con notación infija. De esta manera $A(x, y)$ se escribe como xAy.

- **Definición 16.** *Una fórmula del lenguaje φ es una* **oración***. Si no tiene variables libres.*

Otro Ejemplo de LPOP

- Supongamos el siguiente conjunto de símbolos

$$S = \langle\langle <, > \rangle, \langle s, + \rangle, \langle 0, 1 \rangle\rangle,$$

- Podemos escribir el siguiente conjunto de fórmulas:

$$\forall x\, 0 < s(x)$$
$$\forall xyz((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < y)$$
$$\forall x\, x + 1 = s(x)$$
$$\forall xy\, s(x) + y = x + s(y)$$
$$\forall x\, x + 0 = x$$

- ¿De qué dominio real están hablando estas fórmulas?

- Si pensamos que estas fórmulas están hablando acerca de los naturales y que $s(x)$ representa al sucesor del natural x, entonces, estas fórmulas están describiendo propiedades de la desigualdad y de la suma.

Estructuras

- El dominio de discurso lo describiremos como una **estructura**.
- Una estructura es un conjunto formado por:
  - Un conjunto A no vacío de **objetos**. Si estamos hablando de los naturales, este conjunto es $\mathbb{N}$
  - Un conjunto $\mathbf{R}^A$ de **relaciones**. Una relación R^A sobre A es n-aria si $R^A \subseteq A^n$. Estas son las relaciones que cumplen los elementos del dominio.
    En el caso de los naturales, podríamos escoger la relación $<^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o la relación $primo^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$
  - Un conjunto $\mathbf{F}^A$ de **funciones**. Una función n-aria f^A recibe elementos del dominio y retorna un elemento del dominio, es decir

    $$f^A : A^n \longrightarrow A.$$

    En el caso de los naturales, podríamos escoger la multiplicación $(\cdot^{\mathbb{N}})$ y la suma $(+^{\mathbb{N}})$
  - Un conjunto de **constantes** distinguidas. C^A puede denotar una constante en el conjunto A. Obviamente, $C^A \in A$.
    En el caso de los naturales podríamos elegir a $0^{\mathbb{N}}$ y a $1^{\mathbb{N}}$.

Definición 17. *Una estructura se anota formalmente como una tupla*

$$\mathfrak{E} = \langle A, \langle R^A, \ldots \rangle, \langle f^A, \ldots \rangle, \langle C^A, \ldots \rangle \rangle,$$

en la cual A *es un conjunto y* R^A, f^A *y* C^A *son, respectivamente, una relación, una función y una constante sobre* A *con las características descritas anteriormente.*

Por ejemplo, una estructura sobre los naturales puede ser la siguiente:

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \langle <^{\mathbb{N}}, primo^{\mathbb{N}} \rangle, \langle +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}} \rangle, \langle 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}} \rangle \rangle$$

- Si un lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden habla acerca de cierta estructura, entonces el conjunto de símbolos S utilizados por el lenguaje debe ser **compatible** con los elementos de la estructura.

  Por ejemplo, el conjunto de símbolos

  $$S = \langle \langle R, \ldots \rangle, \langle f, \ldots \rangle, \langle C \rangle \rangle$$

  es compatible con la estructura

  $$\mathfrak{E} = \langle A, \langle R^A, \ldots \rangle, \langle f^A, \ldots \rangle, \langle C^A \rangle \rangle$$

  cuando hay una correspondencia exacta entre los elementos y sus símbolos (incluyendo las aridades).

  En este caso decimos que

- R **es interpretado por** R^A
- f es interpretado por f^A, y
- C es interpretado por C^A.

- Los siguientes son ejemplos de estructuras compatibles:

$$S = \langle\langle <, primo\rangle, \langle +, \cdot\rangle, \langle 0, 1\rangle\rangle \text{ y } \mathfrak{N}_1 = \langle \mathbb{N}, \langle <^{\mathbb{N}}, primo^{\mathbb{N}}\rangle, \langle +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}\rangle, \langle 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}\rangle\rangle$$

$$S = \langle\langle <, primo\rangle, \langle +, \cdot\rangle, \{0, 1\}\rangle \text{ y } \mathfrak{N}_2 = \langle \mathbb{N}, \langle <^{\mathbb{N}}, impar^{\mathbb{N}}\rangle, \langle +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}\rangle, \langle 1^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}\rangle\rangle$$

- Nótese que en el segundo ejemplo no existe una correspondencia “natural” entre los símbolos utilizados y las propiedades que representan. Este fenómeno siempre ocurre en lógica simbólica.

- Siempre debemos recordar que los símbolos son solamente símbolos.

- Bajo este esquema en el cual la realidad es representada mediante símbolos nos preocupa ahora saber cuándo una fórmula es verdadera.

  Por ejemplo, ¿qué significa la siguiente fórmula

$$\forall x\,(primo(x) \rightarrow primo(x + 2))$$

cuando la interpretamos con $\mathfrak{N}_1$?

¿qué significa cuando la interpretamos con $\mathfrak{N}_2$?

¿bajo qué interpretación esta fórmula es verdadera?

¿es $\mathfrak{N}_2$ la única estructura que hace a la fórmula verdadera?

¿podemos escribir un conjunto de fórmulas que sea hecho verdadero sólo por un a interpretación dada por la estructura $\mathfrak{N}_2$ y por **ninguna** otra?

- Si queremos usar la lógica de primer orden para $razonar$ acerca de lo que ocurre en el mundo, deberemos ser capaces de describir lógicamente el mundo sin que exista la posibilidad a que las teorías sean verdaderas en estructuras que no tienen nada que ver con el mundo que estamos modelando.

- Más adelante veremos que esto puede ser no trivial...

- De lo que sí debiéramos estar seguros es que para ser capaces de modelar dominios en forma lógica deberemos entender claramente cuándo una fórmula es verdadera en una cierta estructura.

- Antes de esto, refinaremos nuestro concepto de interpretación.

Interpretación de Términos

- Hasta el momento, tenemos una idea "más o menos" clara de cómo se interpretan las relaciones y funciones.
- La pregunta es ¿cómo interpretamos un término?
- Debemos dar una respuesta para los tres tipos de términos:
  - constantes,
  - variables,
  - $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, donde $t_1, \ldots, t_n$ son términos.
- Al menos para el caso de las constantes debería ser bastante claro...
- Sin embargo, necesitamos dar una interpretación a las variables. Si x es una variable, ¿qué objeto del dominio le corresponde?
- Necesitamos una función de asignación, que asigne valores a las variables.

- Sea
$$S = \{\langle R, \ldots \rangle, \langle f, \ldots \rangle, \langle C, \ldots \rangle\}$$
un conjunto de símbolos. Si llamamos $Var(L(S))$ al conjunto de variables de un lenguaje de primer orden, entonces β es una función de asignación tal que
$$\beta : Var(L(S)) \rightarrow A.$$

- Formalmente, sea
$$S = \langle\langle R, \ldots \rangle, \langle f, \ldots \rangle, \langle C, \ldots \rangle\rangle$$
un conjunto de símbolos y
$$\mathfrak{E} = \langle A, \langle R^A, \ldots \rangle, \langle f^A, \ldots \rangle, \langle C^A \rangle\rangle$$
una estructura compatible y β una función de asignación, entonces una **interpretación** es un par $\mathcal{I} = \langle \mathfrak{E}, \beta \rangle$, definida por:

1. $\mathcal{I}(C) := C^A$.
2. $\mathcal{I}(x) := \beta(x)$, con $x \in Var(L(S))$.
3. $\mathcal{I}(f(t_1, \ldots, t_n)) := f^A(\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_n))$, con $x \in Var(L(S))$.

Valor de Verdad de Fórmulas

- Tal como en el caso proposicional, nos interesa saber cuándo una fórmula es verdadera.

- En LP, definimos cuando una fórmula era verdadera dada una asignación de valor de verdad para cada una de las variables proposicionales del lenguaje. Es decir, definimos cuándo $\sigma \models \varphi$.

- En lógica de primer orden no hay valuaciones, sino interpretaciones, por lo tanto nos preocupamos de definir cuándo una fórmula es verdadera bajo una interpretación:

$$\mathcal{I} \models \varphi \qquad (\varphi \in L(S)).$$

- Deberemos definir esto en forma inductiva para todas las fórmulas posibles del lenguaje.

Definición 18. *Sea $L(S)$ un lenguaje de primer orden y $\varphi \in L(S)$. Entonces:*

1. *Si* φ *es de la forma* $t = s$ *entonces*

$$\mathcal{I} \models \varphi \textit{ ssi } \mathcal{I}(t) = \mathcal{I}(s)$$

2. *Si* φ *es de la forma* $R(t_1, \ldots, t_n)$ *entonces*

$$\mathcal{I} \models \varphi \textit{ ssi } (\mathcal{I}(t_1), \ldots, \mathcal{I}(t_n)) \in R^A$$

3. *Si* φ *es de la forma* $\neg\psi$ *entonces*

$$\mathcal{I} \models \varphi \textit{ ssi } \textit{ no se cumple que } \mathcal{I} \models \psi$$

4. *Si* φ *es de la forma* $\psi \wedge \chi$ *entonces*

$$\mathcal{I} \models \varphi \textit{ ssi } \mathcal{I} \models \psi \textit{ y } \mathcal{I} \models \chi$$

5. *Si* φ *es de la forma* $\psi \vee \chi$ *entonces*

$$\mathcal{I} \models \varphi \textit{ ssi } \mathcal{I} \models \psi \textit{ o } \mathcal{I} \models \chi$$

6. *Si* φ *es de la forma* $\psi \rightarrow \chi$ *entonces*

$$\mathcal{I} \models \varphi \text{ ssi } \mathcal{I} \models \chi \text{ o no se cumple que } \mathcal{I} \models \psi$$

7. *Si* φ *es de la forma* $\psi \leftrightarrow \chi$ *entonces*

$$\mathcal{I} \models \varphi \text{ ssi } \mathcal{I} \models \psi \text{ exactamente cuando } \mathcal{I} \models \chi$$

8. *Si* φ *es de la forma* $\exists x\, \psi$ *entonces*

$$\mathcal{I} \models \varphi \text{ ssi } \mathcal{I}^{\frac{x}{a}} \models \psi \text{ con } a \in A$$

   Aquí, la notación $\mathcal{I}^{\frac{x}{a}}$ *implica reemplazar la asignación de valor de* x *por el objeto* a *en la función de asignación* β.

9. *Si* φ *es de la forma* $\forall x\, \psi$ *entonces*

$$\mathcal{I} \models \varphi \text{ ssi } \mathcal{I}^{\frac{x}{a}} \models \psi \text{ para todo } a \in A$$

- **Definición 19.** *Una fórmula* φ *de* $L(S)$ *es satisfacible si existe una interpretación* $\mathcal{I} = \langle \mathfrak{E}, \beta \rangle$ *tal que*

$$\mathcal{I} \models \varphi$$

- **Definición 20.** *Una fórmula φ de $L(S)$ es válida en la estructura $\mathfrak{E}$ (compatible con S) si ésta es hecha verdadera bajo cualquier asignación β.*

$$\mathfrak{E} \models \varphi \text{ ssi } \langle \mathfrak{E}, \beta \rangle \models \varphi \text{ para todo } \beta$$

- **Definición 21.** *Sea $\mathcal{I}$ una interpretación que hace verdadera a una fórmula $\varphi \in L(P)$. Entonces se dice que $\mathcal{I}$ es un* **modelo** *para esta fórmula.*

- **Definición 22.** *Sea Σ un conjunto de fórmulas en un lenguaje de primer orden $L(S)$, decimos que*

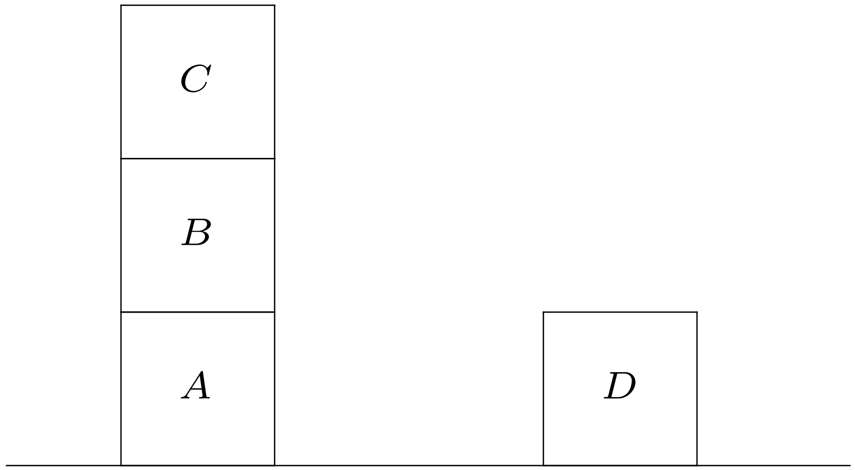
$$\mathcal{I} \models \Sigma \text{ ssi } \mathcal{I} \models \varphi \text{ para todo } \varphi \in \Sigma$$

- **Definición 23. [Consecuencia Lógica]** *Sea Σ un conjunto de oraciones en $L(S)$ y φ es una oración en $L(S)$. Entonces φ es consecuencia lógica de Σ ssi,*

$$\mathcal{I} \models \Sigma \text{ entonces } \mathcal{I} \models \varphi$$

Otro Ejemplo

- Supongamos las siguientes situaciones en el dominio de los bloques:



Podríamos usar la estructura $\mathfrak{B} = \langle U, \{Sobre^U\}, \{A, B, C, D, M\}\rangle$ para modelar este dominio, donde:

  - $U = \{A, B, C, D, M\}$.
  - $Sobre^U = \{(A, M), (B, A), (C, B), (D, M)\}$

- La interpretación $\mathcal{I} = \langle \mathfrak{B}, \beta\rangle$, para un β arbitrario es modelo del siguiente conjunto de fórmulas sobre $S = \{\{Sobre\}, \{B_A, B_B, B_C, B_D, M\}\}$

$$\forall x\,(Sobre(x, M) \rightarrow x = B_A \vee x = B_D)$$

$$Sobre(B_B, B_A) \wedge Sobre(B_C, B_B)$$

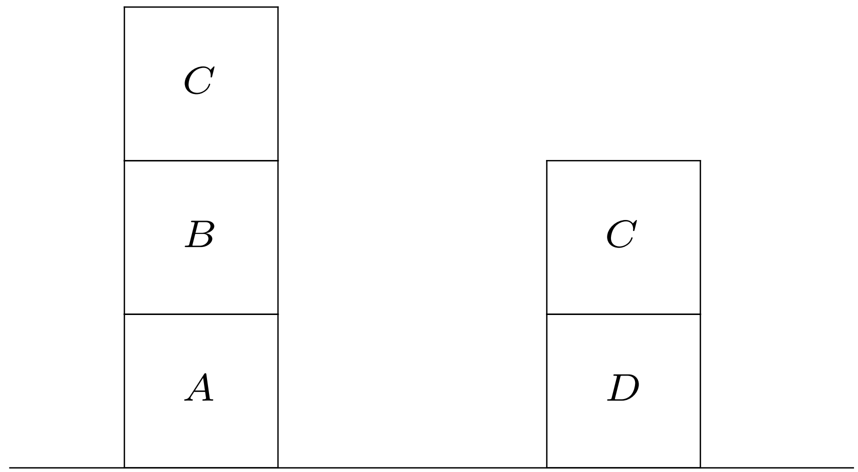
- Si consideramos, ahora, una relación binaria extra $ArribaDe$, tal que $ArribaDe(x, y)$ es verdadera si y sólo si el objeto x está arriba de y, y agregamos el siguiente axioma:

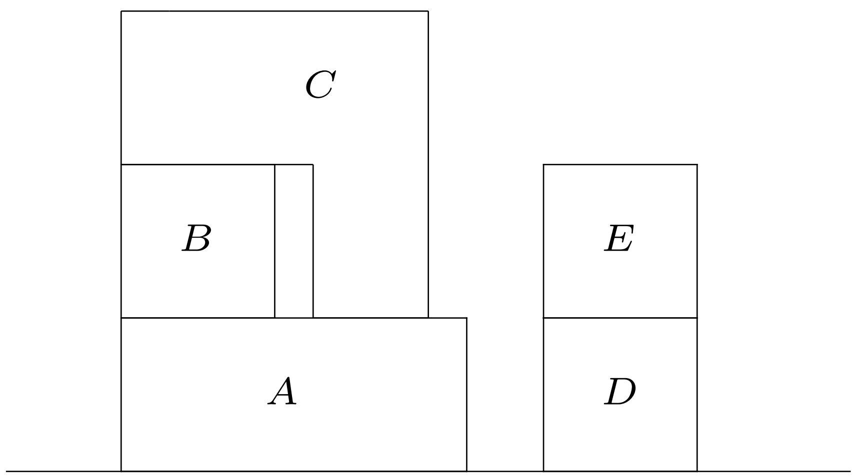
$$\forall xy\,(ArribaDe(x, y) \leftrightarrow Sobre(x, y) \vee Sobre(x, z) \wedge ArribaDe(z, y))$$

La interpretación, adecuadamente modificada, seguiría siendo modelo de la teoría.

- Una pregunta natural a hacerse es: ¿tiene esta teoría otro modelo? La respuesta es SÍ, y muchos más...

- Mostramos sólo dos de ellos:





- ¿Hay algún problema con la teoría?

- La respuesta a esta pregunta dependerá de qué es lo que queremos hacer con ella.

- Si esta representa hechos válidos, entonces es suficiente.
- Si queremos hacer deducción o **razonar** acerca de los hechos que son verdaderos en este dominio o no, necesitamos una mejor teoría.
- Dicha teoría debe *forzar* a que todas los modelos de esta representen el mundo que se quiere representar.
- Un arreglo para esta teoría es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\forall x(Sobre(x, M) \leftrightarrow x = B_A \vee x = B_D),\\
&\forall x(Sobre(x, B_A) \leftrightarrow x = B_B),\\
&\forall x(Sobre(x, B_B) \leftrightarrow x = B_C),\\
&\forall x \neg Sobre(x, B_C),\\
&\forall x \neg Sobre(x, B_D).
\end{aligned}
$$

- Recordemos, además, que una interpretación podría asignar a un objeto del dominio dos símbolos de constante distintos del lenguaje. Por ejemplo, el objeto

A podría estar designado por B_A y B_B al mismo tiempo y la teoría seguiría teniendo un modelo.

- Esta distinción se hace agregando axiomas de nombres únicos. Los axiomas para este caso son varios. A continuación veremos algunos:

$$\begin{array}{lll} M \neq B_A, & M \neq B_B & M \neq B_C, \\ M \neq B_D, & B_A \neq B_B, B_A \neq B_C, & \\ B_A \neq B_D, & \ldots & \end{array}$$

- Lo que estamos logrando con esto es que cualquier modelo de la teoría tenga propiedades con la **misma extensión** para cada uno de sus predicados.

- Una condición suficiente para asegurar es que la teoría sea **definicional**, es decir, que defina por completo la extensión de los predicados.

- Esto se traduce en que para todo predicado n-ario P de la teoría exista un axioma que establece que

$$\forall \mathbf{x} \, (P(\mathbf{x}) \leftrightarrow \varphi),$$

donde φ es una fórmula que no tiene variables libres y $\mathbf{x}$ es una tupla de n variables.

$$\begin{aligned}\forall x(Sobre(x,y) \leftrightarrow & (y = M \wedge (x = B_A \vee x = B_D))\vee \\ & (y = B_A \wedge x = B_B) \\ & (y = B_B \wedge x = B_C)).\end{aligned}$$

y que hay axiomas de nombres únicos para objetos del dominio.

- Usando la semántica ya definida, podemos demostrar que la siguiente fórmula es consecuencia lógica de nuestra teoría.

$$\forall x \neg Sobre(x,x)$$

En efecto podemos demostrarlo por contradicción

Supongamos que hay un objeto z tal que $Sobre(z,z)$, del axioma de definición de $Sobre$ se tiene que

$$(z = M \wedge (z = B_A \vee z = B_D)) \vee (z = B_A \wedge z = B_B) \vee (z = B_B \wedge z = B_C)$$

Que evidentemente contradice a los axiomas de nombres únicos, por lo que no puede existir tal z y luego $\forall x\, \neg Sobre(x, x)$.

- La demostración que acabamos de hacer ha sido posible porque tenemos un conocimiento certero sobre los modelos de la teoría.
- Sería ideal que, tal como en el caso de LP, en LPOP tuviéramos un sistema formal deductivo, mediante el cual no requiramos evidencia explícita de las estructuras que lo modelan.
- A continuación, veremos un sistema deductivo para lógica de primer orden.

Un sistema deductivo para Lógica de Primer Orden

- Al igual que en LP, en LPO existen fórmulas que son siempre verdaderas.
- A partir de estas fórmulas, podremos construir un sistema deductivo, con el cual se podrán derivar fórmulas correctas.
- Por ejemplo, las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

$$\models P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow P(x)),$$

  Esta fórmula es una instancia de una tautología de LP. En general, con cualquier instancia de tautología podremos obtener una fórmula universalmente.

- En particular, a partir del esquema de axiomas de Hilbert, podemos obtener:

$$(P(x) \rightarrow (Q(y) \rightarrow R(z))) \rightarrow ((P(x) \rightarrow Q(y)) \rightarrow (P(x) \rightarrow R(z)))$$

- Sin embargo, instanciaciones de estos esquemas de axiomas no son suficientes para realizar todo el razonamiento de primer orden.

- Veamos ahora algunas fórmulas universalmente válidas que involucran cuantificación:

$$
\begin{aligned}
&(\forall x\, P(x) \rightarrow P(C)),\\
&(P(y) \rightarrow \exists x\, P(x)),\\
&(\forall y\, P(y) \rightarrow \exists x\, P(x)),\\
&(\neg\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x\, \neg P(x)).
\end{aligned}
$$

- Las siguientes fórmulas, sin embargo, no lo son:

$$
\begin{aligned}
&(\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)),\\
&\forall x\, (P(x) \rightarrow P(C)),\\
&(\exists x\, \neg P(x) \rightarrow \neg\exists y\, P(y))
\end{aligned}
$$

El sistema deductivo

- Un sistema deductivo de Hilbert para LPO consta de:
  - Esquemas axiomáticos
  - Reglas de deducción.

- Los esquemas axiomáticos para LPO son los de LP, más axiomas para la cuantificación universal [4]:

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$.
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
3. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$.
4. $\forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$
5. $\varphi(t) \rightarrow \exists x\varphi(x)$
6. $\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi(x)$.

[4] Aquí t denota un término arbitrario, en particular puede ser una variable o una constante

- Además, debemos agregar los siguientes axiomas para igualdad:

$$\forall x\,(x = x)$$
$$\forall x\,(x = y \rightarrow y = x)$$
$$\forall x\,(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$$

Para todo predicado n-ario P y función m-aria f [5]:

$$\forall \mathbf{x}\mathbf{y}\, P(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{x} = \mathbf{y} \rightarrow P(\mathbf{y}),$$
$$\forall \mathbf{x}\mathbf{y}\, \mathbf{x} = \mathbf{y} \rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}).$$

- Las reglas de deducción son las siguientes:

1. Modus Ponens, igual que en LP

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi,\ \varphi}{\psi}$$

[5] Aquí $\mathbf{x}$ representa a una tupla de variables.

2. Regla de Generalización. Cuando y no aparece libre en φ

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi(y)}{\varphi \rightarrow \forall x\, \psi(x)}$$

Nótese que φ puede ser una fórmula siempre válida, con lo que la regla de generalización:

$$\frac{\psi(y)}{\forall x\, \psi(x)}$$

es un caso particular de la anterior.

- Una demostración formal de una fórmula φ a partir de un conjunto de fórmulas Σ es una secuencia de fórmulas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ donde $\phi_n = \varphi$ y, para todo $1 \leq i \leq n$,
  - $\phi_i \in \Sigma$, o
  - ϕ_i es un axioma lógico, o
  - ϕ_i se obtiene de una regla de deducción a partir de fórmulas ϕ_k y ϕ_j $(k < j < i)$
- Cuando φ se obtiene de una demostración formal a partir de Σ, decimos que

$$\Sigma \vdash \varphi.$$

- Ejercicio: Demuestre que

$$\{\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x\,P(x)\} \vdash \forall x\,Q(x)$$

1. $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ (de Σ)
2. $(P(p) \rightarrow Q(p))$. (esquema de axioma 4 en 1)
3. $\forall x\,P(x)$ (de Σ)
4. $P(p)$. (esquema de axioma 4 en 3)
5. $Q(p)$. (modus ponens entre 2 y 4)
6. $\forall x\,Q(x)$ (generalización de 5)

Propiedades del Sistema Deductivo

- Cabe preguntarnos ahora, qué propiedades tiene este sistema deductivo.

- Veremos que, afortunadamente, muchas de las propiedades que se tenían en LP, también se cumplen en LPO.

- **Teorema 2. [de Corrección]** *Sea Σ un conjunto de oraciones y φ una oración, entonces*

  $$\textit{si } \Sigma \vdash \varphi \textit{ entonces } \Sigma \models \varphi$$

  La demostración de este teorema es idéntica a la de LP, puesto que los esquemas de axiomas y reglas de deducción siempre preservan la verdad.

- **Teorema 3. [de Compleción de Gödel]** *Sea Σ un conjunto de oraciones y φ una oración, entonces*

  $$\textit{si } \Sigma \models \varphi \textit{ entonces } \Sigma \vdash \varphi$$

- **Teorema 4. [de Compacidad o Finitud]** *Sea Σ es un conjunto de oraciones y*

φ es una oración, entonces

$$\Sigma \textit{ es satisfacible ssi todo subconjunto finito de } \Sigma \textit{ lo es}$$

Fórmulas Prenex

- Es una forma normal de fórmulas de primer orden.
- Una fórmula prenex sólo tiene cuantificadores al comienzo de ésta. Por ejemplo:

  $$\forall xy \exists z \, (P(x,y) \rightarrow R(x,y,z))$$

  es una fórmula prenex.
- Formalmente, una fórmula prenex se escribe como

  $$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, \Psi,$$

  donde Q_i $(1 \leq i \leq n)$ representa algún cuantificador ($\forall$ o $\exists$) y donde Ψ no tiene cuantificadores.
- **Teorema 5.** *Sea φ una fórmula arbitraria de $L(S)$. Entonces existe una fórmula prenex ψ equivalente.*

- Antes de demostrar este teorema, veamos algunos ejemplos:

  la fórmula
  $$\forall x\,(P(x) \rightarrow \forall y\, Q(x,y))$$
  es equivalente a
  $$\forall x \forall y\,(P(x) \rightarrow Q(x,y))$$

  y
  $$P(x) \wedge \forall y\, R(y)$$
  equivalente a
  $$\forall y\,(P(x) \wedge R(y))$$

  ¿cómo podemos hacer esto en general?

- Es posible demostrar que si φ y ψ son fórmulas y x es una variable que no aparece en ψ o está cuantificada en ψ, entonces las siguientes fórmulas son equivalentes:

  1. $\neg Qx\,\varphi$ y $\overline{Q}x\,\neg\varphi$
  2. $(Qx\,\varphi)\circ\psi$ y $Qx\,(\varphi\circ\psi)$
  3. $\psi\circ(Qx\,\varphi)$ y $Qx\,(\psi\circ\varphi)$

  donde Q representa a algún cuantificador ($\forall$ o $\exists$), $\overline{Q}$ representa al cuantificador complementario[6] representado por Q y $\circ$ representa a $\wedge$ o $\vee$.

- ¿Qué pasa si ψ tiene a x como una variable libre? Ejemplo: Encuentre una fórmula equivalente a:

$$\forall x\,P(x)\wedge\forall y\,Q(y,z)\wedge P(x,y)$$

  en este caso no podemos aplicar directamente la transformación, deberemos renombrar la variable libre x y luego aplicar la regla.

[6] El cuantificador complementario de $\forall$ es $\exists$ y vice versa.

Renombrando x por u e y por v obtenemos:

$$\forall x(P(x) \wedge \forall y\, Q(y,z) \wedge P(u,v))$$

y luego

$$\forall x(\forall y\, (P(x) \wedge Q(y,z) \wedge P(u,v)))$$

que es equivalente a

$$\forall x \forall y\, (P(x) \wedge Q(y,z) \wedge P(u,v))$$

- El teorema se demuestra justificando que la aplicación de las transformaciones de arriba son suficientes para llevar cualquier fórmula a forma normal prenex.

Resolución de Primer Orden

- Tal como en LP, nos interesa encontrar un algoritmo implementable que permita hacer demostraciones de teoremas de primer orden en forma automática.
- En 1965, J.A. Robinson descubrió un método de resolución para primer orden.
- El método es bastante parecido al de resolución de LP.

- Supongamos que tenemos las siguientes dos cláusulas de primer orden:

$$P(x) \vee Q(y, z) \vee R(x, f(w))$$

  y la cláusula

$$S(y) \vee \neg P(u)$$

  Observemos que:

  – Las variables en ambas cláusulas aparecen como libres.
  – Buscamos encontrar una correspondencia entre resolución y consecuencia lógica por lo cual supondremos que todas las fórmulas están implícitamente cuantificadas universalmente (no queremos variables libres).
  – Dado que la primera fórmula se cumple para todo x, podríamos inferir que, en particular, se cumple para un objeto cualquiera C.
  – Si lo mismo decimos acerca de la segunda cláusula tendremos que, se cumple que

$$P(C) \vee Q(y, z) \vee R(C, f(w))$$

    y la cláusula

$$S(y) \vee \neg P(C)$$

- Dada tal sustitución, podemos utilizar la regla de resolución que ya conocemos y generar la siguiente cláusula:

$$S(y) \vee Q(y,z) \vee R(C, f(w))$$

  ¿Por qué?

- El proceso de asignar un valor a una variable, reemplazándola en toda la forma se llama **sustitución**.

- Si $\theta = \{x/b, y/f(a)\}$ y φ es una fórmula, entonces $\varphi\theta$ corresponde a la misma fórmula con todas las ocurrencias de x reemplazadas por b y todas las ocurrencias de y reemplazadas por $f(a)$.

- Formalmente, una sustitución es una función parcialmente definida $\theta : Var \rightarrow T(S)$, donde $T(S)$ es el conjunto de términos de un conjunto de símbolos S.

- Una sustitución que hace que dos fórmulas atómicas se hagan iguales se conoce como **unificador**.

  Ejemplo:

La sustitución $\theta = \{x/f(A), y/g(u), z/A\}$ es un unificador para los literales[7]:

$$L_1 \equiv R(x, g(u)) \qquad L_1 \equiv R(f(z), y)$$

porque $L_1\theta \equiv L_2\theta$.

- El sentido de igualdad ($\equiv$) usado aquí es meramente sintáctico y quiere decir que las expresiones son iguales caracter a caracter.

- Si θ es unificador, se usa
$$\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}\theta$$
para expresar el conjunto
$$\{E_1\theta, E_2\theta, \ldots, E_n\theta\}$$

- Dos literales que unifican, pueden ser hechos unificar por muchas sustituciones. En nuestro ejemplo anterior, todas las siguientes sustituciones son unificadores

[7] Tal como en LP, un literal es una fórmula atómica o la negación de una.

de L_1 y L_2:

$$\theta_1 = \{x/f(A), y/g(u), z/A\}$$
$$\theta_2 = \{x/f(z), y/g(u)\}$$
$$\theta_3 = \{x/f(f(B)), y/g(A), z/f(B), u/A\}$$

- De todos los unificadores posibles siempre existe al menos uno que es el menos restrictivo, en el sentido que es el que menos restringe futuras unificaciones.
- Este tipo de unificador se conoce como unificador más general (UMG).
- Un UMG asigna la menor cantidad de sustituciones posibles.
- Formalmente, un UMG θ de el conjunto de expresiones $\mathbf{E}$ es tal que cualquier otro unificador θ' de $\mathbf{E}$ se puede obtener primero mediante la aplicación de θ y después de alguna otra sustitución τ. Es decir,

$$\mathbf{E}\theta' = \mathbf{E}\theta\tau$$

- En nuestro ejemplo, θ_2 es el unificador más general. De hecho, si $\mathbf{E} = \{R(x, g(u)), R(f(z), y)\}$,

$$\mathbf{E}\theta_1 = (\mathbf{E}\theta_2)\{z/A\}$$
$$\mathbf{E}\theta_3 = (\mathbf{E}\theta_2)\{z/f(B), u/A\}$$

- Ahora estamos listos para formalizar una regla de resolución:

  Sean $l_1 \vee l_2 \vee \ldots l_n$ y $l'_1 \vee l'_2 \vee \ldots l'_m$ cláusulas de primer orden. La regla de resolución es **aplicable** si existen l_i $(1 \leq i \leq n)$ y l'_k $(1 \leq k \leq m)$ tales que $l_i\theta$ y $l'_k\theta$ son uno la negación del otro (literales complementarios).

  En este caso, la regla de resolución es la siguiente:

$$\frac{\begin{array}{l} l_1 \vee l_2 \vee \ldots l_n \\ l'_1 \vee l'_2 \vee \ldots l'_m \end{array}}{\bigvee_{i\in\{1,\ldots,n\}-\{j\}} l_i\theta \vee \bigvee_{i\in\{1,\ldots,m\}-\{k\}} l'_i\theta}$$

- Hasta el momento, tenemos un método de resolución sirve para fórmulas de primer orden cuantificadas universalmente.

- ¿qué podemos hacer cuando queremos demostrar un hecho a partir de un conjunto de formulas con cuantificadores existenciales?

- La respuesta está en transformar una fórmula con cuantificadores varios a una que sólo tenga cuantificadores universales.

- Esto se puede hacer mediante **skolemización**.

Skolemización

- La *skolemización* (por Toraf Skolem) tiene por objeto transformar una fórmula a otra equivalente en forma normal prenex.

- Consideremos la siguiente fórmula:

$$\exists x\, P(x)$$

- Siempre podremos reemplazar la fórmula anterior por

$$P(C),$$

donde C es **una constante**.

- Pero, ¿cómo podemos transformar $\forall x \exists y\, R(x, y)$?. Claramente, no nos sirve $\forall x\, R(x, C)$ ¿por qué?

- Sea φ una fórmula prenex, tal que

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x\, \varphi$$

es una oración.

La transformación de skolem le asocia a esta fórmula:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \, \varphi(x/f(x_1, \ldots, x_k))$$

donde $\varphi(x/f(x_1, \ldots, x_k))$ corresponde a la sustitución de x por $f(x_1, \ldots, x_k)$ en φ.

f se conoce como una constante de Skolem, y es una constante nueva, que no debe tener ocurrencias en φ.

- Para la regla anterior, en caso que $k = 0$, se obtiene la fórmula

$$\exists x \, \varphi$$

la que se reemplaza por $\varphi(x/C)$ donde C es una constante nueva.

- Ejemplos:

1. $\forall x \forall y \exists z \, S(x, y, z)$ se transforma en $\forall x \forall y \, S(x, y, f(x, y))$.

2.

$$\forall x \exists y \forall z \exists u\, (P(x,y) \wedge Q(y,z) \rightarrow R(u))$$

se transforma en

$$\forall x \forall z\, (P(x, f(x)) \wedge Q(f(x), z) \rightarrow R(g(x,z)))$$

- **Teorema 6.** *Sea $\Sigma \in L(S)$ un conjunto de oraciones en forma normal prenex y sea Σ' un conjunto formado a partir de sucesivas aplicaciones de la transformación de Skolem. Entonces Σ tiene un modelo si y solo si Σ' también lo tiene.*

  La demostración del teorema pasa por demostrar que

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x\, \varphi \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \varphi(x/f(x_1, \ldots, x_k))$$