

El algoritmo de Resolución

- El algoritmo de resolución es casi idéntico al de lógica proposicional:
- Suponga que quiere demostrar que φ es consecuencia lógica de Σ . El método es el siguiente:
 - Transforme las oraciones en $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ a forma normal prenex sin cuantificadores existenciales.
 - Usando la equivalencia $\forall x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow \forall x \phi(x) \wedge \forall x \psi(x)$ transforme las fórmulas a un conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ sin cuantificadores.
 - Mientras $\square \notin \mathcal{C}$ y existen $C_i, C_j \in \mathcal{C}$, tales que la regla de resolución es aplicable:
 - Aplique la regla de resolución a C_i y C_j generando C' y haga

$$\mathcal{C} := \mathcal{C} \cup \{C'\}$$

- Nuevamente, usamos

$$\Sigma \vdash_r \varphi$$

para decir que la oración φ se puede demostrar por resolución a partir de Σ .

Ejemplos de Resolución

- Demuestre que $\models \exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$
- Primero transformamos la negación de la fórmula en un conjunto de cláusulas.
- 1. $\neg \exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$
 2. $\forall x \neg (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$
 3. $\forall x (P(x) \wedge \neg \forall y P(y))$
 4. $\forall x (P(x) \wedge \exists y \neg P(y))$
 5. $\forall x \exists y (P(x) \wedge \neg P(y))$
 6. $\forall x (P(x) \wedge \neg P(f(x)))$
- De la última fórmula, generamos el conjunto de cláusulas

$$\{P(x), \neg P(f(x))\}$$

- Antes de iniciar la resolución, es siempre conveniente renombrar las variables en las distintas cláusulas. Esto aumenta las posibilidades de encontrar unificadores para éstas.

- Este renombramiento también se puede hacer antes de aplicar la regla de resolución.
- Partimos con el conjunto de cláusulas

$$\{P(x), \neg P(f(y))\}$$

- Basta una aplicación de la regla de resolución para encontrar que:

$$\frac{\begin{array}{l} P(x) \\ \text{con } \theta = \{x/f(y)\} \\ \neg P(f(y)) \end{array}}{\square}$$

- Veamos un ejemplo más complejo.
- Demuestre que

$$\{\forall x \forall y \exists z (P(x, y) \rightarrow R(y, z)), \forall x P(x, x)\} \vdash_r \forall x \exists y R(x, y)$$

- Las cláusulas son las siguientes:

1. $\neg P(x, y) \vee R(y, f(x, y))$
2. $P(z, z)$
3. $\neg R(C, u)$

- $\neg P(x, C)$ se obtiene de la resolución de 1 y 3 y finalmente \square se obtiene a partir de esta nueva cláusula y 2.

Propiedades de Resolución de Primer Orden

- Resolución de Primer Orden tiene las mismas propiedades esperadas de la resolución en lógica proposicional, es decir es **correcta** y **completa**.

Igualdad y Resolución

- La propiedad de igualdad es esencial para representar muchas teorías y muchos teoremas se pueden demostrar sólo gracias a que ésta existe.
- Ya hemos visto que para manejarla es necesario agregar axiomas adicionales.
- Dichos axiomas establecen las propiedades básicas que cumple la igualdad:
 - Es refleja, simétrica y transitiva y
 - Permite la sustitución de iguales por iguales.
- Por ejemplo, para demostrar teoremas de la teoría de grupos es esencial que podamos manejar la igualdad.
- Los siguientes son los axiomas de la teoría de grupos:

$$\forall xyz \ x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z \quad (\text{asociatividad})$$

$$\forall x \ x \circ e = e \circ x = x \quad (\text{identidad, } e \text{ es elemento neutro})$$

$$\forall x \ (x \circ i(x) = e \wedge i(x) \circ x = e) \quad (\text{existencia de un inverso})$$

- Un teorema de esta teoría es el siguiente: Si todo elemento es inverso de sí mismo, entonces el grupo es conmutativo. Es decir:

$$\forall x \ x \circ x = e \rightarrow \forall yz \ y \circ z = z \circ y$$

- Usando resolución por sí sola no podemos demostrar este teorema.
- Para demostrar un teorema usando igualdad tenemos 2 alternativas:
 - Usar resolución estándar incorporando los axiomas de igualdad.
 - Incorporar algún otro método al demostrador mecánico, para simplificar ciertas tareas.

- Si elegimos la primera alternativa, deberemos incluir los siguientes axiomas de igualdad.

$$x = x$$

$$\neg x = y \vee y = x$$

$$\neg x = y \vee \neg y = z \vee x = z$$

Para cada predicado n -ario P y para cada $j = 1, \dots, n$ agregamos:

$$\neg x_j = x_0 \vee \neg P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \vee P(x_1, \dots, x_0, \dots, x_n)$$

Para cada función n -aria f y para cada $j = 1, \dots, n$ agregamos:

$$\neg x_j = x_0 \vee f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_0, \dots, x_n)$$

Paramodulación

- Paramodulación es un método sencillo para incorporar la igualdad en demostraciones por resolución.
- En la práctica, no deberemos considerar los axiomas de transitividad, sustitución y simetría.
- Supongamos que se tienen las siguientes cláusulas:

$$C_1 : P(A)$$

$$C_2 : A = B$$

- Dado que se cumple una igualdad en C_2 podríamos aplicar una regla de sustitución para obtener $P(B)$.
- En general, la regla de sustitución de la siguiente manera:
Si una cláusula C_1 contiene un término t y una cláusula unitaria C_2 es $t = s$, entonces inferimos la cláusula que corresponda de sustituir s por t en C_1 .

- Paramodulación es una extensión de la regla que acabamos de mencionar.
- Si una expresión E ⁸ que contiene un término t , la llamaremos $E[t]$.
- De esta manera, la sustitución de t por s en la expresión $E[t]$ la escribiremos como $E[s]$.
- De esta forma, la regla de paramodulación para cláusulas instanciadas (sin variables) está dada por la siguiente definición:

Definición 24. [Regla de Paramodulación para Cláusulas Instanciadas] Sea $C_1 \stackrel{\text{def}}{=} L[t] \vee C'_1$, con C'_1 cláusula. Si $C_2 \stackrel{\text{def}}{=} t = s \vee C'_2$, con C'_2 una cláusula. Entonces inferimos la siguiente cláusula:

$$L[s] \vee C'_1 \vee C'_2$$

⁸Una expresión puede ser un literal o una cláusula

Ejemplo: Consideremos las siguientes cláusulas,

$$C_1 : P(A) \vee Q(B)$$

$$C_2 : A = B \vee R(B)$$

Usando paramodulación obtenemos la siguiente cláusula:

$$P(B) \vee Q(B) \vee R(B)$$

- A partir del concepto de sustitución, también es posible definir la regla de paramodulación para cláusulas con variables.

Definición 25. [Regla de Paramodulación de Primer Orden] Sean $L[t]$, C'_1 y C'_2 cláusulas arbitrarias sin variables en común. A partir de las cláusulas

$$C_1 : L[t] \vee C'_1$$

$$C_2 : r = s \vee C'_2$$

Si t y r tienen un UMG θ , entonces, por paramodulación se obtiene

$$C_1 : L\theta[s\theta] \vee C'_1\theta \vee C'_2\theta$$

Ejemplo: Demuestre a partir de

$$C_1 : P(g(f(x))) \vee Q(x)$$

$$C_2 : f(g(B)) = A \vee R(g(C))$$

Es posible generar, usando la regla de paramodulación, la cláusula:

$$P(g(A)) \vee Q(g(B)) \vee R(g(C))$$

- **Ejercicio:** demuestre el teorema de teoría de grupos enunciado al principio de esta sección usando resolución con la regla de paramodulación.
- Es posible demostrar que resolución+paramodulación es correcta y completa en el sentido que:

$$\Sigma_0 \cup AX_{=} \models \varphi \text{ ssi } \Sigma_0 \cup \{\forall x (x = x)\} \vdash_{r+p} \varphi$$

Donde el símbolo \vdash_{r+p} se utiliza para denotar una demostración que usa resolución junto con la regla de paramodulación, y $AX_{=}$ son los axiomas de igualdad para el conjunto de oraciones Σ_0 .

Cálculo de Secuentes y Primer Orden

- También es sencillo modificar el cálculo de secuentes para que maneje primer orden.
- En las siguientes reglas, c es una constante de Skolem y t un término arbitrario:
- Instanciación:

$$\frac{\Gamma, A[x/t] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A[x/t], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A, \Delta}$$

- Skolemización:

$$\frac{\Gamma, A[x/c] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A[x/c], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A, \Delta}$$