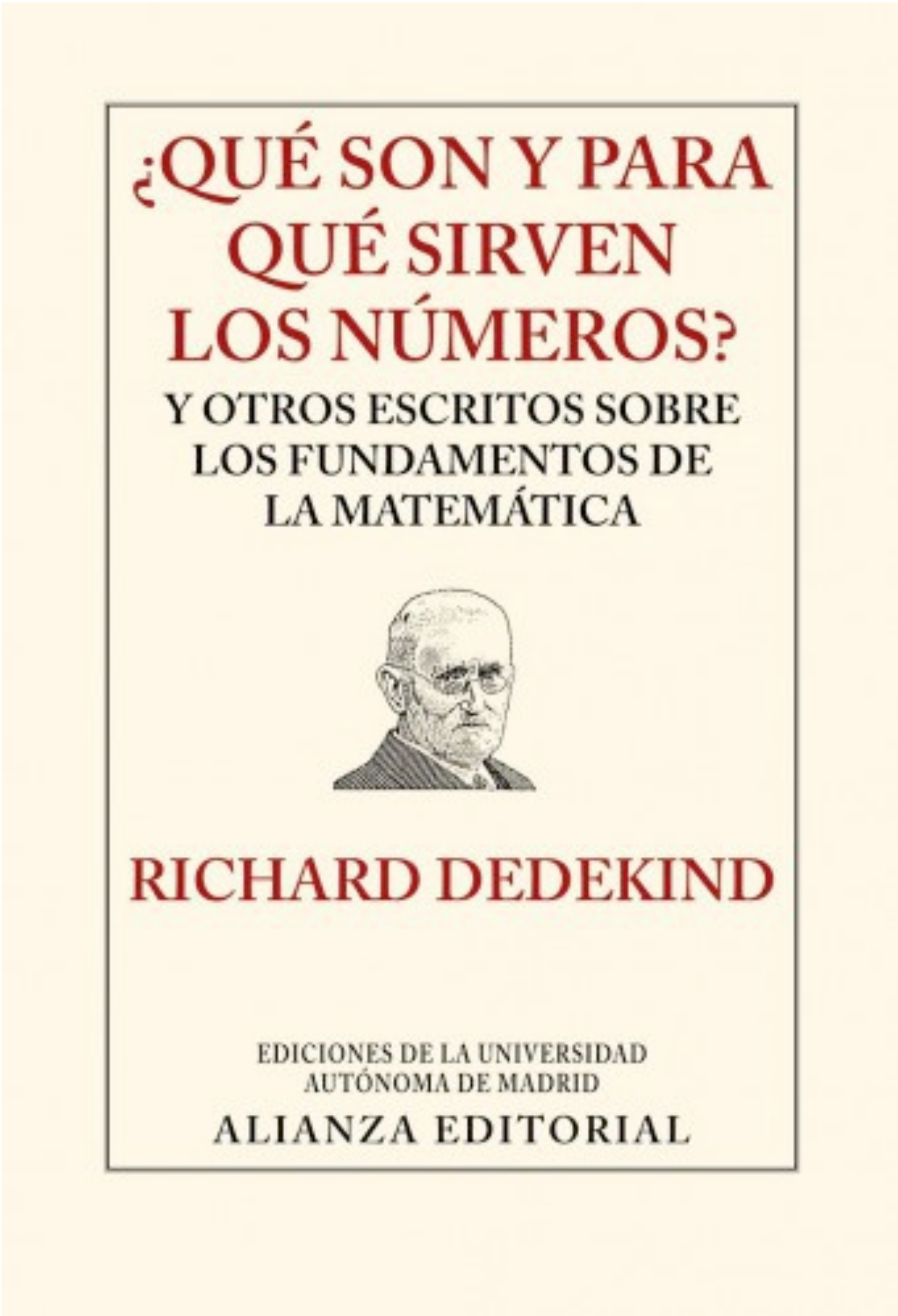
Introducción a

Richard Dedekind -- ¿Qué son y qué podrían ser los números? Y otros escritos sobre fundamentos



Introducción, por José Ferreirós (1997)

Los escritos aquí traducidos se sitúan en una auténtica encrucijada: entre la matemática elemental y la superior, entre la tradicional y la del siglo XX. Responden al antiguo problema de fundamentar la aritmética, que hasta mediados del XIX había sido exclusivamente tema de manuales elementales, pero que por la presión de las necesidades de fundamentación del análisis, en primer plano desde 1800, tendía a ocupar un lugar cada vez más central. El autor es un algebrista de primer rango, precursor de los enfoques estructurales del siglo XX (Bourbaki), que en el curso de sus investigaciones se ha ido convenciendo del papel básico de los conjuntos en la matemática, y que en su correspondencia con Georg Cantor ha tomado parte en algunos de los capítulos más famosos del nacimiento de la teoría de conjuntos.

Al contestar una de las preguntas más elementales que se pueden plantear, *¿Qué son y para qué sirven los números?*, Dedekind va a delinear simultáneamente el marco general de su concepción de toda la matemática pura: la aritmética, el álgebra, el análisis encuentran un fundamento común en la teoría de conjuntos y aplicaciones. Por este motivo, el libro de 1888 titulado con esa pregunta es el centro del planteamiento de Dedekind, en torno al cual hay que entender los demás escritos.

Esta introducción tratará de facilitar la labor de comprensión a base de comentarios históricos que permitan ver qué lineas se anudan en los escritos de Dedekind. Progresivamente iremos pasando revista al problema clásico de la fundamentación de la aritmética, a la formación matemática de Dedekind, al desarrollo de su mentalidad conjuntista en investigaciones algebraicas, y a sus primeras ideas sobre la fundamentación de la aritmética. Luego analizaremos las ideas clave, el contexto y la repercusión de los dos escritos principales, comentando en un apartado especial su relación con Cantor; para terminar, atenderemos a la filosofía de la matemática del autor, que da lugar a una postura logicista –en el sentido que tuvo esta expresión en el siglo XIX–.

1. El problema de la aritmética en perspectiva histórica.

La aritmética y las ramas superiores de la matemática que hasta cierto punto pueden considerarse derivados suyos, el álgebra y el análisis, fueron 'ciencias' carentes de un fundamento adecuado durante un larguísimo período, desde el siglo XVI hasta el XIX. La figura de Dedekind es una de las centrales en el movimiento que vino a poner fin a este 'escándalo'; con ello el nivel de rigor de la matemática occidental se asimila por primera vez –y terminará superando– al de los antiguos griegos. La referencia a los griegos es de hecho esencial para entender la historia de la noción de número, porque los intentos (insatisfactorios) de fundamentar la aritmética, durante los siglos mencionados, descansaron de hecho en las teorías heredadas de los griegos.

1.1. El uso griego del término 'número' es muy estricto, y sólo nos autoriza a denominar números a los llamados números naturales.[1] Sin embargo, los griegos consideraron también 'proporciones numéricas', relaciones entre números que equivalen a nuestras fracciones; una proporción numérica es algo radicalmente diferente de un número. La tradición nos cuenta que los pitagóricos creyeron poder asignar un número a todo lo que existe, o sea poder expresar todas las relaciones entre las cosas mediante proporciones numéricas. Hay que decir que esta suposición resulta muy razonable desde un punto de vista matemático; expresándolo en términos modernos, el conjunto de los números racionales (fracciones) es denso, esto es, entre cada dos números racionales existe otro (y por tanto infinitos). ¿Por qué habríamos de necesitar un conjunto más 'completo'? Sin embargo, el descubrimiento de la inconmensurabilidad del lado y la diagonal de un cuadrado puso un brusco fin a esa suposición pitagórica; en términos modernos, se había demostrado la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Los matemáticos griegos interpretaron su descubrimiento en el sentido de que las proporciones numéricas no son un medio suficientemente general para expresar las relaciones entre todas las cosas aceptadas, y que la geometría es más general que la aritmética, ya que las relaciones geométricas no son subsumibles bajo relaciones aritméticas aunque sí puede decirse lo contrario; de este modo se vieron forzados a buscar una nueva teoría más general, adecuada a la geometría. El gran logro se debió a Eudoxo, y constituye una de las obras maestras de la matemática griega: fue la *teoría de las proporciones* expuesta por Euclides. Esta teoría define rigurosamente lo que ha de entenderse por 'razón (proporción) entre dos magnitudes', permitiéndonos hablar con precisión de la razón entre magnitudes inconmensurables. Indiquemos aquí, como algo que se constituirá en tema central para Dedekind, que Euclides presupone la noción de magnitud, sin dar definiciones ni asunciones explícitas al respecto (ejemplos de magnitudes son un segmento, o un área, o un ángulo). De hecho la matemática griega parece considerar sus objetos como algo dado en el mundo natural, rasgo en el que se diferencia radicalmente de nuestra matemática axiomática.

Para que dos magnitudes del mismo tipo a y b tengan una razón, es necesario que satisfagan algo semejante al axioma arquimediano: han de existir números (naturales) m y n tales que $ma > b$, $nb > a$.[2] Decimos que dos razones, $a:b$, $c:d$, son iguales si y sólo si, para cada par de números m,n,

o bien $na > mb$ y $nc > md$;

o bien $na = mb$ y $nc = md$;

o $na < mc$ y $nc < md$.[3]

[1] En rigor, número es una reunión de unidades, de manera que ni siquiera el uno cae bajo la denominación 'número'.

[2] Euclides supone implícitamente que cada tipo de magnitudes admite una adición, y esto abre el camino a la definición del producto de un número por una magnitud: ma es igual a la suma de m términos $a+a+...+a$.

[3] *Elementos*, libro V, definiciones 4 y 5.

Con esto, las proporciones entre magnitudes resultan ser matemáticamente tan manejables como las proporciones numéricas; la teoría se usa, por ejemplo, para demostrar que las áreas de triángulos de igual altura guardan entre sí las mismas razones que sus bases (*Elementos*, VI.1).

La teoría de las proporciones de Eudoxo guarda una profunda relación con la teoría de los números irracionales de Dedekind, como indicará Rudolf Lipschitz y como se ha venido repitiendo desde entonces;[4] más adelante indicaremos cuál es esta relación.

1.2. Volviendo a la historia de las números, durante la Edad Media y el Renacimiento aparecen novedades que se deben a la influencia árabe: el sistema de numeración posicional dio pie al establecimiento de algoritmos de cálculo sencillos (como los que aprendimos de niños), y bajo la presión de la práctica del cálculo, el uso de la palabra 'número' se amplia. Ya los matemáticos indios habían empleado el cero y los números negativos, empleando analogías como la del 'debe y haber' para justificar este paso. Las fracciones pasarán enseguida a engrosar las filas del 'número', y finalmente, en conexión con la resolución de ecuaciones algebraicas, se admiten las 'irracionalidades' como √2 y los números 'imposibles', 'sordos' o 'imaginarios', formados con √-1. La razón de estas transformaciones fue sencilla: todos esos 'números' pueden operarse de acuerdo con idénticas reglas de cálculo, para dar lugar a resultados correctos. Pero la extensión de la noción de número era ante todo pragmática, y carecía de una justificación comparable a la de las teorías griegas. El paso que se había dado permitió el desarrollo del álgebra y del análisis, pero durante tres siglos se emplearán definiciones del número que no justifican toda la extensión dada al término.

Ya durante la época renacentista surgió la pregunta de si las fracciones y los irracionales son "verdaderos números". En 1585, Simon Stevin da la idea de una solución que imperará durante tres siglos, al proponer una nueva definición: "número es aquello mediante lo que se explica la magnitud de alguna cosa".[5] En realidad, la idea que encontramos aquí no es nada especialmente original: se trata de identificar 'número' con 'proporción entre magnitudes' en el sentido de los griegos. La teoría de las proporciones de Eudoxo se convierte así en la base de la nueva aritmética generalizada, cosa que en ningún momento fue la intención de los griegos. Este enfoque tuvo aceptación general, y entre sus partidarios podemos citar hombres de la talla de Descartes, Newton, Leibniz; la lista podría continuarse hasta llegar nada menos que a Cauchy, y en este libro tendremos ocasión de ver a Rudolf Lipschitz, matemático de primer rango contemporáneo de Dedekind, abogar de nuevo por esta teoría. La definición

[4] Cf. un tratamiento matemático sofisticado en W. Krull, 'Zahlen und Grössen. Dedekind und Eudoxos', *Mitteilungen des mathematischen Seminars der Universität Giessen* **90** (1971), 29-47; para un punto de vista histórico centrado en los griegos, H. Stein, 'Eudoxos and Dedekind: on the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics', *Synthese* **84** (1990), 163-211.

[5] *L'arithmetique*, fol. 1v, def. II; cit. en Gericke, 'Zur Geschichte des Zahlbegriffs', *Mathematische-physische Semesterberichte* **18** (1971), 164.

de Newton puede servirnos como resumen; en ella se resalta explícitamente la diferencia con respecto a los griegos:

> Entendemos por número no tanto una multitud de unidades cuanto la razón entre una cantidad abstracta cualquiera y otra del mismo género que se toma por unidad.[6]

Este tipo de definición supone sin duda un avance, porque justifica que denominemos 'número' a cualquier proporción que nos encontremos, con lo que alcanzaremos sin duda *gran parte* de los números reales positivos.

Como indica Dedekind en su correspondencia con Lipschitz, mientras no dispongamos de una teoría más precisa de las magnitudes en que se basa nuestra definición (ya hemos indicado que Euclides no ofrece nada así, y sus seguidores no avanzarán en este sentido), ese 'gran parte' es esencial: no podremos probar que hemos definido *todos* los reales positivos. Dedekind hace su crítica más concreta: Euclides puede haber supuesto intuitivamente la continuidad del espacio, pero no introduce en ningún momento ese supuesto de manera explícita, sin duda porque no lo necesita; ahora bien, si pretendemos definir adecuadamente los números reales positivos, la continuidad del dominio de magnitudes es esencial. Esta objeción no es puramente teórica, sino que tuvo implicaciones prácticas patentes en la fundamentación del análisis.

Durante el XVIII, el cálculo se había elevado a la categoría de método esencial para la aplicación de la matemática al conocimiento de la naturaleza, y se había convertido en un conjunto de técnicas enormemente flexibles. Pero los fundamentos no estaban nada claros, como se encargarían de señalar diversos autores. El cálculo del dieciocho hacía uso de nociones como las de infinitésimo, cantidad evanescente, diferencial, que carecían totalmente de una fundamentación adecuada. Newton aclaraba esas nociones hablando de 'cantidades nacientes', es decir, de los valores que tomaba una 'magnitud variable' en el preciso instante en que dejaba de ser cero, sin llegar a ser todavía una cantidad finita (entendiendo por cantidad finita un número real). Y la cosa no paraba aquí: si las diferenciales eran difíciles de entender, ¿qué diremos de las diferenciales de diferenciales, o diferenciales de segundo orden?; ¿y de los de tercer orden, etc.?; y ¿qué había que pensar del modo en que se calculaba con infinitésimos, a veces dividiendo por ellos, y a veces igualándolos a cero, cosas ambas que son incompatibles? Como decía George Berkeley: "no puede hablarse de ciencia cuando se procede a ciegas y se llega a la verdad no sabiendo cómo ni por qué medios".[7]

---

[6] *Arithmetica universalis* (1707); cit. en Pringsheim 'Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse', *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* **1** (1898) 1, 51.

[7] *El Analista* (Londres, 1734), par. 22. El libro se subtitula "discurso dirigido a un matemático infiel, donde se examina si los objetos, principios e inferencias del análisis moderno están formulados de manera más clara, o deducidos de manera más evidente, que los misterios religiosos o los asuntos de la fe". Desde luego, no ayudaban a evitar las críticas frases como la que se atribuye a d'Alembert dirigiéndose a los principiantes en el estudio del cálculo: "adelante, que la fe ya os vendrá".

Frente a esta situación se idearon distintas justificaciones: algunos hablaban de que en el cálculo se daba una compensación de errores (Carnot), otros propusieron que se reemplazaran los infinitésimos por límites de cantidades finitas, otros intentaron reducir el análisis al álgebra (Lagrange). Como es bien sabido, a principios del siglo XIX se dio con una solución que obtendría aceptación general, utilizando sistemáticamente la noción de límite y el cálculo con desigualdades. Partidarios de la noción de límite fueron matemáticos como Gauss y Bolzano, pero fue Cauchy quien tuvo el honor de asociar su nombre con la reforma del rigor en análisis. En sus libros de texto, y poniendo como base la noción de función continua y la teoría de límites, mostró de qué manera podía evitarse toda la confusión de sus predecesores. Pero aunque de este modo se lograba reducir la teoría a una serie de teoremas básicos, estos mismos teoremas no pudieron demostrarse con rigor.

El ejemplo típico es el teorema del valor intermedio: si una función continua toma valores positivos y negativos en un intervalo, existe un punto del intervalo en el que la función se anula. A este teorema dedicó Bolzano un famoso artículo en 1817, en el que, pese a todos sus esfuerzos, las demostraciones no llegaban a ser concluyentes. Otro ejemplo puede ser el teorema que Dedekind escoge como centro de sus reflexiones: una magnitud variable que crece siempre, pero no más allá de todo límite, se aproxima a un valor límite (o dicho en términos modernos: una sucesión creciente y acotada de números reales tiene límite). Se trata en ambos casos de teoremas básicos para el análisis, que establecen la *existencia* de cierto tipo de puntos; y es precisamente el carácter general de la demostración de existencia que se quiere establecer, lo que hace que el supuesto de la *continuidad* del conjunto de los números reales intervenga esencialmente. Por eso, sólo en el momento en que se tenga una teoría adecuada de los números reales podrán superarse totalmente las lagunas en la fundamentación del edificio del análisis.

1.3. El problema de la fundamentación del análisis fue un estímulo esencial para la formulación de teorías adecuadas de los números irracionales, pero no era el único problema relacionado con la fundamentación de la aritmética. ¿Qué pasa con los números negativos, y con los imaginarios, de los que no hemos hablado hasta aquí? Estrictamente no pueden situarse bajo la definición del número como proporción, cuestión que fue especialmente discutida en Gran Bretaña a principios del XIX; William Rowan Hamilton nos ofrece una recapitulación del problema especialmente clara:

> [...] no ha sucedido con los principios del Algebra lo mismo que con los principios de la Geometría. [...] Pues no requiere especial escepticismo dudar, o incluso no creer, la doctrina de Negativos e Imaginarios, cuando se propone (como ha sido común) con principios como éstos: que *una magnitud mayor puede ser sustraída de una menor*, y que el resto es *menor que nada*; que *dos números negativos*, o números que denotan cantidades menores que nada, pueden ser *multiplicados* uno por otro, y que el producto será un número *positivo*, o número que denota una cantidad mayor que nada; y que aunque el *cuadrado* de un número, o el producto obtenido al multiplicar ese número por sí mismo, es por tanto *siempre positivo*, ya sea el número positivo o negativo, con todo pueden encontrarse o concebirse o determinarse números, llamados *imaginarios*, con los que se opera con todas las reglas de los números positivos y negativos,

> como si estuvieran sometidos a esas reglas, *aunque tienen cuadrados negativos*, y por tanto debe suponerse que no son números positivos ni negativos, ni tampoco nulos, de modo que las magnitudes que se supone que denotan no pueden ser mayores que nada, ni menores que nada, ni siquiera iguales a nada. Debe ser difícil fundar una CIENCIA sobre principios como éstos, por más que las formas de la lógica puedan construir a partir de ellos un sistema de expresiones simétrico, y por mucho que se pueda aprender un arte práctica de aplicar correctamente reglas útiles que parecen depender de ellos.[8]

Como es natural, Hamilton carga aquí las tintas: en realidad sólo algunos puristas discutían la aceptabilidad de los números negativos, sin duda porque se disponía de una perfecta y utilísima interpretación de ellos en la recta real. El asunto de los números complejos sí que fue mucho más escandaloso durante siglos, hasta que a principios del XIX se elaboró su interpretación geométrica.[9]

Esta interpretación geométrica parecía implicar, sin embargo, que la aritmética y el álgebra quedaban subordinadas a la geometría, cosa que contradecía la opinión habitual. La solución de esta paradoja llevó a interesantes novedades, una de las cuales la introduce el propio Hamilton en el artículo citado. Hamilton siguió defendiendo una teoría muy cercana a la tradicional en lo que toca a los números reales, pero a propósito de los números complejos introdujo una novedad esencial: los complejos se presentan como pares ordenados de números reales, y las operaciones sobre los complejos se definen gracias a operaciones sobre los números reales que intervienen en el par. Con esto aparece, en 1837, la primera utilización del método constructivo en aritmética. Este método, difundido ante todo gracias a la gran obra de Hamilton *Lectures on Quaternions* (1853), inspiró sin duda a numerosos matemáticos, que trataron de aplicarlo a las restantes extensiones del concepto de número; el más afortunado de los continuadores de Hamilton en esta empresa fue Dedekind.

1.4. En resumen, a principios del siglo XIX se tenía ya una clara conciencia de la falta de una fundamentación adecuada de la aritmética, y esa conciencia se fue acentuando como resultado del problema de la fundamentación del análisis. Muchos de los intentos de solución siguieron dependiendo de la noción de magnitud, por ejemplo los de Hermann Grassmann y Karl Weierstrass, por citar sólo algunos de los más logrados. Frente a estos contemporáneos, Dedekind fue uno de los autores que más clara y vigorosamente se opusieron a la definición del número típica de la Edad Moderna, no sólo por el motivo que hemos visto antes, sino por su exigencia constante de que "la aritmética debe desarrollarse a partir de sí misma" (*Continuidad y números irracionales*), "sin ninguna inmiscusión de representaciones

---

[8] 'Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a preliminary and elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time' (1837), en *Mathematical Papers*, vol. 3 (Cambridge: University Press, 1967), 4.

[9] La interpretación geométrica fue formulada entre otros por Argand y Gauss; la idea, tal como la expone Gauss, es tomar la unidad real en el eje de las x y la imaginaria en el de las y, de manera que a cada punto del plano le corresponde un único número complejo, y viceversa.

extrañas (como por ejemplo la de las magnitudes medibles)" (*¿Qué son y para qué sirven los números?*). De este modo, Dedekind prescinde de la noción de magnitud y se plantea la tarea de desarrollar la aritmética en forma 'pura', para lo que hace uso de la teoría de conjuntos. A propósito de la definición de los números mediante proporciones escribió en *Continuidad y números irracionales*:

> La aparente ventaja de la generalidad de esta definición del número desparece inmediatamente si se piensa en los números complejos. Desde mi punto de vista, a la inversa, la noción de proporción entre dos magnitudes homogéneas sólo puede desarrollarse claramente cuando ya se han introducido los números irracionales.

El hecho de que todos los temas anteriores se anuden en la obra de Dedekind, muestra ya suficientemente que nos encontramos frente a un enorme esfuerzo de sistematización, un gran intento de reducir la matemática a bases rigurosas y unitarias. En efecto, la teoría expuesta en *Continuidad y números irracionales* puede verse como colofón de una serie de esfuerzos encaminados a fundamentar el análisis sobre la noción de límite, y esta noción directamente sobre la aritmética; además, de las teorías del número irracional publicadas en los años 1870 es la más conscientemente conjuntista. Pero Dedekind se preocupó también por hacer posible un desarrollo riguroso de todo el sistema numérico, como acreditan sus afirmaciones publicadas y diversos manuscritos. Con ello pretendía obtener un nuevo fundamento para la aritmética y el álgebra, coherente con sus investigaciones más sofisticadas en el campo de la teoría de números algebraicos y del álgebra en general.

Ambos proyectos resultan, a fin de cuentas, no ser sino uno solo: en mi opinión una lectura correcta de *¿Qué son y para qué sirven los números?* exige que consideremos ese libro como la exposición del marco general en el que se mueve la matemática pura (aritmética, álgebra y análisis), de tal manera que la concepción allí expuesta es suficiente, en opinión de Dedekind, para recuperar todo el edificio de la matemática de su tiempo. Antes de comentar más en detalle estas cuestiones, conviene echar un vistazo al desarrollo de la carrera matemática del autor.

2. La formación matemática de Dedekind.

Sobre la vida y personalidad de Dedekind apenas daré un par de datos. Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) nació en Braunschweig (Brunswick), donde pasaría la mayor parte de su vida, como cuarto hijo de una familia acomodada. Su padre y su abuelo paterno eran profesores del Collegium Carolinum, donde el propio Richard dará clases durante más de 30 años (este hecho nos remite al fuerte sentido de la tradición familiar que aparentemente tuvieron los Dedekind).[10] Tras ocho años como estudiante y profesor en Göttingen, Richard se traslada al Politécnico de Zürich como profesor de matemática; en 1862 se hace cargo de una plaza en el Collegium Carolinum, donde trabajará

[10] El Carolinum era una especie de instituto donde se daban clases de nivel intermedio entre el bachillerato y la universidad; Dedekind estudio allí dos años. Luego se transformó en Politécnico, coincidiendo con la llegada de Richard como profesor, y en Escuela Politécnica, en parte bajo la dirección del matemático.

el resto de su vida. Soltero, vive a partir de entonces con sus padres y su hermana mayor, y rechaza numerosas ofertas de plazas universitarias. Es evidente que ser profesor universitario no fue su mayor ambición, ya que antepuso razones familiares, económicas, y al parecer también políticas. A propósito de este último punto, digamos que a consecuencia de la anexión del reino de Hannover por Prusia Dedekind parece haber tomado una postura antiprusiana. Aproximadamente un año después de la anexión escribía a su amigo, el anatomista y profesor en Göttingen Jakob Henle:

> [...] es para mí muy difícil hacerme cargo plenamente de la actual situación en Göttingen; pero según todo lo que oigo, parece que la tensión entre los partidos políticos sigue siendo muy grande. Siempre es muy agradable pertenecer al partido vencedor, y las transformaciones del último año me han hecho ver que esa ventaja constituye para muchas personas, consciente o inconscientemente, el único regulador de su opinión. En espera de un tiempo mejor, en que el estado militar absoluto deje de considerarse el desarrollo supremo e inmejorable de nuestra vida política, de momento me retiro de una disputa que sigue siendo infructuosa; hay que esperar a que la borrachera se aplaque un poco.[11]

Sobre su personalidad digamos que era —como se ha repetido— modesto rayando en la timidez, carente de pretensiones, pero a la vez dotado de un fuerte sentido del deber y de la fidelidad a sus principios. Nunca tendió a comprometerse pública o políticamente, fue frío y reservado en sus juicios, pero amistoso, servicial y delicado en el trato personal. La música, su principal afición (tocaba el cello y el piano, al parecer muy bien), la literatura (su hermana era escritora y solían leer juntos), y los viajes y excursiones parecen haber sido sus aficiones, aunque también habría que mencionar que una vez a la semana acudía regularmente a una bolera. Era sistemático hasta rayar en manía, y probablemente algo provinciano, pero esto no le impidió adelantarse decenios al estado de la matemática de su época.

Al escribir un *currículum* con ocasión de su doctorado, el propio Dedekind resaltó el hecho de que durante su época de bachiller se interesaba sobre todo por la física y la química, considerando la matemática como una ciencia auxiliar; esto quizá refleja la influencia familiar, ya que su padre y su hermano mayor se interesaban mucho por la mineralogía, la geodesia y la agronomía. El caso es que —según escribía Dedekind— "como, no sé si por vicio o por virtud, estoy dotado de un espíritu que no me permite aprovechar felizmente en disciplina alguna si cada precepto no se apoya en los antecedentes, siguiendo un orden perpetuo y una cierta razón, en brevísimo tiempo me aplicaba principalmente con todo cuidado a la matemática, persuadido de que en la física, al menos tal como se enseña en las escuelas, no existe ese arte exacto que he indicado."[12] Esta declaración es importante, porque vemos cómo Dedekind anuncia ya a los 21 años un rasgo totalmente característico de su obra: sus escritos fueron siempre un modelo de rigor expositivo, un rigor a menudo nunca visto, y los problemas de fundamentación le ocuparon siempre más que la intención de ofrecer resultados nuevos. Hasta tal punto

---

[11] Carta del 18.7.1867 publicada en P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques* (Paris: Vrin, 1976), apéndice XV, 171.

[12] Reproducido en Dugac, o.c., apéndice XX, pag. 179.

es así, que podemos considerar su obra como uno de los mayores esfuerzos por lograr una visión sistemática, unitaria y rigurosa de la matemática; no es casual que Bourbaki parezca considerarlo su principal ancestro.

Después del bachillerato, Dedekind estudia química, física y matemática en el Collegium Carolinum durante dos años; esto le permite profundizar en la geometría analítica, el álgebra, el cálculo diferencial e integral y la mecánica. A la vez, lee las *Disquisitiones arithmeticae* (1801) de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), y todo ello le confirma en su decisión de decantarse por la matemática. Al llegar a la universidad de Göttingen su formación es suficiente para que las clases de matemática apenas le ofrezcan nada nuevo. A propósito de esto hay que recordar que nos encontramos en pleno proceso de reforma de la enseñanza universitaria: mientras en Paris y Berlin se enseñan materias de investigación avanzada, en otras universidades apenas se llega al cálculo diferencial e integral; Göttingen se sumará pronto a la lista de universidades de primer rango, pero esto sólo ocurrirá después de que Dedekind se haya doctorado y habilitado como profesor. De todos modos, Dedekind va a tener el privilegio de asistir a las clases impartidas por Gauss sobre temas elementales: método de mínimos cuadrados y geodesia superior; será además el último doctorando del 'príncipe de la matemática'. Ello motivó un cierto contacto, del que sin embargo no hay que esperar demasiado: Gauss era un hombre muy poco accesible, que influyó principalmente por medio de sus escritos. De todos modos es interesante conocer el juicio de Gauss al presentar la tesis:

> El tratado que presenta el sr. Dedekind se ocupa de una investigación acerca del cálculo integral que de ningún modo es trivial. El autor no sólo demuestra tener muy buenos conocimientos del estado actual del campo en cuestión, sino también una independencia tal que hace albergar esperanzas con respecto a sus trabajos futuros.[13]

Pese a este juicio favorable, que animó mucho a Dedekind, los historiadores no encuentran nada de gran interés en la tesis en cuestión. Digamos también que Gauss era conciudadano de Dedekind, que ambos asistieron al mismo instituto, al Collegium Carolinum y a la misma universidad, y que hay quien encuentra similaridades entre ambos incluso a nivel de personalidad; una similaridad destacable es que ninguno de los dos estaba dispuesto a publicar una teoría hasta que tuviera una forma definitiva. Gauss fue siempre una referencia fundamental para la obra matemática de Dedekind, quien colaboró en la edición de las obras completas de su maestro; el acceso a los manuscritos del gran matemático fue también una fuente importante de sugerencias.

El panorama de la enseñanza en Göttingen que he trazado hasta aquí puede parecer decepcionante, pero no todas las materias estaban en ese estado. La enseñanza de la física tenía un aspecto muy distinto gracias a Wilhelm Weber (1804-1891), el famoso físico que fue expulsado de la universidad en 1837,[14] y que volvió de nuevo en 1849. Tras su vuelta, Weber organizó junto con otro

---

[13] Dugac, ibid.

[14] Como uno de los 'siete de Göttingen' que se opusieron a la concentración de poder realizada por el

físico y dos matemáticos un Seminario físico-matemático en el que participaría Dedekind, pero también –y muy activamente– Bernhard Riemann (1826-1866); éste fue sin duda el lugar donde se conocieron los dos matemáticos, que luego habrían de ser grandes amigos. Weber se ocupaba de las clases de 'física experimental', que ejercieron una gran impresión sobre Dedekind. De hecho, fue uno de los mayores impulsores de una nueva concepción de la física, que abrió el camino hacia la física teórica, y de un nuevo estilo educativo cuya marca distintiva era la formación práctica en el laboratorio, y cuyo objetivo era lograr profesionales capaces de enfrentarse a los problemas de la investigación puntera del momento, con sólidos conocimientos tanto teóricos como prácticos. Lo que más interesó a Dedekind fueron los aspectos metodológicos del nuevo enfoque:

> [...] el gran curso de Weber, distribuido en dos semestres, me causó la más profunda impresión; la separación rigurosa entre los hechos fundamentales descubiertos gracias a las experiencias más simples y las hipótesis ligadas a ellos por el entendimiento humano, ofrecía un modelo insuperable de la verdadera investigación científica, como yo no había conocido nunca hasta entonces [...][15]

Weber fue siempre un importante apoyo académico para Dedekind; también para Riemann resultó una influencia clave: es notable ver cómo la metodología de Weber, en la descripción anterior, aparece claramente reflejada en la famosa lección de habilitación de Riemann sobre las hipótesis de la geometría, y de hecho puede considerarse la obra de Riemann como un desarrollo y una sofisticación del tipo de relaciones entre teoría matemática y física que presenta Weber. Pero a diferencia de lo que sucedió con Riemann, a quien dicha influencia inclinó hacia la física teórica, ni la admiración científica ni la amistad personal con ambos llevaron a Dedekind a ocuparse de problemas físicos, ni siquiera de las herramientas matemáticas de la física. Esto me parece un indicio más de su concentración en los problemas de fundamentos de la propia matemática.

Tras el doctorado, Dedekind se enfrenta al "gran esfuerzo" de completar algo su insuficiente formación: "No había cursos sobre la más nueva geometría [proyectiva?], sobre teoría de números superior, sobre ciclotomía y álgebra superior, sobre funciones elípticas, sobre física matemática, cosas todas ellas que estaban entonces brillantemente representadas en Berlin por Steiner, Jacobi, Dirichlet [...]".[16] Por este motivo se dedica a estudiar redacciones de cursos impartidos en Berlin y obras matemáticas de primer orden: las mecánicas de Laplace y Lagrange, la teoría del calor de Fourier, la teoría de funciones elípticas de Legendre, Jacobi y Abel, los tratados de geometría proyectiva de Steiner

---

rey de Hannover, rehusando un nuevo juramento de lealtad al rey que vendría a reemplazar el anterior juramento a la constitución.

[15] Carta de Dedekind a Klein escrita el 26.04.1913, publicada por W. Lorey, *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts* (Leipzig/Berlin: Teubner, 1916), 81-83; cita en pag. 82.

[16] ibid.

y Plücker, e incluso el cálculo baricéntrico de Möbius. En junio de 1854, pocas semanas después que Riemann, Dedekind se habilita pronunciando una lección que resulta interesante porque recoge el estado de sus ideas sobre fundamentos en la época; por este motivo hablaremos luego de ella. La habilitación le permite dar clases 'privadas' en la universidad, esto es, sin recibir un sueldo fijo, sino únicamente una parte del dinero de matriculación de los alumnos. De esta manera, Dedekind pasa a sufrir durante unos años la 'miseria del *Privatdozent*', agravada por el hecho de que a sus cursos sobre geometría proyectiva (1854/55) y álgebra superior (1856/57, 1857/58) sólo asisten dos estudiantes cada vez.

De todos modos, esta época de 'miseria', en la que se ve obligado a pedir todavía dinero a su familia, es la más importante en su formación como matemático debido a que se convierte en alumno de Dirichlet y de Riemann. En febrero de 1855 muere Gauss, el orgullo de la universidad de Göttingen, y ésta decide transformar su cátedra de astronomía en una de matemática con el fin de traer otro matemático de primer rango; su primer sucesor es Gustav Peter Lejeune-Dirichlet (1805-1859), que hasta entonces había dado clase en Berlin. La asistencia a las clases de Dirichlet y la relación personal con él, que seguirá un ritmo creciente, ejercen una influencia decisiva en la formación de Dedekind. Dirichlet había estudiado en Paris durante los años 20, conociendo y adoptando entonces las tendencias de Cauchy y Abel en análisis, pero perteneciendo ante todo al círculo de científicos que se reunían en torno a Joseph Fourier (1768-1830); al margen de esto, Gauss fue también para él una referencia clave. Fruto de su adhesión a esas tendencias fueron su obra sobre series de Fourier, que consiguió introducir un rigor 'moderno' (en el sentido de Abel y Cauchy) en el tratamiento de las mismas, abriendo el campo más fecundo para la teoría de funciones reales de los siguientes años; sus lecciones sobre teoría de números, que difundieron y ampliaron la obra de Gauss, entonces difícilmente comprensible para los matemáticos; y lo que se ha constituído en su contribución más reconocida al desarrollo de la matemática, la introducción de métodos analíticos en el tratamiento de problemas de teoría de números. Mencionemos también que Dirichlet trabajó mucho en temas de teoría de números algebraicos, que se convertirán en el campo de investigación fundamental de Dedekind. A todo esto unía una gran capacidad como profesor y un verdadero interés por sus alumnos, con lo que representó para la enseñanza de la matemática algo semejante a lo que Weber para la física. Dedekind escribiría posteriormente:

> Aunque ya había estudiado a conciencia los grandes tratados de Dirichlet, especialmente los de teoría de números, sin embargo fue para mí el mayor placer seguir sus conferencias enormemente penetrantes; en efecto, escuché una tras otra todas sus lecciones, sobre teoría de números, potencial, integral definida, ecuaciones diferenciales parciales, e hizo de mí, tanto por su enseñanza como por numerosas entrevistas personales en las que progresivamente aumentaba la confianza, un hombre nuevo.[17]

Con sus sólidos conocimientos de álgebra, teoría de números y análisis, y con su adhesión a las

[17] Carta a Klein, o.c., 82-83.

tendencias más rigurosas del momento (Gauss, Cauchy), Dirichlet representaba lo mejor de la matemática de la época, y la tendencia más rigurosa metodológicamente. El cuidado que se tomó en perfeccionar el conocimiento que Dedekind tenía de las distintas ramas de la matemática, la manera en que encauzó su trabajo, y su seguridad en cuestiones metodológicas, fueron sin duda los motivos por los que Dedekind lo consideró siempre su principal maestro y el hombre a quien más debía en su formación.

Junto con Weber y Dirichlet, Riemann completa el grupo de Göttingen del que dependió esencialmente la formación de Dedekind. Riemann, cinco años mayor que Dedekind, había estudiado en Göttingen y Berlin; de esa etapa en Berlin y de la preparación de su tesis doctoral provenía su amistad con Dirichlet, quien le consideraba como el mejor matemático joven de Alemania. Los trabajos de Riemann dieron claves fundamentales para el posterior desarrollo de la matemática; bastará mencionar su contribución a la teoría de funciones complejas, a la teoría de series trigonométricas, y a la geometría diferencial. Además, como ya he indicado, Riemann dedicó gran parte de sus esfuerzos, estimulado por Weber, a la física matemática, en especial a la búsqueda de una teoría unificada de los distintos fenómenos de calor, luz, magnetismo y electricidad.[18] Riemann había llegado a la universidad para estudiar teología, aunque finalmente consiguió el permiso paterno para orientarse a la matemática, si bien desde entonces le acompañó un gran interés por la filosofía. Sus trabajos son difíciles y contienen muchas veces pasos que sólo estaban justificados intuitivamente. Su obra matemática se orienta hacia planteamientos abstractos prefigurados por el propio Dirichlet, pero que Riemann lleva genialmente hacia delante. Las nuevas nociones abstractas que introdujo, como las 'superficies de Riemann' en teoría de funciones complejas, y las 'variedades' de la geometría diferencial, constituyen el modelo al que Dedekind refirió siempre su introducción de nuevos conceptos algebraicos (cuerpo, anillo, módulo, ideal).

Al parecer, Dedekind asistió a todos los cursos impartidos por Riemann entre 1854 y 1858, en los que éste se ocupó de ecuaciones diferenciales parciales, de integral definida, y de funciones de variable compleja, especialmente funciones elípticas y abelianas. En noviembre de 1856, en un momento en que cree que no va a poder dar clase por falta de oyentes, escribe Dedekind:

> Pero no por eso va a pasar el invierno sin provecho para mí; veo mucho a Dirichlet, que siempre me da nuevas muestras de buena voluntad e interés, me da lecciones privadas grandes y pequeñas, y tiene siempre presente animarme a continuar la actividad, cosa que apenas es necesaria. [...] Además trato mucho a mi excelente colega Riemann, que sin duda es tras o incluso junto a Dirichlet el más profundo matemático vivo, y pronto será reconocido como tal, si su modestia le permite publicar algunas cosas que, ciertamente, de momento sólo serán

[18] En una nota manuscrita citada por Heinrich Weber y Dedekind en su edición de las obras de Riemann, éste afirma, tras referirse a sus trabajos sobre funciones trascendentes y sobre ecuaciones diferenciales parciales, que su "trabajo principal concierne a una nueva concepción de las conocidas leyes naturales —expresión de las mismas mediante otros conceptos fundamentales—" (*Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass* (Leipzig: Teubner, 1876), 475). Esto da idea de la importancia de la física matemática en su pensamiento.

comprensibles a unos pocos. La relación con ambos es inestimable y es de esperar que acabe trayendo sus frutos.[19]

Dedekind se encargó de saldar con creces la deuda contraída con sus maestros, y con esto indico otro rasgo de su actividad que fue resaltado y valorado una y otra vez por sus contemporáneos. Durante los años 60 sobre todo, se encarga de editar importantes escritos de los citados matemáticos: como he dicho, colabora con comentarios en la edición de las obras de Gauss, y de Dirichlet recibe el encargo póstumo de publicar un artículo sobre hidrodinámica (1861), y luego reelabora completamente las *Lecciones sobre teoría de números*, contribuyendo decisivamente a la difusión de los nuevos resultados.[20] En 1867 edita los dos trabajos de habilitación de Riemann, sobre series trigonométricas y sobre geometría diferencial, que tendrán un efecto inmediato en la investigación del momento, y dedica grandes esfuerzos a la edición de sus obras completas, que sólo gracias a la ayuda de H. Weber llegará a culminar. Con estos trabajos realizó un gran servicio a la comunidad matemática, pero quizá escaso servicio a sí mismo: las ofertas de plazas universitarias se retrasaron porque Dedekind no había publicado ninguna investigación original importante, y de hecho transcurren veinte años entre su doctorado y la aparición de la teoría de ideales (1871), su primer trabajo importante a la vez que su obra maestra.

Con lo anterior queda delineada la imagen del ambiente científico en el que Dedekind se encontró durante sus últimos años en Göttingen, un ambiente del que recibiría los estímulos más importantes para su obra posterior. En efecto, durante los años siguientes dio clase en los Politécnicos de Zürich y Braunschweig, lo que lo mantuvo alejado de los centros matemáticos importantes. Tras su etapa de Göttingen termina el contacto diario con otros investigadores o con estudiantes avanzados, lo que equivale a decir que terminan los estímulos para la investigación, cosa de la que Dedekind se resintió sin duda. A partir de los años 70, cuando su fama como teórico de números algebraicos estuvo ya asegurada, las visitas esporádicas de otros matemáticos y las interesantes correspondencias que sostuvo vinieron a paliar un poco esa situación de aislamiento que Dedekind eligió conscientemente. Entre sus corresponsales podemos destacar a Heinrich Weber (1842-1913), amigo íntimo, colaborador en la edición de las obras de Riemann y en un trabajo fundamental sobre teoría de funciones algebraicas de una variable, y autor de un manual de álgebra que contribuyó decisivamente a que los planteamientos

[19] W. Scharlau, *Richard Dedekind 1831/1981* (Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1981), 37. Es interesante advertir que en las cartas de esta época Dedekind ofrece una imagen de Riemann algo distinta de la que se ha transmitido, como un hombre con problemas psicológicos graves; cf. Scharlau, o.c.

[20] Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4ª ed. (New York: Chelsea, 1968). Su reconocimiento ante Dirichlet fue tan grande que hizo editar su obra maestra, la teoría de ideales, siempre como un suplemento a estas lecciones. También es digno de mención que durante los años 60 preparó una edición de las lecciones sobre potencial, que no llegó a editar (posiblemente debido a la muerte de Riemann, quien decidió que sus manuscritos pasaran a manos de Dedekind).

de Dedekind se extendieran; Georg Frobenius (1849-1917), con quien sostuvo una importante correspondencia sobre álgebra, estimulándole en la concepción de la teoría de caracteres de grupos;[21] y Georg Cantor (1845-1918), con quien discutió problemas de teoría de conjuntos, como luego veremos. Así, aunque Dedekind fue un matemático sin discípulos, su influencia indirecta quedó asegurada a través de sus escritos y de esos contactos.

3. La aparición del planteamiento conjuntista en las investigaciones algebraicas de Dedekind.

Ya he aludido al hecho de que las teorías que Dedekind propuso acerca de la fundamentación del sistema numérico se basan en la teoría de conjuntos; casi parece más correcto leer *¿Qué son y para qué sirven los números?* (1888) como un libro sobre teoría de conjuntos, que como un libro acerca de los números naturales. Pero la formación de un planteamiento conjuntista de la matemática es en su caso algo muy anterior a la aparición de cualquiera de estos escritos. El conocimiento de este hecho sería difícil si en los últimos años no se hubiera publicado una larga serie de manuscritos que han venido a dar una nueva imagen de la actividad de Dedekind en los años 'oscuros', desde mediados de 1850 a 1871. De todos modos, una indicación clara de ese hecho es que en 1871, un año antes de la aparición de *Continuidad y números irracionales*, Dedekind propuso un tratamiento conjuntista-estructural de la teoría de números algebraicos, indicando que ese planteamiento era también el correcto en álgebra.[22] Con esto se separaba radicalmente de la práctica establecida en su tiempo, e introducía un giro que puede denominarse revolucionario. En estas investigaciones, los conjuntos se conviertían ya en los objetos centrales de la teoría, y aparecían las diversas relaciones y operaciones que Dedekind presentó en su libro de 1888 desde el punto de vista de la teoría de conjuntos abstracta.

Gracias a nuestro buen conocimiento de los manuscritos, es posible seguir el desarrollo del planteamiento conjuntista en la obra algebraica de Dedekind. Con esto se llega a un resultado sorprendente: el enfoque conjuntista estaba ya básicamente claro a finales de los años 1850, de modo

---

[21] Cf. Th. Hawkins, 'New light on Frobenius' creation of the theory of group characters', *Archive for History of exact Sciences*, **12** (1974), 217-243.

[22] Un número real o complejo se denomina 'algebraico' cuando es la raíz de algún polinomio $p(x) = x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$ con coeficientes a_i racionales (esto es, cuando satisface la ecuación $p(x)=0$). Los números reales que no son raíces de ningún polinomio, como por ejemplo π y e, se denominan 'trascendentes'. Además, se llama 'entero algebraico' a todo número que es raíz de un polinomio $p(x)$ con coeficientes a_i enteros. La teoría de números algebraicos se enfrentó al problema de que los enteros algebraicos no responden a la ley de factorización única en factores primos, que es típica de los números naturales o enteros (racionales) y constituye el fundamento de la teoría de números, conocido ya por los griegos. Para restablecer esa ley se recurrió a la introducción de 'factores ideales', siguiendo una idea de Kummer. Dedekind y Kronecker fueron los primeros en obtener una teoría satisfactoria de la factorización en cualquier conjunto de enteros algebraicos.

que puede decirse que el desarrollo de ese planteamiento fue obra de toda una vida.

En una carta de 1856 dirigida a Kummer, Dirichlet mencionaba que "Dedekind [..] se ha enfrascado totalmente en Galois y Abel, y por tanto camina en las huellas de nuestro amigo Kronecker."[23] Resultado de estas investigaciones fueron los cursos impartidos por Dedekind en los semestres de invierno de 1856/57 y 1857/58, que tenían por objeto los siguientes temas: álgebra superior, ciclotomía[24] y teoría de Galois. La parte más notable de estas lecciones es sin duda la dedicada a la teoría de Galois, obra genial del trágicamente desaparecido Evariste Galois (1811-1832), que permitía analizar desde un punto de vista muy superior el antiguo problema de la resolución de ecuaciones algebraicas mediante radicales. Se trataba de la primera vez que esta teoría era objeto de un curso universitario, pero lo más notable es que Dedekind analizaba independientemente los fundamentos de teoría de grupos necesarios para la misma, concibiendo la teoría de grupos en sentido abstracto. Además veía ya con certeza la importancia de tener en cuenta en cada momento la referencia a un cuerpo base; la interrelación entre cuerpos y grupos, que constituye el núcleo de la teoría de Galois, desde un punto de vista moderno, quedaba expuesta claramente en dichas lecciones.

Especialmente interesante es que Dedekind presentara un planteamiento abstracto de la noción de grupo; para entender lo que esto quiere decir, vale la pena citar un fragmento de lo que probablemente constituye parte del texto del curso 1857/58. Tras demostrar dos teoremas para el producto de sustituciones,

I. $(\theta\theta')\theta'' = \theta(\theta'\theta'')$ y

II. De dos cualesquiera de las ecuaciones $\varphi=\theta$, $\varphi'=\theta'$, $\varphi\varphi'=\theta\theta'$, se sigue la tercera,

Dedekind escribe lo siguiente:

> Las investigaciones que siguen a continuación se basan exclusivamente en los dos teoremas fundamentales que hemos demostrado, y en el hecho de que el número de sustituciones es finito: por tanto, los resultados de las mismas valdrán exactamente igual para un *dominio* de número finito de *elementos, cosas, conceptos* θ, θ', θ''..., que admitan a partir de θ, θ' una composición $\theta\theta'$ *definida del modo que sea*, de tal manera que $\theta\theta'$ sea de nuevo un miembro de dicho dominio, y que ese tipo de composición obedezca las leyes que se expresan en ambos teoremas fundamentales. En muchas partes de la matemática, pero especialmente en la teoría de números y el álgebra, se encuentran continuamente ejemplos de esta teoría; los mismos métodos de demostración valen aquí como allí.[25]

---

[23] K.-R. Biermann, 'Zu Dirichlets geplantem Nachruf auf Gauss', *NTM-Schriften* **8** (1971), 9-12; cita en p. 12.

[24] En ciclotomía, o teoría de la 'división del círculo', se estudian las soluciones complejas de ecuaciones de la forma $x^{\mu} = 1$; si $\mu = 3$, esas soluciones nos dan los puntos del plano complejo que dividen al círculo de radio unidad en 3 partes, y así sucesivamente, de donde viene el nombre. Semejantes números complejos engendran los llamados cuerpos ciclotómicos. De esta tema, estudiado ya por Gauss, vinieron los principales estímulos para la teoría de números algebraicos, y en particular para las investigaciones de Kummer.

[25] R. Dedekind, 'Eine Vorlesung über Algebra', en W. Scharlau, o.c., 59-100; la cita es de la p. 63

Luego introduce la noción de subgrupo normal, considera la partición del grupo por un subgrupo normal, demuestra que la ley de composición inducida en la partición satisface las condiciones I. y II., y escribe:

> Una vez que hemos probado esta coincidencia con las condiciones fundamentales, se sigue también (cf. el final del art. 2 [el texto que acabamos de citar]) que todos los resultados anteriores pueden ser transferidos mutatis mutandis a nuestro dominio finito de los *h* complejos K, K_1, ..., K_{h-1}; también aquí podremos hablar otra vez de potencias y de grupos de estos complejos, y encontrar las mismas leyes que arriba.[26]

El hecho de que Dedekind ofrezca semejante visión ya en los años 1850 resulta casi desconcertante, ya que la comunidad matemática sólo se enfrentará a una visión abstracta de los grupos unos treinta años después. Como veremos, ese hecho parece tener que ver con la posición filosófica de Dedekind frente a la matemática, que le condujo al logicismo.

Como ya he dicho, otro aspecto fundamental del trabajo es que Dedekind se da cuenta de que la noción de cuerpo es esencial para la teoría de Galois: Como escribe Scharlau,

> Su objetivo fundamental era dar a la teoría de Galois el necesario fundamento de teoría de cuerpos, de modo que las cuestiones de teoría de cuerpos se sitúan en el primer plano de sus investigaciones, y las cuestiones propiamente de teoría de Galois (p.e. criterios de solubilidad) pasan claramente a segundo término. Como dato más importante para la historiografía de la matemática del siglo XIX merece la pena destacar que, contra las opiniones hasta ahora habituales, Dedekind profundizó en la fundamentación de la teoría de cuerpos antes y sobre todo independientemente de la teoría de números algebraicos.[27]

De hecho, el haberse familiarizado con la noción de cuerpo gracias a la teoría de Galois le permitió luego conseguir importantes avances en teoría de números algebraicos. El más importante fue quizá lograr una idea satisfactoria de cómo debe concebirse y definirse el anillo de enteros de un cuerpo de números algebraicos; pero no podemos desarrollar aquí este tema.[28]

Las nociones de 'dominio' y 'complejo', que Dedekind emplea con precisión técnica, responden a consideraciones conjuntistas: Dedekind considera en esta época conjuntos de sustituciones, de números algebraicos, o como veremos enseguida de polinomios, como objetos matemáticos de pleno

---

(subrayado muestro). Sobre este tema cf. Scharlau, 'Erläuterungen zu Dedekinds Manuskript über Algebra', pags. 101-108 del mismo libro; y W. Purkert, 'Ein Manuskript Dedekinds über Galois-Theorie', *NTM-Schriften*, **13** (1977) 2, 1-16.

[26] o.c., 68.

[27] W. Scharlau, 'Unveröffentliche algebraische Arbeiten Richard Dedekinds aus seiner Göttinger Zeit 1855-1858', *Archive for History of Exact Sciences*, **27** (1982), 336.

[28] La manera formal en que Kummer, Dirichlet, Eisenstein, etc. definían ese concepto era errónea, y hacía imposible una teoría general de la factorización. Cf. el magnífico trabajo de H. Edwards, 'The Genesis of Ideal Theory', *Archive for History of Exact Sciences* **23** (1980), 321-378, y también su 'Dedekind's invention of ideals', *Bulletin of the London Mathematical Society* **15** (1983) 1, 8-17.

derecho, aunque por supuesto no puede hablarse aquí de una teoría de conjuntos. El hecho de que Dedekind trabaje con particiones de grupos, leyes de composición inducidas sobre las clases, etc. supone que considera los conjuntos como objetos sometidos a operaciones matemáticas análogas a las tradicionales, con lo que se aproxima al planteamiento estructural y abstracto típico del álgebra del siglo XX.

Esta impresión queda reforzada por otro trabajo de la misma época, el 'Esbozo de una teoría de las congruencias superiores respecto a un módulo real primo', escrito en 1856 y publicado al año siguiente. Creo que no es necesario conocer el auténtico contenido del escrito para darse cuenta de la importancia de declaraciones como la siguiente para la formación de una mentalidad conjuntista:

> Los teoremas precedentes corresponden exactamente a los de divisibilidad de números, en el sentido de que todo el sistema de las infinitas funciones de una variable congruentes entre sí módulo *p* se comporta aquí como un solo número concreto en teoría de números, pues cada función de tal sistema sustituye completamente a cualquier otra del mismo en cualquier respecto; una función tal es el representante de toda la clase; cada clase tiene un grado determinado, unos ciertos divisores, etc., y todas estas características corresponden de igual modo a cada miembro particular de la clase. El sistema de las infinitas clases incongruentes –infinitas, pues el grado puede crecer ilimitadamente– corresponde a la serie de los números enteros en teoría de números. A la congruencia de números corresponde aquí la congruencia de clases de funciones respecto a un módulo doble, [...][29]

Lo importante de este texto es que en él vemos cómo Dedekind maneja clases de equivalencia como objetos sometidos a operaciones análogas a las de la aritmética ordinaria. Más aún, Dedekind resalta el hecho de cada una de esas clases contiene infinitos elementos, con lo que deja claro que no tiene ningún reparo 'filosófico' que hacer a la aparición del infinito actual en matemática. La modernidad de estas ideas es sorprendente, y creo que con lo dicho resulta indudable que Dedekind estaba ya en el camino del conjuntismo mucho antes de lo que habitualmente se opina.

Todas las operaciones conjuntistas que Dedekind introduce en su libro de 1888 habían aparecido ya en su obra algebraica, si bien no expuestas de modo abstracto, sino naturalmente sometidas a la restricción de que la estructura algebraica se conserve. Así, vemos aparecer continuamente subgrupos, subcuerpos, subideales, etc., es decir, la relación de inclusión; así como grupos, cuerpos, etc. engendrados por la unión de dos grupos, cuerpos, etc.; y el hecho de que la intersección de dos grupos, etc. es de nuevo un grupo, etc. Y en efecto, en *¿Qué son y para qué sirven los números?* aparecen sólo la relación de inclusión y las operaciones de unión e intersección, echándose en falta especialmente operaciones más fuertes que Cantor empleará, como el producto cartesiano.

Pero, valga la paradoja, la teoría conjuntista de Dedekind no es sólo una teoría de conjuntos. La introducción al libro de 1888 ni siquiera menciona la noción de conjunto: todas las tintas se cargan en la noción de aplicación, que de hecho constituye uno de los rasgos más claramente diferenciadores de la

---

[29] 'Abriss einer Theorie der höheren Kongruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus', *Gesammelte mathematische Werke* (New York: Chelsea, 1969), vol. I, 47.

teoría de Dedekind frente a la de Cantor, y el pilar sobre el que se construye toda la teoría del libro. Que no mencione los conjuntos resulta comprensible, ya que trabajaba con ellos desde 30 años antes, y dado que Cantor había hecho ya suficiente por conseguirle 'carta de ciudadanía matemática' durante los años 1874-83. Pero ¿qué puede decirse de la historia de la noción de aplicación en la matemática de Dedekind? Ni más ni menos que es aproximadamente coetánea de la de conjunto.

Juzgue el lector por sí mismo; el manuscrito sobre teoría de Galois publicado por Scharlau comienza así:

> **Artículo 1**
> *Definición*. Por *sustitución* se entiende en general todo proceso mediante el cual ciertos elementos *a,b,c...* se transforman en otros *a',b',c'...*, o son reemplazados por éstos; en lo que sigue consideramos sólo las sustituciones en las que el complejo de los elementos reemplazantes *a',b',c'* es idéntico al de los reemplazados *a,b,c*.[30]

La terminología puede resultar aquí confundente. Hoy entendemos 'sustitución' justamente en el sentido restringido que señala Dedekind, y no en el general de su definición; asociamos esa idea a la de permutación, con lo que se pierde totalmente de vista el modo en que Dedekind la está planteando. Si queremos buscar una palabra actual que se corresponda a esa noción general, no nos queda más remedio que utilizar 'aplicación'.[31] Esto queda plenamente confirmado por otro texto de Dedekind escrito unos 20 años después, sin ninguna intención de establecer la antigüedad de su noción de aplicación. El texto es interesante además porque da pie al primer anuncio público de *¿Qué son y para qué sirven los números?*, y dice así:

> Sucede muy frecuentemente en la matemática y en otras ciencias que, cuando se encuentra un sistema Ω de cosas o elementos ω, cada elemento determinado ω es reemplazado por un determinado elemento ω' que se le hace corresponder de acuerdo con una cierta ley; se acostumbra a denominar un acto semejante sustitución, y se dice que mediante esta sustitución el elemento ω se transforma en el elemento ω', e igualmente el sistema Ω se transforma en el sistema Ω' de los elementos ω'. La terminología resulta algo más cómoda si, como queremos hacer nosotros, se concibe esta sustitución como una aplicación del sistema Ω, y de acuerdo con ello se llama a ω' la imagen de ω, e igualmente a Ω' la imagen de Ω. [Nota:] Sobre esta facultad mental de comparar una cosa ω con una cosa ω', o relacionar ω con ω', o hacer corresponder a ω ω', sin la cual no es posible en absoluto pensar, descansa también, como intentaré demostrar en otro lugar, la ciencia entera de los números.[32]

---

[30] o.c., 60.

[31] De hecho, Dedekind se tomó las mismas libertades con la palabra 'permutación' que con 'sustitución': en la 3ª y 4ª edición (1879 y 1894 respectivamente) de las *Vorlesungen über Zahlentheorie* llama permutación a toda aplicación de un cuerpo que conserva su estructura (4ª ed., o.c., 457).

[32] *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 3ª ed. (Braunschweig: Vieweg, 1879), 470. Digamos de paso que la terminología sólo se hace más cómodo en alemán, donde 'aplicación' se dice 'Abbildung', que viene a significar algo parecido a 'representación', en el sentido en que un cuadro puede representar a un objeto. Nuestro uso lingüístico sigue aquí al francés, lo que no es la mejor elección. Por este motivo y por la conexión entre el término y la filosofía de la matemática de Dedekind, nuestra traducción empleará

Como última corroboración de este hecho, vale la pena mencionar que en un fragmento titulado 'De los estudios de grupos', datado por el propio Dedekind en los años 1855-58, aparece un apartado sobre *Equivalencia de grupos*. En él Dedekind considera una aplicación entre los objetos de un grupo M y los de un complejo (conjunto) M', tal que a cada producto de elementos de M corresponda el producto de sus imágenes. Demuestra que M' es un grupo, y por lo que sigue queda claro que está considerando la posibilidad de que la aplicación sea no sólo un isomorfismo, sino quizá un homomorfismo: introduce la noción del núcleo N del homomorfismo, y muestra cómo la partición M/N da lugar a un isomorfismo —o como dice Dedekind, una 'equivalencia'— entre el grupo cociente M/N y y la imagen M'. Todo esto confirma el hecho de que ya a finales de los años 1850, Dedekind conoce la noción de aplicación, para la que utiliza el término 'sustitución', noción que no está restringida a biyecciones y ni siquiera a inyecciones (porque un homomorfismo es una aplicación no inyectiva). En sus estudios algebraicos, como es natural, Dedekind analiza sólo morfismos, aplicaciones que preservan estructuras.

Todas esas nociones conjuntistas aparecen de modo especialmente claro en la primera versión de la teoría de ideales, presentada en la 2ª edición de las *Lecciones sobre teoría de números* (1871). Nada más empezar, el párrafo donde se introduce la noción de cuerpo basta —salvado el problema de la diferente terminología— para atestiguar la claridad con que Dedekind maneja las operaciones conjuntistas y las aplicaciones.[33] Pero de hecho la teoría de conjuntos tiene un papel mucho más esencial en la teoría de ideales: la versión dada por Dedekind al problema de la factorización ideal se aleja del enfoque habitual en aquel momento, en términos de números, para plantear todo el asunto en términos de conjuntos. Un 'ideal' es para Dedekind un conjunto de números algebraicos que tiene determinadas propiedades, y de lo que se trata es de definir una 'multiplicación' de ideales y probar que todo ideal es descomponible de manera única en un 'producto' de 'ideales primos'. Una vez más, tenemos que abandonar este tema, cuya complejidad es excesiva para tratarlo aquí.

4. La construcción del sistema numérico.

Al tiempo que comenzaba sus investigaciones algebraicas, Dedekind seguía cultivando su interés por la aritmética, surgido ya con la lectura de las *Disquisitiones* de Gauss a finales de los años 1840. Entre los años 1855 y 1858 asistió a las lecciones de Dirichlet sobre ese tema, base del material que le sirvió luego para redactar las *Lecciones sobre teoría de números*. A la vez, su interés por las cuestiones de fundamentación le llevaba a plantearse el problema de encontrar un desarrollo riguroso de toda la aritmética, desde los números naturales a los complejos.

---

sistemáticamente la palabra 'representación'.

[33] Cf. *Werke*, vol. III, 224; en el tercer vólumen de *Werke* se recogen las partes más interesantes de la 2ª y 3ª edición (primera y segunda versiones de la teoría de ideales) que son diferentes de la versión definitiva.

Este problema surge ya en su lección de habilitación, leída en junio de 1854 y por tanto antes de la presencia de Dirichlet en Göttingen. En esta lección, titulada 'Sobre la introducción de nuevas funciones en la matemática', expondrá algunas ideas a las que continuaría adhiriéndose toda la vida. El tema general es una reflexión sobre el desarrollo histórico de la matemática y sobre la manera en que la introducción de nuevas nociones ha permitido avanzar a esa ciencia. Dedekind defiende la idea de que el progreso de la matemática depende de la *creación* de nuevos objetos y nuevas nociones, pese a lo cual las extensiones de las definiciones matemáticas tienen la peculiaridad de que

> no dejan lugar al arbitrio, sino que se siguen con necesidad absoluta de las [definiciones] previamente limitadas cuando se les aplica el principio fundamental de que las leyes que resultan de las definiciones iniciales y son características de los conceptos determinados por ellas deben considerarse *válidas en general*.[34]

De este modo, el énfasis en que los objetos y los conceptos de la matemática son creaciones humanas, que siempre fue característico de su punto de vista, se liga ya con la exigencia de rigor total. Esto se aplica en particular a la extensión de las operaciones aritméticas a nuevos tipos de números, y a propósito de este tema Dedekind nos ofrece un resumen de su concepción del desarrollo riguroso de la aritmética:

> La aritmética elemental surge de la construcción de los números ordinales y cardinales; el paso sucesivo de un término de la serie de los números enteros absolutos al inmediatamente siguiente es la primera y más sencilla operación de la aritmética; sobre ella se fundan todas las demás. Si se reúnen varias realizaciones de esa operación elemental en un único acto, se alcanza el concepto de adición. Partiendo de éste se construye de forma similar el de multiplicación, y a partir de este el de potenciación. Pero las definiciones así obtenidas de esas operaciones fundamentales no bastan al desarrollo posterior de la aritmética, porque los números con los que nos permiten operar están limitados a un dominio muy pequeño. El desarrollo de la aritmética, o sea, regenerar cada vez mediante cada una de esas operaciones todo el dominio numérico disponible, o con otras palabras: el logro de la posibilidad de ejecutar ilimitadamente las operaciones indirectas o inversas –sustracción, división, etc.–, conduce a la necesidad de crear nuevas clases de números porque la serie original de los números enteros absolutos no puede en absoluto satisfacer esa exigencia. Así se obtienen los números negativos, quebrados, irracionales, y finalmente también los llamados números imaginarios. Una vez que el dominio numérico se ha ampliado de esa manera, se hace necesario definir de nuevo las operaciones, cuyo efecto sólo había sido determinado hasta aquí para la serie de los enteros absolutos, de modo que puedan ser aplicadas también a los números recien creados. Y estas extensiones de las definiciones no resultan arbitrarias tan pronto como se sigue el principio general antes expuesto, o sea, declarar válidas en general las leyes a las que se ajustaban las operaciones en su acepción limitada y a partir de ahí, inversamente, derivar el significado de las operaciones para los nuevos dominios numéricos.[35]

El tema central es aquí la extensión rigurosa de las operaciones, mientras que la 'creación' de nuevos

---

[34] 'Über die Einführung neuer Functionen in der Mathematik', *Werke*, vol. III, 428-438; la cita es de la pag. 430.

[35] ibid. 430-431.

números no parece plantear ningún problema; los escritos posteriores invierten este orden, de manera que la construcción de los números pasa a ser el centro de las consideraciones. La ausencia de planteamientos constructivos en la lección de habilitación coincide con la ausencia de cualquier mención de la idea de conjunto. Esto llama mucho la atención teniendo en cuenta que dos años después comienza el uso sistemático de esa noción en las investigaciones algebraicas de Dedekind.

En la lección de habilitación, Dedekind parece considerar la introducción de los irracionales y de los complejos como algo esencialmente problemático:

> [...] nos vemos así forzados a crear los números irracionales, con los que aparece igualmente la noción de límite, y finalmente los números imaginarios. Estos progresos son tan inmensos que es difícil decidir cuál de los distintos caminos que se abren aquí se debe seguir. [...] Como se sabe, hasta el momento no existe, o al menos todavía no se ha publicado, ninguna teoría irreprochable de los números imaginarios, por no hablar de los números recientemente ideados por Hamilton.[36]

El comentario sobre los números imaginarios me parece muy interesante porque Dedekind no volverá nunca al tema ni escribirá una línea sobre la fundamentación de dichos números. Ahora bien, a finales de 1857 Dedekind lee por vez primera las *Lectures on Quaternions* (Dublin, 1853) de Hamilton, y en el prefacio de esta obra se encuentra con la definición constructiva de los complejos por medio de pares de números reales. Sin duda, este enfoque le pareció totalmente satisfactorio y dirigió sus pasos hacia la construcción de los demás tipos de números; de ahí que nunca necesitara volver al tema de los complejos, resuelto por Hamilton.

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) fue el matemático británico más notable en la primera mitad del XIX. Aparte de desarrollar una carrera fulgurante, realizó importantes contribuciones a la mecánica y a la óptica, y desarrolló el primer ejemplo de cuerpo no conmutativo (los cuaterniones), realizando con ello el ideal perseguido por muchos matemáticos de encontrar un análogo a los complejos susceptible de interpretación geométrica en el espacio. Asimismo, Hamilton se preocupó por la fundamentación del álgebra, que para él abarcaba la aritmética y el análisis, equivaliendo así a lo que Dedekind llamaba 'aritmética'. En este sentido, en 1837 publicó su famoso artículo 'Teoría de Funciones Conjugadas, o Pares Algebraicos; con un Ensayo preliminar y elemental sobre el Algebra como Ciencia del Tiempo Puro'. El contenido de este ensayo se resume en el prefacio antes citado, que probablemente fue la única fuente por la que Dedekind conoció estas ideas.

Hamilton, fuertemente influído por concepciones especulativas y por la filosofía de Kant, proponía la intuición del tiempo como fuente del álgebra, de forma análoga a como la intuición del espacio se consideraba fuente de la geometría. Detrás de esta extraña propuesta estaba la convicción de que el álgebra estudia a fin de cuentas el orden de una progresión continua y unidimensional (el orden de los números reales), cosa que puede parecer algo más sensata. De hecho, Hamilton tuvo ideas

[36] ibid. 434. Dedekind se refiere obviamente a los cuaterniones.

modernas e interesantes, y sólo su afición por dar versiones especulativas y casi metafísicas de esas ideas hace que nos resulten extrañas; su ensayo es una contribución de primer rango a la rigorización de la teoría de los números reales. En cualquier caso, está claro que Dedekind no se sintió convencido por la propuesta de basar la noción de número real en la intuición temporal, por lo que no entraremos en detalles al respecto. Al comienzo del primer prólogo a *¿Qué son y para qué sirven los números?* se encuentra un texto con una crítica clara ─aunque implícita─ al enfoque de Hamilton. El caso es que Hamilton proseguía presentando la teoría de los complejos como pares:

> [...] pensé que sin salir de la misma *clase general* de interpretaciones, y especialmente sin dejar de referirlo todo a la noción de *tiempo*, expuesta y mantenida como antes, podríamos concebir y comparar *pares de momentos*; y de este modo derivar una concepción de *pares de pasos* (en el tiempo) sobre la cual se podría fundar una teoría de *pares de números*, en la que no se plantearían tales dificultades [inexistencia de raices cuadradas de números negativos].[37]

Por este camino, y simplificando, Hamilton reemplazaba los números $a+bi$ (donde la dificultad reside en interpretar el significado de i) por pares de números (a,b) donde a y b son números reales. Los números reales habituales quedaban definidos como pares de la forma $(a,0)$, y dos pares eran iguales, $(a,b)=(c,d)$, si y sólo si $a=c$, $b=d$. Las operaciones sobre pares podían definirse convenientemente por medio de las operaciones sobre números reales:

$$(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d),$$
$$(a,b)(c,d) = (ac-bd,bc+ad).$$

De esta manera, la misteriosa unidad imaginaria podía definirse como $i=(0,1)$, ya que según la definición del producto $(0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$. Todas las operaciones, tanto directas como inversas, daban como resultado un par.

Era fácil ver que el mismo método podía aplicarse para construir los números enteros sobre la base de los naturales, y los racionales sobre la base de los enteros. Así, entre los manuscritos de Dedekind encontramos tres páginas que se ocupan brevemente de este tema, y que podrían incluso proceder de finales de los años 1850.[38] Si a, b designan ahora números naturales, podemos definir los enteros como pares (a,b) tales que $(a,b) = (a',b')$ si y sólo si $a+b' = b+a'$; la definición de la suma es

[37] Hamilton, *The mathematical Papers*, vol. 3 (Cambridge: University Press, 1967), 121. La teoría de números reales procedía considerando primero 'momentos' temporales, luego 'pasos' o 'transiciones' de un momento cualquiera a otro, y definía finalmente los números como razones entre pasos temporales; vemos que a fin de cuentas se trataba de una nueva versión de la definición tradicional del número como proporción. En el texto citado, Hamilton propone el mismo proceso para los pares. Quizá vale la pena indicar que por mucho que los momentos temporales y sus relaciones puedan considerarse intuitivos, la introducción de pasos, razones y pares se sale de ese marco y entra en un terreno abstracto. Es razonable pensar que Dedekind fue consciente de este problema, y buscó para la teoría de pares ─es decir, para el método constructivo─ un fundamento más apropiado: la teoría de conjuntos, que él consideraba parte de la lógica.

[38] Los manuscritos se encuentra en el *Handschriftenabteilung* de la *Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek* de Göttingen. El mencionado aquí lleva la referencia Cod. Ms. Dedekind, III.2.

como antes, y la sustracción arroja siempre como resultado un par de números naturales. En el manuscrito, Dedekind demuestra la transitividad de la relación de equivalencia (igualdad) de pares, demuestra que la suma arroja un resultado único (salvo equivalencia), e indica los teoremas de conmutatividad y asociatividad. Luego define la sustracción, demuestra su unicidad salvo equivalencia, y pasa a definir el cero y los numeros negativos probando los teoremas necesarios para justificar esas definiciones. Luego se ocupa de los racionales: si a y b designan enteros, definimos los racionales como pares (a,b) tales que $(a,b) = (a',b')$ si y sólo si $ab' = ba'$; el resto se desarrollaría de forma análoga al caso de los enteros.

En esa introducción de los enteros y racionales mediante pares hay sin embargo un detalle que resultaba insatisfactorio para Dedekind: mientras que a cada número imaginario le corresponde un y sólo un par de números reales, a cada entero le corresponden infinitos pares de números naturales, y lo análogo sucede con los racionales. Por este motivo, Dedekind se ve impulsado a complicar la teoría: los enteros no se definirán simplemente como pares, sino como clases de equivalencia de pares de números naturales, y análogamente se definirán los racionales. Este modo de desarrollar la cuestión es el que encontramos en el manuscrito que traduzco, titulado 'La extensión del concepto de número sobre la base de la serie de los números naturales', que es sin duda obra de los años 1890, y que pese a su título no llega ni siquiera a completar la teoría de los enteros.

En resumidas cuentas, todo indica que Dedekind hizo suyo el método de Hamilton, encontrando su auténtica base en el desarrollo de las ideas conjuntistas que estaba empleando en su obra algebraica. En conexión con estas ideas, Dedekind pudo también extender a todos los casos y perfeccionar el método constructivo. Pero si la introducción de los enteros y los racionales parecía una extensión bastante simple del método tal como lo empleaba Hamilton, no sucedía lo mismo con los números irracionales. Como veremos en seguida, la cuestión le ocupó intensamente durante el año 1858, según sus propias dataciones que resultan coherentes con toda la reconstrucción que estamos viendo, y en particular con el desarrollo de sus ideas algebraicas.

La complejidad de la introducción de los irracionales puede explicarse teniendo en cuenta que aquí no nos enfrentamos con una compleción algebraica (introducción de números que aseguren la realización de cierta operación) sino más bien con una compleción topológica. Se dice que un conjunto es *denso* si está ordenado de tal manera que entre dos elementos cualesquiera del mismo existe otro. El punto clave respecto a los números reales estriba en el reconocimiento de que el conjunto de los números racionales es denso pero no continuo, y el problema es completarlo de modo que obtengamos un conjunto continuo. El propio Dedekind enfatizará una y otra vez que la cuestión clave es la de la continuidad, que presupone una definición satisfactoria de esa propiedad. La definición de un conjunto continuo sobre la base del conjunto de los racionales exige además que no empleemos pares sino cortaduras, esto es, conjuntos infinitos.

Vale la pena mencionar aquí que el propio Hamilton pasaba enseguida de los pares a las triplas, y por este camino a las cuádruplas ─cuaterniones─, sugiriendo incluso la conveniencia de una teoría general de los 'systems or sets', aunque hay que tener en cuenta que los 'sets' [conjuntos] de Hamilton no son conjuntos en el sentido de Dedekind, que es el actual, sino conjuntos ordenados de *n* elementos, para un *n* finito cualquiera.[39] Pero en todo caso el paso a conjuntos infinitos no estaba tan lejos, sobre todo en el caso de Dedekind, que en la misma época estaba considerando cuerpos ─conjuntos de infinitos números─, clases infinitas de funciones, etc., sin ningún tipo de escrúpulo filosófico.

Pese a haber sido concebida ya hacia 1858, Dedekind no decidió publicar su construcción de los irracionales por medio de cortaduras hasta 14 años más tarde, porque ─como puede leerse en las cartas a Lipschitz─ consideraba que esa teoría no tenía un valor especial.

5. Continuidad y números irracionales.

En 1872 tuvo lugar la publicación de las construcciones de los números reales propuestas por los matemáticos alemanes Weierstrass, Cantor y Dedekind. El artículo de Dedekind resalta por su claridad metodológica y expositiva, que lo ha convertido en un clásico de la literatura matemática. Su teoría es además la más sistemáticamente conjuntista de las tres, cosa que resultará natural teniendo en cuenta los apartados anteriores. Por otro lado, la teoría de Cantor es la que está más cerca de la de Dedekind, y en otros puntos de su artículo avanzaba claramente ─de manera independiente─ hacia la formulación de nociones conjuntistas; éste fue seguramente el motivo por el que produjo una gran impresión en nuestro autor. El tomar como base el dominio de los números racionales con su aritmética, la construcción de los reales por medio de ciertos objetos compuestos de infinitos elementos, la comparación de la geometría con la aritmética, la afirmación de que la continuidad del espacio es indemostrable y ha de ser postulada; todos éstos son puntos de estrecho contacto entre ambas exposiciones.

5.1. Como acabo de decir, el objeto de las teorías de Dedekind, Weierstrass y Cantor era obtener una definición rigurosa y general de los números irracionales por construcción, empleando únicamente los números racionales y sus operaciones. La convicción más o menos vaga de que algo de este tipo era posible venía de bastante atrás; Dedekind dice que es "evidente, y nada nuevo, que todo teorema del álgebra y del análisis superior, por alejado que esté, puede expresarse como un teorema sobre números naturales, afirmación que también he oído repetidas veces en boca de Dirichlet." Esto muestra que Dedekind discutió con Dirichlet los problemas de fundamentación que tanto le interesaban, y que Dirichlet puede considerarse predecesor del tipo de enfoque que comentamos. Otro predecesor importante en Alemania fue Martin Ohm, hermano del físico y profesor en la universidad de Berlín. De este modo, el ideal de la reducción de los irracionales a los racionales estaba ampliamente difundido,

[39] Cf. 'Preface to Lectures on Quaternions', 126 y 132.

cosa que explica la concordancia de Weierstrass, Cantor y Dedekind en este punto. De todos modos, el método mediante el cual había de realizarse la reducción no estaba claro, y no nos queda más remedio que considerar las afirmaciones de Dirichlet como algo vago. Como además se pensaba que los números racionales eran facilmente definibles sobre la base de los naturales, la construcción de los irracionales, único paso problemático, venía a resolver de un golpe el problema de la aritmética.

La teoría de Cantor ha sido considerada a menudo como una reformulación de la de Weierstrass. La figura de Karl Weierstrass (1815-1897) es bien conocida; desde su cátedra de Berlin impulsó un nuevo nivel de rigor en análisis: introdujo la noción de convergencia uniforme, mostró la no equivalencia de continuidad y diferenciabilidad (presentando un famoso ejemplo de función continua y no diferenciable en ningún punto), y en general debemos a él y sus alumnos la mayor parte de la actual fundamentación rigurosa del análisis.[40] Es llamativo el hecho de que Weierstrass denominara a los números reales 'magnitudes numéricas', cosa que nos devuelve a los temas discutidos en el apartado 1; de todas formas, trató de introducir rigor en el tratamiento de dichas 'magnitudes' por un camino muy diferente al de la teoría de proporciones.

Sin entrar en detalles, Weierstrass considera los irracionales como sumas de series compuestas por números racionales. Ahora bien, *no define* un número real como la suma de una serie de racionales, ya que esto equivaldría a presuponer que la suma de una serie tiene un sentido dado de antemano; por el contrario, Weierstrass sólo supone dada la aritmética de los racionales, y en particular el significado de una suma de *finitos* números racionales. Su solución consiste en definir los números reales como agregados de (infinitos) números racionales que satisfacen la condición de que la suma de cualquier cantidad finita de números pertenecientes al agregado es finita (i.e., existe un número racional mayor que la suma). Con esto se evita el error antes indicado, y se está ahora ─y sólo ahora─ en condiciones de demostrar que toda serie convergente tiene suma.[41]

Georg Cantor (1845-1918) llegó a Berlin en 1863, siendo alumno de Weierstrass y Kronecker.

[40] Vale la pena indicar también otra cuestión. En sus trabajos sobre series de Fourier, Dirichlet había propuesto la definición abstracta de una función como cualquier ley que a un argumento dado le asigna un valor bien determinado. Weierstrass, que mostró siempre inclinación por los enfoques constructivos, criticó esa definición abstracta como algo demasiado vago; frente a ello impulsó el estudio de las funciones analíticas, y en este terreno parece haber considerado siempre que las series de potencias dan la herramienta clave para la fundamentación (lo que parece retrotraernos a Lagrange y Ohm). Por este motivo resulta natural que su teoría de los irracionales se basara en el empleo de series. El constructivismo de Weierstrass le acerca a las posiciones de su colega y amigo Leopold Kronecker, quien sin embargo fue más radical: quería eliminar los irracionales del análisis, y criticó todas las construcciones de las que estamos hablando.

[41] Cf. G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, §9, en *Gesammelte Abhandlungen*, 184-185. Se pueden encontrar redacciones de cursos de Weierstrass en los apéndices a P. Dugac, 'Eléments d'analyse de Karl Weierstrass', *Archiv for the History of exact Sciences*, **10** (1973), 41-176.

Weierstrass explicaba en clase su construcción, que guarda con la de Cantor una estrecha relación: a toda serie corresponde una sucesión (la de sumas parciales) y a una serie sumable corresponde una sucesión que satisface la condición de Cauchy. Cantor empleó precisamente sucesiones de Cauchy, o 'sucesiones fundamentales', para la construcción de los irracionales; a la altura de 1872, incluso su terminología era la de su maestro, pues llamaba a los irracionales 'magnitudes numéricas'. De todos modos, la reformulación de Cantor sólo resulta 'natural' para un matemático cercano a la tradición conjuntista, de manera que corremos peligro de olvidar las dificultades que presentaba en la época el acceso a esa nueva mentalidad. Porque si el paso dado por Cantor no era difícil técnicamente, sí lo era conceptualmente: una sucesión no es algo del mismo tipo que sus elementos, ni da lugar a un todo homogéneo con ellos, y así se pierde la continuidad con la noción tradicional del número como magnitud, a la que Weierstrass se adhiere todavía. Cantor define los irracionales de modo abstracto, y aquí está la principal ruptura con la tradición y con Weierstrass.

Cantor publicó su teoría de los irracionales como parte de un artículo que trataba de series trigonométricas. Esto, unido a su menor interés por la fundamentación, explica que su exposición no sea ni mucho menos tan metódica como la de Dedekind. Como ya he dicho, utiliza lo que más tarde llamará 'sucesiones fundamentales':

> Si hablo de una magnitud numérica en sentido amplio, esto sucede por de pronto en el caso de que exista una serie infinita de números racionales
>
> $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \qquad (1)$$
>
> dada mediante una ley, con la característica de que la diferencia $a_{n+m}-a_n$ se hace infinitamente pequeña según n crece, cualquiera que sea el número entero positivo m, o con otras palabras, que para un ε cualquiera (racional y positivo) existe un número entero n_1 tal que $(a_{n+m}-a_n) < \varepsilon$, si $n \geq n_1$ y si m es un número entero positivo cualquiera.
>
> Esta característica de la serie (1) la expreso con las palabras: "*La serie* (1) *tiene un determinado límite b.*"[42]

De este modo, a cada sucesión fundamental se le asigna "un símbolo *b* particular", y la expresión 'tiene un límite' carece en principio de otro significado que la propiedad de (1). Cantor define la igualdad entre símbolos correspondientes a dos sucesiones, y la diferencia claramente de la identidad entre las sucesiones; en realidad se trata de una relación de equivalencia, si bien Cantor nunca dio el paso de considerar clases de equivalencia de sucesiones. Esto es llamativo porque Dedekind, con su mentalidad de algebrista, considera una y otra vez relaciones de equivalencia y clases de equivalencia ya desde finales de los años 1850. La teoría de Cantor se completa con la definición de la relación de orden y las operaciones entre los símbolos *b*, por medio de las relaciones y operaciones entre los números racionales que forman sus correspondientes sucesiones.

---

[42] 'Sobre la generalización de un teorema de la teoría de series trigonométricas', en *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (Hildesheim: Olms, 1966), 92-93. La terminología de la época no estaba muy consolidada, de manera que el término 'Reihe' [serie] se refería tanto a series como a sucesiones; sin embargo, el contexto deja claro de qué se trata en cada caso.

Como vemos, un rasgo común a Weierstrass y Cantor es que utilizan herramientas tradicionales del análisis ─series y sucesiones, respectivamente─ para la construcción de los irracionales; en esto, Dedekind presenta una novedad importante, ya que su construcción emplea simples conjuntos (cortaduras). Una cortadura no es otra cosa que una partición del conjunto **Q** de los números racionales en dos subconjuntos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ tales que todo elemento de $\mathbf{A_1}$ es menor que todo elemento de $\mathbf{A_2}$. Todo número racional determina una cortadura, pero puede demostrarse que existen (infinitas) cortaduras no determinadas por números racionales; el conjunto de todas las cortaduras es continuo, e isomorfo al de los números reales. Las sucesiones son objetos con una estructura más compleja que las cortaduras: son conjuntos ordenados, y en el caso de las sucesiones fundamentales se presuponen también ciertas propiedades topológicas. En el caso de las cortaduras, es el orden del conjunto de los racionales ─no su topología─ lo que desempeña el papel fundamental, pero sólo en la definición de las cortaduras, que por su parte no tienen más estructura interna que un conjunto cualquiera.[43] Por estos motivos, puede decirse que el enfoque de Dedekind es a la vez más abstracto y más simple que los otros dos. Como escribía Pringsheim ya en 1898,

> Precisamente porque el método que sigue Dedekind para la introducción de los irracionales no se funda en ningún algoritmo aritmético, consigue las ventajas de una gran claridad y concisión. Por las mismas razones resulta notablemente más abstracto que el de Cantor y se utiliza con menos comodidad en los cálculos.[44]

La manera en que Dedekind prescinde de las construcciones habituales del análisis para ceñirse a 'lo esencial del asunto', es totalmente característica de su estilo. Siempre pensó que la teoría debe desarrollarse de la forma más inmediata, sin preocuparse de las necesidades del cálculo, que sólo deben aparecer en su aplicación. En un artículo sobre teoría de ideales, Dedekind resumió los requisitos metodológicos a que se ajustaba su teoría del modo siguiente:

> La legitimidad o sobre todo la necesidad de tales exigencias, que deberían imponerse siempre en la introducción o la creación de nuevos elementos aritméticos, resultará aun más evidente por comparación con la introducción de los números *reales irracionales*, objeto del que me he ocupado en un escrito especial (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*; Brunswick, 1872). Admitiendo que la aritmética de los números *racionales*, cuyo conjunto [ensemble] designaremos por ***R***, esté definitivamente fundada, se trata de saber de qué manera debemos introducir los números irracionales y definir las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división ejecutadas sobre esos números. Como primera exigencia reconozco que la aritmética debe mantenerse exenta de toda mezcla de elementos extraños, y por esta razón rechazo la definición según la cual el número sería la razón entre dos magnitudes de la misma especie; por el contrario, la definición o la creación del número irracional debe estar fundada únicamente sobre fenómenos que se pueda ya constatar claramente *en el dominio **R***. En segundo lugar, se deberá exigir que todos los números reales irracionales puedan ser

[43] El hecho de que el procedimiento de Cantor se base en propiedades topológicas, y el de Dedekind en propiedades de orden, hace que sus construcciones dejen de dar resultados equivalentes cuando se realizan sobre la base de conjuntos distintos del de los racionales.

[44] A. Pringsheim, o.c., 56.

> engendrados a la vez por una definición común, y no sucesivamente como raíces de ecuaciones, como logaritmos, etc. La definición deberá, en tercer lugar, ser de tal naturaleza que permita también una definición perfectamente clara de los cálculos (adición, etc.) que habrán de realizarse sobre los nuevos números.[45]

5.2. Hoy en día, lo habitual es no recurrir a construcciones de los números reales, sino simplemente presentar un sistema de axiomas. Este enfoque resultaba seguramente imposible en la época que consideramos. En primer lugar, hay una razón de tipo psicológico, y es que había que explicar por qué los reales se llamaban 'números', y esto requería mostrar su génesis a partir de otros números más elementales. Pero había otra razón más sofisticada: el método constructivo suministraba por vez primera un modelo de conjunto continuo, en un momento en que se desconfiaba profundamente de las 'evidencias' geométricas. Antes de la existencia de modelos, la simple postulación axiomática se hubiera considerado arbitraria y poco rigurosa, y en este sentido creo que las construcciones de Weierstrass, Cantor y Dedekind fueron un requisito histórico fundamental para la aparición de ideas axiomáticas más sofisticadas, como las de Hilbert.

De todos modos, tanto la construcción axiomática del conjunto de los números reales como la de la geometría rinden tributo a Dedekind y Cantor en lo que éstos consideraron como el punto central de sus artículos: la noción de continuidad. Este tema aparece más claramente en el artículo de Dedekind, porque constituye el centro de la exposición: da una definición de continuidad, que le sirve de guía para construir los números reales, y finalmente demuestra que el conjunto de los números reales satisface su definición, de modo que es continuo. Cantor no da estos pasos y resulta menos claro, pero existe un punto de acuerdo fundamental entre él y Dedekind en sus declaraciones sobre la geometría. Ambos afirmaron que la continuidad *construíble* en aritmética no es *necesaria* en geometría, ni puede tampoco construirse, por lo que sólo puede ser objeto de *postulación*. Tras indicar el modo de adscribir un número real a cualquier punto dado de una recta, escribe Cantor:

> Pero para completar la conexión expuesta en este apartado entre el dominio de las magnitudes numéricas definidas en el § 1 y la geometría de la línea recta, ya sólo queda introducir un *axioma* que consiste simplemente en que también, a la inversa, a cada magnitud numérica le corresponde un determinado punto de la recta, cuya coordenada es igual a aquella magnitud numérica [...]
>
> Llamo *axioma* a esta proposición, porque está en su naturaleza el no ser demostrable en general.[46]

Dedekind habla del tema en forma paralela al final del § 3, donde dice que confía en que todo el mundo

[45] 'Sur la théorie des nombres entiers algébriques' (1876), en *Werke*, III, 269 nota.

[46] o.c., 97. El sentido de la palabra axioma que Cantor aclara aquí coincide con el que emplea Dedekind, y es radicalmente distinto del que usará la axiomática; axioma no es cualquier proposición en que se basa una teoría, sino ──al modo antiguo── una proposición indemostrable. En el caso de Dedekind, como veremos, la diferencia resulta fundamental en cuanto se relaciona con el logicismo.

acepte el principio de continuidad en geometría,

> porque no estoy en condiciones de ofrecer ninguna demostración de su corrección, y nadie lo está. La suposición de esta propiedad de la línea no es más que un axioma [...] Si el espacio tiene una existencia real, sin duda *no* es necesario que sea continuo [...] Y si supiéramos con certeza que el espacio es discontinuo, sin duda nada nos podría impedir, si así lo quisiéramos, que lo hiciéramos continuo en el pensamiento rellenando sus lagunas [...].

En 1888 escribirá que sólo la "construcción puramente lógica" del sistema numérico nos permite conectar nuestras ideas de espacio y tiempo con la noción de continuidad.

Con esto se completa algo así como la inversión del planteamiento tradicional del número. Antes se pensaba que la continuidad numérica venía impuesta por las características de las magnitudes, a través de la definición de número como proporción; ahora se resalta el hecho de que la continuidad numérica es construible en abstracto, y que es ella la que nos permite atribuir continuidad a cualquier dominio de magnitudes. Una vez dado el paso de definir con precisión la continuidad, resultaba ya posible demostrar con todo rigor los teoremas elementales del análisis a los que aludimos en el apartado primero, como hace Dedekind a propósito del teorema de que toda sucesión acotada de números reales tiene un límite.

El tema de la situación del principio de continuidad en geometría y aritmética nos lleva a otra cuestión fundamental para entender el planteamiento de Dedekind. En su caso, y posiblemente en el de otros matemáticos, me parece indudable que la construcción conjuntista de los números reales fue un factor decisivo para la aparición del programa logicista. La teoría de conjuntos era considerada entonces (y lo fue hasta principios de siglo, cuando las antinomias llevaron a otras conclusiones) como una simple parte de la lógica. El hecho de que por medios lógicos se pudiera construir lo que sólo podía ser postulado —o quizá probado experimentalmente— en geometría, era un fuerte argumento a favor de que la aritmética no dependía de axiomas en el sentido anterior, siendo sólo una rama de la lógica. *¿Qué son y para qué sirven los números?* comienza diciendo que "la aritmética (álgebra, análisis) es sólo una parte de la lógica".

Acerca de la relación entre la teoría de proporciones de Eudoxo y las cortaduras de Dedekind, puede decirse lo siguiente. Para empezar, la estrecha relación que algunos han visto entre ambas sólo puede establecerse cometiendo un cierto anacronismo con los griegos, un anacronismo del tipo que los matemáticos del siglo XIX —gracias a la concepción moderna del número— estaban dispuestos a cometer. Eudoxo compara dos pares de magnitudes homogéneas empleando números naturales, pero —aquí está el anacronismo— se puede reformular su método empleando números racionales; decimos que las razones $a{:}b$ y $c{:}d$ son iguales si para todo número racional r, o bien

$a{:}b > r$ si y sólo si $c{:}d > r$, o
$a{:}b = r$ si y sólo si $c{:}d = r$, o
$a{:}b < r$ si y sólo si $c{:}d < r$.

De esta manera, cada razón $a{:}b$ determina de forma unívoca un conjunto de números racionales r_1 menores que $a{:}b$, y un conjunto de números racionales r_2 mayores que $a{:}b$ (si $a{:}b = r$, el número r puede asignarse tanto al primer conjunto como al segundo, dos supuestos que Dedekind considera "inesencialmente diferentes"). Si denominamos R_1 y R_2 a cada uno de esos conjuntos, el par (R_1,R_2) constituye una cortadura en el sentido de Dedekind. De todas formas, en lo que hemos dicho hasta aquí sólo se demuestra que toda proporción dada determina una cortadura; ni se define la continuidad, ni se definen los irracionales como cortaduras, ni mucho menos se demuestra la continuidad del conjunto así definido. Esta cuestión reaparecerá en la correspondencia entre Dedekind y Lipschitz.

6. La correspondencia con Cantor.

Georg Cantor es habitualmente considerado como el creador de la teoría de conjuntos, desarrollada paulatinamente en trabajos que comenzaron a aparecer en 1874. Entretanto, Cantor y Dedekind se habían conocido casualmente en Gersau (Suiza) durante el verano de 1872, después de la aparición y el envío recíproco de sus artículos sobre los irracionales. El encuentro motivó sin duda interesantes discusiones, sobre las que desgraciadamente no tenemos ninguna noticia directa. Ahora bien, a la luz de la anterior reconstrucción de la evolución del pensamiento de Dedekind, resulta probable que la teoría de conjuntos desempeñara un papel central en las conversaciones de 1872: Dedekind habría comunicado a Cantor sus ideas, poniéndole al día de las convicciones que había ido alcanzando a lo largo de años de reflexión sobre el tema. Con todo, los intereses de ambos eran bastante distintos, casi diríamos complementarios, ya que ninguno publicó sobre los temas característicos del otro. Sin embargo, en 1873 comenzó un intercambio de correspondencia que desempeñó un importante papel en el desarrollo de las ideas de Cantor, y por este motivo es considerada como uno de los documentos más importantes que se conservan de la matemática del XIX.[47]

Las ideas expuestas por Cantor en su artículo de 1872 avanzaban notablemente en dirección a la teoría de conjuntos. Como ya he dicho, en ese artículo no se limitaba a definir los irracionales, sino que se ocupaba de una cuestión de teoría de series trigonométricas. Para ello introducía una noción que le sería muy útil en sus ulteriores investigaciones conjuntistas y que hoy es básica en la topología conjuntista. Se trata de la noción de *conjunto derivado* de un conjunto **P** de puntos (o de números reales). Se llama *punto de acumulación* de **P** a un punto tal que en todo entorno suyo existen infinitos puntos pertenecientes a **P**; Cantor define el *primer* conjunto derivado de **P**, denotado por **P'**, es el conjunto de todos los puntos de acumulación de **P**, y análogamente deriva **P''** a partir de **P'**, etc. El estudio de las características de los conjuntos derivados de **P** le permitía deducir propiedades importantes del propio **P**. Es en esta parte de su artículo, más que en su teoría de los irracionales, donde realmente encontramos ideas conjuntistas importantes.

El desarrollo de tales ideas le conduciría, en una serie de artículos publicados en la década 1874-1884, al desarrollo de toda una serie de ideas fundamentales de la teoría abstracta y topológica de

[47] E. Noether y J. Cavaillès (eds.), *Briefwechsel Cantor-Dedekind* (Paris: Hermann, 1937). Las cartas de 1899 fueron publicadas por Zermelo en su edición de las obras de Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, 443-450. La parte no matemática de la correspondencia puede encontrarse en Dugac, *Dedekind et les fondements des mathématiques*, apéndice XL, 223-262.

conjuntos. Junto a la noción de conjunto derivado, quizá la otra fuente fundamental de los nuevos planteamientos cantorianos fue el estudio de la cardinalidad de los conjuntos infinitos; este tema fue el que inauguró su correspondencia conjuntista con Dedekind en 1873.

La comparación del número de elementos de dos conjuntos puede realizarse sin necesidad de contar, simplemente estableciendo una correspondencia biunívoca entre los elementos de ambos. Así, podemos saber si en una mesa hay tantos platos como vasos sin necesidad de contarlos, simplemente observando si a cada plato corresponde un vaso. Este método es la base de la comparación de cardinales infinitos; si dos conjuntos pueden ponerse en correspondencia biunívoca decimos que *tienen el mismo cardinal* o que son *equipotentes*. Como ejemplo, basta considerar el hecho de que el conjunto de los números naturales puede ponerse en correspondencia biunívoca con subconjuntos suyos, como el de los números pares (la correspondencia es en este caso $n \longrightarrow 2n$) o el de los números primos. También podemos hacerle corresponder unívocamente conjuntos que lo contienen, como el de los números enteros, lo que se logra *reordenando* los enteros, por ejemplo del modo siguiente: 0, 1, -1, 2, -2, ..., n, $-n$, ... Estos resultados son aparentemente paradójicos, dado que esperamos que los conjuntos infinitos se comporten análogamente a los finitos; sin embargo, no sucede así, y todo conjunto infinito puede hacerse corresponder biunívocamente con un subconjunto suyo. Dedekind tuvo la idea de emplear esta característica como *definición* de los conjuntos infinitos.

El interés por los cardinales infinitos fue totalmente peculiar de Cantor. Años atrás había notado ya que, del mismo modo que en los ejemplos anteriores, el conjunto de los números racionales y el de los naturales son equipotentes, tienen exactamente el mismo número de elementos (lo que se demuestra de nuevo, como en el caso de los enteros, reordenando los racionales). Por este camino llegó a plantearse la cuestión de si el conjunto de los números reales y el de los racionales tienen el mismo cardinal, problema sobre el que escribió a Dedekind a finales de 1873. ¿Puede pues establecerse una correspondencia biunívoca entre los naturales y los reales? O dicho de otro modo, ¿son numerables los números reales? Dedekind se reconoció incapaz de dar una respuesta, si bien simultáneamente le envió una demostración de que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable en el sentido anterior. Pocos días después, estimulado por saber que Dedekind no conocía la respuesta, lo que le llevaba a pensar que estaba frente a una dificultad real y no subjetiva, Cantor consiguió finalmente establecer el resultado de que los reales no son numerables. Esto equivale a decir que existen distintos tipos de infinito, o más precisamente distintos cardinales infinitos; con ello se obtiene una aclaración muy importante sobre la noción de continuidad, que involucra un nuevo cardinal infinito.

Para el lector que no conozca esta famosa demostración, y dado el interés de la cuestión, indicaré cómo puede probarse algo semejante. La prueba de 1873 era bastante complicada, pero Cantor descubrió hacia 1890 otro método de prueba sorprendentemente simple, que se conoce con el nombre de *procedimiento diagonal de Cantor*. Demostraremos que los números reales del intervalo (0,1) no son numerables. Todo número real de ese intervalo puede expresarse en la forma decimal (α) $0{,}a_1a_2a_3...$, donde los a_i son cifras del 0 al 9; por otro lado, todo número de la forma (α) pertenece al intervalo (0,1). Supongamos que los números reales del intervalo (0,1) son numerables; entonces existe una enumeración de los mismos en la que aparecen todos ellos, o lo que es lo mismo, puede establecerse una lista

$$\begin{array}{l} 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots \\ 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots \\ 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\ldots \\ : \\ : \end{array}$$

en la que aparecerán todos los números de (0,1).

Para probar la falsedad de nuestra suposición construiremos un número real perteneciente a (0,1) $0,b_1b_2b_3\ldots$ que no puede pertenecer a la lista anterior. La cifra b_1 de nuestro número se establecerá atendiendo a la primera cifra $a_{1,1}$ del primer elemento de la lista. Nuestra intención es que estas dos cifras sean diferentes, cosa que lograremos, por ejemplo, poniendo b_1=0 si $a_{1,1}\neq 0$, y en caso contrario, si $a_{1,1}$=0, poniendo b_1=1. Del mismo modo estableceremos la cifra b_2 atendiendo a la segunda cifra $a_{2,2}$ del segundo elemento; en general, la cifra i-ésima de nuestro número se establecerá atendiendo a la cifra $a_{i,i}$ de la lista, poniendo b_i=0 si $a_{i,i}\neq 0$, b_i=1 si $a_{i,i}$=0. Es evidente que el número construído es un número del intervalo (0,1) ya que es de la forma (α), y por el método diagonal empleado en su construcción, dicho número se diferencia de cada número de la lista en al menos una cifra. De esta manera tan simple hemos probado que el conjunto de los reales comprendidos en (0,1) no es numerable. El mismo procedimiento diagonal se emplea para demostrar importantes teoremas sobre cardinales, como por ejemplo el que dice que el cardinal del conjunto potencia (conjunto de todos los subconjuntos) de un conjunto dado **C** es siempre mayor que el cardinal del propio **C**. Con ello, la serie de los cardinales es infinita.

En 1873 Cantor publicó un artículo titulado 'Sobre una propiedad del conjunto de todos los números reales algebraicos', conteniendo las demostraciones de la numerabilidad de los números algebraicos y la no numerabilidad de los reales.[48] Uniendo ambos resultados, obtenía también una demostración indirecta de que el conjunto de los números reales debe contener números no algebraicos, los llamados números trascendentes, entre los que se encuentran los famosos números π y e. En este artículo, Cantor ni siquiera mencionaba el nombre de Dedekind, cosa que sin duda le molestó, ya que el trabajo incluía su demostración sobre los números algebraicos y ciertas simplificaciones de la demostración sobre los números reales, que también le había propuesto por carta. Por este motivo, Dedekind escribió unos apuntes sobre la correspondencia de 1873 indicando qué parte del trabajo se debía a él y cuál a Cantor, y mencionando los pasajes relevantes de las cartas.[49]

---

[48] 'Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen', *Gesammelte Abhandlungen*, 115-118.

[49] *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, 18-20.

La correspondencia sufrió una interrupción de casi tres años, hasta que se reanudó con comentarios sobre los irracionales en 1877. Cantor había planteado ya en una carta de enero de 1874 la cuestión de si sería posible establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y los de un plano (o lo que es lo mismo, los del segmento unidad y los del cuadrado construído sobre él). En 1877 le comunica a Dedekind una demostración simple de que *sí* es posible hacerlo, a la que Dedekind encuentra una pega. El 25 de junio le envía una prueba más complicada que obtiene su aprobación. La prueba demostraba que podemos determinar cada punto de un espacio bidimensional mediante una sola variable, y suscitaba inmediatamente el problema de que aquel espacio aparecía como unidimensional. Esto llevaba a Cantor a dudar de que haya una relación necesaria entre el número de dimensiones y el número de variables que es preciso emplear: "todas las deducciones filosóficas y matemáticas que hacen uso de esa suposición errónea son inaceptables."[50]

Como los trabajos de Riemann y otros se basaban en la mencionada relación, y temiendo que Cantor se atreviera a negar la invariancia de la dimensión, Dedekind le contestó el 2 de julio justificando el empleo de dicha suposición por aquéllos matemáticos sobre la base de otro supuesto implícito, la continuidad. Concretamente, Dedekind formula por vez primera el teorema de invariancia de la dimensión:

> «Si se consigue establecer una correspondencia recíprocamente unívoca y completa entre los puntos de una variedad continua A de *a* dimensiones por un lado, y los puntos de una variedad continua B de *b* dimensiones por el otro, entonces, si *a* y *b* son *desiguales, esta misma correspondencia* es necesariamente *discontinua en todo punto*.»[51]

Esta conjetura fue indicada por Cantor en su siguiente artículo, 'Una contribución a la teoría de variedades' (1878), donde se incluían las dos demostraciones anteriores y las pegas de la primera, también sin ninguna mención de Dedekind.[52] La conjetura sobre la invariancia de la dimensión provocó una avalancha de artículos: Thomae, Lüroth, Jürgens, Netto y el propio Cantor trataron de probarlo, aunque la primera demostración satisfactoria no apareció hasta 1911, obra del famoso intuicionista L. E. J. Brouwer (1881-1966).[53]

Los dos episodios que acabo de comentar son de los más importantes en toda la correspondencia, y atañen a los dos primeros trabajos de Cantor sobre teoría de conjuntos en sentido propio. La correspondencia continuó con bastantes interrupciones hasta finales de 1882, cuando Cantor comunica su introducción de los números cardinales transfinitos, números que denotan la cardinalidad

[50] *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, 34.

[51] *Briefwechsel Cantor-Dedekind*, 38.

[52] 'Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre', en *Gesammelte Abhandlungen*, 119-133.

[53] 'Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl', *Mathematische Annalen* **70** (1911), 161-165; reimpreso en Brouwer, *Collected Works*, vol.2 (Amsterdam: North-Holland, 1976), 430-434.

de los diversos conjuntos infinitos.[54] Dedekind no pareció interesarse mucho, ni en este momento ni nunca, por el tema preferido de Cantor, el de los números transfinitos. Además Cantor sufrió en 1884 el primero de sus ataques depresivos, que fue muy serio e inauguró la larga serie de enfermedades mentales que le acompañaría en sus últimos años. Sólo reencontramos algo de correspondencia en 1899, momento en que se toca el tema de las antinomias, del que luego hablaremos.

No cabe duda de que la correspondencia fue muy discontinua y de que no llegó a haber una auténtica colaboración entre los dos matemáticos; esa discontinuidad es reconocida por el propio Cantor en una carta a Hilbert, donde dice acerca de Dedekind:

> [..] durante años me había guardado rencor por *razones que desconozco* y *casi había roto* la antigua correspondencia de 1871 *a* 1874.

La extrañeza de Cantor resulta sorprendente, ya que por lo anterior es evidente que Dedekind se distanció a consecuencia de su ingratitud al no reconocer lo que debía a su colaboración en los primeros artículos.[55] Las consecuencias de esa ingratitud son innegables: basta pensar que hasta la publicación de la correspondencia en 1937 se creía que la conjetura del teorema de invariancia de la dimensión se debía a Cantor. En todo caso, resulta también claro que la postura de Dedekind de no mostrar directamente su enfado empeoró las cosas todavía más; la relación entre ambos da buenos indicios sobre las respectivas personalidades. También puede señalarse que en la correspondencia sólo se tratan los temas que interesaban a Cantor, quien parece interesado en Dedekind sólo como corrector de sus ideas, y muestra poca intención de conocer sus propias investigaciones.

Con todo, la relación entre los dos matemáticos fue provechosa para ambos, y cada uno recibió estímulos importantes de la obra del otro. Cantor obtuvo sin duda más beneficios, aunque su fama no habría sido menor si hubiera reconocido lo que debía a Dedekind: la dirección en que desarrollaron sus ideas es muy distinta, y es innegable la novedad de las ideas cantorianas. Ya he dicho que Dedekind no escribió nunca sobre temas cantorianos, que son los que se han hecho característicos de la teoría

---

[54] Así, la cardinalidad del conjunto de los números naturales se designa $\aleph_o$, número que corresponde también al conjunto de los enteros, al de los racionales y al de los números algebraicos, como hemos indicado. La cardinalidad del conjunto de los números reales se designa por *c*; la famosa hipótesis del contínuo de Cantor conjetura que *c* es el cardinal inmediatamente siguiente a $\aleph_o$, $c = \aleph_1$.

[55] Con otros matemáticos Cantor se comportó de forma más deportiva; la explicación de su conducta en este caso se encuentra posiblemente en sus ambiciones profesionales y su relación con Kronecker. Cantor había sido alumno de Kronecker, y durante los años 1870 guardó todavía muy buenas relaciones con él; por otro lado, siempre se consideró con cierto derecho a obtener una plaza en Berlin, la universidad más importante del momento, donde Kronecker tenía una posición de enorme influencia. Ahora bien, Kronecker estaba profundamente disgustado con Dedekind por haber publicado antes que él una teoría de ideales satisfactoria, y seguramente Cantor temía perder su apoyo si mencionaba su colaboración con Dedekind. Quizá influyó también el hecho de que la teoría de conjuntos fue el tema de investigación de toda la vida de Cantor, quien sin duda tendió a olvidar los méritos de sus colegas en este campo.

abstracta de conjuntos; pero desde finales de los años 1850 venía considerando conjuntos infinitos, y los métodos que desarrolló en *¿Qué son y para qué sirven los números?* tendrían gran importancia en la teoría de conjuntos del siglo XX. Además, su contribución fue decisiva para que la teoría de conjuntos se convirtiera en una herramienta de las investigaciones matemáticas, y en especial para el desarrollo de un planteamiento conjuntista-estructural en álgebra. Por tanto, haciendo la salvedad de que no contribuyó directamente a la teoría de conjuntos transfinitos, puede decirse sin embargo que su papel en el nacimiento de la teoría de conjuntos fue fundamental. En cuanto a la importancia de Cantor para su obra, el hecho de que comenzara a escribir en 1872 el primer borrador de *¿Qué son y para qué sirven los números?* está seguramente relacionado con sus entrevistas con aquél en el verano de ese mismo año. La aparición de un matemático que había llegado independientemente a ideas conjuntistas avanzadas, como lo demostraba el artículo de sobre números reales y conjuntos derivados, fue sin duda un estímulo fundamental.

7. ¿Qué son y para qué sirven los números?

Una vez lograda la aplicación del método constructivo a los irracionales, estaba claro que era posible construir todo el sistema numérico sobre la única base de los números naturales. Por este motivo, Dedekind no se planteó la tarea de elaborar cada uno de los pasos de construcción, sino otra cuestión mucho más ambiciosa: presentar la teoría general en que se basa todo el proceso, y reducir los propios números naturales a nociones más generales. Como escribirá a Keferstein en 1890, había dos cuestiones que plantear a propósito del conjunto o serie N de los números naturales:

> ¿Cuáles son las propiedades básicas, independientes entre sí, de esta serie *N*, es decir, aquellas propiedades que no pueden deducirse unas de otras pero de las cuales se siguen todas las demás? Y ¿de qué manera hay que despojar a estas propiedades de su carácter específicamente aritmético, de manera que queden subordinadas a conceptos más generales y a actividades del entendimiento tales que *sin* ellas no es posible en absoluto el pensamiento, pero *con* ellas viene dado el fundamento para la seguridad y completud de las demostraciones, así como para la construcción de definiciones libres de contradicción?

El punto de vista en que se situaba Dedekind era el de un logicista convencido: se trataba de plantear la teoría del sistema numérico empleando exclusivamente nociones lógicas esenciales.

Como veíamos en el apartado 4, ya en su lección de habilitación Dedekind se declaraba a favor de considerar los números naturales ante todo en su aspecto de ordinales:

> La aritmética elemental surge de la construcción de los números ordinales y cardinales; el paso sucesivo de un término de la serie de los números enteros absolutos al inmediatamente siguiente es la primera y más sencilla operación de la aritmética; sobre ella se fundan todas las demás.[56]

[56] Consideramos al número 5 como ordinal si sólo pensamos en el hecho de que es el sucesor del 4; lo vemos como cardinal si pensamos en que por medio del 5 expresamos la propiedad de un conjunto de tener cinco elementos, o dicho sin círculos viciosos, de ser equipotente con (aplicable biunívocamente en) el conjunto {1,2,3,4,5}.

Este punto de vista era bastante habitual, y entre sus defensores podemos citar a Kronecker y Helmholtz (cuyos artículos cita el propio Dedekind) así como a Hamilton, que expresó la idea de una manera muy clara:

> No puedo imaginarme *contando* cualquier conjunto [set] de cosas sin *ordenarlas* primero, y tratarlas como *sucesivas*: por *arbitraria* y *mental* (o *subjetiva*) que pueda ser la sucesión asumida.[57]

El caso es que en la época en que se publicó *¿Qué son y para qué sirven los números?* esta idea estaba de algún modo en retroceso: tanto Cantor como el famoso lógico Gottlob Frege (1848-1925) se mostraron a favor de basarse en la noción de cardinalidad; más tarde, Bertrand Russell (1872-1970) se sumará a ellos.

En este punto, Frege fue mucho más riguroso que Cantor, y de hecho la teoría expuesta en su libro *Los fundamentos de la aritmética* (1884) puede verse como la contrapartida perfecta de la de Dedekind. Para verlo, consideremos el siguiente problema filosófico: ¿qué son realmente los números, si llamamos números tanto a '1, 2, 3 ...', como a 'uno, dos, tres, ...', como a ' one, two, three, ...', etc.? Frege respondió que los números son objetos perfectamente concretos que existen en un cierto mundo ideal, y su análisis de los naturales se desarrolló de acuerdo con esa idea.[58] Dedekind, por el contrario, se limitó a señalar que todos los conjuntos de números (ya sean en una lengua o en otra, ya los denotemos con cifras árabes o chinas) tienen una misma estructura, y que esta estructura es lo que caracteriza al conjunto de los números naturales.[59]

7.1. Lo realmente original del libro de Dedekind es la manera en que conecta ese análisis del número como ordinal con su teoría de conjuntos y aplicaciones. Su exposición comienza con los los rudimentos de la teoría de conjuntos; aquí, Dedekind recoge las operaciones que había utilizado en álgebra y teoría de números, y se sitúa con toda claridad en la misma línea abstracta que habíamos visto a propósito de su versión de la teoría de Galois. La matemática va a hablar de 'cosas', y 'cosa' es "todo objeto de nuestro

---

[57] 'Preface to Lectures on Quaternions', o.c., 125 nota.

[58] Cf. la traducción española del libro de Frege: Barcelona, Laia, 1972. Su planteamiento puede llamarse esencialista, porque pretendía que los números naturales fueran objetos 'diseñados' —por así decir— precisamente para contar, esto es, para expresar cardinalidades. Del mismo modo, consideró insatisfactorias las construcciones de los irracionales, ya que los números reales debían ser objetos 'diseñados' precisamente para medir; cf. P. M. Simons, 'Frege's Theory of Real Numbers', *History and Philosophy of Logic* **8** (1987), 25-44.

[59] Esta cuestión ha seguido teniendo una cierta vigencia entre los filósofos de las matemáticas; véase cómo el filósofo americano P. Benacerraf plantea este mismo problema y le da la misma solución que Dedekind en 'What numbers could not be' (1965), incluído en la recopilación *Philosophy of mathematics: selected readings* (Cambridge: University Press, 1983) editada por Benacerraf y H. Putnam.

pensamiento"; en particular, un conjunto "es igualmente, como objeto de nuestro pensamiento, una cosa". La continuidad entre los planteamientos de finales de los 1850 y los de 30 años más tarde está clara: allí se formulaba la noción de grupo indicando que era aplicable a cualquier "dominio [...] de elementos, cosas, conceptos" en el que esté definida una ley de composición adecuada.

A continuación, Dedekind recoge su vieja noción de 'sustitución' bajo el nombre de 'representación' o aplicación [Abbildung].[60] Esta será de hecho la base de toda la teoría, y la gran novedad del libro: Dedekind es el primer matemático que introduce la noción de aplicación, y lo hace de una manera muy moderna. Primero considera aplicaciones cualesquiera, luego introduce la definición de aplicación inyectiva, que es lo que denomina 'representación similar o clara'. A este respecto hay que decir que aunque propiamente define la inyectividad, en la práctica considera aplicaciones biyectivas, sin duda porque la restricción del conjunto final a la imagen le parece trivial.

El gérmen del planteamiento expuesto en *¿Qué son y para qué sirven los números?* [**QSN** en lo que sigue] surgió en el momento en que Dedekind se dió cuenta de que la función sucesor puede concebirse como una aplicación de N en N.[61] Con esto se obtenía una gran simplificación: las nociones muy generales de conjunto y aplicación bastaban para edificar la aritmética, el álgebra y el análisis. Los números naturales iban a quedar caracterizados como un conjunto dotado de una cierta aplicación interna que le confiere una estructura particular; los demás tipos de números se obtendrían por construcción conjuntista hasta alcanzar el cuerpo de los números complejos; y las operaciones se desarrollarían sobre la base de la aplicación sucesor, por extensiones progresivas.

Como Dedekind menciona en el prólogo a su libro, la misma base era además suficiente para fundar y reconstruir el álgebra y el análisis de la época. Esta afirmación puede interpretarse de la siguiente manera. Las estructuras algebraicas consideradas entonces no eran sino subconjuntos de los números complejos, cerrados para ciertas operaciones; y los morfismos entre estructuras introducidos por Dedekind no eran, como hemos visto, más que casos particulares de aplicación. En cuanto al análisis, ya hemos indicado que Dirichlet había planteado la noción de función (real) en sentido abstracto, como una correspondencia cualquiera entre valores numéricos; sin duda, Dedekind era consciente de que esto no era más que un tipo de aplicación entre conjuntos. Como los números reales y complejos se obtenían mediante construcción conjuntista, las simples nociones de conjunto y aplicación ponían a su alcance toda la gama de funciones del análisis.

Con esas ideas en mente, Dedekind comienza a escribir en 1872 un borrador de lo que luego será **QSN**, estimulado por su relación con Cantor; el borrador contiene todo lo fundamental del libro,

[60] Todavía hoy, los alemanes llaman a las aplicaciones 'Abbildungen'.

[61] Existe incluso un manuscrito que recoge el momento en que Dedekind tuvo esta idea clave, aunque no es posible datarlo.

salvo el teorema de definición recursiva.[62] En particular, la primera parte del borrador ─la que procede de 1872─ contiene ya las nociones conjuntistas básicas, las definiciones de aplicación y aplicación inyectiva, la definición de infinito, y la demostración del teorema de inducción.

Antes de proseguir con el tema de aplicaciones y función sucesor, no está de más decir algunas palabras sobre el tema del infinito. Como hemos visto, Dedekind aceptaba el infinito actual ya en los años 1850. Ahora define lo que es un conjunto infinito **I** sobre la base de la existencia de una aplicación inyectiva f de **I** en un subconjunto propio de **I**; por ejemplo, el conjunto de los números naturales es infinito porque la aplicación $f(n) = 2n$ lleva cada elemento de **N** en un número par (y podríamos mostrar muchas otras aplicaciones que satisfacen la definición). El hecho de que los conjuntos infinitos tienen esta propiedad había sido observado mucho antes, por ejemplo por Galileo, y no faltó quien lo considerara como una *paradoja* que demostraba que el infinito actual era inaceptable; algunos indicaban que esa propiedad contradice el axioma euclidiano 'el todo es mayor que la parte'. En el siglo XIX, autores como Bolzano y Cantor se refieren de nuevo a la propiedad 'paradójica' sin concebirla como tal, sino como una característica de los conjuntos infinitos.[63] Pero es Dedekind quien por vez primera se plantea la posibilidad y la necesidad de *definir* la noción de infinito, para lo que emplea aquella propiedad; esto está directamente relacionado con sus típicas exigencias de rigor deductivo, que prepararon el camino a los planteamientos axiomáticos. En conexión con ello, la exposición que hace Dedekind en su libro tiene otra peculiaridad llamativa: las propiedades de los conjuntos finitos se estudian sobre la base de conjuntos infinitos.

Como queda dicho, la característica principal de **QSN** es que el análisis ordinal de la noción de número se reformula empleando la idea de aplicación. La clave es la existencia de una aplicación φ: **C** ─> **C**, que desempeñará el papel de la función sucesor; cuando existe una aplicación con esa característica, es decir cuando $\varphi(\mathbf{C}) \subseteq \mathbf{C}$, Dedekind dice que el conjunto **C** es una φ-cadena. Los conjuntos **C** isomorfos a N se caracterizan porque son φ-cadenas para una aplicación φ biyectiva, y porque hay un único elemento de **C**, al que llamamos 1, que no pertenece a $\varphi(\mathbf{C})$.

Ahora bien, Dedekind se dio cuenta de que esas tres condiciones no bastan para que el conjunto **C** sea un modelo satisfactorio de la aritmética. El argumento que le llevó a esta conclusión se encuentra en el punto 6 de la carta a Keferstein, aunque su correlato aparece ya en la primera parte del borrador, de

62 En esto tenemos que contradecir lo que dice el primer prólogo de Dedekind, véase más abajo.

63 En 1851 se publicó el libro de Bolzano *Paradoxien des Unendlichen* (reimpreso en Leipzig: Meiner, 1920), que cronológicamente puede considerarse el primer libro conjuntista, pese a que apenas fue leido. En particular, las ideas de Cantor y Dedekind se desarrollaron al margen de Bolzano, aunque parece que la demostración que Dedekind da de la existencia de conjuntos infinitos se debe esencialmente a Bolzano.

En cuanto a Cantor, indicó la propiedad en cuestión en un artículo de 1877, pero todavía en 1882 dudaba la posibilidad de *definir* el infinito y quedó sorprendido cuando Dedekind le comunicó su definición (carta de Dedekind a Weber, 24.01.1888).

1872.[64] Se trata de algo especialmente notable por la modernidad del análisis realizado por Dedekind, que emplea razonamientos modelistas intuitivos y que le lleva a la noción de 'φ-cadena de un conjunto'.

Dedekind pretendía aislar un conjunto de propiedades que caractericen la estructura del conjunto de los números naturales de tal manera que la definición sea 'categórica', esto es, que cualquier conjunto que la satisfaga, sea exactamente isomorfo a N.[65] ¿Cómo llegó a la idea de categoricidad? Consideró los posibles conjuntos que satisfacen las tres condiciones anteriores; en cualquiera de ellos, el elemento 1 y sus sucesores según la aplicación φ (que pertenecen al conjunto por ser una φ-cadena) desempeñarían el papel de los números naturales, y podrían ser denominados 1, 2, 3... Sin embargo, las tres condiciones anteriores no excluyen la posibilidad de que además del 1 y sus sucesores, existan en **C** elementos que quedan ─por así decir─ al margen del orden de sucesión inducido por φ y 1; estos son lo que hoy en día denominaríamos 'elementos no estándar' de **C**.[66] Semejante conjunto sería totalmente inaceptable para la fundamentación de la aritmética, porque en este caso los razonamientos por inducción no resultarían concluyentes: del hecho de que 1 tenga una propiedad, y $n+1$ la tenga si la tiene n, no se sigue que todos los elementos de **C** gocen de esa propiedad. Por tanto, si queremos demostrar que las pruebas por inducción son concluyentes, es necesario introducir algún requisito adicional.

Para ello, introducimos un nuevo concepto. Siendo **A** un subconjunto de **C**, denominamos 'φ-cadena del conjunto **A**' a la intersección de todas las φ-cadenas que contienen a **A**, denotada por φ_o(**A**). Consideremos ahora la φ-cadena de {1}, φ_o(**{1}**), y habremos encontrado el conjunto que buscábamos, logrando el objetivo de excluir los elementos no estándar. Así pues, esta última condición nos permite definir categóricamente el conjunto de los números naturales. Decimos (**QSN**, 71) que un conjunto **C** tiene la estructura de N ─es 'simplemente infinito'─ si existe una aplicación φ de **C** y un elemento 1 ε **C** tales que

α. $\varphi(C) \subseteq C$,

ß. $1 \notin \varphi(C)$,

γ. **C** = φ_o(**{1}**),

δ. φ es una aplicación biyectiva.

La aplicación biyectiva φ ordena el conjunto **C**, y el orden inducido es el de la función sucesor.

En la versión definitiva del libro, Dedekind dedica el § 10 a demostrar que sobre la base de esa

---

[64] La cuestión fue estudiada, a propósito de la carta a Keferstein, por el lógico matemático Hao Wang en su artículo 'The axiomatisation of arithmetic', *Jour. Symb. Logic* **22** (1957), 154-158, reimpreso en H. Wang, *A survey of mathematical logic* (Amsterdam: North Holland, 1963), 68-81.

[65] La noción de categoricidad de un sistema de axiomas fue explicitada por Edward Huntington y Oswald Veblen en 1902 y 1904 respectivamente.

[66] La condición $\varphi(C) \subseteq C$ es facil de satisfacer en este caso; sea **D** el conjunto de los elementos no estándar de **C**; extendemos φ de manera que $\varphi(D) \subseteq D$, por ejemplo estipulando que $\varphi(d) = d$ para todo $d \varepsilon D$.

definición, dos conjuntos simplemente infinitos cualesquiera son isomorfos; con esto, todo conjunto simplemente infinito es isomorfo a N, y queda demostrada la categoricidad. La idea clave de emplear la noción de *cadena de un conjunto*, para evitar la aparición de elementos no estándar, procede de 1872, ya que puede encontrarse un pasaje, en la primera parte del borrador, donde se reflejan las dudas frente al problema y su solución.[67]

Ya hemos indicado que, en su libro, Dedekind estudia los conjuntos finitos sobre la base de conjuntos infinitos. De hecho, cada elemento de N da lugar a una φ-cadena, que es el conjunto de todos sus sucesores; Dedekind estudia las propiedades de los 'segmentos iniciales' $\mathbf{Z}_n$ de **N** (el conjunto de los *n* primeros elementos de **N**) por medio de las propiedades del 'resto' de **N**, esto es, por medio de la cadena de su sucesor $\varphi_o(n')$. También la relación de orden (mayor, menor) se estudia por medio de la teoría de cadenas, que de este modo es el núcleo del libro.

Ya en 1854 Dedekind estaba convencido de que la aplicación sucesor permitía definir la adición, multiplicación y potenciación de números naturales. Esto se logra mediante definiciones recursivas, un enfoque del que Dedekind estuvo siempre muy cerca ya que ─como buen experto en teoría de números─ las demostraciones por inducción fueron siempre sus preferidas. Es interesante notar que en el año 1861 Hermann Grassmann (1809-1877), el famoso precursor del cálculo vectorial, publica un *Manual de aritmética* en el que desarrolla este mismo enfoque, dando esencialmente las mismas definiciones que Dedekind.[68] Si al igual que Dedekind reformulamos las definiciones en el lenguaje de las aplicaciones, y por comodidad utilizamos la notación $\varphi(n) = n'$, obtenemos

ADICION. a+1 = a'; a+b' = (a+b)'

MULTIPLICACION. a.1 = a; a.b' = (a.b)+a

POTENCIACION. $a^1 = a$; $a^{b'} = a^b.a$

Nos consta por una carta de Dedekind a Lipschitz escrita en julio de 1876 que no había leido el libro de Grassmann; por tanto, se trata de una coincidencia entre los dos matemáticos.[69] Y de todos modos,

[67] Cf. la edición del borrador en Dugac, o.c., apéndice LVI, y en concreto la pag. 295.

[68] *Lehrbuch der Arithmetik* (Berlin: Enslin, 1861), puntos 8-9, 15 (para la definición de adición), 52, 56-58 (multiplicación), 186-187 (potenciación). Grassmann entiende la matemática como "la ciencia de la conexión de magnitudes" (definición 1) y, aunque interpreta la noción de magnitud de manera abstracta, de ahí proviene el inconveniente de que la introducción de los irracionales no le plantee ningún reparo, porque supone intuitivamente un dominio de magnitudes continuo. A este respecto, pues, hay que alinear a Grassmann con los matemáticos 'tradicionales' y no con Dedekind, Cantor o Weierstrass.

[69] Cf. Rudolf Lipschitz, *Briefwechsel* (Braunschweig: Vieweg, 1986), 74. Dedekind tenía noticia del manual de Grassmann por el *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* (Leipzig: Teubner, 1873) de Schröder, que sigue a aquel con respecto a las definiciones recursivas (Schröder es de hecho uno de los seguidores más importantes de Grassmann, incluso en su obra lógica). Pero está claro que las ideas de Dedekind estaban ya consolidadas antes de conocer la obra de Schröder.

Dedekind va mucho más allá: tras reformular la idea original en el lenguaje de las aplicaciones, concibiendo las operaciones aritméticas como aplicaciones de N en N que se definen sobre la base de la aplicación sucesor, Dedekind se plantea la demostración de un teorema general que justifique las definiciones recursivas. Esto constituye su principal contribución al contenido del libro en 1887, cuando redacta la versión final, y forma el tema del § 9.

Con ello el nivel de generalidad aumenta enormemente, y Dedekind muestra una vez más su genialidad. La estructura demostrativa del libro es perfecta: la definición de las operaciones aritméticas es una aplicación del teorema general de definición recursiva, que en conjunción con el teorema de inducción permite deducir todas las leyes de la aritmética. Y no sólo esto, sino que la propia utilización de los números para contar, es decir el paso a los números cardinales, queda justificada por el mismo teorema de recursión.

7.2. Con lo visto hasta aquí, quedará claro que **QSN** constituye el final de una era y el comienzo de otra. El libro se inscribe en la tradición de los manuales de aritmética, entre los que sus principales precedentes son *Tentativa de un sistema de la matemática perfectamente consecuente* (1822) de Ohm, y los manuales de Grassmann (1861) y Schröder (1873);[70] la perfección y la generalidad de la exposición de Dedekind hace que estos libros apenas resistan la comparación. Por otro lado, el fundamento sobre el que Dedekind basa su exposición es la teoría de conjuntos y aplicaciones, y con esto inaugura toda una serie de investigaciones sobre el tema. Para concluir este apartado indicaré algunas extensiones de las ideas y métodos de Dedekind empleadas posteriormente por los teóricos de conjuntos.

Para empezar, Ernst Zermelo (1871-1953) tomó del § 1 del libro de Dedekind parte de los axiomas de la teoría de conjuntos que propuso en 1908; en particular, esto puede decirse de los axiomas I (extensionalidad), II (conjuntos elementales) y V (unión). Más interesante es el hecho de que el axioma VII de Zermelo (infinito) "se debe esencialmente a Dedekind"; en efecto, pese a que la demostración de la existencia de conjuntos infinitos que da Dedekind sea inutilizable (luego hablaremos de ello), esto no debe oscurecer el hecho de que fue él quien por vez primera vio que la teoría debía basarse sobre una proposición de existencia como esa.[71] Por estos motivos no es extraño que, en el artículo citado,

[70] Ya he dado las referencias de los libros de Grassmann y Schröder; *Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik*, 1ª y 2ª parte, apareció en 1822 en Berlin, y fue reformado en 1828-29, apareciendo nuevos tomos en los años siguientes. Cf. B. Bekemeier, *Martin Ohm (1792-1872)* (Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1987).

[71] Lo que hizo Zermelo fue postular la existencia de un 'conjunto simplemente infinito', es decir, de un conjunto que satisficiera las condiciones del punto 71 de **QSN** (salvo la que involucra la idea de 'cadena de un sistema'). Cf. la traducción inglesa de su artículo en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel* (Cambridge/London: Harvard University Press, 1967), 199-215; los axiomas aparecen en las pp. 201-204, el texto citado en una nota a la p. 204.

Zermelo se refiera a la teoría de conjuntos como "la teoría creada por Cantor y Dedekind".[72] Y ya que hablamos de axiomatizaciones, hay que mencionar que las condiciones del punto 71 de **QSN** equivalen a los axiomas de Peano, quien reconoce haber tenido ante sí la obra de Dedekind al escribir *Los principios de la aritmética*.[73]

Zermelo empleó también la noción de cadena para su segunda y definitiva demostración del teorema de buen orden, sobre la base del axioma de elección.[74] (A propósito de ésto, cabe decir que el teorema 159 de **QSN** se basa implícitamente en el axioma de elección, como indico con más detalle en una nota al texto.) Otro matemático que se ha apoyado en la noción de cadena es Kuratowski, con su método de eliminación de cardinales transfinitos.[75] La noción de cadena y el método de introducción de las operaciones utilizado por Dedekind se sigue empleando habitualmente en el desarrollo de la teoría de los números ordinales transfinitos. En conexión con esto, el teorema de definición recursiva fue generalizado por J. von Neumann (1903-1957) empleando la inducción transfinita.[76]

Como vemos, los métodos empleados por Dedekind estaban elegidos de tal modo que resultaron fácilmente extensibles al caso transfinito. Aunque no podemos decir que Dedekind hubiera previsto los detalles de este paso, ese hecho justifica una vez más la impresión de que Dedekind tuvo siempre en cuenta motivaciones más generales que las que desarrolla explícitamente en el trabajo. En particular, resulta claro que Dedekind quiso ofrecer un conjunto de ideas básicas que en su opinión bastaban para fundamentar también la teoría de conjuntos cantoriana. Una nota al punto 161 del libro ofrece una confirmación indirecta de ello: Dedekind dice que limita la noción de número cardinal al caso finito "por motivos de sencillez y precisión"; esto equivale a decir que en principio los mismos fundamentos bastan para la teoría de cardinales transfinitos.[77] Da la sensación de que en este punto Dedekind no aclaró todas las implicaciones de su teoría.

---

[72] o.c., 200. Hay que decir que al editar los *Abhandlungen* de Cantor, en 1832, Zermelo cambió de opinión, o al menos se sumó a la tendencia 'hagiográfica' habitual, diciendo que la teoría en cuestión era fruto de la actividad creadora de un único individuo, Cantor.

[73] Cf. la edición bilingüe latín-español editada por Pentalfa (Oviedo) en 1979, o la traducción inglesa en van Heijenoort, o.c., 83-97.

[74] 'Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung', trad. inglesa en van Heijenoort, o.c., 183-198.

[75] 'Une méthode d'elimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques', *Fundamenta Mathematica* **3** (1922), 76-108.

[76] *Mathematische Annalen*, **99**.

[77] Que tuvo en cuenta a Cantor a propósito de la noción de cardinal queda claro por la redacción original del prólogo; al comentar que "algunas nociones que propiamente son muy complejas (como por ejemplo la de número de cosas) se consideran simples erróneamente" ─pasaje que se conserva en el prólogo publicado─ continúa: "(en oposición a Cantor)". Cf. Cod. Ms. Dedekind, III, 1, p. 41.

8. Dedekind y el logicismo.

Adentrarse en el terreno de la lógica, sobre el que nunca había publicado, suponía un cierto atrevimiento por parte de Dedekind. Sin embargo, *¿Qué son y para qué sirven los números?* fue acogido con elogios por los mayores lógicos de la época. Frege se refirió al libro como "la obra más completa sobre los fundamentos de la matemática de la que he tenido noticia últimamente".[78] Ernst Schröder (1841-1902) escribió:

> Cuando considero, por un lado, cuánto tenía que mejorarse el desarrollo del cálculo lógico para posibilitar el establecimiento de la conexión perdida [entre la lógica y la aritmética] de una manera realmente *concluyente*, y por otro, la gran agudeza que ha necesitado Dedekind para llenar el hueco, no puedo reprenderme a mí mismo ni a ningún otro expositor de la aritmética [...] tanto mayor admiración habrá de profesarse a la obra que creó la conexión que faltaba.[79]

Y en un artículo de Charles S. Peirce (1831-1914) podemos leer:

> La línea fronteriza entre algunas partes de la lógica y la matemática pura en su tratamiento moderno es prácticamente evanescente, como puede verse en la obra de Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen*.[80]

Que Dedekind creyera que su obra estaba basada en la lógica puede resultar muy desconcertante al lector actual, pero mucho más extraño es que Peirce y Schröder no tuvieran nada que objetar a este respecto. En cuanto a Frege, sí que tuvo ─como casi siempre─ algo que objetar, pero sus razones eran más epistemológicas que lógicas. Es bien conocida su preferencia por nociones intensionales: opinaba que los conjuntos sólo resultan aceptables cuando se conciben como 'extensiones de conceptos'; y en cuanto a la idea de aplicación o ─como decía Dedekind─ 'representación', dice:

> Si es correcta mi idea de que la aritmética es una rama de la lógica, entonces habrá que elegir, en vez de 'representación', una expresión puramente lógica. Y escojo la de 'relación'. Concepto y

[78] Introducción a *Grundgesetze der Arithmetik* (Hildesheim: Olms, 1966). Frege, a quien ya hemos mencionado, es considerado habitualmente como el creador de la lógica actual, que aparece de una forma casi completa en su *Begriffschrift* (1879); en *Grundgesetze* depura sus ideas lógicas y desarrolla mediante ellas el programa logicista.

[79] Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (New York: Chelsea, 1966), vol.3, 349; aquí reconoce la inferioridad de su manual de 1873 que citábamos en una nota anterior. Schröder fue uno de los principales representantes de la corriente denominada 'álgebra de la lógica', que nace en la obra de Boole *El análisis matemático de la lógica* (1847). Desarrolló especialmente la lógica de relaciones, y sistematizó las ideas del álgebra de la lógica en sus monumentales *Vorlesungen*; en el tercer tomo retomó la teoría de aplicaciones de Dedekind, y especialmente la teoría de cadenas.

[80] 'Lógica' (1901) en *Escritos lógicos* (Madrid: Alianza, 1986), 248. Peirce merece ser citado junto a Frege como primer introductor del cálculo proposicional y de los cuantificadores en lógica. Por tanto, la lógica de primer orden actual tiene su origen en ambos, si bien las exposiciones de Peirce dejan mucho que desear en cuanto a claridad y sistematicidad en comparación con las de Frege. Peirce es también muy conocido por su contribución al nacimiento de la semiótica.

relación son las piedras fundamentales sobre las que construyo mi edificio.[81]

Ahora bien, prescindiendo de las preferencias epistemológicas o quizá ontológicas de Frege, la cita anterior viene en realidad a confirmar que las nociones elegidas por Dedekind son puramente lógicas. La noción de concepto fregeana no es más que el correlato de la de conjunto, y la de relación es una extensión ─habitual entre los lógicos del momento─ de la de aplicación. ¡El propio Frege nos está diciendo que su teoría tiene esencialmente la misma base que la de Dedekind!

Lo dicho hasta aquí puede resultar sorprendente. Hoy en día entendemos por lógica (clásica) la teoría formal de las conectivas proposicionales (que corresponden aproximadamente a las partículas 'si ... entonces', 'y', 'no', etc.) y de los cuantificadores ('todo', 'al menos un'). Pero en el libro de Dedekind no se encuentra nada que corresponda a esto, o mejor dicho, se emplean esas partículas de modo sistemático pero informal. Lo que Dedekind entiende por lógica es otra cosa: es la teoría de conjuntos y aplicaciones, y esto separa radicalmente su concepción del asunto de la nuestra. Pero el punto de vista de Dedekind es el de su época, como acreditan las declaraciones anteriores, y se basa en una larga tradición. Los cambios en la comprensión de la lógica comienzan ya con Frege y Peirce, pero se radicalizan con el descubrimiento de las antinomias, que fue la causa del divorcio entre lógica y teoría de conjuntos. Por este motivo, no están de más unos cuantos comentarios sobre el concepto decimonónico de lógica.

8.1. El § 1 del segundo borrador de **QSN**, escrito en junio de 1887, se titula "Sistemas de elementos (Lógica)" ─en la versión definitiva sólo falta el paréntesis─, y la palabra "sistema" es el término técnico introducido por Dedekind para referirse a conjuntos. Así pues, ese título nos viene a decir que la lógica es la teoría de 'sistemas' o conjuntos. En efecto, los conjuntos no parecían ser otra cosa que las clases lógicas, que venían siendo objetos típicos de la lógica matemática. Basta pensar que en la segunda mitad del siglo XIX la corriente más difundida fue la de los seguidores de Boole, conocida por el nombre de 'álgebra de la lógica', pero también por el de 'lógica de clases'.

Las clases derivaban su posición privilegiada en la lógica del papel central que tenían los conceptos, y la historia de ésto último puede retrotraerse al creador de la teoría lógica, Aristóteles. Durante toda la Edad Moderna se aceptó el análisis tradicional del razonamiento, según el cual toda deducción lógica puede reducirse a un encadenamiento silogístico de juicios (proposiciones afirmadas o negadas), y todo juicio puede reducirse a una relación copulativa entre dos conceptos ('Todo A es B', 'Algún A es B', y sus negaciones). De acuerdo con este análisis, el contenido no lógico de un razonamiento se resume en los conceptos que en él intervienen. Ahora bien, ya en el siglo XVII Arnauld y Nicole, al escribir el que se considera el principal manual de aquel tiempo, la *Logica o el Arte de Pensar* (1662), indicaron que podemos considerar los conceptos o ideas bajo dos aspectos:

[81] Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, 161.

> Entendemos por *comprensión* de la idea los atributos que encierra en sí y que no pueden retirarse sin destruir tal idea, como es el caso de la comprensión de la idea del tiríngulo, que encierra en sí la extensión, figura, tres líneas, tres ángulos, igualdad de estos ángulos sumados a dos rectos, etcétera.
> Entendemos por *extensión* de la idea los sujetos a los cuales esta idea conviene [...]; así, la idea general de un triángulo contiene en su extensión triángulos de todas las diversas especies.[82]

Hoy en día se suelen emplear los términos 'intensión' y 'extensión' para ambas facetas. Por tanto, cada vez que mencionamos una propiedad, un predicado, esto es, un concepto, estamos delimitando la clase de aquellas cosas que 'satisfacen' dicho concepto. Es lo que se llama el *principio de comprehensión*, y de ahí que a la centralidad de los conceptos corresponda la de las clases.

El interés de los lógicos de Port-Royal en destacar la noción de extensión derivaba de que su empleo permitía justificar a modo semi-matemático las formas deductivas de la silogística. Los intentos de obtener un álgebra de la lógica, que culminaron en Boole, se basaron en esa idea: es posible un estudio abstracto, formal, y por tanto lógico-matemático, de las relaciones entre clases. La importancia de todo ese planteamiento para la historia de la lógica quedará suficientemente establecida citando al propio George Boole (1815-1864), creador de la lógica matemática:

> Lo que hace posible la Lógica es la existencia en nuestras mentes de nociones generales ─nuestra capacidad de concebir una clase y designar a sus miembros individuales por un nombre común.[83]

Vemos que las clases siguen manteniendo, para Boole, el papel central que les corresponde como extensiones de conceptos o 'nociones generales'. Y aunque los lógicos posteriores (Peirce, Frege, Schröder) consideraron que había que hacer un hueco a las conectivas proposicionales, los cuantificadores y las relaciones, no por ello negaron el carácter puramente lógico de los conjuntos. A este respecto, pues, la confianza de Dedekind estaba plenamente justificada.

Con respecto a la noción de aplicación el asunto era más delicado, debido precisamente al hecho de que la lógica venía centrándose demasiado unilateralmente en los conceptos y sus extensiones. Dedekind aborda el tema afirmando que el pensamiento no es posible sin "la facultad mental de relacionar cosas con cosas, hacer corresponder una cosa a otra cosa, o representar una cosa mediante otra". Posiblemente consideraba que no podemos pensar sin establecer una correlación entre, pongamos por caso, nuestros pensamientos y lo pensado, o entre nuestras palabras y sus objetos. Más aun, si nos remitimos a la teoría silogística, la conexión copulativa mediante la cual se unen dos conceptos para formar un juicio parece ejercerse gracias a la facultad mental invocada por Dedekind. En cualquier caso, Frege y Schröder aceptaron el carácter lógico de las aplicaciones, considerándolas como un tipo particular de relación. De este modo, gracias al desarrollo de la lógica de relaciones, la propuesta de Dedekind encontró un terreno bien abonado para su aceptación.

---

[82] o.c. (Madrid: Alfaguara, 1987), 80.

[83] *El análisis matemático de la lógica* (Madrid: Cátedra, 1984), 42.

Por todo lo anterior vemos que Dedekind tenía buenas razones, dado el contexto de la época, para entender que su reconstrucción de la matemática pura equivalía a hacer de ella una parte de la lógica. En cuanto al modo en que llegó a esta radical conclusión, ya he indicado antes que en mi opinión el camino pasó por la construcción de los números reales. Lo que era un axioma clave de la geometría (en el sentido clásico de proposición indemostrable pero evidente, como vimos con declaraciones de Cantor y Dedekind), podía obtenerse en aritmética mediante una simple construcción conjuntista, esto es, por lo que entonces se consideraban medios lógicos. Salvado ese obstáculo clave, resultaba posible que toda la aritmética no fuera más que lógica.

El programa era ahora eliminar todo axioma, desarrollar la aritmética como una serie de consecuencias extraídas de simples definiciones lógicas. Este ideal explica la propia estructura demostrativa de **QSN**, donde es notable la ausencia total de una estructura axiomática. A propósito del cálculo lógico, Schröder reconoció la legitimidad de ese tipo de estructura a base de proposiciones deducidas de simples definiciones, lo que justifica la estructuración seguida por Dedekind:

> Todos los teoremas de nuestra disciplina [la lógica] son *intuitivos*; resultan inmediatamente evidentes tan pronto como son traídos a la conciencia, y por ello podríamos también establecer las afirmaciones introducidas aquí como axiomas, con cierto derecho, como consecuencias que vienen dadas inmediatamente por las definiciones.[84]

La exigencia de rigor demostrativo total establecida por Dedekind se concreta de este modo en una estructuración diferente a la de nuestros sistemas axiomáticos, pero aun así prepara el camino hacia ellos. Dedekind rechaza las definiciones intuitivas o 'fenomenológicas' al estilo euclídeo, y sólo acepta definiciones que puedan servir como base de auténticas demostraciones. La teoría final debe ser suficiente para todos los resultados deseados, lo que exige el establecimiento claro y riguroso de todas las hipótesis implicadas, y la deducción de todos y cada uno de los pasos intermedios. Incluso encontramos frases de Dedekind que son claros precedentes de la famosa propuesta hilbertiana, de que la geometría debe poder hablar de mesas, sillas y vasos allí donde hablamos de puntos, rectas y planos.

8.2. La filosofía de la matemática más extendida en Alemania a principios del XIX, fuertemente influída por Kant, defendía la 'intuitividad' de todo conocimiento matemático: se consideraba que los axiomas estarían asociados a algún tipo de intuición, fuente de su evidencia.[85] La nueva posición logicista se entiende quizá de la mejor manera si se ve como una respuesta a este tipo de posiciones, una denegación radical de la intuitividad de la matemática. Esto resultaba coherente con las nuevas

---

[84] Schröder, *Der Operationskreis des Logikkalkuls* (Stuttgart: Teubner, 1966), pag. 4.

[85] Las ideas de Hamilton deben verse a esta luz: así como la geometría tiene su origen en la intuición espacial, el álgebra se origina en la intuición temporal. Las referencias a 'magnitudes' involucraban la idea de que la matemática depende de nuestro acceso a cierto tipo de objetos, que existen en la realidad o al menos en la intuición.

tendencias tanto en análisis como en geometría y álgebra: la orientación de la matemática decimonónica hacia la abstracción.

Por tanto, el logicismo tuvo sentido dentro de una determinada interpretación de la lógica, y como reacción a la tesis de la intuitividad de la matemática; fue un movimiento a favor del rigor, de la estructuración demostrativa radical, y de la abstracción. Pero su edad dorada no iba a durar demasiado. Desde finales de los años 1890, Cantor, Hilbert, Zermelo, Burali Forti y Russell descubren una serie de hechos paradójicos que se derivan de manejar, de un modo u otro, nociones relacionadas con la de 'conjunto de todos los conjuntos'. De estas antinomias, la más famosa es la de Russell ─al parecer descubierta independientemente por Zermelo─, notable por formularse en términos de las nociones más elementales de la teoría de conjuntos: 'conjunto' y 'elemento'.

La mayoría de los conjuntos no son elementos de sí mismos, pero si existiera el 'conjunto de todos los conjuntos' tendríamos un ejemplo de conjunto que pertenece a sí mismo. Consideremos el 'conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos', y llamémoslo **R**; ¿hemos de decir que **R** pertenece a sí mismo, o que no? La paradoja está en que si **R** pertenece a sí mismo, cumplirá la condición mediante la que hemos definido **R**, esto es, no pertenecerá a sí mismo; pero si no pertenece a sí mismo, cumple la condición definitoria, de modo que será un elemento de **R**. Contradicción.

La antinomia de Russell tuvo un efecto directamente destructivo para la teoría fregeana de la aritmética, dado que Frege había introducido un axioma que autorizaba a pasar de un concepto a la clase correspondiente: el principio de comprehensión. Y el ejemplo de concepto dado por Russell, 'conjunto que no pertenece a sí mismo', no podía ser más simple. La relación entre la antinomia y la teoría de Dedekind es algo más compleja, ya que Dedekind no introdujo ningún supuesto fuerte como el de Frege, pero de todas formas sus sucesores consideraron insegura su teoría. En primer lugar, hay que decir que las antinomias tuvieron el efecto de producir inseguridad: necesitamos saber qué conjuntos son admisibles y cuáles no, porque de otro modo podrían esperarnos nuevas antinomias a la vuelta de la esquina, como quien dice. Como la teoría de Dedekind no decía nada a este respecto, es natural que Hilbert y Zermelo la vieran con desconfianza. Pero el argumento que usaron para descartarla fue más directo: aludieron a la demostración de existencia de conjuntos infinitos, el teorema 66 de **QSN**.

El teorema 66 de Dedekind es justamente célebre. En primer lugar, supone el reconocimiento de que es necesario establecer explícitamente la existencia de conjuntos infinitos. En segundo lugar, llevando el logicismo hasta sus últimas consecuencias, trata de ofrecer una demostración puramente lógica de esa existencia, que es muy interesante desde el punto de vista filosófico. En tercer lugar, como nos recuerda la carta a Keferstein, la pretensión última del argumento es justificar nuestra suposición de la existencia de conjuntos infinitos probando que esa noción no encierra contradicción alguna.

Dedekind comienza hablando de "mi universo mental, es decir, la totalidad *S* de todas las cosas que pueden ser objeto de mi pensamiento"; recordemos que todo conjunto es una cosa, de manera que *S* contiene todos los conjuntos que pueden ser objeto de mi pensamiento. Dedekind pretende probar que *S* es infinito, y para ello va a aplicar su definición de infinito (un conjunto *C* es infinito si y sólo si existe una aplicación biyectiva de *C* en una parte propia de *C*). Sea *s* un pensamiento posible; su imagen *f(s)* será el pensamiento '*s* puede ser objeto de mi pensamiento'. Dedekind demuestra que *f* es una aplicación biyectiva indicando que dos proposiciones con distinto sujeto son distintas entre sí;[86] tras ello muestra un elemento de *S* que no tiene la forma *f(s)*, concretamente 'mi propio yo'. Con esto queda demostrado lo que queríamos: *f* es una aplicación biyectiva de *S*, y *f(S)* es parte propia de *S* ya que 'mi propio yo' no es elemento de *f(S)*.[87]

Seguro que esta demostración provocará en cualquier matemático actual una gran desconfianza. Algunos han llegado a decir que se trataría de una demostración de psicología y no de matemática; con ello demuestran más bien su falta de sensibilidad filosófica, junto con su escaso conocimiento del sentido del logicismo en la época. Desde el punto de vista de la epistemología del momento, que a este respecto coincide con la de Kant, la demostración anterior podría considerarse puramente lógica. Además llama la atención el cuidado con que Dedekind ha elegido la aplicación (en la que se debe resaltar el matiz modal de la palabra '*puede*') y el objeto base. Podemos argumentar además que quien se contenta con un axioma de infinito habitualmente lo hace por razones pragmáticas, rebaja las exigencias en cuanto a fundamentación con respecto al nivel exigido por Dedekind: no toma en serio el problema de que sin una demostración de consistencia "permanecerá siempre dudoso si la noción de un tal sistema [infinito] no contendrá quizá contradicciones internas" (carta a Keferstein, punto 7).

Pero el caso es que el conjunto *S* en que se basa Dedekind, 'mi universo mental', es sospechoso de contener el conjunto de todos los conjuntos; este fue el punto capital por donde las antinomias minaron el sistema de Dedekind. Por otro lado, aunque en **QSN** Dedekind formula su teoría de manera abstracta, sin hacer asunciones sobre cómo se forman los conjuntos, es seguro que durante la mayor parte de su vida confió en la transición 'lógica' de conceptos a conjuntos, de manera que sus convicciones fueron fuertemente sacudidas por las antinomias. Sólo un punto de **QSN** nos recuerda la relación clase-concepto o clase-propiedad: las dos formulaciones alternativas del teorema de inducción completa (puntos 59 y 60 del texto). Pero hay muchos otros datos que lo confirman. En 1876, el propio Dedekind dio una reconstrucción racional de cómo llegó a la teoría de ideales en términos del paso de determinadas propiedades a las clases asociadas. En 1887, escribiendo el segundo borrador de **QSN**, nos ofrece algunas confirmaciones más, por ejemplo la siguiente:

> Un sistema puede consistir en *un* elemento, puede también (contradicción) ser *vacío* (no contener ningún elemento).[88]

---

[86] Recordemos que las nociones de sujeto y proposición pertenecen a la lógica tradicional tanto como a la lógica de clases.

[87] La *f*-cadena de 'mi propio yo' nos da además un modelo de 'sistema simplemente infinito', es decir, un modelo de los números naturales.

[88] Al margen anota: "preferible excluir totalmente los sistemas *vacíos*." Desgraciadamente no

O lo que escribe a propósito de la unión de conjuntos:

> Extensión (del concepto) en contraposición a restricción.

Dado que Dedekind creía que el paso de un concepto al conjunto asociado es siempre válido, las antinomias iban a estar directamente en contra de sus convicciones.

8.3. Al parecer, Dedekind conoció las antinomias a través de una comunicación de Cantor hecha en 1899; como escribe éste en una carta a Hilbert del 15.11.1899,

> Este fundamento [de la teoría de conjuntos desde el punto de vista de Cantor] está en *contraposición diametral* con el punto clave de sus investigaciones [de Dedekind], que se encuentra en el supuesto ingenuo de *que todas las colecciones bien definidas, o sistemas*, son siempre «*sistemas consistentes*».
>
> *Se ha convencido usted, pues, de que esta suposición de Dedekind* es *errónea*, cosa que yo, naturalmente, vi *inmediatamente después de la aparición* de la primera edición de su escrito antes citado, año 1887. Pero por supuesto no quería publicar en contra de un hombre de tan grandes méritos en teoría de números y álgebra, antes bien esperé a que hubiera una oportunidad de comentar con él la cuestión, ¡*para que él mismo realizara y publicara las necesarias correcciones en sus investigaciones*!
>
> *Sólo en este otoño* obtuve la oportunidad de hacerlo [...][89]

Este texto de Cantor contiene diversos elementos dudosos, entre otros la idea de que ya en 1887 hubiera conocido las antinomias, aunque quizá las intuyó de alguna forma. Además, los motivos de la amabilidad de Cantor no fueron tan puros como la cita puede hacer; la carta empieza diciendo que la redacción final de un artículo ─que nunca llegó a publicarse─ dependía de la contestación de Dedekind, y dice: "¡Comprenderá usted qué valor debo conceder a sus declaraciones!".

En cualquier caso, está claro que Cantor fue más agudo que Dedekind a propósito del tema de las antinomias. Mientras éste apenas supo reaccionar planteándose los temas discutidos en el fragmento 'Peligros de la teoría de sistemas', y con el tercer prólogo a **QSN**, Cantor supo ver el carácter antinómico del conjunto de todos los alefs y el de todos los ordinales, e intentó explotarlos para demostrar el teorema de buen orden. Es interesante advertir, como hacen Purkert e Ilgauds (*o.c.*), que sus opiniones teológicas le llevaban a esperar que se encontraría alguna contradicción a propósito de conjuntos demasiado grandes: sólo Dios es el infinito absoluto, y todo conjunto transfinito está tan lejos de él como lo finito de lo infinito.

Por pura casualidad existe un testimonio de Dedekind que se refiere a su entrevista con Cantor. En la sección de notas necrológicas del calendario matemático de Teubner (año 1904), se anunció que

---

conocemos las razones de esa decisión, pero este texto concuerda con el final del punto 2 de **QSN**, y sale al paso de las críticas realizadas por Frege en el sentido de que Dedekind habría sido incapaz de concebir el conjunto vacío. Naturalmente que fue capaz, y lo hizo exactamente en los mismos términos que Frege: como la clase asociada a un concepto contradictorio.

[89] Tomado de W. Purkert, H. J. Ilgauds, *Georg Cantor, 1845-1918* (Basel: Birkhäuser, 1987), 154. A continuación aparece el texto citado hacia el final del apartado 6 de esta introducción.

Dedekind había muerto el 4.09.1899. Dedekind escribió al editor diciéndole que quizá acertaran con el dia y el mes de su muerte, pero con el año seguro que no:

> Según mis propias notas, pasé ese dia con toda salud y en estimulante conversación sobre sistema y teoría con mi invitado a comer y estimado amigo Georg Cantor (de Halle), quien en esta ocasión asestó el golpe de muerte no a mi mismo, sino más bien a un error mío.[90]

No caben muchas dudas de que ese error era ni más ni menos que la adhesión a enfoques relacionados de un modo u otro con el principio de comprehensión, y que sugerían ─como dice Cantor─ que todo conjunto bien definido es consistente.

La reacción última de Dedekind al problema de las antinomias puede leerse en el tercer prólogo de su libro, escrito seis dias antes de cumplir la respetable cifra de 80 años. En este texto da el interesante paso de identificar la "facultad creativa de la mente", en la que siempre había creido, con la capacidad de "formar a partir de determinados elementos una nueva cosa determinada, su sistema, necesariamente distinto de cada uno de esos elementos". La restricción de la facultad creativa a algo tan concreto no tiene precedente en sus escritos, e incluso contradice la manera en que se habla de 'creación' en *Continuidad y números irracionales* (aquí, como también en la carta de 1888 a Weber, parece suponerse la capacidad de crear *elementos* y no sólo conjuntos). Dado que lo que se discute en el tercer prólogo es el problema de cómo determinar qué conjuntos son accesibles y cuáles no, parecería que el cambio de postura se debió a la pérdida de confianza en el paso de los conceptos a sus conjuntos asociados. Olvidado esto, sólo quedaba confiar en el procedimiento constructivo que Dedekind había empleado una y otra vez, siempre con buenos resultados.

De esta manera, Dedekind parece abogar finalmente por algo que está en la línea de la concepción iterativa de los conjuntos.[91] Es especialmente interesante notar que por entonces Dedekind conocía desde tiempo atrás el enfoque axiomático de Zermelo, quien le envió una copia de su famoso artículo de 1908.[92] Su teoría era recuperable dentro del marco de Zermelo, pero Dedekind no lo reconoció así en el tercer prólogo. Probablemente el enfoque axiomático estilo Hilbert le resultaba algo extraño, pero sobre todo es plausible que considerara que en el proceso se perdía la generalidad abstracta de sus formulaciones y se contradecía el espíritu de su logicismo. En particular, el recurso de Zermelo a un axioma de infinito, por más que se inspirara directamente en **QSN**, debía parecerle a Dedekind un reconocimiento explícito del carácter no-lógico de esa proposición (véase más arriba).

---

[90] Cit. por E. Landau, 'Richard Dedekind ─ Gedächtnisrede', *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1917), 54.

[91] Sobre la concepción iterativa cf. Hao Wang, 'The concept of set', en P. Benacerraf y H. Putnam, *Philosophy of mathematics: selected readings* (Cambridge University Press, 1983), 530-570.

[92] Cf. V. Peckhaus, 'Ernst Zermelo in Göttingen', *History and Philosophy of Logic* **11** (1990), 35 y 31.