Solución Tarea III Cálculo II

1.- Sean P y Q dos particiones del intervalo $[a,b]$ y f una función acotada en $[a,b]$. Si $Q \supset P$, entonces $U(f,Q) \leq U(f,P)$

Solución:
Caso 1: Un sólo punto extra.
Consideramos el caso donde la partición Q tiene sólo un punto más que la P:
Sean las particiones definidas como:

$$P = \{t_0, t_1, t_2, .., t_{k-1}, t_k, ..., t_n\} \quad tq \quad , t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$$

$$Q = \{t_0, t_1, t_2, .., t_{k-1}, u, t_k, ..., t_n\} \quad tq \quad , t_0 < t_1 < t_2 < ... < u < ... < t_n$$

Sean:

$$M' = max\{f(x)|x \in [t_{k-1}, u]\}$$
$$M'' = max\{f(x)|x \in [u, t_k]\}$$
$$M_k = max\{f(x)|x \in [t_{k-1}, t_k]\}$$

Para probar que:

$$U(f,Q) \leq U(f,P)$$

Basta probar que:

$$M'(u - t_{k-1}) + M''(t_k - u) \leq M_k(t_k - t_{k-1})$$

Esto es porque si $U(f,Q) \leq U(f,P)$

$$\Leftrightarrow \sum_Q M_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_P M_j(t_j - t_{j-1})$$

$$\Leftrightarrow M'(u - t_{k-1}) + M''(t_k - u) + \sum_Q M_i(t_i - t_{i-1}) \leq M_k(t_k - t_{k-1}) + \sum_P M_j(t_j - t_{j-1})$$

$$\Leftrightarrow M'(u - t_{k-1}) + M''(t_k - u) + \cancel{\sum_Q M_i(t_i - t_{i-1})} \leq M_k(t_k - t_{k-1}) + \cancel{\sum_P M_j(t_j - t_{j-1})}$$

$$\Leftrightarrow M'(u - t_{k-1}) + M''(t_k - u) \leq M_k(t_k - t_{k-1})$$

Ahora, como si $B \subset A$ acotado y si $x \in B$:

$$\Rightarrow x \leq Sup(B) \forall x \in B$$

$$\Rightarrow x \leq Sup(A) \forall x \in B$$

$$\Rightarrow Sup(B) \leq Sup(A)$$

Por lo que se concluye:

$$M' \leq M_k \tag{1}$$

$$M'' \leq M_k \tag{2}$$

Por lo que:

$$\Rightarrow M_k(t_k - t_{k-1}) = M_k(t_k + 0 - t_{k-1})$$
$$\Rightarrow = M_k(t_k + u - u - t_{k-1})$$
$$\Rightarrow = M_k(t_k - u) + M_k(u - t_{k-1})$$

Por 1 y 2:

$$\Rightarrow \geq M'(t_k - u) + M''(u - t_{k-1})$$

$$\therefore M_k(t_k - t_{k-1}) \geq M'(t_k - u) + M''(u - t_{k-1})$$
$$\therefore U(f,Q) \leq U(f,P) \quad \blacksquare$$

Caso 2: Caso general para n puntos
Suponemos que Q tiene n puntos más que P:

$$Q = \{t_0, t_1, t_2, .., t_{k-1}, u_1, u_2, ...u_n, t_k, ..., t_n\}$$

Sean Q_i una serie de particiones contenidas en Q , cada una con un punto más que la anterior, es decir:

$$\begin{array}{rcc} Q_1 & = & \{t_0, t_1, t_2, .., t_{k-1}, u_1, t_k, ..., t_n\} \\ Q_2 & = & \{t_0, t_1, t_2, .., t_{k-1}, u_1, u_2, t_k, ..., t_n\} \\ Q_3 & = & \{t_0, t_1, t_2, .., t_{k-1}, u_1, u_2, u_3, t_k, ..., t_n\} \\ \vdots & & \\ Q_n & = & \{t_0, t_1, t_2, .., t_{k-1}, u_1, u_2, ...u_n, t_k, ..., t_n\} \end{array}$$

Por lo que se puede apreciar que:

$$P_1 \subset Q_2 ... \subset Q_n = Q$$

Y como cada una tiene un punto más que la anterior, cumplen con las hipótesis de la parte 1, por lo que se puede extrapolar la prueba y decir que:

$$U(f,P) \leq U(f,Q_1) \leq U(f,Q_2) \leq ... \leq Q(f,Q)$$

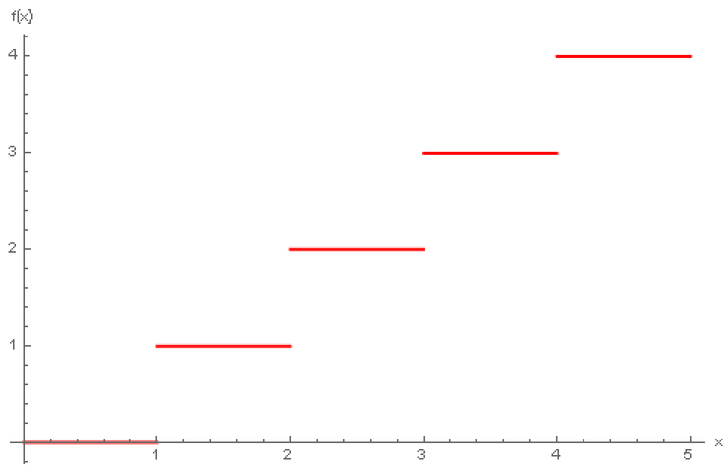
Finalmente, por transitividad:

$$U(f,P) \leq U(f,Q) \quad \blacksquare$$

2.- Calcular las integrales:

$$a. \int_0^5 [x]dx \qquad b. \int_{-1}^{2} [3x] - [x]dx \qquad c. \int_{-1}^{1} |2x+1|dx$$

Solución:
Para la integral a., recordemos que: $[x] = n$ si $n \leq x < n+1$
Su gráfica es:



Por lo que separando la integral en los enteros para los 5 valores que se aprecian en la gráfica:

$$= \int_0^1 [x]dx + \int_1^2 [x]dx + \int_2^3 [x]dx + \int_3^4 [x]dx + \int_4^5 [x]dx$$

Sustituyendo el valor de la función en cada intervalo: se aprecian en la gráfica:

$$= \int_0^1 0dx + \int_1^2 1dx + \int_2^3 2dx + \int_3^4 3dx + \int_4^5 4dx$$

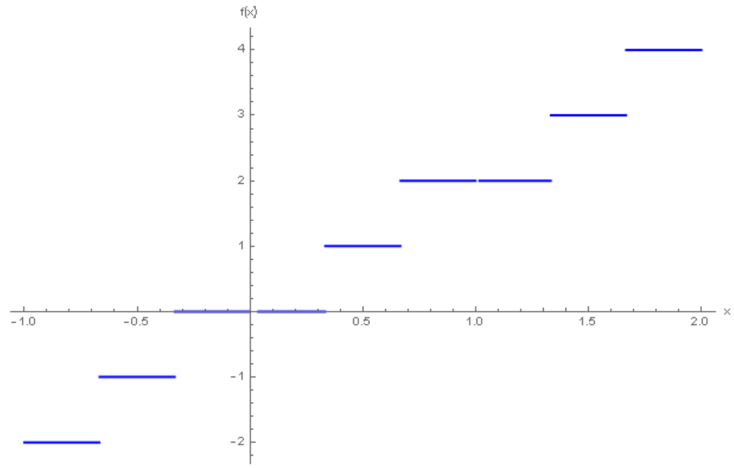
Integrando de acuerdo al teorema de la integral de una función constante:

$$0(1-0) + 1(2-1) + 3(4-3) + 4(5-4) = 1+2+3+4 = 10$$

Por lo que la respuesta es:

$$\therefore \int_0^5 [x]dx = 10 \quad \blacksquare$$

Para la integral $b.$, su gráfica es:



Primero separamos la integral en dos integrales:

$$\int_{-1}^{2}[3x]-[x]dx=\int_{-1}^{2}[3x]dx-\int_{-1}^{2}[x]dx$$

La segunda integral se resuelve análogamente a la integral a.:

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2}[x]dx=\int_{-1}^{0}[x]dx+\int_{0}^{1}[x]dx+\int_{1}^{2}[x]dx=-1+0+1=0$$

Para la segunda integral separamos cada entero en tres partes ya que,como está un 3 dentro de la función menor entero, cada intervalo con longitud 1 da 3 valores enteros distintos, por lo que:

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2}[3x]dx=\int_{-1}^{-\frac{2}{3}}[3x]dx+\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}}[3x]dx+\int_{-\frac{1}{3}}^{0}[3x]dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{3}}[3x]dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}[3x]dx+\int_{\frac{2}{3}}^{1}[3x]dx$$

$$=\int_{1}^{\frac{4}{3}}[3x]dx+\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}[3x]dx+\int_{\frac{5}{3}}^{2}[3x]dx$$

Sustituyendo los valores:

$$\Rightarrow=\int_{-1}^{-\frac{2}{3}}-3dx+\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{3}}-2dx+\int_{-\frac{1}{3}}^{0}-1dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{3}}0dx+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}1dx+\int_{\frac{2}{3}}^{1}2dx$$

$$=\int_{1}^{\frac{4}{3}}3dx+\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}}4dx+\int_{\frac{5}{3}}^{2}5dx$$

Integrando como una función constante, notando que en las nueve integrales la diferencia del límite superior e inferior es la misma: $b-a=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow=-\frac{3}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow=\cancel{-\frac{3}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}+0\cancel{+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}}+\frac{4}{3}+\frac{5}{3}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

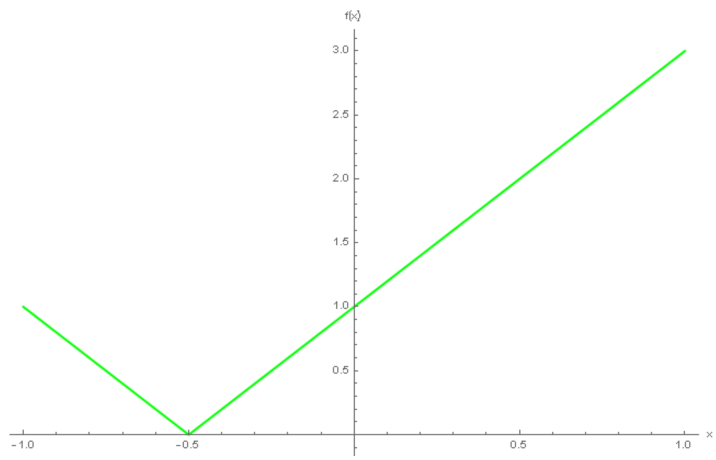
Por lo que:

$$\int_{-1}^{2} [3x] - [x] dx = 3 - 0 = 3$$

Siendo el resultado:

$$\therefore \int_{-1}^{2} [3x] - [x] dx = 3 \quad \blacksquare$$

En la integral c., su gráfica es:



Como es un valor absoluto, debemos identificar donde la el argumento de la función es positivo y donde es negativo, por lo que igualamos a cero y despejamos:

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Es decir:

$$2x + 1 = \begin{cases} 2x + 1 < 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ 2x + 1 \geq 0 & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por lo que el velos absoluto queda:

$$|2x + 1| = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ \ \ 2x + 1 & \text{si } x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Para esto, separamos la integral en el intervalo positivo y negativo:

$$\int_{-1}^{1} |2x + 1| dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} |2x + 1| dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} |2x + 1| dx$$

Sustituyendo el valor de la función:

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} -2x - 1 dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} 2x + 1 dx$$

Separando e integrando:

$$-\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} 2x dx - \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} 2x dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= -x^2 \,\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}} - \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + x^2 \,\Big|_{-\frac{1}{2}}^{1} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 1 + 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} \\
&= 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Por lo que la respuesta es:

$$
\therefore \int_{-1}^{1} |2x+1| dx = \frac{5}{2} \quad \blacksquare
$$

3.- Encontrar en cada caso $F'(x)$:

$$a.\ F(x) = \int_0^{x^2} \frac{sin(2t)}{1+t^2}dt \qquad b.\ F(x) = \int_x^{x^2} \frac{2}{(1+t^2)^2}dt \quad \text{para } x > 1$$

Solución:
Para la integral a. definimos las funciones de apoyo:

$$f(x) = \int_0^{x} \frac{sin(2t)}{1+t^2}dt \qquad g(x) = x^2$$

$$\Rightarrow F(x) = f \circ g(x)$$

Por lo que derivando con regla de la cadena:

$$\Rightarrow F'(x) = (f \circ g)'(x) \cdot g'(x)$$

Por el TFC tenemos que:

$$f'(x) = \frac{sin(2x)}{1+x^2}$$

Y sabemos que $g'(x) = 2x$ Por lo que sustituyendo los valores:

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{sin\left(2\left(x^2\right)\right)}{1+(x^2)^2}(2x)$$

Simplificando y reordenando:

$$\therefore F'(x) = 2x\frac{sin\left(2\left(x^2\right)\right)}{1+x^4} \quad \blacksquare$$

Para la integral b. primero hay que separarla en 2 integrales ya que tiene una variable x tanto en el límite superior como en el inferior y el TFC requiere que el límite inferior sea una constante:

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{2}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^{x^2} \frac{2}{(1+t^2)^2}dt + \int_x^{0} \frac{2}{(1+t^2)^2}dt$$

Invirtiendo la segunda:

$$= \int_0^{x^2} \frac{2}{(1+t^2)^2}dt - \int_0^{x} \frac{2}{(1+t^2)^2}dt$$

Definiendo las funciones de apoyo:

$$f(x) = \int_0^{x} \frac{2}{(1+t^2)^2}dt \qquad g(x) = x^2$$

Por lo que la función queda:

$$\Rightarrow F(x) = f \circ g(x) - f(x)$$

Derivando con la regla de la cadena:

$$\Rightarrow F'(x) = (f \circ g)'(x) \cdot g'(x) - f'(x)$$

Como:

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} \qquad g'(x) = 2x$$

Por lo que:

$$F'(x) = \frac{2}{(1+(x^2)^2)^2}(2x) - \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

Por lo que simplificando el resultado es:

$$\therefore F'(x) = \frac{4x}{(1+x^4)^2} - \frac{2}{(1+x^2)^2} \quad \blacksquare$$

4.- Sea $\int_0^x f(t)dt = \sqrt{1+x^2} - 1$ Calcular $f(1)$

Solución:
Derivando de ambos lados, utilizando el TFC del lado izquierdo y la regla de la cadena en el lado derecho:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x) - 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Evaluando $f(1)$

$$\Rightarrow f(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo que la solución es:

$$\therefore f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \blacksquare$$

5.-Una función f es continua para cualquier x y satisface la ecuación:

$$\int_0^x f(t)dt = -\frac{1}{2} + x^2 + xsin(2x) + \frac{cos(2x)}{2}$$

para todo x. Calcular $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Solución:
Derivando de ambos lados, utilizando el TFC del lado izquierdo y la regla de la cadena en el lado derecho:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2} + x^2 + xsin(2x) + \frac{cos(2x)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + 2xcos(2x) + sin(2x) - sin(2x)$$

$$= 2x + 2xcos(2x)$$

$$= 2x(1 + cos(2x))$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x(1 + cos(2x))$$

Evaluando:

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(1 + cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1 + cos\left(\times\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}(1 + 0) = \frac{\pi}{2}$$

Por lo que el primer resultado es:

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \blacksquare$$

Derivando nuevamente para la segunda parte:

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(-sin(2x))2 + 2(1 + cos(2x))$$

$$= -4xsin(2x) + 2(1 + cos(2x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = -4xsin(2x) + 2(1 + cos(2x))$$

Evaluando:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(\frac{\pi}{4}\right)sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(1 + cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= -\pi sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\left(1 + cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$-\pi(1) + 2(1 + 0) = 2 - \pi$$

Finalmente, el segundo resultado es:

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \pi \quad \blacksquare$$