Tarea 3

Rigoberto Canseco López

1. Sean P y Q dos particiones del intervalo $[a, b]$ y f una función acotada en $[a, b]$. Si $Q \supset P$ entonces $U(f, Q) \leq U(f, P)$

Si Q y P son dos particiones tales que $Q \supset P$, entonces $L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P)$. Como $Q \supset P$ por lo tanto Q contiene un elemento más que P.

Supongamos que

$$P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \quad Q = \{t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, u, t_k, \ldots, t_n\}$$

Tenemos que

$$M' = sup\,\{f(x) \mid x \in [t_{k-1}, u]\}$$
$$M'' = sup\,\{f(x) \mid x \in [u, t_k]\}$$

Sabemos que

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$
$$L(f, Q) = \sum_{i=1}^{k-1} M_i(t_i - t_{i-1}) + M'(u - t_{k-1}) + M''(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

Por demostrar que

$$U(f, Q) \leq U(f, P)$$

Basta demostrar que

$$M'(u - t_{k-1}) + M''(t_k - u) \leq M_k(t_k - t_{k-1})$$

Recordemos que si $A \subset B$ y ambos conjuntos están acotados inferiormente, entonces

$$sup\ A \geq x \text{ Para todo } x \in A$$

en particular

$$sup\ A \geq b \text{ para todo } b \in B \supset A$$

de donde

$$sup\ A \geq sup\ B$$

Como $[t_{k-1}, u] \subset [t_{k-1}, t_k]$, entonces

$$M_k \geq M'$$

Análogamente como $[u, t_k] \subset [t_{k-1}, t_k]$, entonces

$$M_k \geq M''$$

Así

$$\begin{aligned} M_k(t_k - t_{k-1}) &= M_k(t_k - u + u - t_{k-1}) \\ &= M_k(t_k - u) + M_k(u - t_{k-1}) \\ &= M_k(t_k - u) + M_k(u - t_{k-1}) \\ &\geq M'(t_k - u) + M''(u - t_{k-1}) \end{aligned}$$

Por tanto

$$U(f, P) \geq U(f, Q) \quad \blacksquare$$

---

2. Calcular las siguientes integrales

a. $\int_0^5 [x]\ dx$

b. $\int_{-1}^2 [3x] - [x]\ dx$

c. $\int_{-1}^1 |2x+1|\ dx$

Lo primero que hay que hacer es identificar el punto donde el argumento vale cero, debido a que la función valor absoluto depende de si su argumento es positivo o negativo.

$$\begin{gathered} 2x+1=0 \\ x=-1/2 \end{gathered}$$

La solución encontrada es $x=-1/2$, quiere decir que en $x<-1/2$, el argumento de la función es negativo y en $x \geq -1/2$ positivo; por lo que separando la integral en ambos intervalos:

$$\int_{-1}^{1} |2x+1|\ dx = \int_{-1}^{-1/2} |2x+1|\ dx + \int_{-1/2}^{1} |2x+1|\ dx$$

Sustituyendo el valor absoluto:

$$\begin{gathered} |2x+1| = -(2x+1) = -2x-1 \quad \text{si } x<-1/2 \\ |2x+1| = 2x+1 = \quad \text{si } x \geq -1/2 \end{gathered}$$

Tenemos que la integral es

$$= \int_{-1}^{-1/2} -2x-1\ dx + \int_{-1/2}^{1} 2x+1\ dx$$

Separando las integrales de acuerdo a las notas del **(pdf 1, pag-17-18)**

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^{-1/2} -2x\ dx + \int_{-1}^{-1/2} -1\ dx + \int_{-1/2}^{1} 2x\ dx + \int_{-1/2}^{1} 1\ dx \\ &= -2\int_{-1}^{-1/2} x\ dx - 1\int_{-1}^{-1/2}\ dx + 2\int_{-1/2}^{1} x\ dx + 1\int_{-1/2}^{1}\ dx \\ &= -2(x^2/2) - x + 2(x^2/2) + x \end{aligned}$$

Realizando las integrales, de acuerdo a las notas del **(pdf 1, pag-17-18)**

$$\begin{aligned} &= -2((-1/2)^2/2 - (-1)^2/2) - (-1/2+1) \\ &+ 2((1)^2/2 - (-1/2)^2/2) - (1+1/2) \\ &= 1/4 + 9/4 = 10/4 = 5/2 \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_{-1}^{1} |2x+1|\ dx = \frac{5}{2}$ ■

3. Encontrar en cada caso $F'(x)$

a. $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{sen\ 2t}{1+t^2}\ dt$

Para resolver esta derivada, es útil tratarla como una composición de funciones, tenemos que:

$$f(x) = \int_0^x \frac{sen\ 2t}{1+t^2} dt \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

Por lo que, por regla de la cadena tenemos que $F(x) = f(g(x))$ por lo tanto, usando el TFC y las reglas de derivación:

$$f'(x) = \frac{sen\ 2x}{1+x^2} \quad \text{y} \quad g'(x) = 2x$$

Sustituyendo los valores de g, f', g'. Tenemos:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= f'(x^2)(2x) \\ &= 2x\frac{sen\ 2x^2}{1+x^4} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Por lo que $F'(x) = 2x\frac{sen\ 2x^2}{1+x^4}$

---

b. $\int_z^{x^2} \frac{2}{(1+t^2)^2}\ dt$ para $x > 1$

Para resolver esta derivada, es útil tratarla como una composición de funciones, tenemos que:

$$f(x) = \int_z^x \frac{2}{(1+t^2)^2} dt \quad \text{y} \quad g(x^2)$$

Por lo que, por regla de la cadena tenemos que $F(x) = f(g(x))$ por lo tanto, usando el TFC y las reglas de derivación:

$$f'(x) = \frac{2}{(1+t^2)^2} \quad \text{y} \quad g'(x) = 2x$$

Sustituyendo los valores de g, f', g'. Tenemos:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x))(g'(x)) \\ &= f'(x^2)2x \\ &= \frac{4x}{(1-x^4)^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Por lo que $F'(x) = \frac{4x}{(1-x^4)^2}$

---

4. Sea $\int_0^x f(t)\,dt = \sqrt{1+x^2} - 1$ Calcular $f(1)$

Para obtener la forma explícita de $f(x)$ hay que derivar utilizando el TFC.

Derivando ambas partes de la ecuación y aplicando el TFC del lado izquierdo:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right)$$

$$\text{Usando las reglas de derivación tenemos que:}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Evaluamos la ecuación en el punto $f(1)$

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

---

5. Una función f es continua para cualquier x y satisface la ecuación $\int_0^x f(t)\,dt = -\frac{1}{2} + x^2 + xsen\ 2x + \frac{cos\ 2x}{2}$ para todo x. Calcular $f(\frac{\pi}{4})$ y $f'(\frac{\pi}{4})$

Para obtener la forma explícita de $f(x)$ hay que derivar utilizando el TFC.

Derivando ambas partes de la ecuación y aplicando el TFC del lado izquierdo:

$$\frac{d}{dx}(\int_0^x f(t)\ dt) = \frac{d}{dx}(-\frac{1}{2} + x^2 + xsen\ 2x + \frac{cos\ 2x}{2})$$
$$\text{Usando las reglas de derivación tenemos que:}$$
$$f(x) = 2x(cos\ 2x + 1)$$

Evaluamos la ecuación en el punto $f(\pi/4)$

$$\begin{aligned} f(\pi/4) &= 2x(cos\ 2x + 1) \\ &= 2(\pi/4)(cos\ 2(\pi/4) + 1) \\ &= (\pi/2)(cos\ (\pi/2) + 1) \\ &= \pi/2(0+1) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(\pi/4) = \frac{\pi}{2}$ ■

Para calcular $f'(\pi/4)$ primero obtenemos $f'(x)$

$$f(x) = 2x(cos(2x) + 1)$$
$$\text{Usando las reglas de derivación tenemos que:}$$
$$f'(x) = 2(-2xsen\ (2x) + cos\ (2x) + 1)$$

Evaluamos la ecuación en el punto $f'(\pi/4)$

$$\begin{aligned} f'(\pi/4) &= 2(-2xsen\ (2x) + cos\ (2x) + 1) \\ &= 2(-2(\pi/4)sen(2(\pi/4)) + cos(2(\pi/4)) + 1) \\ &= 2((-\pi/2)sen(\pi/2) + cos(\pi/2) + 1) \\ &= 2((-\pi/2)1 + 0 + 1) \\ &= 2(-\pi/2)1 + 2 \\ &= -\pi + 2 \\ &= 2 - \pi \end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(\pi/4) = 2 - \pi$ ■
