Operaciones binarias y estructuras algebraicas

1. Sea * la operación binaria definida en $\mathbb{N}$ por:

$$a * b = ab + 1$$

   Determina si * es asociativa y/o conmutativa. Justifica tu respuesta.

2. Sea * la operación binaria definida en $\mathbb{Z}$ por:

$$a * b = a + b - 1$$

   Determina si * es asociativa y/o conmutativa. Justifica tu respuesta.

3. Completa la siguiente tabla de modo que la operación binaria en $A = \{a, b, c, d\}$ sea conmutativa.

$+$	a	b	c	d
a	b	c	-	b
b	-	a	-	b
c	a	c	d	-
d	-	-	a	c

4. Sea X un conjunto no vacío. ¿Son monoides los siguientes? Justifica.
   (a) $\mathcal{P}(X)$ con la unión
   (b) $\mathcal{P}(X)$ con la intersección
   (c) $\mathbb{N}$ con la suma
   (d) $\mathbb{N}$ con el producto

5. Demuestra que $\mathbb{Z}$ con la operación $a * b = a + b - ab$ es un monoide.

Grupos

1. En cada inciso Determina si el conjunto con la operación indicada es un grupo.
   (a) $\mathbb{Z}$ con la resta
   (b) $\mathcal{P}(X)$ con la unión
   (c) El conjunto $\mathcal{P}(X)$ con la intersección
   (d) El conjunto $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. Sean G_1 y G_2 grupos, $G = G_1 \times G_2$ y la operación $*$ definida como
   $$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$$
   ¿G es grupo? Justifica tu respuesta.
3. Demuestra que si G es un grupo abeliano, entonces $(ab)^n = a^nb^n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.
4. Sea G tal que todo elemento es su propio inverso. Demuestra que G es abeliano.
5. Sea G un grupo, y sean $a, b \in G$ tales que $(ab)^2 = a^2b^2$. Demuestra que $ab = ba$.
6. Demuestra que si H y K son subgrupos del grupo G entonces $H \cap K$ es un subgrupo de G.
7. Sea G un grupo y sea $a \in G$. El **normalizador** de G es el conjunto:
   $$N(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$$
   Demuestra que el conjunto $N(a)$ es un subgrupo de G.

   Definición. Una función, f entre dos grupos G, H es un *homomorfismo* si
   $$f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$$
   es decir, si la función preserva las operaciones respectivas. Un homomorfismo biyectivo, se llama *isomorfismo.*

8. Sea G un grupo. Demuestra que la función $f : G \to G$ definida por $f(a) = a^{-1}$ es un isomorfismo si y solo si G es abeliano.
9. Sea G un grupo. Demuestra que la función $f : G \to G$ definida por $f(a) = a^2$ es un homomorfismo si y solo si G es abeliano.

10. Sea X un conjunto. Sea $G = \mathcal{P}(X)$, el conjutnos potencia de X. Sea $\ast : G \times G \to G$ definida como:

$$A \ast B = A \cap B \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X)$$

¿Qué tipo de estructura forma el par $\langle G, \ast \rangle$? Describe todas las propiedades que encuentres.

11. Sea $\langle G, \ast \rangle$ un grupo abeliano y sea $x \in G$. Demuestra que el inverso de x respecto a $\ast$ es único. ¿Existen grupos en donde los inversos no sean únicos?

12. Sea $G = \{a, b\}$, ¿cuántos grupos distintos se pueden definir en G?

13. Sea $G = \{a, b, c\}$, define un par de operaciones $\ast_1$ y $\ast_2$ de forma que $\langle G, \ast_1 \rangle$ sea un grupo abeliano pero $\langle G, \ast_2 \rangle$ sea un grupo no abeliano, y que a sea el neutro en ambos grupos.

Anillos

1. Sea $A = \mathbb{Z}$ con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas como:

$$a \oplus b = a + b - 1 \text{ y } a \odot b = a + b - ab$$

muestra que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con elemento unitario. ¿Es un dominio entero?

2. Sea X un conjunto arbitrario pero fijo, y sea $A = \mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia de X con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas como:

$$V \oplus W = V \cup W - V \cap W \text{ y } V \odot W = V \cap W$$

muestra que $(A, \oplus, \odot)$ es un anillo. ¿Es conmutativo? ¿Tiene elemento unitario? ¿Es un dominio entero?

3. Sea $A = \mathbb{Z}$ con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas como:

$$a \oplus b = a + b - 7 \text{ y } a \odot b = a + b - 3ab$$

Explicar por qué $(A, \oplus, \odot)$ no es un anillo.

4. Demuestra que el producto en $M_2(D)$ es asociativo.

5. Demuestra que se cumplen las propiedades distributivas en $M_2(D)$.

6. Sea A un anillo con elemento unitario. Demuestra que si a, b son unidades en A, entonces ab también es una unidad en A.

7. Utilizar inducción matemática para probar las leyes de los exponentes.