Tarea 5

Rigoberto Canseco López

Calcular las siguientes integrales

1. $\int \cot^3 x \; dx$

Solución

Usando la fórmula $\int \cot^n(x)\; dx = -\frac{\cot^{n-1}(x)}{n-1} - \int \cot^{-2+n}(x)\; dx$, donde $n = 3$

$$= -\frac{1}{2}\cot^2 x - \int \cot x \; dx$$

$$\text{Reemplazamos } \cot x \text{ por } \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= -\frac{1}{2}\cot^2 x - \int \frac{\cos x}{\sin x}\; dx$$

Para la integral $\frac{\cos x}{\sin x}$, substituimos $u = \sin x$ y $du = \cos x \; dx$

$$= -\frac{1}{2}\cot^2 x - \int \frac{1}{u}\; dx$$

La integral de $\frac{1}{u}$ es $\ln u$

$$-\ln u - \frac{1}{2}\cot^2 x + C$$

Sustituyendo u por $\sin x$

$$= -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln(\sin x) + C \quad \blacksquare$$

2. $\int x^6 \sin x \; dx$

Solución

Por integración por partes para $x^6 \sin x$

$$\int u \; dv = uv - \int v \; du$$

$$u = x^6, \quad du = 6x^5 \; dx, \quad dv = \sin x \; dx, \quad v = -\cos \; x$$

Tenemos que

$$= -x^6 \cos x + 6\int x^5 \cos x \; dx$$

Por integración por partes para $x^5 \cos x$

$$\int u \; dv = uv - \int v \; du$$

$$u = x^5, \quad du = 5x^4 \; dx, \quad dv = \cos x \; dx, \quad v = \sin \; x$$

Tenemos que

$$= -x^6 \cos x + 6x^5 \sin x - 30\int x^4 \sin x \; dx$$

Por integración por partes para $x^4 \sin x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$u = 30x^4, \quad du = 4x^3\ dx, \quad dv = \sin x\,dx, \quad v = -\cos\ x$$

Tenemos que

$$= 30x^4\cos x - x^6\cos x + 6x^5\sin x - 120\int x^3\cos x\ dx$$

Por integración por partes para $x^3\cos x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$u = x^3, \quad du = 3x^2\ dx, \quad dv = \cos x\,dx, \quad v = \sin\ x$$

Tenemos que

$$= 30x^4\cos x - x^6\cos x + 6x^5\sin x - 120x^3\sin x + 360\int x^2\sin x\ dx$$

Por integración por partes para $x^2\sin x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$u = x^2, \quad du = 2x\,dx, \quad dv = \sin x\,dx, \quad v = -\cos\ x$$

Tenemos que

$$= 30x^4\cos x - x^6\cos x + 6x^5\sin x - 120x^3\sin x - 360x^2\cos x + 720\int x\cos x\ dx$$

Por integración por partes para $x\cos x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$u = x, \quad du = dx, \quad dv = \cos x\,dx, \quad v = \sin\ x$$

Tenemos que

$$= 30x^4\cos x - x^6\cos x + 6x^5\sin x - 120x^3\sin x - 360x^2\cos x + 720x\sin x - 720\int \sin x\ dx$$

La integral de $\sin x$ es $cosx$

$$= 30x^4\cos x - x^6\cos x + 6x^5\sin x - 120x^3\sin x - 360x^2\cos x + 720x\sin x - 720\cos x + C$$

Factorizando

$$= 6x(x^4 - 20x^2 + 120)\sin x - (x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720)\cos x + C \quad \blacksquare$$

3. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ dx$

Solución

Por integración por partes para $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$u = \ln x, \quad du = 1/x\ dx, \quad dv = 1/\sqrt{x}\ dx, \quad v = 2\sqrt{x}$$

Tenemos que

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

La integral de $1/\sqrt{x}$ es $2\sqrt{x}$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

Factorizando

$$= 2\sqrt{x}(\ln(x) - 2) + C \quad \blacksquare$$

4. $\int 3^x \cos x \, dx$

Solución

Por integración por partes para $3^x \cos x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$u = \cos x, \quad du = -\sin x\,dx, \quad dv = 3^x\,dx, \quad v = 3^x / \ln 3$$

Tenemos que

$$= \frac{3^x \cos x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\int 3^x \sin x\,dx$$

Por integración por partes para $3^x \sin x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$u = \sin x, \quad du = \cos x\,dx, \quad dv = 3^x\,dx, \quad v = 3^x / \ln 3$$

Tenemos que

$$= \frac{3^x \sin x}{\ln^2 3} + \frac{3^x \cos x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln^2 3}\int 3^x \cos x\,dx$$

Agregamos $\frac{1}{\ln^2 3}\int 3^x \cos x dx$ a las dos partes

$$(1 + \frac{1}{\ln^2 3})\int 3^x \cos x dx = \frac{3^x \sin x}{\ln^2 3} + \frac{3^x \cos x}{\ln 3} + C$$

Dividiendo entre $1 + \frac{1}{\ln^2 3}$

$$\int 3^x \cos x dx = \frac{\frac{3^x \sin x}{\ln^2 3} + \frac{3^x \cos x}{\ln 3}}{1 + \frac{1}{\ln^2 3}} + C$$
$$\frac{3^x(\sin x + \ln 3 \cos x)}{1 + \ln^2 3} + C \quad \blacksquare$$

5. $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$

Solución

Por integración por partes para $e^{2x} \sin 3x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$
$$u = \sin 3x, \quad du = 3\cos 3x \, dx, \quad dv = e^{2x} \, dx, \quad v = e^{2x}/2$$

Tenemos que

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x} \cos 3x \, dx$$

Por integración por partes para $e^{2x} \cos 3x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$
$$u = \cos 3x, \quad du = -3\sin 3x \, dx, \quad dv = e^{2x} \, dx, \quad v = e^{2x}/2$$

Tenemos que

$$= \frac{1}{2}e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x} \cos 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x} \sin 3x \, dx$$

Agregamos $\frac{9}{4}\int e^{2x} \sin 3x \, dx$ en ambas partes

$$\frac{13}{4}\int e^{2x} \sin 3x \, dx = \frac{1}{2}e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x} \cos 3x \cancel{- \frac{9}{4}\int e^{2x} \sin 3x \, dx + \frac{9}{4}\int e^{2x} \sin 3x \, dx}$$

Multiplicando ambas partes por $4/13$

$$\int e^{2x} \sin 3x \, dx = \frac{4}{13}(\frac{1}{2}e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x} \cos 3x) + C$$

Factorizando

$$= \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3e^{2x} \cos 3x) + C \quad \blacksquare$$

6. $\int \arctan x \, dx$

Solución

Por integración por partes para $\arctan x$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$
$$u = \arctan x, \quad du = 1/(x^2+1) \, dx, \quad dv = dx, \quad v = x$$

Tenemos que

$$= x \arctan x - \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

Sustituimos la integral $x/(x^2+1)$ por $u = x^2 + 1$ y $dU = 2x \, dx$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du$$

La integral de $1/u$ es $\ln x$

$$= x \arctan x - \frac{\ln u}{2} + C$$

Se sustituye $u = x^2 + 1$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + C \quad \blacksquare$$

7. $\int (x^2 + 2x)\sqrt[4]{x^3 + 3x^2 + 9}\ dx$

Solución

Para la integral $(x^2 + 2x)\sqrt[4]{x^3 + 3x^2 + 9}$, sustituimos $u = x^3 + 3x^2 + 9$ y $du = (3x^2 + 6x)$

$$= \frac{1}{3}\int \sqrt[4]{u}\ du$$

La integral de $\sqrt[4]{u}$ es $4u^{5/4}/5$

$$= \frac{4u^{5/4}}{15} + C$$

Sustituimos $u = x^3 + 3x^2 + 9$

$$= \frac{4}{15}(x^3 + 3x^2 + 9)^{5/4} + C \quad \blacksquare$$

8. $\int \sec x \tan x \cos(\sec x)\ dx$

Solución

Para la integral $\tan x \sec x \cos(\sec x)$, sustituimos $u = \sec x$ y $du = \tan x \sec x dx$

$$= \int \cos u\ du$$

La integral de $\cos u$ es $\sin u$

$$= \sin u + C$$

Sustituyendo de $u = \sec x$

$$= \sin \sec x + C \quad \blacksquare$$