Geometría Analítica II | Lista de ejercicios

Alumno: ** *Rigoberto Canseco López*

1. Escribe las *ecuaciones canónicas* de las cónicas indicando qué cumple cada una.

2. De todas las formas de ecuación de las siguiente rectas:

a) Tiene vector director $(3, 3, 1)$ y pasa por $(0, 4, 2)$

Usando la ecuación paramétrica $\ell : (x, y, z) = P + \lambda v$

Donde: $P = (0, 4, 2) \quad \text{y} \quad v = (3, 3, 1)$

$$\begin{aligned}
\ell : (x, y, z) &= P + \lambda v \\
&= (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \\
&= (0, 4, 2) + \lambda(3, 3, 1) \\
&= (0, 4, 2) + (\lambda 3, \lambda 3, \lambda 1) \\
&= (0 + \lambda 3, 4 + \lambda 3, 2 + \lambda 1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{gathered}
x = x_0 + \lambda v_1, \quad x - x_0 = \lambda v_1, \quad \frac{x - x_0}{v_1} = \lambda \\
\frac{x - 0}{3} = \lambda \\
y = y_0 + \lambda v_2, \quad y - y_0 = \lambda v_2, \quad \frac{y - y_0}{v_2} = \lambda \\
\frac{y - 4}{3} = \lambda \\
z = z_0 + \lambda v_3, \quad z - z_0 = \lambda v_3, \quad \frac{z - z_0}{v_3} = \lambda \\
\frac{z - 2}{1} = \lambda
\end{gathered}$$

La ecuación simétrica está dada por:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{x-0}{3} &= \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{1} \\
\frac{x}{3} &= \frac{y-4}{3} = z-2
\end{aligned}
$$

b) Pasa por $(1,-2,5)$ y por $(3,-3,4)$

La ecuación paramétrica es $\ell:(x,y,z)=P+\lambda v$

Calculamos el vector v que es la diferencia de P_1 y P_2

Tenemos los siguientes puntos $P_1(1,-2,5)$ y $P_2(3,-3,4)$

El vector director es:

$$
\begin{aligned}
v =& P_1 - P_2 \\
=&(1,-2,-5)-(3,-3,4) \\
=&(1-3,-2+3,-5-4) \\
=&(-2,1,-9)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la ecuación paramétrica para el punto P_1 es:

$$
\begin{aligned}
\ell:(x,y,z) &= P+\lambda v \\
&= (x_0,y_0,z_0)+\lambda(v_1,v_2,v_3) \\
&= (1,-2,5)+\lambda(-2,1,-9)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la ecuación paramétrica para el punto P_2 es:

$$
\begin{aligned}
\ell:(x,y,z) &= P+\lambda v \\
&= (x_0,y_0,z_0)+\lambda(v_1,v_2,v_3) \\
&= (3,-3,4)+\lambda(-2,1,-9)
\end{aligned}
$$

La ecuación simétrica está dada por:

$$
\frac{x-x_1}{x_2-x1} = \frac{y-y_1}{y_2-y1} = \frac{z-z_1}{z_2-z1}
$$

Por lo tanto tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{3-1} &= \frac{y-(-2)}{3-(-2)} = \frac{z-5}{4-5} \\
\frac{x-1}{3-1} &= \frac{y+2}{3+2} = \frac{z-5}{4-5}
\end{aligned}
$$

c) Tiene como vector director al vector normal de los vectores $(1,1,1)$ y $(-1,0,2)$ y que pasa por el punto $(4,2,1)$

3. Encuentra la ecuación del plano cuyo vector normal es el $(3,-1,5)$ y que contiene el punto $(2,-1,0)$

La ecuación del plano es $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, donde nuestro vector normal es $v(A, B, C) = (3, -1, 5)$ y nuestro punto $P(x_0, y_0, z_0) = (2, -1, 0)$

Sustituyendo el punto P en la ecuación del plano $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{gathered} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D \end{gathered}$$

Sustituyendo los valores de el v y P en la ecuación de arriba nos queda que:

$$\begin{aligned} & Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D \\ & = (3)(2) + (-1)(-1) + (5)(0) = -D \\ & = 6 + 1 + 0 = -D \\ & = 7 = -D \end{aligned}$$

Por lo tanto $D = -7$

Por último tenemos que la ecuación de plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, sustituimos los valores del vector normal v y de D.

$$\begin{gathered} Ax + By + Cz + D = 0 \\ (3)x + (-1)y + (5)z + (-7) = 0 \\ 3x - y + 5z - 7 = 0 \end{gathered}$$

4. Encuentra la ecuación del plano que pasa por los puntos $(3, 4, 1), (-1, -2, -5)$ y $(1, 7, 1)$

Tenemos tres puntos $P_1(3, 4, 1)$, $P_2(-1, -2, -5)$ y $P_3(1, 7, 1)$

Obtenemos la diferencia de dos puntos P_1 y P_2

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= (3, 4, 1) - (-1, -2, -5) \\ &= (3 - (-1), 4 - (-2), 1 - (-5)) \\ &= (3 + 1, 4 + 2, 1 + 5) \\ &= (4, 6, 6) \end{aligned}$$

Obtenemos la diferencia de dos puntos P_2 y P_3

$$\begin{aligned} P_2 - P_3 &= (-1, -2, -5) - (1, 7, 1) \\ &= (-1 - (1), -2 - (7), -5 - (1)) \\ &= (-1 - 1, -2 - 7, 5 - 1) \\ &= (-2, -9, 4) \end{aligned}$$

Obtenemos el vector normal del producto cruz de $(4, 6, 6)$ y $(-2, -9, 4)$

```
In[4]:= {4, 6, 6} × {-2, -9, 4}

Out[4]= {78, -28, -24}
```

Por lo tanto el vector normal del plano es $(78, -28, -24)$

Sustituyendo los valores de el vector $v(78, -28, -24)$ y $P_1(3, 4, 1)$ en la ecuación $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$ nos queda que:

$$
\begin{aligned}
&Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D \\
&= (78)(3) + (-28)(4) + (-24)(1) = -D \\
&= 234 + (-112) + (-24) = -D \\
&= -112 = -D
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $D = 112$

Por último tenemos que la ecuación de plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, sustituimos los valores del vector normal v y de D.

$$
\begin{gathered}
Ax + By + Cz + D = 0 \\
(78)x + (-28)y + (-24)z + (112) = 0 \\
78x - 28y + -24z + 112 = 0
\end{gathered}
$$

5. Sea $P = (x, y, z)$ demuestre lo siguiente

a) P y $-P$ son simétricos respecto al origen

b) P y $(-x, y, -z)$ son simétricos respecto al eje Y

c) P y $(x, -y, -z)$ son simétricos respecto al eje X

d) P y $(-x, y, z)$ son simétricos respecto al plano π_{YZ}.

e) P y $(x, -y, z)$ son simétricos respecto al plano π_{XZ}.

6. Para cada uno de los siguientes lugares geométricos analice las siete simetrías vistas en clase. En caso de que se cumpla alguna, demuéstrela, de lo contrario exhiba un contra ejemplo:

a) $\mathscr{G} : 2x + 3y + z = 0$

b) $\mathscr{G} : 3x^2 - z^2 = 9$

c) $\mathscr{G} : x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 16$

d) $\mathscr{G} : x + y - z^2 = 1$

e) $\mathscr{G} : x^3 - y/2 - z^2 = 3$

7. Suponga $C, S \in \mathbb{R}^3$. Pruebe que si $(C - S) \perp e_1$, entonces C y S tienen la misma primer coordenada.

Demostración:

Sean que $C = (x_0, y_0, z_0)$ y $S(x_1, y_1, z_1)$ entonces tenemos que $C, S \in \mathbb{R}^3$ y $(C - S) \perp e_1$

Donde $e_1 = (1, 0, 0)$

$$(C - S) \perp e_1 = ((x_0, y_0, z_0) - (x_1, y_1, z_1)) \perp e_1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \perp e_1 \\
&= (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (1, 0, 0) \\
&= (x_0 - x_1)(1) + (y_0 - y_1)(0) + (z_0 - z_1)(0) = 0 \\
&= (x_0 - x_1) + 0 + 0 = 0 \\
&= x_0 - x_1 = 0
\end{aligned}$$

Nos queda que $x_0 = x_1$

Por lo tanto tienen la misma primer coordenada.

8. Suponga $C, S \in \mathbb{R}^3$. Pruebe que si $(C - S) \perp e_2$, entonces C y S tienen la misma segunda coordenada.

Demostración:

Sean que $C = (x_0, y_0, z_0)$ y $S(x_1, y_1, z_1)$ entonces tenemos que $C, S \in \mathbb{R}^3$ y $(C - S) \perp e_2$

Donde $e_1 = (1, 0, 0)$

$$(C - S) \perp e_2 = ((x_0, y_0, z_0) - (x_1, y_1, z_1)) \perp e_1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \perp e_2 \\
&= (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (0, 1, 0) \\
&= (x_0 - x_1)(0) + (y_0 - y_1)(1) + (z_0 - z_1)(0) = 0 \\
&= 0 + (y_0 - y_1) + 0 = 0 \\
&= y_0 - y_1 = 0
\end{aligned}$$

Nos queda que $y_0 = y_1$

Por lo tanto tienen la misma segunda coordenada.

9. En cada inciso halle la ecuación cartesiana para la superficie de revolución generada por el lugar geométrico $\mathscr{G}$ y la recta ℓ.

> **Lema 1:** Si $S, C \in \mathbb{R}^3$ y $C - S \perp e_3 \Rightarrow C$ y S tienen la misma tercer coordenada.
>
> **Lema 2:** Si $S, C \in \mathbb{R}^3$ y $C - S \perp e_2 \Rightarrow C$ y S tienen la misma segunda coordenada.
>
> **Lema 3:** Si $S, C \in \mathbb{R}^3$ y $C - S \perp e_1 \Rightarrow C$ y S tienen la misma primer coordenada.
>
> **Corolario 1:** Si $C \in Z$ y $Q \in \mathscr{R}$, donde $\mathscr{R}$ es la superficie de revolución generada por el eje Z, entonces C y Q tienen la misma tercer coordenada.

> **Corolario 2:** Si $C \in Y$ y $Q \in \mathscr{R}$, donde $\mathscr{R}$ es la superficie de revolución generada por el eje Y, entonces C y Q tienen la misma segunda coordenada.
>
> **Corolario 3:** Si $C \in X$ y $Q \in \mathscr{R}$, donde $\mathscr{R}$ es la superficie de revolución generada por el eje X, entonces C y Q tienen la misma primer coordenada.

a) $\mathscr{G}$:" $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ " y ℓ es el eje X.

Sean $C \in eje\ X,\ Q \in \mathscr{G}$ y $P \in \mathscr{R}$

Como $\mathscr{G}$:" $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ " por lo tanto

Se hace un cambio de variable $w = y$

$$w = y = \sqrt{\frac{(1 - x^2)}{2}}$$

Por el lema 3 y el corolario 3 podemos deducir los valores de C y Q.

Donde $C = (x, 0, 0)$, $Q = (x, w, 0)$, $P(x, y, z)$ y $v = e_1 = (1, 0, 0)$

- Probar que $(C - P) \perp v$:

  $$\begin{aligned} (C - P) \perp e_1 &= ((x, 0, 0) - (x, y, z)) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (x - x, 0 - y, 0 - z) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, -y, -z) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

  Por lo tanto $(C - P)$ es perpendicular a e_1

- Probar que $(C - Q) \perp v$:

  $$\begin{aligned} (C - Q) \perp e_1 &= ((x, 0, 0) - (x, w, 0)) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (x - x, 0 - w, 0 - 0) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, -w, 0) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

  Por lo tanto $(C - Q)$ es perpendicular a e_1

- Probar que $d(P, C) = d(Q, C)$:

  $$\begin{aligned} d(P, C) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x - x)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2} \\ &= \sqrt{(0)^2 + (y)^2 + (z)^2} \\ &= \sqrt{y^2 + z^2} \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} d(Q, C) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x - x)^2 + (w - 0)^2 + (0 - 0)^2} \\ &= \sqrt{(0)^2 + (w)^2 + (0)^2} \\ &= \sqrt{(w)^2} = w \end{aligned}$$

  Desarrollamos la igualdad

$$d(P,C) = d(Q,C)$$
$$\sqrt{y^2+z^2} = w$$

Como $w = \sqrt{\frac{(1-x^2)}{2}}$

$$\sqrt{y^2+z^2} = \sqrt{\frac{(1-x^2)}{2}}$$
$$y^2+z^2 = \frac{(1-x^2)}{2}$$
$$2(y^2+z^2) = (1-x^2)$$
$$\sqrt{1-2(y^2+z^2)} = x$$

Por lo tanto los puntos $(x,y,z) \in \mathscr{R}$ tiene que ser la ecuación cartesiana $\sqrt{1-2(y^2+z^2)} = x$

b) $\mathscr{G}: x^2 - 2y + 3 = 1, z = 0$ y ℓ es el eje Y.

Sean $C \in eje\, Y, Q \in \mathscr{G}$ y $P \in \mathscr{R}$

Por el lema 2 y el corolario 2 podemos deducir los valores de C y Q.

Donde $C = (0,y,0)$, $Q = (x,y,0)$, $P(x,y,z)$ y $v = e_2 = (0,1,0)$.

Despejamos x en $x^2 - 2y + 3 = 1$ tenemos que

$$x = \sqrt{2y-2}$$

- Probar que $(C-P)\perp v$:

$$\begin{aligned}(C-P)\perp e_2 &= ((0,y,0)-(x,y,z))\cdot(0,1,0)\\ &= (0-x, y-y, 0-z)\cdot(0,1,0)\\ &= (-x,0,-z)\cdot(0,1,0)\\ &= (0,0,0)\end{aligned}$$

  Por lo tanto $(C-P)$ es perpendicular a e_2

- Probar que $(C-Q)\perp v$:

$$\begin{aligned}(C-Q)\perp e_2 &= ((0,y,0)-(x,y,0))\cdot(0,1,0)\\ &= (0-x, y-y, 0-0)\cdot(0,1,0)\\ &= (-x,0,0)\cdot(0,1,0)\\ &= (0,0,0)\end{aligned}$$

  Por lo tanto $(C-Q)$ es perpendicular a e_2

- Probar que $d(P,C) = d(Q,C)$:

$$\begin{aligned}d(P,C) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\\ &= \sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2+(z-0)^2}\\ &= \sqrt{(x)^2+(0)^2+(z)^2}\\ &= \sqrt{x^2+z^2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d(Q,C) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \\
&= \sqrt{(x-0)^2+(y-y)^2+(0-0)^2} \\
&= \sqrt{(x)^2+(0)^2+(0)^2} \\
&= \sqrt{(x)^2} = x
\end{aligned}
$$

Desarrollamos la igualdad

$$
\begin{gathered}
d(P,C) = d(Q,C) \\
\sqrt{x^2+z^2} = x
\end{gathered}
$$

Como $x = \sqrt{2y-2}$

$$
\begin{gathered}
\sqrt{x^2+z^2} = \sqrt{2y-2} \\
x^2+z^2 = 2y-2 \\
\frac{x^2+z^2}{2}+1 = y
\end{gathered}
$$

Por lo tanto los puntos $(x,y,z) \in \mathscr{R}$ tiene que ser $\frac{x^2+z^2}{2}+1=y$

c) $\mathscr{G}: x^2+2y^2+6y-7=1, z=0$ y ℓ es el eje X.

d) $\mathscr{G}: x^2+8y=1, z=0$ y ℓ es el eje Y.

e) $\mathscr{G}: 2x^2-5y+7=1, z=0$ y ℓ es el eje X.

10. Para cada uno de los siguientes incisos deberá:

a) Identificar a $\mathscr{Q}$

b) Obtener ecuaciones cartesianas de $\mathscr{Q} \cap \pi_{XY}$, $\mathscr{Q} \cap \pi_{YZ}$ y $\mathscr{Q} \cap \pi_{XY}$ indicando qué lugar geométrico es. En caso de ser una cónica, indicar centros, vértices, ejes mayores y menores (donde existan según el caso).

c) Hallar las secciones transversales de $\mathscr{Q}$ para $\pi_1: x=4, \pi_2: y=4, \pi_3: z=4$. En caso de ser una cónica, indicar centros, vértices, ejes mayores y menores (donde existan según el caso).

i) $\mathscr{Q}: x^2/9+y^2/16-z^2/4=1$

ii) $\mathscr{Q}: x^2/4+y^2/9=0$

iii) $\mathscr{Q}: 2y^2-4z^2=x^2$

iv) $\mathscr{Q}: 5y^2+y^2/3-z=x^2$

v) $\mathscr{Q}: x+y^3-z/5=x^2$

11. Indique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justifica tu respuesta con una demostración o un contra ejemplo.

a) $\mathscr{G} : 5z^2 + 5y^2 = 1$ **es un cilindro elíptico cuyo eje es el eje** X

b) $\mathscr{G} : x^2 + 2z^2 = 0$ **posee las siete simetrías vistas en clase.**

c) Considera $P = (2, 3, 8)$ **y** $P' = (-2, -3, -8), PyP'$ **son simétricos respecto al plano** π_{XZ}

d) Considera $P = (2, 3, 8)$ **y** $P' = (-2, -3, -8), PyP'$ **son simétricos respecto al eje** Y **.**

e) La intersección entre una superficie cuadrática y un plano cartesiano $(\pi_{XY}, \pi_{YZ}, \pi_{XZ})$ **es una cónica.**

f) $x^2 + y^2 = 25$ **Es la ecuación de una circunferencia con radio** 5

g) Todo lugar geométrico cumple al menos una de las simetrías respecto a ejes, planos (coordenados) o el origen.