Clase de Ayudantía del 07/10/2020

La Integral

Por la naturaleza del tema actual, la presente ayudantía será principalmente cargada de ejercicios.

Como recomendación, siempre es útil tener presente los temas que serán útiles en los ejercicios. Para la clase de hoy, se utilizarán los siguientes teoremas:

1. $\int \beta f = \beta \int f$
2. $\int_a^b c dx = c(b-a) \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$
3. $\int (f+g) = \int f + \int g$
4. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$
5. $\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$
6. Teorema Fundamental del Cálculo: $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$

Todo lo anterior está en las notas que les brindó la profesora Elena, por lo que no es necesario que lo demuestren, sin embargo, SI DEBEN REFERENCIAR la parte de las notas donde lo sacaron, es decir nombre del pdf y página (ejemplo: Integral1, pp. 8) o nombre del video con la marca temporal.En caso de que no referencien de dónde salió, si deben demostrarlo; por ejemplo, si se les olvida que el punto 2 lo vieron en las notas, lo tendrían que demostrar, por lo que colocaré aquí la demostración como ejemplo de cómo esperaría entregaran las demostraciones en sus tareas:

Sea $f(x) = c$ una función constante con $c \in \mathbb{R}$ integrable, P.D. $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$ con $x \in [a, b]$.

<u>Demostración:</u>

Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$

Como la función es una constante, todos los mínimos van a ser iguales entre sí y con todos los máximos ya que la función solamente puede tener un solo valor, es decir:

$$m_i = M_i = c \quad \forall i$$

Primero obteniendo el valor de la suma inferior:

$$\Rightarrow L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1})$$

$$= c(t_1 - t_0) + c(t_2 - t_1) + ... + c(t_n - t_{n-1})$$

$$= c(t_n - t_{n-1} + t_{n-1} - ... - t_2 + t_2 - t_1 + t_1 - t_0)$$

$$= c(t_n \cancel{- t_{n-1} + t_{n-1}} - ... \cancel{- t_2 + t_2} \cancel{- t_1 + t_1} - t_0)$$

$$= c(t_n - t_0)$$

Por definición de partición, $b = t_n$ y $a = t_0$

$$\Rightarrow L(f, P) = c(b-a)$$

Ahora para la suma superior:

$$\Rightarrow U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1})$$

$$= c(t_1 - t_0) + c(t_2 - t_1) + ... + c(t_n - t_{n-1})$$

$$= c(t_n - t_{n-1} + t_{n-1} - ... - t_2 + t_2 - t_1 + t_1 - t_0)$$

$$= c(t_n \cancel{- t_{n-1} + t_{n-1}} - ... \cancel{- t_2 + t_2} \cancel{- t_1 + t_1} - t_0)$$

$$= c(t_n - t_0)$$

$$= c(b-a)$$

$$\therefore U(f,P) = c(b-a)$$

Ambos métodos son análogos, pero en las tareas es mejor hacerlo explícito, pero si ponen los pasos principales más el comentario que son análogos, será suficiente.

Por lo que como ambas sumas son constantes, se puede concluir:

$$sup\{L(f,P)\} = inf\{U(f,P)\} = c(b-a)$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = c(b-a) \blacksquare$$

También serán necesarios temas de Cálculo 1, como:

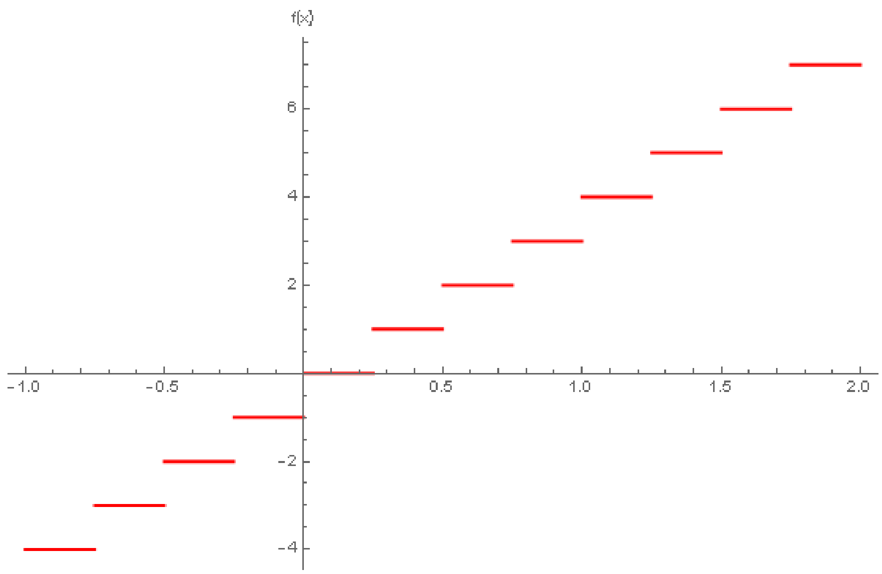
- $[x] = n$ si $n \leq x < n+1$
- $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
- Reglas de derivación

Estos temas no los tienen que demostrar o referenciar, basta con decir ”visto en Cálculo I”.
Con estos puntos aclarados, vamos a los ejemplos:

Ejemplo 1: Calcular la integral:

$$\int_{-1}^{2} [4x]dx$$

Solución:
Gráficamente la función es:



Cada vez que el interior de los corchetes vale un entero, el valor de la función cambia.

Como dentro de los corchetes la variable x es multiplicada por 4, hay que tener cuidado de en qué puntos es un entero, por ejemplo, si consideramos el intervalo:

$$x \in [0, 1]$$

En este caso, la función tendrá un valor entero en $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$; ya que los denominadores se simplifican. Como se puede apreciar en la gráfica, justo entre el 0 y 1 hay 4 valores diferentes en la función, por lo que en total entre -1 y 2 hay 12 valores diferentes que hay que considerar a la hora de realizar la integral. Cada entero se debe dividir en 4 partes. Calculando la integral:

$$\Rightarrow \int_{-1}^{2} [4x]dx = \int_{-\frac{4}{4}}^{-\frac{3}{4}} [4x]dx + \int_{-\frac{3}{4}}^{-\frac{2}{4}} [4x]dx + \int_{-\frac{2}{4}}^{-\frac{1}{4}} [4x]dx + \int_{-\frac{1}{4}}^{0} [4x]dx$$
$$+ \int_{0}^{\frac{1}{4}} [4x]dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} [4x]dx + \int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} [4x]dx + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{4}} [4x]dx$$
$$+ \int_{\frac{4}{4}}^{\frac{5}{4}} [4x]dx + \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{6}{4}} [4x]dx + \int_{\frac{6}{4}}^{\frac{7}{4}} [4x]dx + \int_{\frac{7}{4}}^{\frac{8}{4}} [4x]dx$$

Sustituyendo el valor de la función en cada integral:

$$\Rightarrow = \int_{-\frac{4}{4}}^{-\frac{3}{4}} -4dx + \int_{-\frac{3}{4}}^{-\frac{2}{4}} -3dx + \int_{-\frac{2}{4}}^{-\frac{1}{4}} -2dx + \int_{-\frac{1}{4}}^{0} -1dx$$

$$+ \int_{0}^{\frac{1}{4}} 0dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{4}} 1dx + \int_{\frac{2}{4}}^{\frac{3}{4}} 2dx + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{4}} 3dx$$

$$+\int_{\frac{4}{4}}^{\frac{5}{4}} 4dx + \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{6}{4}} 5dx + \int_{\frac{6}{4}}^{\frac{7}{4}} 6dx + \int_{\frac{7}{4}}^{\frac{8}{4}} 7dx$$

Utilizando la integral de una constante (punto 2), y como la longitud del intervalo de todas las 12 integrales previas es $\frac{1}{4}$, implica que en todos los casos $b - a = \frac{1}{4}$:

$$\Rightarrow = -\frac{4}{4} - \frac{3}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$+\frac{0}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}$$

$$+\frac{4}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4}$$

$$= -\frac{4}{4} - \frac{3}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$+\cancel{\frac{0}{4}} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}$$

$$+\frac{4}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4}$$

$$= -\frac{4}{4} + \frac{4}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4}$$

$$= \cancel{-\frac{4}{4} + \frac{4}{4}} \cancel{- \frac{3}{4} + \frac{3}{4}} \cancel{- \frac{2}{4} + \frac{2}{4}} \cancel{- \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4}$$

$$\frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{7}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$$

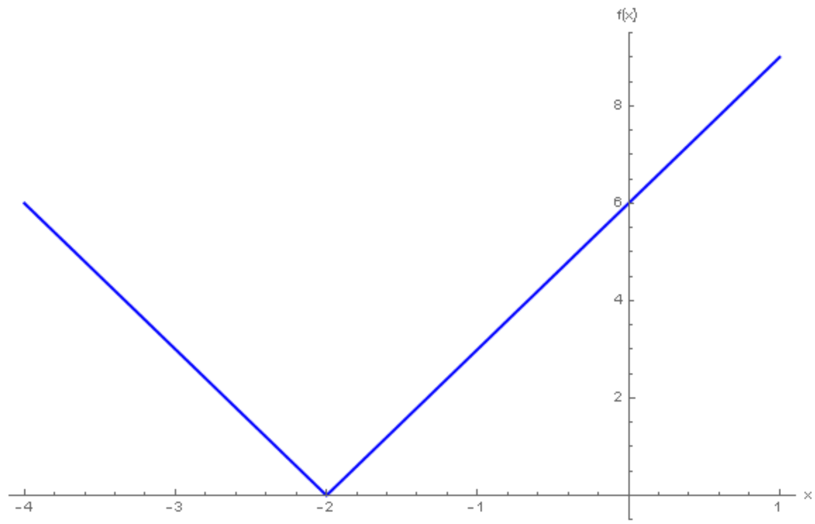
Por lo que la respuesta del ejercicio es:

$$\therefore \int_{-1}^{2} [4x] dx = 4.5$$

Ejemplo 2: Calcular la integral

$$\int_{-4}^{1} |3x+6|dx$$

Solución:
Gráficamente la función es:



Como la función valor absoluto depende de si su argumento es positivo o negativo, lo primero que hay que hacer es identificar el punto donde el argumento vale cero, que es donde se realiza el cambio de signo:

$$\Rightarrow 3x+6=0$$

$$\Rightarrow 3x=-6$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6}{3}=-2$$

Siendo esta la única solución.
La solución encontrada quiere decir que en $x<-2$, el argumento de la función es negativo y en $x\geq -2$ positivo; por lo que separando la integral en ambos intervalos:

$$\Rightarrow \int_{-4}^{1} |3x+6|dx = \int_{-4}^{-2} |3x+6|dx + \int_{-2}^{1} |3x+6|dx$$

Sustituyendo el valor absoluto:
$|3x+6| = -(3x+6) = -3x-6$ si $x<-2$
$|3x+6| = 3x+6$ si $x\geq -2$

$$\Rightarrow= \int_{-4}^{-2} -3x-6dx + \int_{-2}^{1} 3x+6dx$$

Separando las integrales de acuerdo al punto 3:

$$\Rightarrow= \int_{-4}^{-2} -3xdx + \int_{-4}^{-2} -6dx + \int_{-2}^{1} 3xdx + \int_{-2}^{1} 6dx$$

Sacando las constantes de acuerdo al punto 1:

$$\Rightarrow= -3\int_{-4}^{-2} xdx - 6\int_{-4}^{-2} dx + 3\int_{-2}^{1} xdx + 6\int_{-2}^{1} dx$$

Realizando las integrales siguiendo los teoremas 2 (para $c = 1$) y 5:

$$\Rightarrow = -3\left(\frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-4)^2}{2}\right) - 6(-2+4) + 3\left(\frac{(1)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + 6(1+2)$$

$$= -3\left(\frac{4}{2} - \frac{16}{2}\right) - 6(2) + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2}\right) + 6(3)$$

$$= -3(2-8) - 12 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 18$$

$$= -3(-6) - 12 - \frac{9}{2} + 18$$

$$= 18 - 12 - \frac{9}{2} + 18$$

$$= 18 + 18 - 12 - \frac{9}{2}$$

$$= 36 - 12 - \frac{9}{2}$$

$$= 24 - \frac{9}{2} = \frac{39}{2} = 19.5$$

Por lo que el resultado es:

$$\therefore \int_{-4}^{1} |3x+6| dx = 19.5$$

Ejemplo 3: Obtener $F'(x)$ si

$$F(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{cos(2t)}{1+t^3} dt \quad \text{con} \quad |x| > 1$$

Solución:
Se pide que el valor absoluto de x sea mayor a 1 para que así $x^2 > x$ y así el intervalo sea positivo.
Como el Teorema Fundamental del Cálculo (punto 6) está definido para un intervalo con inicio constante, es necesario separar la integral:
Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante:

$$\Rightarrow F(x) = \int_{a}^{x^2} \frac{cos(2t)}{1+t^3} dt + \int_{x}^{a} \frac{cos(2t)}{1+t^3} dt$$

$$= \int_{a}^{x^2} \frac{cos(2t)}{1+t^3} dt - \int_{a}^{x} \frac{cos(2t)}{1+t^3} dt$$

Para resolver esta derivada, es útil tratarla como una composición de funciones, es decir, sean:
$h(x) = \int_a^x \frac{cos(2t)}{1+t^3} dt$
$g(x) = x^2$

$$\Rightarrow F(x) = h \circ g(x) - h(x) = h(g(x)) - h(x)$$

Por lo que, por regla de la cadena:

$$\Rightarrow F'(x) = h'(g(x))g'(x) - h'(x)$$

Recordando el TFC y las reglas de derivación:

$$h'(x) = \frac{cos(2x)}{1+x^3}$$

$$g'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow F'(x) = \left(\frac{cos\left(2\left(x^2\right)\right)}{1+\left(x^2\right)^3} \right)(2x) - \frac{cos(2x)}{1+x^3}$$

$$= (2x)\left(\frac{cos\left(2x^2\right)}{1+x^6} \right) - \frac{cos(2x)}{1+x^3}$$

$$= \frac{2xcos\left(2x^2\right)}{1+x^6} - \frac{cos(2x)}{1+x^3}$$

Por lo que la respuesta es:

$$\therefore F'(x) = \frac{2xcos\left(2x^2\right)}{1+x^6} - \frac{cos(2x)}{1+x^3}$$

Ejemplo 4: Sea

$$\int_0^x f(t)dt = sin(x) - cos(x) + 1$$

Calcular $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$
Solución:
Para obtener la forma explícita de $f(x)$ hay que derivar utilizando el TFC, por lo que derivando en ambos lados y aplicando el TFC del lado izquierdo:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}\left(sin(x) - cos(x) + 1\right)$$

Por las reglas de derivación ya conocidas:

$$f(x) = cos(x) + sin(x)$$

Evaluando la función en el punto solicitado:

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 = 1$$

Por lo que la respuesta es:

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Ejemplo 5: Si f es continua y satisface:

$$\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x \qquad \forall x \geq 0$$

Calcular $f(2)$

Solución:
Análogamente al ejercicio anterior, derivamos en ambos lados de la ecuación utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo junto con la regla de la cadena en el lado izquierdo en el lado izquierdo:
Si

$$F(x) = \int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt$$

Sean:

$$h(x) = \int_0^{x} f(t)dt$$

$$g(x) = x^2(1+x)$$

Por lo que:

$$\Rightarrow F(x) = h \circ g(x) = h(g(x))$$

$$\Rightarrow F'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Aplicado al presente ejercicio:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\Rightarrow f\left(x^2(1+x)\right) \cdot \left(x^2(1) + (1+x)(2x)\right) = 1$$

$$\Rightarrow f\left(x^2(1+x)\right) \cdot \left(x^2 + 2x + 2x^2\right) = 1$$

$$\Rightarrow f\left(x^2(1+x)\right) \cdot \left(2x + 3x^2\right) = 1$$

$$\Rightarrow f\left(x^2(1+x)\right) = \frac{1}{2x+3x^2}$$

$$\Rightarrow f\left(x^2(1+x)\right) = \frac{1}{x(2+3x)}$$

Ahora, como el ejercicio pide evaluar $f(2)$, debemos encontrar la x que satisfaga la ecuación:

$$x^2(1+x) = 2$$

La cuál es una ecuación de tercer grado, por lo que puede haber muchas formas de encontrar la solución, la que propongo en este caso es factorizar al 2 en sus factores primos: $2 = (2)(1)$ e igualar los términos para encontrar un sistema de ecuaciones consistentes:

$$x^2(1+x) = (2)(1)$$

Caso 1: $x^2 = 2$ y $1 + x = 1$
Caso 2: $x^2 = 1$ y $1 + x = 2$

En el caso 1 se obtienen dos soluciones: $x = \sqrt{2}$ y $x = 0$, son dos soluciones diferentes para x, por lo que este caso se descarta. Esto es porque una ecuación de tercer grado puede tener 3 raíces reales, o una real y dos complejas; sólamente buscamos una raíz real, por lo que las dos ecuaciones deben dar el mismo resultado, es por esto que el caso 1 queda descartado. En el caso 2 ambas ecuaciones arrojan como resultado $x = 1$,

por lo que este es el valor buscado.
Comprobando:

$$(1)^2(1+1) = (1)(2) = 2$$

Por lo que es el valor buscado, ahora, colocando el resultado en la función:

$$\Rightarrow f\left((1)^2(1+1)\right) = \frac{1}{(1)(2+3(1))}$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{1}{2+3}$$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{1}{5}$$

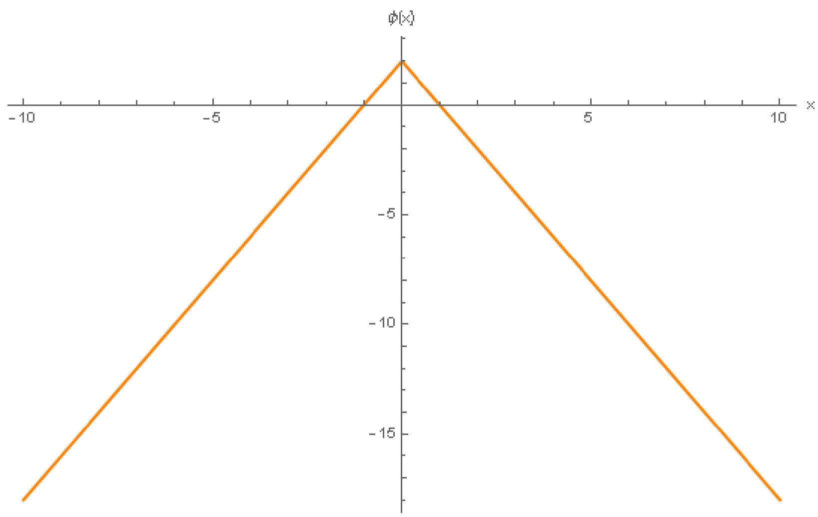
Por lo que la respuesta es:

$$\therefore f(2) = \frac{1}{5}$$

Ejemplo 6: Calcular

$$\int_{-10}^{10} \phi(x)dx \qquad \text{si} \qquad \phi(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \in [-10, 0] \\ -2x+2 & \text{si } x \in (0, 10] \end{cases}$$

Solución:
Gráficamente la función es:



Como la mayoría de la gráfica se encuentra debajo del eje x, se puede intuir que el resultado será negativo. Procediendo análogamente a si se tuviera un valor absoluto, separando la integral en los dos intervalos en los que se encuentra definida la función:

$$\Rightarrow \int_{-10}^{10} \phi(x)dx = \int_{-10}^{0} \phi(x)dx + \int_{0}^{10} \phi(x)dx$$

$$= \int_{-10}^{0} (2x+2)dx + \int_{0}^{10} (-2x+2)dx$$

Separando integrales y sacando constantes:

$$= \int_{-10}^{0} 2xdx + \int_{-10}^{0} 2dx + \int_{0}^{10} -2xdx + \int_{0}^{10} 2dx$$

$$= 2\int_{-10}^{0} xdx + 2\int_{-10}^{0} dx - 2\int_{0}^{10} xdx + 2\int_{0}^{10} dx$$

Integrando con los teoremas dados:

$$= 2\left(\frac{(0)^2}{2} - \frac{(-10)^2}{2}\right) + 2(0+10) - 2\left(\frac{(10)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) + 2(10-0)$$

$$= 2\left(-\frac{100}{2}\right) + 2(10) - 2\left(\frac{100}{2}\right) + 2(10)$$

$$= -100 + 20 - 100 + 20 = -200 + 40 = -160$$

Por lo que la respuesta es:

$$\therefore \int_{-10}^{10} \phi(x)dx = -160$$

Ejemplo 7: Calcular $f'(x)$ si

$$f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^2} dt \qquad \text{para } |x| < 1$$

Solución:
Se pide que el valor absoluto de x sea menor a 1 para que sea un intervalo bien definido, con el valor inicial menor al final.
Análogamente a los ejercicios anteriores, lo que se requiere en este ejercicio es tratar a la función como una composición de funciones y derivar utilizando regla de la cadena, separándola en dos integrales para que se pueda emplear el Teorema Fundamental del Cálculo. Con estas hipótesis de trabajo (composición, regla de la cadena, suma de integrales y TFC) se puede desarrollar más directamente:

$$\Rightarrow f(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^2} dt = \int_{a}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^2} dt + \int_{x^3}^{a} \frac{t^6}{1+t^2} dt \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

$$= \int_{a}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^2} dt - \int_{a}^{x^3} \frac{t^6}{1+t^2} dt$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \frac{(x^2)^6}{1+x^4} - 3x^2 \frac{(x^3)^6}{1+x^6}$$

$$= 2x \frac{x^{12}}{1+x^4} - 3x^2 \frac{x^{18}}{1+x^6}$$

$$= \frac{2x^{13}}{1+x^4} - \frac{3x^{20}}{1+x^6}$$

Por lo que la respuesta es:

$$\therefore f'(x) = \frac{2x^{13}}{1+x^4} - \frac{3x^{20}}{1+x^6}$$

Finalmente, unas recomendaciones o ”hints” para el problema 1, para que puedan guiarse un poco, no deben responder o seguir al pie de la letra estos puntos, solo son sugerencias por si se traban en alguna parte. En general la prueba es análoga a la realizada en las notas brindadas por la maestra:

- No olviden definir las particiones, evidenciando cuál contiene a cuál y donde se puede ver esto.

- Hay una desigualdad principal con la que se prueba el ejercicio, ¿cuál es esta?

- ¿Qué teoremas necesitan aplicar?

- ¿Cómo se pueden utilizar las sumas para llegar al objetivo?

- ¿Cómo se podría probar un caso general siguiendo la lógica del problema?