Geometría Moderna I

Material para el curso intersemestral en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: Agosto, 2020

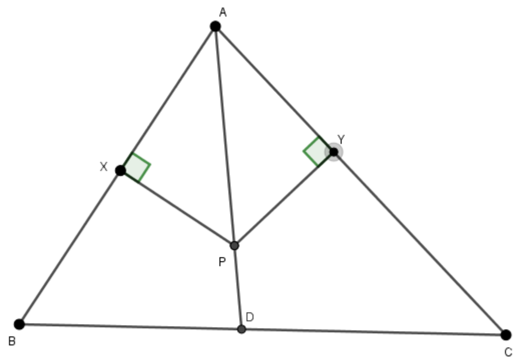
La victoria no vendrá a nosotros a menos que vayamos por ella.

Unidad 1. La geometría del triángulo

0.1 Puntos y Rectas notables del triángulo

Nota

*Recordemos que la **Bisectriz interna** del ángulo $\angle BAC$ del triángulo ABC es la recta por A que biseca al ángulo. Un punto P está en la bisectriz si equidista de cada lado del ángulo, es decir, si X es pie de la perpendicular de P sobre AB y Y es pie de la perpendicular sobre CA, entonces $PX = PY$. El recíproco de este enunciado también es válido.*



Proposición 0.1

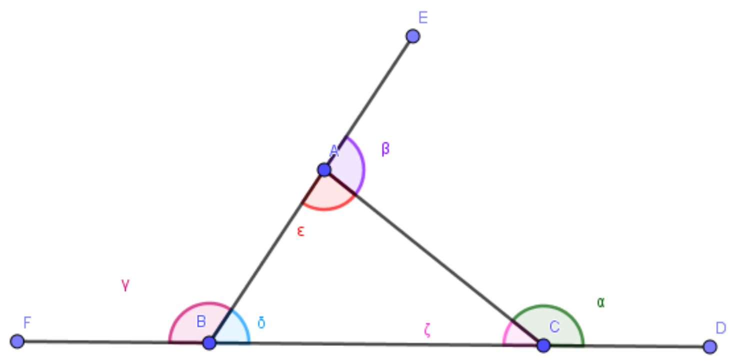
La suma de los tres ángulos exteriores de cualquier triángulo suman cuatro ángulos rectos.

Demostración

Sea ABC un triángulo cualquiera, prolongamos los lados AB a partir de A hasta el punto E, BC a partir de B hasta el punto F y a partir de C hasta D.

Sean los ángulos exteriores:
(e.1) $\alpha = \angle DCA$
(e.2) $\beta = \angle CAE$
(e.3) $\gamma = \angle ABF$

Sean los ángulos interiores:
(I.1) $\delta = \angle CBA$
(I.2) $\zeta = \angle ACB$
(I.3) $\epsilon = \angle BAC$



Sabemos que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo no adyacentes.
Por lo tanto tenemos las siguientes igualdades:
(a) $\alpha = \epsilon + \delta$.
(b) $\beta = \delta + \zeta$.
(c) $\gamma = \epsilon + \zeta$

Sumando $\alpha + \beta + \gamma = \epsilon + \delta + \delta + \zeta + \epsilon + \zeta = 2\epsilon + 2\delta + 2\zeta = 2(\epsilon + \delta + \zeta)$. Pero $\epsilon + \delta + \zeta = 180$ pues son los ángulos interiores del triángulo ABC.

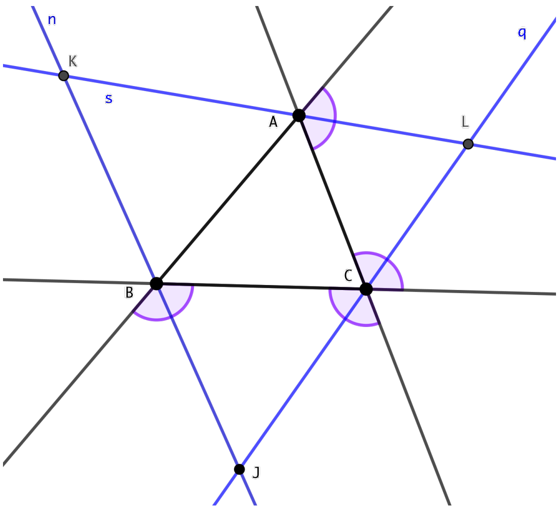
Por lo tanto la suma de los tres ángulos exteriores de un triángulo suman cuatro ángulos rectos. **QED**

Teorema 0.1

Las bisectrices de dos de los ángulos exteriores y la del interior no adyacente de un triángulo concurren por tercias en tres puntos llamados excentros. Estos puntos son centro de círculos tangentes externamente a los lados del triángulo. ♡

Demostración

Sea ABC un triángulo, prolongamos todos sus lados, AB, AC y BC indefinidamente y consideramos los ángulos exteriores cuyos vértices de orígen son B, C y A con el par rectas adyacentes (AB, BC), (BC, AC) y (AC, AB) respectivamente como se muestra en la siguiente figura.



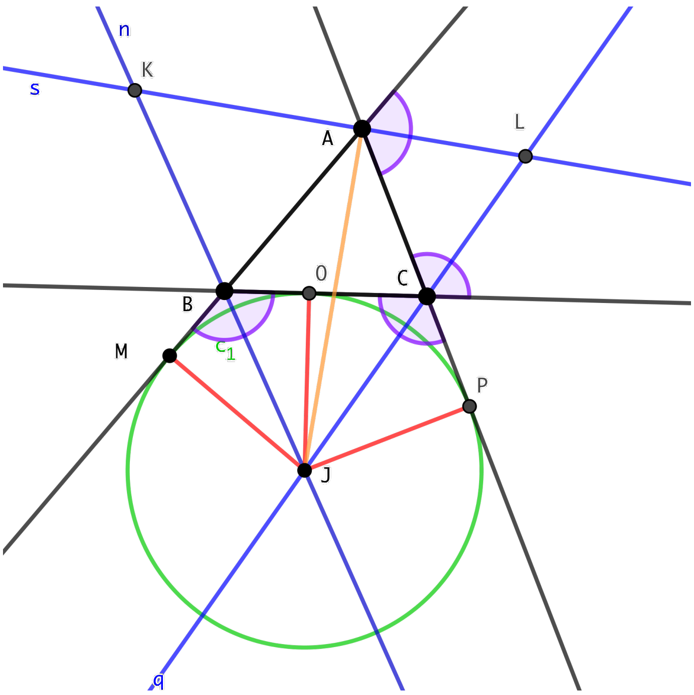
Sean s, n y q las bisectrices de los ángulos exteriores trazadas por A, B y C respectivamente; a estas las llamaremos **bisectrices exteriores.**

¡Afirmación!. Los puntos J, L y K son puntos de intersección de las bisectrices exteriores n con q, s con q y s con n respectivamente. Para probarlo consideremos lo siguiente.

De las rectas n y q, las cuales son bisectrices de los ángulos exteriores en los vértices B y C. Podemos afirmar que la suma de estos dos ángulos exteriores es menor que cuatro rectos. La prueba se sigue de la proposición anterior ya demostrada.

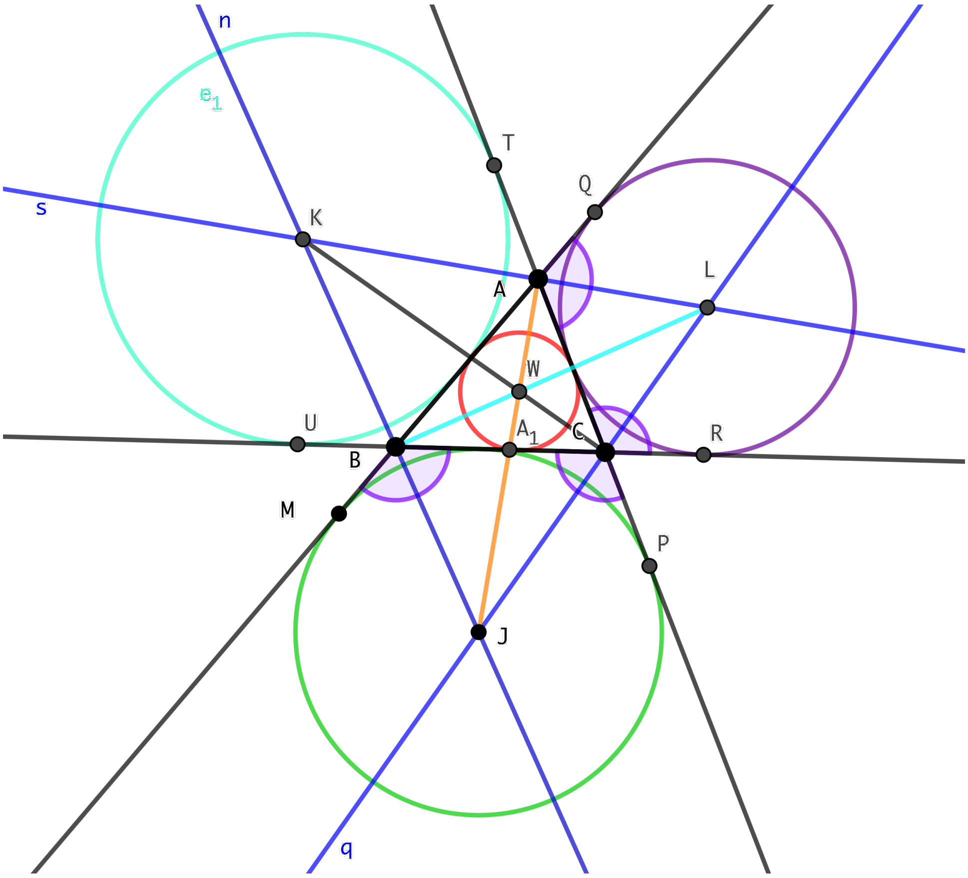
En los ángulos exteriores con vértices en B y en C, sabemos que las bisectrices n y q dividen a estos ángulos en dos ángulos iguales por separado; si sólo consideramos una parte de cada ángulo exterior (la mitad del ángulo), resulta que la suma de estas dos mitades es menor que dos ángulos rectos y esto es porque sabemos que suma de esos dos ángulos exteriores es menor que cuatro rectos, por tanto la suma de las dos mitades será menor que dos rectos, entonces por el quinto postulado de Euclides las bisectrices se cortarán en un punto que llamaremos J.

Análogamente las bisectrices s y q se cortarán en un punto llamado L, y n y s se cortarán en K.
Sean O, P y M los pies de las perpendiculares trazadas desde J a las rectas BC, AC y AB que forman al triángulo ABC.
Como J está en la bisectriz del ángulo exterior en $B \Rightarrow JO = JM$, esto por el recordatorio y por las propiedades de bisectriz vistas en clase.
Como J está en la bisectriz del ángulo exterior en $C \Rightarrow JO = JP$.
Por lo tanto $JM = JP \Rightarrow J$ está en la bisectriz del ángulo A, Pero la bisectriz exterior en A no pasa por J, por lo tanto J está en la bisectriz interior en el ángulo $\angle BAC$.
De lo anterior se concluye que la distancia de J a los tres segmentos de recta que determinan al triángulo ABC es la misma, entonces podemos construir una circunferencia con centro en J y radio igual a una de las distancias mencionadas. Esta circunferencia pasa por los tres puntos M, O y P y nombrado como el **excírculo** del triángulo ABC con **excentro** J. En la siguiente figura se puede apreciar el **excírculo** y su **excentro** del triángulo ABC



Análogamente hay un **excírculo** con **excentro** es L del tríangulo ABC y un **excírculo** con **excentro** es K y las bisectrices internas del triángulo ABC también contienen a los puntos K y L.
Sabemos que las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo son concurrentes en un punto llamdo incentro. Dicho punto es el centro del incírculo del triángulo.
Entonces las bisectrices interiores y exteriores de un triángulo pasan por tercias por cuatro puntos, el incentro W y los tres excentros K,L y J, además cada circunferencia es tangente a los tres lados del triángulo. **Q.E.D**

En la siguiente figura se pueden apreciar estos cuatro puntos y las circunferencias tangentes.



Nota *Recordemos que ya hemos demostrado que:*

- *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y de longitud igual a la mitad de tal lado.*
- *Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes en un punto llamado circuncentro.*
- *Las alturas de un triángulo son concurrentes en un punto llamado ortocentro.*

Lema 0.1

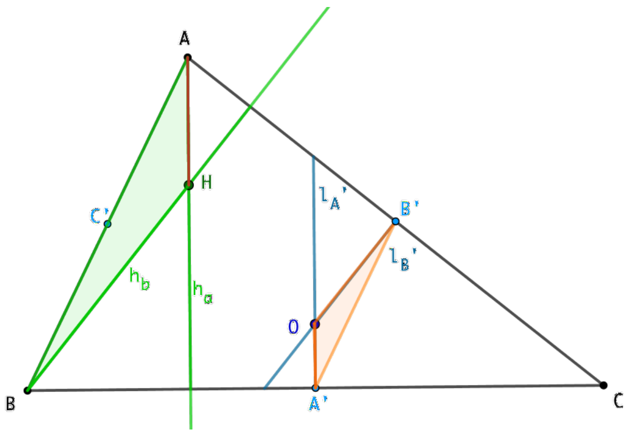
Se ABC un triángulo. Sean H su ortocentro, O su circuncentro y A' el punto medio del lado BC, entonces $AH = 2A'O$

Demostración

Sea ABC un triángulo y sean h_a, h_b alturas y $l_{A'}$, $l_{B'}$ mediatrices del triángulo.

Trazamos el segmento $A'B'$ el cual, por pasar por los puntos medios de los lados del triángulo ABC, es paralelo a AB. Además tenemos que $\triangle A'B'C' \approx \triangle ABC$ con razón de semejanza $2:1$.

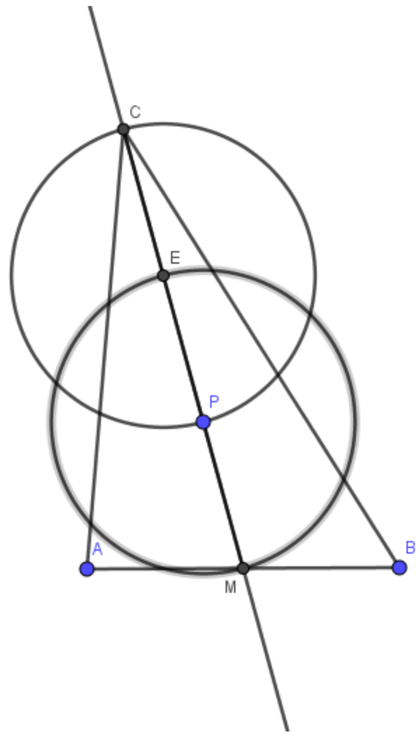
De aquí se sigue que $\triangle AHB \approx \triangle A'OB'$ pues sus lados correspondientes son paralelos. Entonces $AB = 2A'B'$, luego $AH = 2A'O$. **QED**



Problema: *Dados tres puntos no colineales A, B y P, construir un triángulo que tenga como lado el segmento AB y donde P sea sucesivamente: su* ***centroide****, su* ***ortocentro****, su* ***circuncentro****, su* ***incentro o uno de los excentros****. Justifique su construcción si en todos los casos tiene solución.*

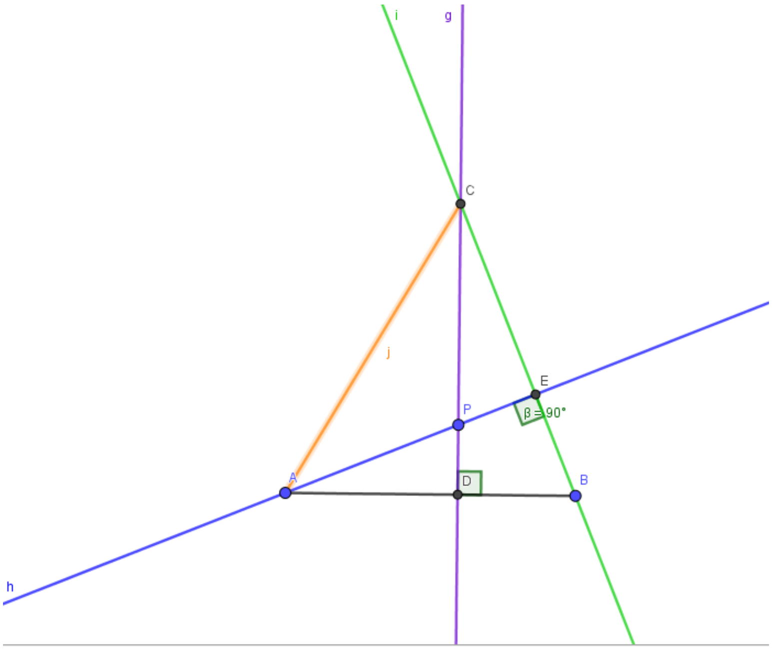
Demostración (Por casos)

Caso 1) Sea AB un segmento que será uno de los lados de nuestro triángulo que queremos construir y sea P un punto no colineal con AB. Por demostrar que es posible construir un triángulo de tal manera que P sea su centroide (baricentro) y tenga como lado a AB.
Sea M el punto medio del segmento AB. Trazamos una línea recta que una a los puntos P y M. Escogemos un punto C sobre la recta MP de tal forma que $PC = 2MP$. Una forma de escoger ese punto es trazar una circunferencia con centro en P y radio MP; y obtenemos un punto E el cual se obtiene por la intersección de esta circunferencia con la recta MP.
Ahora trazamos una nueva circunferencia con centro en E y radio $EP = MP$ y obtenemos nuestro punto C que es la intersección de esta nueva circunferencia con la recta MP. Podemos observar que $MP = PE = EC$, por ser radios de circunferencias con el mismo radio MP, entonces es inmediato concluir que $PC = 2MP$.



Finalmente trazamos los segmentos AC y BC formando el triángulo ABC; podemos afirmar que el segmento MC es la mediana del triángulo ABC trazada desde el vértice C al lado opuesto AB que tiene como punto medio a M. Ahora como, MC es el segmento que está incluido en la recta MP y el punto P triseca a la mediana MC por construcción, entonces afirmamos que P es el punto en el que concurren las medianas.
Por lo tanto P es el centroide del triángulo CAB. **Q.E.D.**

Caso 2) Sea AB un segmento dado y P un punto no colineal con AB. Por demostrar que es posible construir un triángulo con lado AB y con ortocentro P.



Trazamos por P una recta perpendicular g, al segmento AB y una recta AP.
Trazamos por B una recta perpendicular i, a la recta AP y obtenemos a E, un punto de intersección de la recta i con la recta AP.
También obtenemos C, un punto de intersección de las rectas i y g.
En el triángulo CAB podemos observar que las rectas g y AP son alturas con pies de perpendicular D y E respectivamente, entonces podemos renombrar a las alturas como AE y CD, ya que por construcción son perpendiculares a los lados BC y AB respectivamente. Por lo tanto el punto P donde se intersecan las alturas AE y CD es el ortocentro del triángulo CAB. **Q.E.D.**

Ejercicios para ir pensando

1. Termine de resolver la demostración para los casos restantes que no se hicieron en estas notas.
2. Diga, ¿cuáles de los siguientes puntos: circuncentro, centroide, ortocentro, incentro, excentros, están dentro del triángulo y cuáles siempre están afuera? Establezca las condiciones para las diferentes posiciones relativas al triángulo de aquellos que no siempre están afuera o dentro.