# Capítulo 2

# La integral

# Introducción

Definiremos el área de regiones limitadas por el eje horizontal, las rectas $x = a$, $x = b$ y la gráfica de una función $f$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Denotaremos a esta región por $R(f, a, b)$ y el número que asignaremos como área de $R(f, a, b)$ la llamaremos integral de $f$ sobre $[a, b]$. Posteriormente encontraremos la manera de definir la integral para funciones $f$ que no satisfacen la condición $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Para justifica la definición de integral, consideramos la siguiente figura.

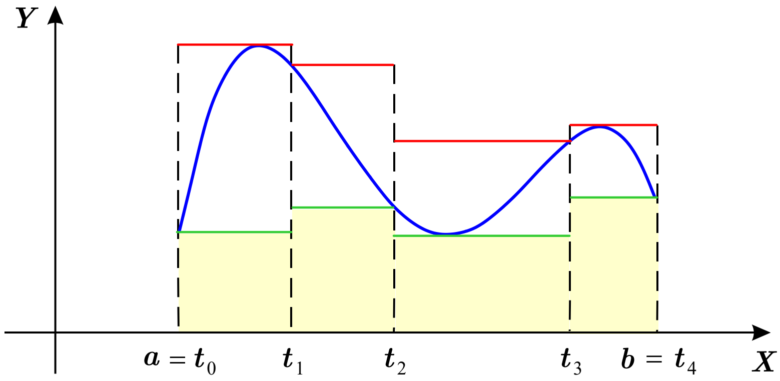


Figura 2-1

Se divide el intervalo $[a, b]$ utilizando los números

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b,$$

esto determina los subintervalos

$$[t_0, t_1], \quad [t_1, t_2], \quad [t_2, t_3], \quad [t_3, t_4].$$

Sobre el intervalo $[t_0, t_1]$ la función $f$ tiene un valor mínimo $m_1$ y uno máximo $M_1$. Análogamente $m_i$ es el valor mínimo y $M_i$ es el máximo de $f$ en el intevalo $[t_{i-1}, t_i]$. La suma

$$s = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3)$$

representa el área total de los rectángulos que están dentro de la región $R(f, a, b)$ y la suma

$$S = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3)$$

representa el área total de los rectángulos que contienen a la región $R(f, a, b)$.

La propiedad que utilizaremos para intentar definir el área de $R(f, a, b)$ será que $A$ tiene que satisfacer

$$s \leq A \leq S$$

para cualquier división del intervalo $[a, b]$.

# Construcción de la integral

*Definición:*

Sea $[a, b]$ un intervalo. Una partición de $[a, b]$ es una colección finita de puntos $\{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ de $[a, b]$ tales que

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

*Definición:*

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Sean

$$\begin{array}{rcl} m_i & = & \inf \{ f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \\ M_i & = & \sup \{ f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}. \end{array}$$

Definimos la suma inferior de $f$ para $P$ como:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$$

y la suma superior de $f$ para $P$ como:

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}).$$

**Observaciones:**

1. Las sumas $L(f, P)$ y $U(f, P)$ corresponden a $s$ y $S$ en el ejemplo anterior.

2. $m_i$ y $M_i$ existen gracias a que $f$ está acotada en $[a, b]$.

3. No se ha pedido continuidad para $f$, entonces $m_i$ no tiene porqué ser el mínimo de $f$ en $[t_{i-1}, t_i]$ ni $M_i$ el máximo de $f$ en el mismo intervalo.

4. Como
$$m_i (t_i - t_{i-1}) \leq M_i (t_i - t_{i-1})$$
para cada $i$, entonces
$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = U(f, P).$$
Veamos una justificación de este hecho si $n = 2$.
$$\begin{array}{rcl} m_1 (t_1 - t_0) & \leq & M_1 (t_1 - t_0) \\ m_1 (t_1 - t_0) + m_2 (t_2 - t_1) & \leq & M_1 (t_1 - t_0) + m_2 (t_2 - t_1) \end{array}$$

y

$$\begin{aligned} m_2\,(t_2 - t_1) &\leq M_2\,(t_2 - t_1) \\ M_1\,(t_1 - t_0) + m_2\,(t_2 - t_1) &\leq M_1\,(t_1 - t_0) + M_2\,(t_2 - t_1)\,. \end{aligned}$$

Por transitividad

$$m_1\,(t_1 - t_0) + m_2\,(t_2 - t_1) \leq M_1\,(t_1 - t_0) + M_2\,(t_2 - t_1)\,.$$

*Lema*

Si $Q$ y $P$ son dos particiones tales que $Q \supset P$, entonces

$$L\,(f,P) \leq L\,(f,Q) \leq U\,(f,Q) \leq U\,(f,P)\,.$$

*Demostración:*

Como $Q \supset P$ esto significa que $Q$ tiene al menos un punto más que $P$ y en ese caso decimos que $Q$ es un refinamiento de $P$, o bien que $Q$ es más fina que $P$.

Supongamos primero que $Q$ contiene exactamente un punto más que $P$, es decir,

$$P = \{t_0, \cdots, t_n\} \qquad\qquad Q = \{t_0, \cdots, t_{k-1}, u, t_k \cdots, t_n\}\,.$$

Sean

$$\begin{aligned} m' &= \text{ínf}\,\{\,f\,(x) \mid x \in [t_{k-1}, u]\} \\ m'' &= \text{ínf}\,\{\,f\,(x) \mid x \in [u, t_k]\}\,. \end{aligned}$$

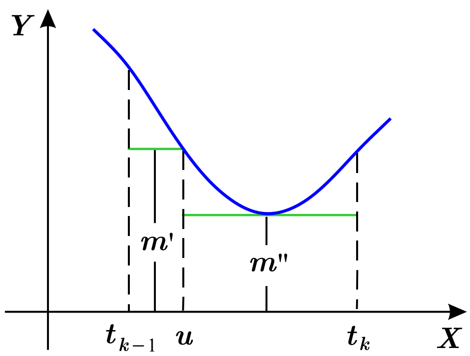


Figura 2-2

Sabemos que

$$\begin{aligned} L\,(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\,(t_i - t_{i-1}) \\ L\,(f,Q) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i\,(t_i - t_{i-1}) + m'\,(u - t_{k-1}) + m''\,(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i\,(t_i - t_{i-1})\,. \end{aligned}$$

P.D. $L(f,P) \leq L(f,Q)$. Basta probar que

$$m_k(t_k - t_{k-1}) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

Recordemos que si $A \subset B$ y ambos conjuntos están acotados inferiormente, entonces

$$\inf B \leq x \qquad \text{para todo } x \in B,$$

en particular

$$\inf B \leq a \qquad \text{para todo } a \in A \subset B,$$

de donde

$$\inf B \leq \inf A.$$

Como $[t_{k-1}, u] \subset [t_{k-1}, t_k]$, entonces

$$m_k \leq m'.$$

Análogamente como $[u, t_k] \subset [t_{k-1}, t_k]$, entonces

$$m_k \leq m''.$$

Así

$$\begin{aligned} m_k(t_k - t_{k-1}) &= m_k(t_k - u + u - t_{k-1}) \\ &= m_k(t_k - u) + m_k(u - t_{k-1}) \\ &\leq m''(t_k - u) + m'(u - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Por tanto

$$L(f,P) \leq L(f,Q).$$

Sabemos que

$$L(f,Q) \leq U(f,Q).$$

Sólo falta probar que $U(f,Q) \leq U(f,P)$ lo cual se deja como ejercicio.

■

El caso general puede deducirse fácilmente. La partición $Q$ puede obtenerse a partir de $P$ añadiendo un punto cada vez, es decir, existe una colección de particiones

$$P = P_1, P_2, \ldots, P_\alpha = Q$$

tales que $P_{j+1}$ contiene exactamente un punto más que $P_j$. Entonces

$$L(f,P) = L(f,P_1) \leq L(f,P_2) \leq \cdots \leq L(f,P_\alpha) = L(f,Q)$$

y

$$U(f,P) = U(f,P_1) \geq U(f,P_2) \geq \cdots \geq U(f,P_\alpha) = U(f,Q).$$

*Teorema*

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $P_1, P_2$ dos particiones de $[a,b]$, entonces

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2).$$

*Demostración:*

Sea $P$ la partición que consta de los puntos de $P_1$ y de $P_2$. Por el lema anterior tenemos

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2).$$

■

**Observaciones:**

Del teorema anterior se sigue que cualquier suma superior $U(f, P')$ es cota superior del conjunto de las sumas inferiores $L(f, P)$, entonces

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ es partición de } [a, b]\} \leq U(f, P') \qquad \text{para toda } P'.$$

Además esto implica que $\sup\{L(f, P)\}$ es cota inferior del conjunto de todas las suma superiores de $f$, de donde

$$\sup_P \{L(f, P)\} \leq \inf_P \{U(f, P)\}.$$

Es claro que para cualquier partición $P'$

$$L(f, P') \leq \sup_P \{L(f, P)\} \leq \inf_P \{U(f, P)\} \leq U(f, P').$$

Puede ocurrir que

$$\sup\{L(f, P)\} = \text{ínf}\{U(f, P)\}$$

en este caso, éste es el único número entre la suma inferior y la suma superior de $f$ para todas las particiones y es un candidato ideal para el área de $R(f, a, b)$.

Si

$$\sup\{L(f, P)\} < \text{ínf}\{U(f, P)\}$$

entonces todo número $x$ comprendido entre estos dos cumple que

$$\sup\{L(f, P')\} \leq x \leq \text{ínf}\{U(f, P')\} \qquad \text{para toda partición } P'.$$

Los siguientes ejemplos muestran que puede suceder cualquiera de los dos casos anteriores.

**Ejemplos**

1. Sea $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$.

   *Solución:*

   Sea $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a, b]$, entonces

   $$m_i = M_i = c,$$

de donde

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c (t_i - t_{i-1}) \\ &= c(t_1 - t_0) + c(t_2 - t_1) + \cdots + c(t_n - t_{n-1}) \\ &= c(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \cdots + t_n - t_{n-1}) \\ &= c(t_n - t_0) \\ &= c(b-a). \end{aligned}$$

y

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b-a).$$

Entonces

$$\sup\{L(f,P)\} = c(b-a) = \text{ínf}\{U(f,P)\}.$$

2. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ .

   *Solución:*

   Sea $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$.

   Como en cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ hay

   | | |
   |---|---|
   | un número irracional, entonces | $m_k = 0$ |
   | un número racional, entonces | $M_k = 1$, |

   de donde

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 (t_i - t_{i-1}) = 0 \\ U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1 (t_i - t_{i-1}) = b-a. \end{aligned}$$

   Entonces

$$\sup\{L(f,P)\} = 0 \qquad \text{y} \qquad \text{ínf}\{U(f,P)\} = b-a,$$

   así

$$\sup\{L(f,P)\} < \text{ínf}\{U(f,P)\}.$$

*Definición:*

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. $f$ es integrable sobre $[a,b]$ si

$$\sup_P\{L(f,P)\} = \inf_P\{U(f,P)\}$$

donde $P$ es una partición de $[a,b]$.

En tal caso, este número común se llama la integral de $f$ sobre $[a,b]$ y se denota por

$$\int_a^b f.$$

**Observaciones:**

1. La integral $\displaystyle\int_a^b f$ recibe el nombre de área de $R(f,a,b)$ si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

2. Si $f$ es integrable en $[a,b]$, entonces

$$L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P) \qquad \text{para toda partición } P \text{ de } [a,b].$$

   Además $\displaystyle\int_a^b f$ es el único número con esa propiedad.

3. Hasta ahora no tenemos criterios para decir si una función es o no integrable ni para calcular la integral.

4. Sólo conocemos dos ejemplos.

   *a*) $f(x) = c \qquad x \in [a,b]$ es integrable y

$$\int_a^b f = c(b-a).$$

   *b*) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ no es integrable sobre $[a,b]$.

*Teorema*

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces $f$ es integrable sobre $[a,b]$ si y sólo si $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \ P$ partición de $[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

*Demostración:*

$\Longleftarrow$) Supongamos primero que $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \ P_0$ partición de $[a,b]$ tal que

$$U(f,P_0) - L(f,P_0) < \varepsilon.$$

Como

$$L(f,P_0) \leq \sup\{L(f,P)\} \leq \operatorname{ínf}\{U(f,P)\} \leq U(f,P_0)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \text{ínf}\{U(f,P)\} &\leq U(f,P_0) \\ -\sup\{L(f,P)\} &\leq -L(f,P_0) \end{aligned}$$

de donde

$$\text{ínf}\{U(f,P)\} - \sup\{L(f,P)\} \leq U(f,P_0) - L(f,P_0) < \varepsilon.$$

Además sabemos que

$$\sup\{L(f,P)\} \leq \text{ínf}\{U(f,P)\}$$

de donde

$$0 \leq \text{ínf}\{U(f,P)\} - \sup\{L(f,P)\}.$$

Así tenemos que

$$0 \leq \text{ínf}\{U(f,P)\} - \sup\{L(f,P)\} < \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

entonces

$$\text{ínf}\{U(f,P)\} - \sup\{L(f,P)\} = 0.$$

Esto implica que

$$\sup\{L(f,P)\} = \text{ínf}\{U(f,P)\}$$

y por tanto, $f$ es integrable.

$\Longrightarrow$) Supongamos ahora que $f$ es integrable, entonces

$$\sup\{L(f,P)\} = \text{ínf}\{U(f,P)\}$$

entonces dada $\varepsilon > 0$ $\quad\exists\quad P'$ y $P''$ particiones de $[a,b]$ tales que

$$\begin{aligned} \sup\{L(f,P)\} - \frac{\varepsilon}{2} &< L(f,P') \\ U(f,P'') &< \text{ínf}\{U(f,P)\} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

de donde

$$-\sup\{L(f,P)\} + \frac{\varepsilon}{2} > -L(f,P')$$

así

$$\begin{aligned} U(f,P'') - L(f,P') &< \text{ínf}\{U(f,P)\} + \frac{\varepsilon}{2} - \sup\{L(f,P)\} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \text{ínf}\{U(f,P)\} - \sup\{L(f,P)\} + \varepsilon \\ &< 0 + \varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

es decir,

$$U(f,P'') - L(f,P') < \varepsilon.$$

Sea $P$ una partición que contiene a $P'$ y $P''$, entonces

$$L(f,P') \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq U(f,P'')$$

de donde

$$\left.\begin{array}{r} U(f,P) \leq U(f,P'') \\ -L(f,P) \leq -L(f,P') \end{array}\right\} \Longrightarrow U(f,P) - L(f,P) \leq U(f,P'') - L(f,P') < \varepsilon.$$

Por tanto,

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

■

**Ejemplos**

1. Sea $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. ¿Es $f$ integrable?

   *Solución:*

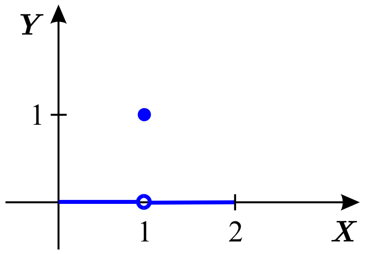


Figura 2-3

Sea $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[0,2]$.

Supongamos que

$$t_{k-1} < 1 < t_k$$

entonces

$$\begin{aligned} m_i &= M_i = 0 \qquad \text{si } i \neq k \\ m_k &= 0 \qquad \text{y} \qquad M_k = 1, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 (t_i - t_{i-1}) = 0 \\ U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = M_k (t_k - t_{k-1}) = t_k - t_{k-1}. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$U(f,P) - L(f,P) = t_k - t_{k-1}$$

Eligiendo $P$ tal que

$$t_{k-1} < 1 < t_k \qquad \text{y} \qquad t_k - t_{k-1} < \varepsilon \qquad \text{para } \varepsilon > 0,$$

por el teorema anterior se sigue que $f$ es integrable.

Además

$$L(f,P) \leq 0 \leq U(f,P) \qquad \forall\, P.$$

Puesto que $f$ es integrable existe sólo un número entre todas las sumas inferiores y las superiores que es

$$\int_0^2 f = 0.$$

2. Sea $f(x) = x$ en $[0,b]$ con $b > 0$, ¿Es $f$ integrable? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuánto vale $\displaystyle\int_0^b f$ ?

*Solución:*

Sea $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[0,b]$, entonces

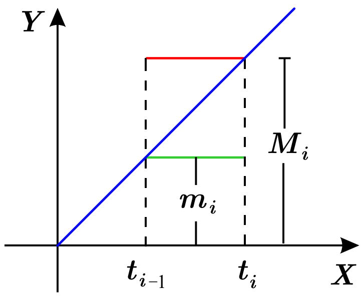


Figura 2-4

$$m_i = t_{i-1} \qquad \text{y} \qquad M_i = t_i, \qquad \text{con } i = 1, \ldots, n.$$

de donde

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) \\ &= t_0 (t_1 - t_0) + t_1 (t_2 - t_1) + \cdots + t_{n-1}(t_n - t_{n-1}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} t_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= t_1 (t_1 - t_0) + t_2 (t_2 - t_1) + \cdots + t_n (t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Una manera de encontrar una expresión más simple para estas sumas es suponer que $P = P_n$ divide al intervalo $[0, b]$ en $n$ subintervalos iguales. En este caso la longitud de cada subintervalo es

$$t_i - t_{i-1} = \frac{b}{n}$$

y

$$P_n = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \cdots, \frac{ib}{n}, \cdots, \frac{nb}{n} = b\right\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)b}{n}\left(\frac{b}{n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (i-1)\frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) \\ &= \frac{b^2}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1} j. \end{aligned}$$

Probemos ahora por inducción que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Si $n = 1$, entonces

$$\sum_{j=0}^{1} j = 0 + 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

- Supongamos cierto el resultado para $n - 1$, es decir,

$$\sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2}.$$

- P.D. Para $n$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} j &= \sum_{j=0}^{n-1} j + n \\ &= \frac{(n-1)\,n}{2} + n \\ &= \frac{n^2 - n + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 + n}{2} \\ &= \frac{n\,(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Así

$$L\,(f, P_n) = \frac{b^2}{n^2}\left(\frac{(n-1)\,n}{2}\right) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

De la misma manera

$$\begin{aligned}U\,(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} t_i\,(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{ib}{n}\left(\frac{b}{n}\right) \\ &= \frac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{b^2}{n^2}\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right) \\ &= \frac{b^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right).\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}U\,(f, P_n) - L\,(f, P_n) &= \frac{b^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{b^2}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{b^2}{2}\left(\frac{n+1-n+1}{n}\right) \\ &= \frac{b^2}{n}.\end{aligned}$$

Dada $\varepsilon > 0$, basta tomar $n > \dfrac{b^2}{\varepsilon}$ para obtener una partición $P_n$ tal que

$$U\,(f, P_n) - L\,(f, P_n) < \varepsilon,$$

es decir, $f$ es integrable.

Observemos que

$$L(f, P_n) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq \frac{b^2}{2} \leq \frac{b^2}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) = U(f, P_n)$$

de donde

$$L(f, P_n) \leq \frac{b^2}{2} \leq U(f, P_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por supuesto no todas las particiones tienen esta forma, sin embargo, puesto que

$$U(f, P_n) - L(f, P_n)$$

puede hacerse tan pequeño como se quiera, entonces existe un único punto entre $L(f, P_n)$ y $U(f, P_n)$. Por tanto,

$$\int_0^b f = \frac{b^2}{2}.$$

Observamos que con el argumento anterior, tan solo hemos comprobado que el área del triángulo de la figura es $\frac{b^2}{2}$.

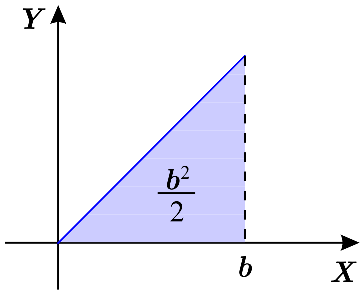


Figura 2-5

3. Sea $f(x) = x^2$ en $[0, b]$ con $b > 0$. ¿Es $f$ integrable? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuánto vale $\int_0^b f$ ?

*Solución:*

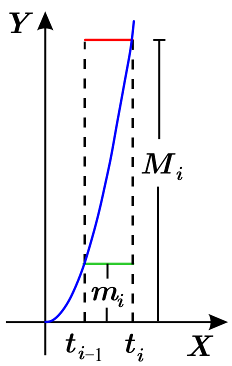


Figura 2-6

Sea $P_n$ como en el ejemplo anterior, entonces

$$P_n = \left\{0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \cdots, \frac{ib}{n}, \cdots, \frac{nb}{n} = b\right\},$$

de donde

$$t_i - t_{i-1} = \frac{b}{n}$$

y

$$\begin{aligned} m_i &= (t_{i-1})^2 = \left(\frac{(i-1)\,b}{n}\right)^2 = \frac{(i-1)^2\,b^2}{n^2} \\ M_i &= t_i^2 = \left(\frac{ib}{n}\right)^2 = \frac{i^2b^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\,(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1})^2\,(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2\,b^2}{n^2}\left(\frac{b}{n}\right) \\ &= \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1} j^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\,(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} t_i^2\,(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2b^2}{n^2}\left(\frac{b}{n}\right) \\ &= \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2. \end{aligned}$$

Utilizando inducción podemos probar que

$$1^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k\,(k+1)\,(2k+1)\,.$$

Así

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{1}{6}\right)(n-1)\,n\,(2(n-1)+1) = \frac{b^3}{n^2}\left(\frac{1}{6}\right)(n-1)(2n-1) \\ &= \frac{b^3}{3}\left(\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\right) \\ U(f,P_n) &= \frac{b^3}{n^3}\left(\frac{1}{6}\right)n\,(n+1)(2n+1) = \frac{b^3}{n^2}\left(\frac{1}{6}\right)(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{b^3}{3}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}\right) \end{aligned}$$

P.D. $\frac{b^3}{3}\left(\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\right) \le \frac{b^3}{3} \le \frac{b^3}{3}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}\right)$.
Sabemos que

$$2n-1 \le 2n \le 2n+1 \qquad\qquad n-1 \le n \le n+1$$

de donde

$$\begin{aligned} 2n-1 &\le 2n \\ (n-1)(2n-1) &\le (n-1)\,2n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} n-1 &\le n \\ (n-1)\,2n &\le 2n^2 \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} (n-1)(2n-1) &\le 2n^2 \\ \frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} &\le 1. \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned} 2n &\le 2n+1 \\ 2n^2 &\le (2n+1)\,n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} n &\le n+1 \\ (2n+1)\,n &\le (2n+1)(n+1) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 2n^2 &\le (2n+1)(n+1) \\ 1 &\le \frac{(2n+1)(n+1)}{2n^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2} \le 1 \le \frac{(2n+1)(n+1)}{2n^2},$$

multiplicando esta desigualdad por $\frac{b^3}{3}$ obtenemos

$$L(f,P_n) = \frac{b^3}{3}\left(\frac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}\right) \le \frac{b^3}{3} \le \frac{b^3}{3}\left(\frac{(2n+1)(n+1)}{2n^2}\right) = U(f,P),$$

es decir,

$$L(f, P_n) \leq \frac{b^3}{3} \leq U(f, P_n).$$

De la misma manera que en el ejemplo anterior tenemos que

$$U(f, P_n) - L(f, P_n)$$

puede hacerse tan pequeño como queramos si $n$ es suficientemente grande y

$$\int_0^b f = \frac{b^3}{3}.$$

En resumen, tenemos que

- $\displaystyle\int_a^b f = c(b-a)$ si $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$.
- $\displaystyle\int_0^b f = \frac{b^2}{2}$ si $f(x) = x$ para todo $x \in [0, b]$.
- $\displaystyle\int_0^b f = \frac{b^3}{3}$ si $f(x) = x^2$ para todo $x \in [0, b]$.

Para evitar confusiones escribiremos

$$\int_a^b f(x)\ dx \qquad \text{en vez de} \int_a^b f.$$

Entonces la lista anterior la escribiremos como

- $\displaystyle\int_a^b c\, dx = c(b-a)$.
- $\displaystyle\int_0^b x\, dx = \frac{b^2}{2}$.
- $\displaystyle\int_0^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3}$.

Como en el caso de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, $x$ puede sustituirse por cualquier otra letra excepto por supuesto de $f$, $a$ o $b$. Así por ejemplo

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b f(\alpha)\ d\alpha.$$

El símbolo $dx$ no tiene significado por sí solo, como no lo tiene el símbolo $x \to$ en el caso de límite.

$f(x)\ dx$ puede considerarse como una abreviatura de la función $f(x)$ para todo $x$.

Ejemplo:

$$\int_0^b y\,dx = yb.$$

Más adelante veremos una serie de métodos que nos permitirán calcular una buena cantidad de integrales. Pero antes de esto surge el problema de determinar cuáles funciones son integrables. En este curso veremos sólo algunos resultados al respecto. Un resultado que probaremos es

$$\text{Si } f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es continua entonces } f \text{ es integrable en } [a,b]\,.$$

Pero antes veremos otros resultados que necesitamos para probar lo anterior.

*Teorema*

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable y $c \in (a,b)$, entonces $f$ es integrable sobre $[a,c]$ y $[c,b]$ y recíprocamente. Además

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

*Demostración:*

$\Longrightarrow$) Supongamos que $f$ es integrable sobre $[a,b]$, entonces dada $\varepsilon > 0$ existe una partción $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Supongamos que $c = t_j$ para alguna $j$.

Si no es el caso tomamos $Q$ una partición que contiene a $t_0, \cdots, t_n$ y a $c$, entonces $Q \supset P$ y

$$U(f,Q) - L(f,Q) \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Entonces

$$P' = \{t_0, \cdots, t_j\} \qquad \text{y} \qquad P'' = \{t_j, \cdots, t_n\}$$

son particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente y como

$$\begin{aligned} L(f,P) &= L(f,P') + L(f,P'') \\ U(f,P) &= U(f,P') + U(f,P'') \end{aligned}$$

entonces

$$(U(f,P') - L(f,P')) + (U(f,P'') - L(f,P'')) = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon,$$

de donde

$$\begin{aligned} U(f,P') - L(f,P') &< \varepsilon \\ U(f,P'') - L(f,P'') &< \varepsilon \end{aligned}$$

esto implica que $f$ es integrable sobre $[a,c]$ y $[c,b]$.

Como

$$\begin{aligned} L(f,P') &\leq \int_a^c f(x)\ dx \leq U(f,P') \\ L(f,P'') &\leq \int_c^b f(x)\ dx \leq U(f,P'') \end{aligned}$$

entonces

$$L(f,P) \leq \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \leq U(f,P)$$

puesto que esto se cumple para cualquier partición $P$, entonces

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

$\Longleftarrow$) Supongamos que $f$ es integrable sobre $[a,c]$ y $[c,b]$.
Sea $\varepsilon > 0$, existen $P'$ y $P''$ particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente tales que

$$\begin{aligned} U(f,P') - L(f,P') &< \frac{\varepsilon}{2} \\ U(f,P'') - L(f,P'') &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora $P = P' \cup P''$ partición de $[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned} L(f,P) &= L(f,P') + L(f,P'') \\ U(f,P) &= U(f,P') + U(f,P'') \end{aligned}$$

de donde

$$U(f,P) - L(f,P) = [U(f,P') - L(f,P')] + [U(f,P'') - L(f,P'')] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así,

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \qquad \text{para todo } \varepsilon.$$

Por tanto $f$ es integrable en $[a,b]$.

■

*Definición:*

$\int_a^b f$ sólo fue definida para $a < b$.

$$\text{Si } a = b \text{ definimos } \int_a^a f = 0 \text{ y } \int_a^b f = -\int_b^a f \text{ si } a > b.$$

Con esta definición tenemos que

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \qquad \forall\, a, b, c.$$

(Incluso si no se cumple $a < c < b$.)

La demostración de este hecho se hace caso por caso, hagamos la demostración de uno de ellos. Supongamos que $c < a < b$. Usando el teorema anterior tenemos que

$$\int_c^b f(x)\ dx = \int_c^a f(x)\ dx + \int_a^b f(x)\ dx$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &= \int_c^b f(x)\ dx - \int_c^a f(x)\ dx \\ &= \int_c^b f(x)\ dx + \int_a^c f(x)\ dx\end{aligned}$$

como queríamos probar.

Usando el teorema anterior y los ejemplos analizados tenemos que

$$\begin{aligned}\int_a^b x\,dx &= \int_a^0 x\,dx + \int_0^b x\,dx \\ &= -\int_0^a x\,dx + \int_0^b x\,dx \\ &= -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2}.\end{aligned}$$

De manera semejante

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3 - a^3}{2}.$$

*Teorema*

Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables sobre $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable sobre $[a, b]$ y

$$\int_a^b (f + g)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$

*Demostración:*

Sea $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ partición de $[a, b]$ ,

$$\begin{aligned}m_i &= \text{ínf}\,\{(f + g)(x) \mid t_{i-1} \le x \le t_i\} \\ m_i' &= \text{ínf}\,\{f(x) \mid t_{i-1} \le x \le t_i\} \\ m_i'' &= \text{ínf}\,\{g(x) \mid t_{i-1} \le x \le t_i\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{(f+g)(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \\ M_i' &= \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \\ M_i'' &= \sup\{g(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}. \end{aligned}$$

Entonces

$$m_i' + m_i'' \leq m_i \leq M_i \leq M_i' + M_i'',$$

de donde

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P).$$

Como $f$ y $g$ son integrables, entonces dado $\varepsilon > 0$ existen particiones $P'$ y $P''$ tales que:

$$\begin{aligned} U(f,P') - L(f,P') &< \frac{\varepsilon}{2} \\ U(g,P'') - L(g,P'') &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Tomamos $P = P' \cup P''$, entonces

$$\begin{aligned} [U(f,P) + U(g,P)] - [L(f,P) + L(g,P)] &\leq U(f,P') + U(g,P'') - [L(f,P') + L(g,P'')] \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como

$$U(f+g,P) - L(f+g,P) \leq [U(f,P) + U(g,P)] - [L(f,P) + L(g,P)] < \varepsilon$$

se sigue que $f+g$ es integrable sobre $[a,b]$.

Más aún:

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq \int_a^b (f+g)(x)\ dx \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P)$$

y

$$L(f,P) + L(g,P) \leq \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx. \leq U(f,P) + U(g,P).$$

Por la unicidad de la integral tenemos que

$$\int_a^b (f+g)(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx.$$

■

El recíproco de este teorema no es válido.
Sean

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{sobre } [a,b] \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{sobre } [a,b]$$

entonces

$$(f+g)(x)=1 \qquad \forall\, x\in[a,b]\,.$$

Tenemos que $f+g$ es integrable pero ni $f$ ni $g$ lo son y por tanto

$$\int_a^b (f+g)(x)\ dx \neq \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx \qquad \text{estas no existen.}$$

*Teorema*

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ integrable sobre $[a,b]$ y $\beta\in\mathbb{R}$ arbitrario, entonces $\beta f$ es integrable sobre $[a,b]$ y

$$\int_a^b (\beta f)(x)\ dx = \beta\int_a^b f(x)\ dx.$$

*Demostración:*

- Caso 1: Si $\beta=0$, entonces $(\beta f)(x)=0$. Por ser una constante es integrable y

$$\int_a^b (\beta f)(x)\ dx = \int_a^b 0\,dx = 0 \qquad \text{y} \qquad 0\int_a^b f(x)\ dx = 0.$$

- Caso 2: Si $\beta>0$.

  Sea $P=\{t_0,\cdots,t_n\}$ partición de $[a,b]$ ,

$$\begin{aligned}
m_i &= \text{ínf}\,\{f(x)\mid t_{i-1}\le x\le t_i\}\\
m_i' &= \text{ínf}\,\{\beta f(x)\mid t_{i-1}\le x\le t_i\}=\beta m_i\\
M_i &= \sup\{f(x)\mid t_{i-1}\le x\le t_i\}\\
M_i' &= \sup\{\beta f(x)\mid t_{i-1}\le x\le t_i\}=\beta M_i
\end{aligned}$$

  Entonces

$$\begin{aligned}
L(\beta f,P) &= \sum_{i=1}^n m_i'(t_i-t_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^n \beta m_i(t_i-t_{i-1})\\
&= \beta\sum_{i=1}^n m_i(t_i-t_{i-1})\\
&= \beta L(f,P)\,.
\end{aligned}$$

  Análogamente $U(\beta f,P)=\beta U(f,P)\,.$

  Como $f$ es integrable, dado $\dfrac{\varepsilon}{\beta}>0$ existe una partición $P$ tal que

$$\begin{aligned}
U(f,P)-L(f,P) &< \frac{\varepsilon}{\beta}\\
\beta\left(U(f,P)-L(f,P)\right) &< \beta\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

pero
$$U(\beta f,P)-L(\beta f,P)=\beta\left(U(f,P)-L(f,P)\right)<\varepsilon.$$
Así $\beta f$ es integrable sobre $[a,b]$.

Más aún:
$$\beta L(f,P)=L(\beta f,P)\leq\int_a^b(\beta f)(x)\,dx\leq U(\beta f,P)=\beta U(f,P)$$
y
$$L(f,P)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq U(f,P)\quad\Longrightarrow\quad\beta L(f,P)\leq\beta\int_a^b f(x)\,dx\leq\beta U(f,P)\quad\forall P.$$
Por la unicidad de la integral tenemos que
$$\int_a^b(\beta f)(x)\,dx=\beta\int_a^b f(x)\,dx.$$

- Caso 3: Si $\beta<0$.
$$\begin{aligned}m_i'&=\inf\{\beta f(x)\mid t_{i-1}\leq x\leq t_i\}=\beta M_i\\ M_i'&=\sup\{\beta f(x)\mid t_{i-1}\leq x\leq t_i\}=\beta m_i,\end{aligned}$$
entonces
$$\begin{aligned}L(\beta f,P)&=\sum_{i=1}^n m_i'(t_i-t_{i-1})\\&=\sum_{i=1}^n\beta M_i(t_i-t_{i-1})\\&=\beta\sum_{i=1}^n M_i(t_i-t_{i-1})\\&=\beta U(f,P).\end{aligned}$$
Análogamente $U(\beta f,P)=\beta L(f,P)$, de donde
$$U(\beta f,P)-L(\beta f,P)=\beta\left(L(f,P)-U(f,P)\right).$$
Como $f$ es integrable, dado $\dfrac{\varepsilon}{-\beta}>0$ existe una partición $P$ tal que
$$\begin{aligned}U(f,P)-L(f,P)&<\frac{\varepsilon}{-\beta}\\ L(f,P)-U(f,P)&>\frac{\varepsilon}{\beta}\\ \beta\left(L(f,P)-U(f,P)\right)&<\varepsilon\qquad\text{ya que }\beta<0,\end{aligned}$$
de donde

$$U(\beta f, P) - L(\beta f, P) = \beta\left(L(f,P) - U(f,P)\right) < \varepsilon.$$

Por tanto, $\beta f$ es integrable sobre $[a,b]$.

Más aún:

$$\beta U(f,P) = L(\beta f, P) \leq \int_a^b (\beta f)(x)\; dx \leq U(\beta f, P) = \beta L(f,P)$$

y

$$L(f,P) \leq \int_a^b f(x)\; dx \leq U(f,P) \quad \Longrightarrow \quad \beta L(f,P) \geq \beta \int_a^b f(x)\; dx \geq \beta U(f,P) \quad \forall\, P.$$

Por la unicidad de la integral tenemos que

$$\int_a^b (\beta f)(x)\; dx = \beta \int_a^b f(x)\; dx.$$

■

*Teorema*

Sea $f$ una función integrable sobre $[a,b]$ tal que

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{para todo } x \in [a,b],$$

entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\; dx \leq M(b-a).$$

*Demostración:*

Sea $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ partición de $[a,b]$, entonces

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M \qquad \forall\, i.$$

De donde

$$\begin{aligned}
m\left(t_i - t_{i-1}\right) &\leq m_i\left(t_i - t_{i-1}\right) \\
\sum_{i=1}^n m\left(t_i - t_{i-1}\right) &\leq \sum_{i=1}^n m_i\left(t_i - t_{i-1}\right) \\
m \sum_{i=1}^n \left(t_i - t_{i-1}\right) &\leq L(f,P) \\
m(b-a) &\leq L(f,P).
\end{aligned}$$

Análogamente

$$U(f,P) \leq M(b-a) \qquad \forall\, P.$$

De donde

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq U(f,P) \leq M(b-a).$$

Por tanto,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a).$$

■

*Definición:*
Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable, definimos $F:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

*Teorema*

Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable, entonces

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt.$$

es continua en $[a,b]$.

*Demostración:*

Sea $c \in [a,b]$.
P.D. $F$ es continua en $c$, es decir, $\lim\limits_{h\to 0} F(c+h) = F(c)$.
Como $f$ es integrable en $[a,b]$, entonces por definición $f$ es acotada en $[a,b]$, sea $M>0$ tal que

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall\, x \in [a,b],$$

es decir,

$$-M \leq f(x) \leq M.$$

Si $h>0$, entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(t)\ dt - \int_a^c f(t)\ dt = \int_c^{c+h} f(t)\ dt,$$

y por el teorema anterior,

$$-Mh \leq \int_c^{c+h} f(t)\ dt \leq Mh,$$

es decir,

$$-Mh \leq F(c+h) - F(c) \leq Mh \tag{2.1}$$

Si $h < 0$, entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\ dt = -\int_{c+h}^{c} f(t)\ dt.$$

Utilizando el teorema anterior en el intervalo $[c+h, c]$ que tiene longitud $-h$, tenemos

$$\begin{aligned} -M &\leq f(x) \leq M \\ -M(-h) &\leq \int_{c+h}^{c} f(t)\ dt \leq M(-h) \end{aligned}$$

de donde

$$Mh \leq \int_{c+h}^{c} f(t)\ dt \leq -Mh,$$

multiplicando la desigualdad por $(-1)$ tenemos

$$-Mh \geq -\int_{c+h}^{c} f(t)\ dt \geq Mh,$$

es decir

$$Mh \leq F(c+h) - F(c) \leq -Mh \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) tenemos que

$$|F(c+h) - F(c)| \leq M\,|h|\,.$$

Así si $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$|F(c+h) - F(c)| < \varepsilon$$

siempre que

$$|h| < \frac{\varepsilon}{M} = \delta,$$

es decir,

$$0 < |h| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad \Longrightarrow |F(c+h) - F(c)| \leq M\,|h| < M\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) = \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\lim_{h\to 0} F(c+h) = F(c)\,,$$

es decir, $F$ es continua en $c$.

■

Hemos probado que si $f$ es integrable, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ es continua. Ahora nos podemos preguntar qué sucede si $f$ es continua. Para responder a ésto, tenemos el *Primer Teorema Fundamental del Cálculo.*