Inducción

1. Demuestra por inducción sobre $n \geq 0$, que $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Tenemos que $n \in \mathbb{N}$, vamos a probar para los siguientes casos:

- Cuando $n = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 0(0+1) = \frac{0(0+1)(0+2)}{3} = 0$$

  Por lo tanto cumple cuando $n = 0$.

- Cuando $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 0 + 1(1+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$$

Hipótesis inductiva: supongamos que el teorema se cumple para todos los valores de n ahora demostremos para $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = (n+1)((n+1)+1) + \sum_{i=1}^{n} i(i+1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)((n+1)+1) \text{ , por nuestra hipó tesis de inducció n.} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)((n+1)+1)}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)((n+1)+1)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n(n+2) + 3((n+1)+1))}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n(n+2) + 3(n+2))}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n^2 + 2n + 3n + 2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3))}{3} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2))}{3}
\end{aligned}$$

La equivalencia se cumple para $n+1$.

Por el principio de inducción matemática, el teorema es válido para todo $n \in \mathbb{N}$

2. Demuestra por inducción sobre $n \geq 0$, que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Tenemos que $n \in \mathbb{N}$, vamos a probar para los siguientes casos:

- Cuando $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$$

- Cuando $n = 2$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 = \frac{2^2(2+1)^2}{4} = 9$$

Hipótesis inductiva: supongamos que el teorema se cumple para todos los valores de n ahora demostremos para $n = n + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= (n+1)^3 + \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \text{ , por nuestra hipó tesis de inducció n.} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

La equivalencia se cumple para $n + 1$.

Por el principio de inducción matemática, el teorema es válido para todo $n \in \mathbb{N}$

3. Demuestre por inducción sobre $n \geq 5$, que $2^n > n^2$.

Tenemos que $n \in \mathbb{N}$, vamos a probar para los siguientes casos:

- Cuando $n = 5$

$$\begin{gathered} 2^5 > n^2 \\ 32 > 25 \end{gathered}$$

- Cuando $n = 6$

$$\begin{gathered} 2^6 > 6^2 \\ 64 > 36 \end{gathered}$$

Hipótesis inductiva: supongamos que el teorema se cumple para todos los valores de n ahora demostremos para $n = n + 1$.

$$\begin{gathered} 2 \cdot 2^n > (n+1)^2 \\ 2^{(n+1)} > (n+1)^2 \end{gathered}$$

Por lo tanto se cumple $\forall n \geq 5$.