# Simetrías, superficies cuádricas y arte

Geometría Analítica II


Adán Israel Espinosa de la Cruz

Facultad de Ciencias


12 de octubre del 2020

# 1 Outline

## 1 Simetrías respecto a ejes y planos coordenados

Sea $P = (x, y, z)$

- $P$ y $-P$ son simétricos respecto al origen.
- $P$ y $(x, -y, -z)$ son simétricos respecto al eje $X$.
- $P$ y $(-x, y, -z)$ son simétricos respecto al eje $Y$.
- $P$ y $(-x, -y, z)$ son simétricos respecto al eje $Z$
- $P$ y $(x, y, -z)$ son simétricos respecto al plano $\pi_{XY}$.
- $P$ y $(-x, y, z)$ son simétricos respecto al plano $\pi_{YZ}$.
- $P$ y $(x, -y, z)$ son simétricos respecto al plano $\pi_{XZ}$.

# 2 Outline

## 2 Simetrías en superficies cuádricas



Sea $\mathscr{G}$ : "$2x^2 - y + z^2 = 2$" ¿Cumple $\mathscr{G}$ las simetrías respecto a ejes coordenados?

Sea $\mathscr{G}$ : "$2x^2 - y + z^2 = 2$" ¿Cumple $\mathscr{G}$ las simetrías respecto a ejes coordenados?

- Eje X, afirmamos que no tiene simetría respecto a este eje.
  Sea $P = (0, 2, 2)$, veamos que $P \in \mathscr{G}$
  $2x^2 - y + z^2 = 2(0)^2 - 2 + 2^2 = -2 + 4 = 2\checkmark$
  Veamos que $P' = (0, -2, -2) \notin \mathscr{G}$
  $2x^2 - y + z^2 = 2(0)^2 - (-2) + (-2)^2 = 2 + 4 = 6$
  Por lo tanto $P'$ no satisface la ecuación y $\mathscr{G}$ no es simétrica respecto al eje $X$

Sea $\mathscr{G}$ : "$2x^2 - y + z^2 = 2$" ¿Cumple $\mathscr{G}$ las simetrías respecto a ejes coordenados?

- Eje X, afirmamos que no tiene simetría respecto a este eje.
  Sea $P = (0, 2, 2)$, veamos que $P \in \mathscr{G}$
  $2x^2 - y + z^2 = 2(0)^2 - 2 + 2^2 = -2 + 4 = 2\checkmark$
  Veamos que $P' = (0, -2, -2) \notin \mathscr{G}$
  $2x^2 - y + z^2 = 2(0)^2 - (-2) + (-2)^2 = 2 + 4 = 6$
  Por lo tanto $P'$ no satisface la ecuación y $\mathscr{G}$ no es simétrica respecto al eje $X$
- Eje Y, afirmamos que sí tiene simetría respecto a este eje.
  sea $P = (x, y, z) \in \mathscr{G}$, veamos que $P' = (-x, y, -z) \in \mathscr{G}$, sustituimos a $P'$ en la ecuación de $\mathscr{G}$
  $2x^2 - y + z^2 = 2(-x)^2 - (y) + (-z)^2 = 2x^2 - y + z^2 = 2\checkmark$
  Esta última igualdad se da al estar $P \in \mathscr{G}$

## 2 Simetrías en superficies cuádricas

$\mathscr{G}$ : "$2x^2 - y + z^2 = 2$"

- Eje Z, afirmamos que no tiene simetría respecto a este eje.
  Sea $P = (0, 2, 2)$ otra vez, veamos que $P' = (0, -2, 2) \notin \mathscr{G}$
  $2x^2 - y + z^2 = 2(0)^2 - (-2) + (2)^2 = 2 + 4 = 6$
  Por lo tanto $P'$ no satisface la ecuación y $\mathscr{G}$ no es simétrica respecto al eje $Z$

$\mathscr{G}$ : "$2x^2 - y + z^2 = 2$"

- Eje Z, afirmamos que no tiene simetría respecto a este eje.
  Sea $P = (0, 2, 2)$ otra vez, veamos que $P' = (0, -2, 2) \notin \mathscr{G}$
  $2x^2 - y + z^2 = 2(0)^2 - (-2) + (2)^2 = 2 + 4 = 6$
  Por lo tanto $P'$ no satisface la ecuación y $\mathscr{G}$ no es simétrica respecto al eje $Z$
- Plano $\pi_{XY}$, afirmamos que sí tiene simetría respecto a este plano.
  Sea $P = (x, y, z) \in \mathscr{G}$, veamos que $P' = (x, y, -z) \in \mathscr{G}$, sustituimos a $P'$ en la ecuación de $\mathscr{G}$
  $2x^2 - y + z^2 = 2(x)^2 - (y) + (-z)^2 = 2x^2 - y + z^2 = 2\checkmark$ Esta última igualdad se da al estar $P \in \mathscr{G}$

$\mathscr{G}$ : "$2x^2 - y + z^2 = 2$"

- Eje Z, afirmamos que no tiene simetría respecto a este eje.
  Sea $P = (0, 2, 2)$ otra vez, veamos que $P' = (0, -2, 2) \notin \mathscr{G}$
  $2x^2 - y + z^2 = 2(0)^2 - (-2) + (2)^2 = 2 + 4 = 6$
  Por lo tanto $P'$ no satisface la ecuación y $\mathscr{G}$ no es simétrica respecto al eje $Z$
- Plano $\pi_{XY}$, afirmamos que sí tiene simetría respecto a este plano.
  Sea $P = (x, y, z) \in \mathscr{G}$, veamos que $P' = (x, y, -z) \in \mathscr{G}$, sustituimos a $P'$ en la ecuación de $\mathscr{G}$
  $2x^2 - y + z^2 = 2(x)^2 - (y) + (-z)^2 = 2x^2 - y + z^2 = 2$✓ Esta última igualdad se da al estar $P \in \mathscr{G}$
- Plano $\pi_{YZ}$, afirmamos que sí tiene simetría respecto a este plano.
  Sea $P = (x, y, z) \in \mathscr{G}$, veamos que $P' = (-x, y, z) \in \mathscr{G}$, sustituimos a $P'$ en la ecuación de $\mathscr{G}$
  $2x^2 - y + z^2 = 2(-x)^2 - (y) + (z)^2 = 2x^2 - y + z^2 = 2$✓ Esta última igualdad se da al estar $P \in \mathscr{G}$

- Plano $\pi_{XZ}$, afirmamos que no tiene simetría respecto a este plano. Sea de nuevo $P = (0, 2, 2)$ otra vez, veamos que $P' = (0, -2, 2) \notin \mathscr{G}$ Las cuentas se encuentran en la diapositiva anterior ya qe $P'$ es igual en el caso del eje $Z$

- Plano $\pi_{XZ}$, afirmamos que no tiene simetría respecto a este plano.
  Sea de nuevo $P = (0, 2, 2)$ otra vez, veamos que $P' = (0, -2, 2) \notin \mathscr{G}$
  Las cuentas se encuentran en la diapositiva anterior ya qe $P'$ es igual en el caso del eje $Z$
- Origen afirmamos que no tiene simetría respecto a este plano.
  Sea de nuevo $P = (0, 2, 2)$ otra vez, veamos que $P' = (0, -2, -2) \notin \mathscr{G}$
  Las cuentas se encuentra dos diapositivas atrás ya qe $P'$ es igual en el caso del eje $X$

- Plano $\pi_{XZ}$, afirmamos que no tiene simetría respecto a este plano.
  Sea de nuevo $P = (0, 2, 2)$ otra vez, veamos que $P' = (0, -2, 2) \notin \mathscr{G}$
  Las cuentas se encuentran en la diapositiva anterior ya qe $P'$ es igual en el caso del eje $Z$
- Origen afirmamos que no tiene simetría respecto a este plano.
  Sea de nuevo $P = (0, 2, 2)$ otra vez, veamos que $P' = (0, -2, -2) \notin \mathscr{G}$
  Las cuentas se encuentra dos diapositivas atrás ya qe $P'$ es igual en el caso del eje $X$

## 2 Ejemplos



Consideren:

$$\mathscr{G}_1 : x^2 - \frac{y^2}{9} - 5z^2 = 10$$

$$\mathscr{G}_2 : -3x^2 + \frac{y^2}{\pi} - \frac{z^2}{2} = 5$$

$$\mathscr{G}_3 : -x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{7z}{2} = 1$$

¿Cuáles de los anteriores lugares geométricos poseen las siete simetrías vistas anteriormente?

Consideren:

$$\mathscr{G}_1 : x^2 - \frac{y^2}{9} - 5z^2 = 10$$

$$\mathscr{G}_2 : -3x^2 + \frac{y^2}{\pi} - \frac{z^2}{2} = 5$$

$$\mathscr{G}_3 : -x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{7z}{2} = 1$$

¿Cuáles de los anteriores lugares geométricos poseen las siete simetrías vistas anteriormente?
$\mathscr{G}_1 y \mathscr{G}_2$, ya que para todos los puntos $P'$, no importa si el signo sus entradas cambian de signo, siempre permanecerán con el original ($P = (x, y, z)$) debido a que todas están al cuadrado.

# 2 Ejemplos



Consideren:

$$\mathscr{G}_1 : x^2 - \frac{y^2}{9} - 5z^2 = 10$$

$$\mathscr{G}_2 : -3x^2 + \frac{y^2}{\pi} - \frac{z^2}{2} = 5$$

$$\mathscr{G}_3 : -x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{7z}{2} = 1$$

¿Cuáles de los anteriores lugares geométricos poseen las siete simetrías vistas anteriormente?
$\mathscr{G}_1 y \mathscr{G}_2$, ya que para todos los puntos $P'$, no importa si el signo sus entradas cambian de signo, siempre permanecerán con el original $(P = (x, y, z))$ debido a que todas están al cuadrado.

Por otro lado $\mathscr{G}_3$ no tiene a $z$ elevada al cuadrado, por lo que donde $P'$ tenga el signo cambiado en $z$, no se cumplirá la simetría.
En el ejemplo anterior, vimos que la entrada en $y$ era la que nos generaba asimetría.

# 3 Outline

# 3 Paraboloide hiperbóluco



Definimos al textitparaboloide hiperbólico como

$$\left( \mathscr{P} :: \text{''}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz\text{''} \right)$$

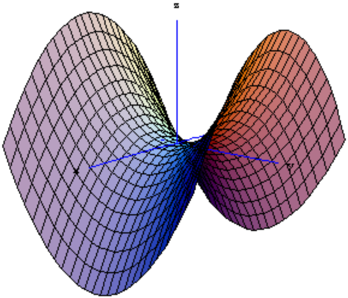
donde $a, b \neq 0$ , $c \geq\ 0$

# 3 Paraboloide hiperbóluco

Definimos al textitparaboloide hiperbólico como

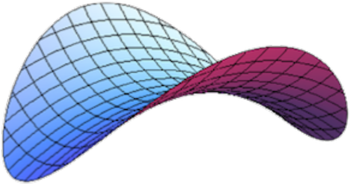
$$\left(\mathscr{P} :: \text{"}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz\text{"}\right)$$

donde $a, b \neq 0$ , $c \geq\ 0$



# 3 Paraboloide hiperbólico





## 3 Paraboloide hiperbólico



Recordemos que la ecuación del paraboloide hiperbólico $\mathscr{P}$ está dada por:

$$\left( \mathscr{P} :: \text{"}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz\text{"} \right)$$

donde $a, b \neq 0$ , $c \geq \ 0$

¿Qué simetrías de las vistas anteriormente no cumple este lugar geométrico?

# 3 Paraboloide hiperbólico



Recordemos que la ecuación del paraboloide hiperbólico $\mathscr{P}$ está dada por:

$$\left(\mathscr{P} :: \text{"}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz\text{"}\right)$$

donde $a, b \neq 0$ , $c \geq\ 0$

¿Qué simetrías de las vistas anteriormente no cumple este lugar geométrico?

Las que cambien el signo de la coordenada $z$, es decir

- Respecto al plano $\pi_{XY}$
- Respecto al eje $X$
- Respecto al eje $Y$
- Respecto al origen

# 3 Ejemplo

Consideremos el paraboloide hiperbólico $\mathscr{P} : x^2 - \frac{y^2}{4} - 5z = 0$ Veamos que no se cumplen las simetrías respecto al eje $Y$ y el origen.

# 3 Ejemplo



Consideremos el paraboloide hiperbólico $\mathscr{P} : x^2 - \frac{y^2}{4} - 5z = 0$ Veamos que no se cumplen las simetrías respecto al eje $Y$ y el origen.

- **Eje** $Y$. Proponemos $P = (\sqrt{6}, 2, 1)$, vemos que $P \in \mathscr{P}$
  $x^2 - \frac{y^2}{4} - 5z = (\sqrt{6})^2 - \frac{(2)^2}{4} - 5(1) = 6 - 1 - 5 = 0$ ✓
  Veamos que $P' = (-\sqrt{6}, 2, -1) \notin \mathscr{P}$
  $x^2 - \frac{y^2}{4} - 5z = (-\sqrt{6})^2 - \frac{(2)^2}{4} - 5(-1) = 6 - 1 + 5 = 10$

$$\therefore P' \notin \mathscr{P}$$

Consideremos el paraboloide hiperbólico $\mathscr{P} : x^2 - \frac{y^2}{4} - 5z = 0$ Veamos que no se cumplen las simetrías respecto al eje $Y$ y el origen.

- **Eje** $Y$. Proponemos $P = (\sqrt{6}, 2, 1)$, vemos que $P \in \mathscr{P}$
  $x^2 - \frac{y^2}{4} - 5z = (\sqrt{6})^2 - \frac{(2)^2}{4} - 5(1) = 6 - 1 - 5 = 0$ ✓
  Veamos que $P' = (-\sqrt{6}, 2, -1) \notin \mathscr{P}$
  $x^2 - \frac{y^2}{4} - 5z = (-\sqrt{6})^2 - \frac{(2)^2}{4} - 5(-1) = 6 - 1 + 5 = 10$

$$\therefore P' \notin \mathscr{P}$$

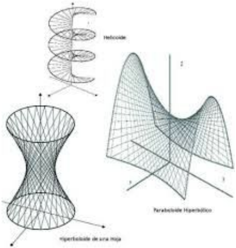
- **Origen**: Tomamos el mismo punto $P$, veamos que
  $P' = (-\sqrt{6}, -2, -1) \notin \mathscr{P}$
  $x^2 - \frac{y^2}{4} - 5z = (-\sqrt{6})^2 - \frac{(-2)^2}{4} - 5(-1) = 6 - 1 + 5 = 10$

$$\therefore P' \notin \mathscr{P}$$

# 4 Outline

# 4 Arquitectura






# 4 Enlaces a aplicaciones a arquitectura



- Félix Candela
  https://youtu.be/nR2yOnC2vog
- Gaudí - Basílica de la Sagrada Familia
  https://baulitoadelrte.blogspot.com/2016/09/gaudi-y-la-geometria.html
  https://sagradafamilia.org/
- Santiago Calatrava
  https://lorencortes.blogspot.com/2012/02/santiago-calatrava.html