pero $t = x + \sqrt{x^2 - x + 3}$ entonces

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt{3}}{x + \sqrt{x^2 - x + 3} + \sqrt{3}} \right| + C.$$

- **Segundo método de Euler**

  Para calcular la integral

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx,$$

donde $c > 0$ hacemos la siguiente sustitución:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}.$$

Hay que considerar sólo un signo, cualquiera de los dos, ya que se obtiene el mismo resultado.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx - \sqrt{c}. \tag{4.13}$$

Elevamos al cuadrado ambos términos de la igualdad y despejamos x:

$$\begin{aligned}
\sqrt{ax^2 + bx + c} &= tx - \sqrt{c} \\
ax^2 + bx + c &= \left(tx - \sqrt{c}\right)^2 \\
ax^2 + bx + c &= t^2x^2 - 2tx\sqrt{c} + c \\
ax^2 + bx - t^2x^2 + 2tx\sqrt{c} &= 0 \\
\left(a - t^2\right)x^2 + \left(b + 2t\sqrt{c}\right)x &= 0 \\
x\left(\left(a - t^2\right)x + \left(b + 2t\sqrt{c}\right)\right) &= 0,
\end{aligned}$$

de donde

$$x = \frac{2\sqrt{c}t + b}{t^2 - a}. \tag{4.14}$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{2\sqrt{c}\left(t^2 - a\right) - 2t\left(2\sqrt{c}t + b\right)}{\left(t^2 - a\right)^2}\, dt \\
&= \frac{2\sqrt{c}t^2 - 2\sqrt{c}a - 4\sqrt{c}t^2 - 2tb}{\left(t^2 - a\right)^2}\, dt \\
&= \frac{-2\sqrt{c}t^2 - 2\sqrt{c}a - 2tb}{\left(t^2 - a\right)^2}\, dt.
\end{aligned}$$

Sustuimos el valor de x obtenido en (4.14) en la ecuación (4.13)

$$\begin{aligned}
\sqrt{ax^2 + bx + c} &= tx - \sqrt{c} \\
&= t\left(\frac{2\sqrt{c}t + b}{t^2 - a}\right) - \sqrt{c} \\
&= \frac{\sqrt{c}t^2 + \sqrt{c}a + tb}{t^2 - a}.
\end{aligned}$$

Entonces podemos escribir la integral como

$$\begin{aligned}\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \left(\frac{\sqrt{c}t^2+\sqrt{c}a+tb}{t^2-a}\right)\left(\frac{-2\sqrt{c}t^2-2\sqrt{c}a-2tb}{\left(t^2-a\right)^2}\right)dt\\ &= -2\int \frac{\left(\sqrt{c}t^2+\sqrt{c}a+tb\right)^2}{\left(t^2-a\right)^3}dt.\end{aligned}$$

Las expresiones que se obtienen son racionales y podemos utilizar el método de fracciones parciales para calcular las integrales.

Ejemplo

1. Calcular $\int \dfrac{dx}{\sqrt{8-x-x^2}}$.

   Solución:

   Como el término independiente es positivo, entonces escribimos

$$\sqrt{8-x-x^2} = tx+\sqrt{8}, \tag{4.15}$$

así

$$\begin{aligned}8-x-x^2 &= \left(tx+\sqrt{8}\right)^2\\ 8-x-x^2 &= t^2x^2+2\sqrt{8}tx+8\\ 0 &= t^2x^2+x^2+2\sqrt{8}tx+x\\ 0 &= \left(t^2+1\right)x^2+\left(2\sqrt{8}t+1\right)x,\end{aligned}$$

de donde

$$x=0 \qquad \text{o} \qquad x=\frac{-2\sqrt{8}t-1}{t^2+1}.$$

Elegimos la segunda solución, entonces

$$\begin{aligned}dx &= \frac{-2\sqrt{8}\left(t^2+1\right)-2t\left(-2\sqrt{8}t-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt\\ &= \frac{-2\sqrt{8}t^2-2\sqrt{8}+4\sqrt{8}t^2+2t}{\left(t^2+1\right)^2}dt\\ &= \frac{2\sqrt{8}t^2+2t-2\sqrt{8}}{\left(t^2+1\right)^2}dt.\end{aligned}$$

y ahora sustituimos el valor de x en

$$\begin{aligned}\sqrt{8-x-x^2} &= tx+\sqrt{8}\\ &= t\left(\frac{-2\sqrt{8}t-1}{t^2+1}\right)+\sqrt{8}\\ &= \frac{-2\sqrt{8}t^2-t+\sqrt{8}t^2+\sqrt{8}}{t^2+1}\\ &= \frac{-\sqrt{8}t^2-t+\sqrt{8}}{t^2+1}.\end{aligned}$$

Así

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{8-x-x^2}}. &= \int \frac{\dfrac{2\sqrt{8}t^2+2t-2\sqrt{8}}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt}{\dfrac{-\sqrt{8}t^2-t+\sqrt{8}}{t^2+1}} \\
&= -2\int \frac{\dfrac{-\sqrt{8}t^2-t+\sqrt{8}}{\left(t^2+1\right)^2}}{\dfrac{-\sqrt{8}t^2-t+\sqrt{8}}{t^2+1}}\,dt \\
&= -2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \\
&= -2\arctan t + C.
\end{aligned}
$$

Ahora despejamos t de (4.15) y obtenemos

$$
\begin{aligned}
\sqrt{8-x-x^2} &= tx+\sqrt{8} \\
\frac{\sqrt{8-x-x^2}-\sqrt{8}}{x} &= t.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$\int \frac{1}{\sqrt{8-x-x^2}}dx = -2\arctan\frac{\sqrt{8-x-x^2}-\sqrt{8}}{x}+C.$$

- **Tercer método de Euler**

  Para calcular la integral

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

si ax^2+bx+c tiene como raíces reales r_1 y r_2 siendo $r_1 \neq r_2$, entonces escribimos

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-r_1)\,t.$$

Como r_1 y r_2 son raíces de ax^2+bx+c se tiene que

$$\sqrt{a\,(x-r_1)\,(x-r_2)} = (x-r_1)\,t.$$

Elevando al cuadrado y despejando x tenemos:

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{a\,(x-r_1)\,(x-r_2)}\right)^2 &= \left((x-r_1)\,t\right)^2 \\
a\,(x-r_1)\,(x-r_2) &= (x-r_1)^2\,t^2 \\
a\,(x-r_2) &= (x-r_1)\,t^2 \\
ax-xt^2 &= ar_2-r_1t^2 \\
x &= \frac{ar_2-r_1t^2}{a-t^2}.
\end{aligned}
$$

De aquí

$$\begin{aligned} dx &= \frac{-2r_1t\left(a-t^2\right)-\left(-2t\right)\left(ar_2-r_1t^2\right)}{\left(a-t^2\right)^2} \\ &= \frac{-2r_1ta+2tar_2}{\left(a-t^2\right)^2} \\ &= \frac{2at\left(r_2-r_1\right)}{\left(a-t^2\right)^2}\,dt. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sqrt{a\left(x-r_1\right)\left(x-r_2\right)} &= \left(x-r_1\right)t \\ &= \left(\frac{ar_2-r_1t^2}{a-t^2}-r_1\right)t \\ &= \frac{at\left(r_2-r_1\right)}{a-t^2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx &= \int\frac{at\left(r_2-r_1\right)}{a-t^2}\left(\frac{2at\left(r_2-r_1\right)}{\left(a-t^2\right)^2}\right)\,dt \\ &= 2\int\frac{a^2t^2\left(r_2-r_1\right)^2}{\left(t^2-a\right)^3}\,dt \\ &= 2a^2\left(r_2-r_1\right)^2\int\frac{t^2}{\left(t^2-a\right)^3}\,dt. \end{aligned}$$

Ejemplo

- Calcular $\displaystyle\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

  Solución:

  Encontramos las raíces de x^2-1, es decir,

$$\begin{aligned} x^2-1 &= 0 \\ \left(x-1\right)\left(x+1\right) &= 0. \end{aligned}$$

  entonces las raíces son $r_1=1$ y $r_2=-1$. Si elegimos r_2 tenemos que:

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\left(x+1\right)t.$$

Elevando al cuadrado y despejando x tenemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)(x+1)} &= (x+1)\,t \\
\left(\sqrt{(x-1)(x+1)}\right)^2 &= ((x+1)\,t)^2 \\
(x-1)(x+1) &= (x+1)^2\,t^2 \\
x-1 &= (x+1)\,t^2 \\
x-xt^2 &= t^2+1 \\
x &= \frac{t^2+1}{1-t^2}.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{2t\,(1-t^2)-(-2t)\,(t^2+1)}{(1-t^2)^2} \\
&= \frac{4t}{(1-t^2)^2}\;dt
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)(x+1)} &= (x+1)\,t \\
&= \left(\frac{t^2+1}{1-t^2}+1\right)t \\
&= \frac{2t}{1-t^2}.
\end{aligned}$$

La integral se transforma en:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{1}{\dfrac{t^2+1}{1-t^2}-\dfrac{2t}{1-t^2}}\left(\frac{4t}{(1-t^2)^2}\right)\;dt \\
&= \int \frac{4t}{(1-t)^2\,(1-t^2)}\;dt \\
&= 4\int \frac{t}{(1-t)^3\,(1+t)}\;dt.
\end{aligned}$$

Aplicando el método de fracciones parciales tenemos:

$$\frac{t}{(1-t)^3\,(1+t)} = \frac{A}{1+t}+\frac{B}{1-t}+\frac{C}{(1-t)^2}+\frac{D}{(1-t)^3}$$

de donde

$$t = A\,(1-t)^3 + B\,(1-t)^2\,(1+t) + C\,(1-t)\,(1+t) + D\,(1+t)$$

Si $t=1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
1 &= D\,(1+1) \\
\frac{1}{2} &= D.
\end{aligned}$$

Si $t = -1$, entonces

$$\begin{aligned} -1 &= A\left(1-(-1)\right)^3 \\ -\frac{1}{8} &= A. \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{8}(1-t)^3 + B(1-t)^2(1+t) + C(1-t)(1+t) + \frac{1}{2}(1+t) \\ &= -\frac{1}{8}\left(1-3t+3t^2-t^3\right) + B\left(t^3-t^2-t+1\right) + C\left(1-t^2\right) + \frac{1}{2}(1+t) \\ &= \left(B+\frac{1}{8}\right)t^3 + \left(-B-C-\frac{3}{8}\right)t^2 + \left(-B+\frac{7}{8}\right)t + B + C + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

y obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} B+\frac{1}{8} &= 0 \\ -B-C-\frac{3}{8} &= 0 \\ -B+\frac{7}{8} &= 1 \\ B+C+\frac{3}{8} &= 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

De la primera ecuación de (4.16) tenemos que

$$B = -\frac{1}{8}.$$

Sustituyendo este valor en la segunda y despejando C tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} - C &= \frac{3}{8} \\ C &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

De donde, $A = B = -\frac{1}{8}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{2}$

Así $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$ es

$$\begin{aligned} &= 4\left(-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{1+t} - \frac{1}{8}\int\frac{dt}{1-t} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1-t)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1-t)^3}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln|1+t| + \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{(1-t)^{-1}}{-1} - 2\frac{(1-t)^{-2}}{-2} + k \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| - \frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} + k \end{aligned}$$

Como

$$t=\frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x+1}=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

entonces

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right|-\frac{1}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}+\frac{1}{\left(1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)^2}+k$$

Método alemán

Este método se utiliza para encontrar la integral de funciones del tipo

$$\frac{\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde el numerador es un polinomio de grado n.

Consideramos la igualdad

$$\begin{aligned}&\int\frac{\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\\ =\ &\left(\beta_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0\right)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\end{aligned}$$

es decir, el polinomio que aparece en el lado derecho de la igualdad es un polinomio de grado $n-1$. Ahora hay que determinar los valores β_i con $i=1,\cdots n-1$ y el valor de λ. Para esto derivamos ambos lados de la igualdad obteniendo

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\\ =\ &\frac{d}{dx}\left(\left(\beta_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0\right)\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\end{aligned}\tag{4.17}$$

Calculamos $\frac{d}{dx}\left(\left(\beta_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0\right)\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$

$$\begin{aligned}&\left((n-1)\beta_{n-1}x^{n-2}+\cdots+\beta_1\right)\sqrt{ax^2+bx+c}\\ &+\left(\beta_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0\right)\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)\end{aligned}$$

Poniendo denominador común tenemos

$$\frac{2\left((n-1)\beta_{n-1}x^{n-2}+\cdots+\beta_1\right)(ax^2+bx+c)+\left(\beta_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0\right)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

de donde la expresión de la derecha de 4.17 es

$$\frac{2\left((n-1)\beta_{n-1}x^{n-2}+\cdots+\beta_1\right)(ax^2+bx+c)+\left(\beta_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0\right)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$
$$+\frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

que simplificando

$$\frac{2\left((n-1)\beta_{n-1}x^{n-2}+\cdots+\beta_1\right)(ax^2+bx+c)+\left(\beta_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0\right)(2ax+b)+2\lambda}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Así la expresión (4.17) la podemos escribir como

$$\begin{aligned} & 2\left(\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0\right) \\ = & 2\left((n-1)\beta_{n-1}x^{n-2}+\cdots+\beta_1\right)\left(ax^2+bx+c\right) \\ & +\left(\beta_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0\right)(2ax+b)+2\lambda \end{aligned}$$

y ahora se igualan los coeficientes de las potencias de x, formando así un sistema de ecuaciones.

Ejemplo

- Calcular ’$\int \frac{x^3+2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$.

  Solución:

  Establecemos la igualdad

$$\int \frac{x^3+2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx=\left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2+x+2}+\lambda\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx \tag{4.18}$$

  Se deriva la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{x^3+2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}} &= (2Ax+B)\sqrt{x^2+x+2}+ \\ & \left(Ax^2+Bx+C\right)\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}\right)+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+2}} \end{aligned}$$

  de donde

$$2\left(x^3+2x-1\right)=2(2Ax+B)\left(x^2+x+2\right)+\left(Ax^2+Bx+C\right)(2x+1)+2\lambda$$

  Simplificando tenemos

$$\begin{aligned} 2x^3+4x-2 &= 4Ax^3+4Ax^2+8Ax+2Bx^2+2Bx+4B+2Ax^3+Ax^2 \\ & +2Bx^2+Bx+2Cx+C+2\lambda \\ &= 6Ax^3+5Ax^2+8Ax+4Bx^2+3Bx+4B+2Cx+C+2\lambda \\ &= 6Ax^3+(5A+4B)x^2+(8A+3B+2C)x+4B+C+2\lambda \end{aligned}$$

Establecemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 6A &= 2 \\ 5A + 4B &= 0 \\ 8A + 3B + 2C &= 4 \\ 4B + C + 2\lambda &= -2 \end{aligned}$$

de donde

$$A = \frac{1}{3}$$

Sustituimos este valor en la segunda ecuación y despejamos B

$$\begin{aligned} 5\left(\frac{1}{3}\right) + 4B &= 0 \\ B &= -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

Sustituimos los valores de A y B en la tercera y despejamos C

$$\begin{aligned} 8\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(-\frac{5}{12}\right) + 2C &= 4 \\ 2C &= 4 - \frac{8}{3} + \frac{5}{4} \\ C &= \frac{31}{24} \end{aligned}$$

y finalmente encontramos el valor de λ

$$\begin{aligned} 4\left(-\frac{5}{12}\right) + \frac{31}{24} + 2\lambda &= -2 \\ 2\lambda &= -2 + \frac{5}{3} - \frac{31}{24} \\ \lambda &= -\frac{13}{16}. \end{aligned}$$

Sustituimos estos valores obtenidos en la expresión (4.18)

$$\int \frac{x^3 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 2}}\, dx = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{12}x + \frac{31}{24}\right)\sqrt{x^2 + x + 2} - \frac{13}{16}\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 2}}\, dx$$

y ahora solo falta calcular

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 2}}\, dx.$$

Para ello escribimos

$$\begin{aligned} x^2 + x + 2 &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

y utilizamos sustitución trigonométrica

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{2} &= \sqrt{\frac{7}{4}}\tan t \\ dx &= \sqrt{\frac{7}{4}}\sec^2 t\ dt, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}\ dx &= \int \frac{\sqrt{\frac{7}{4}}\sec^2 t}{\sqrt{\frac{7}{4}\tan^2 t+\frac{7}{4}}}\ dt \\ &= \int \frac{\sec^2 t}{\sec t}\ dt \\ &= \int \sec t\ dt \\ &= \ln|\tan t+\sec t|+K \\ &= \ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}+\frac{\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{\frac{7}{4}}}\right| \\ &= \ln\left|\frac{2x+1+2\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{7}}\right|. \end{aligned}$$

Por tanto, $\displaystyle\int \frac{x^3+2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}\ dx$ es igual a

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x+\frac{31}{24}\right)\sqrt{x^2+x+2}-\frac{13}{16}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}\ dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^2+-\frac{5}{12}x+\frac{31}{24}\right)\sqrt{x^2+x+2}-\frac{13}{16}\ln\left|\frac{2x+1+2\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{7}}\right|+K. \end{aligned}$$

Integrales binomiales

Las integrales binomiales son de la forma

$$\int x^m\,(a+bx^n)^p\ dx,$$

con $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$ y $m,n,p\in\mathbb{Q}$, tienen primitiva expresada por funciones elementales sólo en uno de los siguientes casos:

- $p \in \mathbb{Z}$.
- $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$.
- $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$.

Esto es llamado el Teorema de Chebyshev sobre diferenciales binomiales.
Integrales que no tienen primitiva expresada por funciones elementales.

1. $\displaystyle\int \sqrt{1+x^4}\,dx$ no tiene ese tipo de primitiva ya que $m = 0, n = 4$, $p = \dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n} &= \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n} + p &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2. Otras funciones "sin primitiva"

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx, \quad \int \sqrt{1 - b \operatorname{sen}^2 x}\, dx, \text{ con } b > 0, b \neq 1 \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

Así, por la penúltima, $\displaystyle\int \sqrt{\cos x}\, dx$ "no tiene primitiva"

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2x+4}}\, dx$.

Solución:

En este caso $m = -1$, $n = 1$, $p = -\dfrac{1}{2}$, entonces

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{1} = 0 \in \mathbb{Z}.$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+4} &= t \\ 2x + 4 &= t^2 \\ 2x &= t^2 - 4 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 2\,dx &= 2t\,dt \\ dx &= t\,dt. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{2x+4}}\,dx &= \int \frac{t}{\left(\frac{t^2-4}{2}\right)t}\,dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-4}dt\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} t &= 2\sec u \\ dt &= 2\sec u \tan u\, du.\end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{t^2-4}dt &= 2\int \frac{2\sec u \tan u}{4\sec^2 u - 4}du \\ &= \int \frac{\sec u \tan u}{\tan^2 u}\,du \\ &= \int \frac{\sec u}{\tan u}\,du \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{sen} u}\,du \\ &= \int \csc u\, du \\ &= -\ln|\csc u + \cot u| + C\end{aligned}$$

Utilizamos el siguiente triángulo para escribir a $\csc u$ y $\cot u$ en función de t.

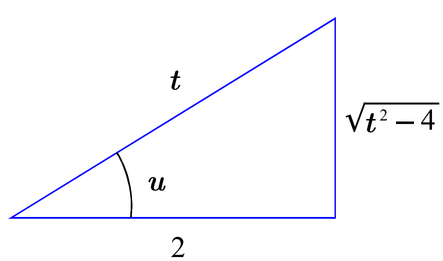


Figura 4-1

de donde

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{t^2-4}dt &= -\ln|\csc u + \cot u| + C \\ &= -\ln\left|\frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + \frac{2}{\sqrt{t^2-4}}\right| + C \\ &= -\ln\left|\frac{t+2}{\sqrt{t^2-4}}\right| + C.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{2x+4}}\,dx &= -\ln\left|\frac{t+2}{\sqrt{t^2-4}}\right| + C\\ &= -\ln\left|\frac{\sqrt{2x+4}+2}{\sqrt{2x+4-4}}\right| + C\\ &= -\ln\left|\frac{\sqrt{2x+4}+2}{\sqrt{2x}}\right| + C.\end{aligned}$$

2. Calcular $\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$.

Solución:

En este caso $m=5$, $n=3$, $p=-\frac{1}{2}$, entonces

$$\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = 2 \in \mathbb{Z}.$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned}\sqrt{x^3-1} &= t\\ x^3-1 &= t^2\\ x^3 &= t^2+1\\ x &= \left(t^2+1\right)^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

de donde

$$dx = \frac{1}{3}\left(t^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}(2t)\;dt$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,dx &= \int \frac{\left(t^2+1\right)^{\frac{5}{3}}}{t}\left(\frac{2}{3}t\left(t^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}\right)\,dt\\ &= \frac{2}{3}\int t^2+1\,dt.\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)+C\end{aligned}$$

Para obtener el resultado en términos de x, escribimos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)+C &= \frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3-1}\right)^3}{3}+\sqrt{x^3-1}\right)+C \\
&= \frac{2}{3}\left(\left(x^3-1\right)\frac{\sqrt{x^3-1}}{3}+\sqrt{x^3-1}\right)+C \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{x^3-1}\left(\frac{x^3-1}{3}+1\right)+C \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{x^3-1}\left(\frac{x^3-1+3}{3}\right)+C \\
&= \frac{2}{9}\sqrt{x^3-1}\left(x^3+2\right)+C.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,dx = \frac{2}{9}\sqrt{x^3-1}\left(x^3+2\right)+C.$$

3. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

Solución:

En este caso $m=-1$, $n=\dfrac{3}{4}$, $p=-\dfrac{1}{3}$, entonces

$$\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{\frac{3}{4}} = 0 \in \mathbb{Z}.$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}} &= t \\
1+\sqrt[4]{x^3} &= t^3 \\
\sqrt[4]{x^3} &= t^3-1 \\
x &= \left(t^3-1\right)^{\frac{4}{3}},
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{4}{3}\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}}\left(3t^2\right)\,dt \\
&= 4t^2\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}}\,dt.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}} &= \int \frac{4t^2\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}}\,dt}{\left(t^3-1\right)^{\frac{4}{3}}\,t} \\
&= \int \frac{4t}{t^3-1}\,dt.
\end{aligned}$$

Ahora calculamos esta última integral utilizando fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{4t}{(t-1)\left(t^2+t+1\right)} &= \frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1} \\
4t &= A\left(t^2+t+1\right)+(Bt+C)(t-1).
\end{aligned}$$

Consideramos $t=1$, entonces

$$\begin{aligned}
4(1) &= A(3)+0 \\
A &= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Ahora sustituimos el valor de A

$$\begin{aligned}
4t &= \frac{4}{3}\left(t^2+t+1\right)+(Bt+C)(t-1) \\
4t &= \frac{4}{3}\left(t^2+t+1\right)+B\left(t^2-t\right)+C(t-1) \\
4t &= \left(\frac{4}{3}+B\right)t^2+\left(\frac{4}{3}-B-C\right)t+\frac{4}{3}-C
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}+B &= 0 \\
\frac{4}{3}-B-C &= 4 \\
\frac{4}{3}-C &= 0.
\end{aligned}$$

Así

$$B=-\frac{4}{3}$$

y de la tercera ecuación tenemos que

$$C=\frac{4}{3}.$$

De manera que

$$\begin{aligned}
\int \frac{4t}{t^3-1}\,dt &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{t-1}+\int \frac{-\frac{4}{3}t+\frac{4}{3}}{t^2+t+1}dt \\
&= \frac{4}{3}\ln|t-1|-\frac{4}{3}\int \frac{t}{t^2+t+1}dt+\frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+t+1}dt \\
&= \frac{4}{3}\ln|t-1|-\frac{4}{3(2)}\int \frac{2t}{t^2+t+1}dt+\frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+t+1}dt \\
&= \frac{4}{3}\ln|t-1|-\frac{4}{3(2)}\int \frac{2t+1-1}{t^2+t+1}dt+\frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+t+1}dt \\
&= \frac{4}{3}\ln|t-1|-\frac{2}{3}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt+\frac{2}{3}\int \frac{1}{t^2+t+1}dt+\frac{4}{3}\int \frac{1}{t^2+t+1}dt \\
&= \frac{4}{3}\ln|t-1|-\frac{2}{3}\ln\left|t^2+t+1\right|+2\int \frac{1}{t^2+t+1}dt.
\end{aligned}$$

Ahora calculamos $2\int \frac{1}{t^2+t+1}dt$. Escribimos el denominador como

$$\begin{aligned} t^2+t+1 &= t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 \\ &= \left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \end{aligned}$$

y hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} t+\frac{1}{2} &= \sqrt{\frac{3}{4}}\tan u \\ dt &= \sqrt{\frac{3}{4}}\sec^2 u\,du. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} 2\int \frac{1}{t^2+t+1}dt &= 2\int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}\sec^2 u\,du}{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\tan u\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= 2\int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}\sec^2 u}{\frac{3}{4}\sec^2 u}\,du \\ &= 2\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{4}{3}\int du \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}u+k \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+k. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{4t}{t^3-1}\,dt &= \frac{4}{3}\ln|t-1|-\frac{2}{3}\ln\left|t^2+t+1\right|+\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+k \\ &= \frac{2}{3}\ln\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right|+\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+k. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}-1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}+1}\right|+\frac{4\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}+1}{\sqrt{3}}\right)+k.$$

4. Calcular $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

Solución:

En este caso $m = -2$, $n = 2$, $p = -\dfrac{1}{2}$, entonces

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \in \mathbb{Z}.$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} x^2 &= t \\ x &= t^{\frac{1}{2}} \\ dx &= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\, dt, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{t\sqrt{4-t}} dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{t\sqrt{4-t}} dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}\sqrt{4-t}} dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2\sqrt{\frac{4-t}{t}}} dt. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4-t}{t}} &= z \\ \frac{4-t}{t} &= z^2 \\ 4-t &= z^2 t \\ 4 &= \left(z^2+1\right) t \\ \frac{4}{z^2+1} &= t, \end{aligned}$$

de donde

$$dt = -4\left(z^2+1\right)^{-2} 2z\, dz,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2\sqrt{\frac{4-t}{t}}}dt &= \frac{1}{2}\int \frac{-4\left(z^2+1\right)^{-2}2z\,dz}{\left(\frac{4}{z^2+1}\right)^2 z}\\
&= -4\int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2\left(\frac{16}{\left(z^2+1\right)^2}\right)}\\
&= \frac{-4}{16}\int dz\\
&= -\frac{1}{4}z+k\\
&= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4-t}{t}}+k.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4-x^2}{x^2}}+k.$$

5. $\displaystyle\int \sqrt{1+x^4}\,dx$ no tiene una primitiva expresada por funciones elementales ya que $m=0, n=4$, $p=\dfrac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}\\
\frac{m+1}{n} &= \frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}\\
\frac{m+1}{n}+p &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\notin\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ninguna de las condiciones del teorema de Chebychev se cumple, entonces no hay una primitiva expresada por funciones elementales.

6. Determinar si $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$ tiene una primitiva expresada por funciones elementales.

Solución:

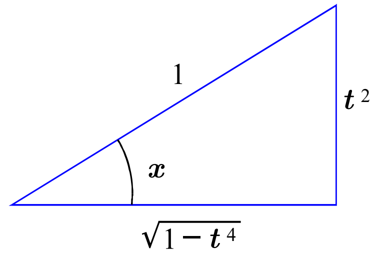
Hacemos el cambio de variable

$$\operatorname{sen} x = t^2$$

de donde

$$\begin{aligned}
\cos x\,dx &= 2t\,dt\\
dx &= \frac{2t}{\cos x}\,dt.
\end{aligned}$$

Utilizamos el siguiente triángulo para expresar $\cos x$ en términos de t:



así

$$dx = \frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}\,dt.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx &= \int t\left(\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}\right)\,dt \\ &= \int 2t^2\left(1-t^4\right)^{-\frac{1}{2}}\,dt,\end{aligned}$$

hemos obtenido es una integral de la forma

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p\,dx$$

donde $m=2$, $n=4$, $p=-\dfrac{1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned}p &= -\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n} &= \frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}\notin\mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n}+p &= \frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\int\sqrt{\operatorname{sen} x}\,dx$ no tiene una primitiva expresada por funciones elementales.

Sustitución $u=\tan\frac{x}{2}$

En las integrales de la forma

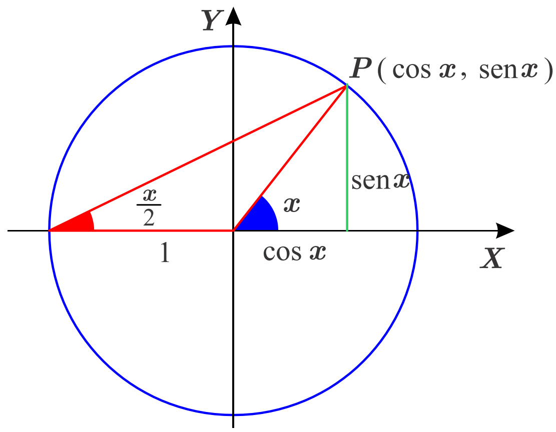
$$\int R\left(\operatorname{sen} x,\cos x\right)\,dx$$

donde R es una función racional de dos variables, se puede reducir mediante la sustitución

$$u=\tan\frac{x}{2}$$

a integrales de la forma $\int r(u)\,du$ donde r es una función racional de una variable.

En la figura observamos que



$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$$

Si llamamos $u = \tan\frac{x}{2}$, entonces utilizando las identidades trigonométricas tenemos

$$\begin{aligned}\tan^2\frac{x}{2}+1 &= \sec^2\frac{x}{2}\\ u^2+1 &= \sec^2\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Veamos cuánto valen el seno y el coseno:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x &= 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = 2\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}\\ &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{u^2+1}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}-1 = \frac{2}{\sec^2\frac{x}{2}}-1 = \frac{2}{u^2+1}-1 = \frac{2-u^2-1}{u^2+1}\\ &= \frac{1-u^2}{u^2+1}\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}x &= 2\arctan u\\ dx &= \frac{2}{1+u^2}\,du.\end{aligned}$$

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

   Solución:

   Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} u &= \tan \frac{x}{2} \\ dx &= \frac{2}{1+u^2}\, du. \end{aligned}$$

   Sabemos que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{u^2+1}$$

   y

$$\cos x = \frac{1-u^2}{u^2+1}$$

   de donde

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x + \cos x &= \frac{2u}{u^2+1} + \frac{1-u^2}{u^2+1} \\ &= \frac{-u^2+2u+1}{u^2+1} \\ &= \frac{-\left(u^2-2u-1\right)}{u^2+1}. \end{aligned}$$

   Así la integral es

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{\frac{-\left(u^2-2u-1\right)}{u^2+1}}\, du = \int \frac{-2}{u^2-2u-1} du = -2 \int \frac{du}{u^2-2u-1}$$

   Para calcular ésta última integral factorizamos u^2-2u-1:

$$\begin{aligned} u^2-2u-1 &= u^2-2u+1-1-1 \\ &= (u-1)^2-2 \\ &= \left(u-1-\sqrt{2}\right)\left(u-1+\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

   Sean

$$\begin{aligned} a &= 1+\sqrt{2} \\ b &= 1-\sqrt{2}, \end{aligned}$$

   entonces

$$u^2-2u-1 = (u-a)(u-b),$$

de donde

$$\frac{1}{(u-a)(u-b)} = \frac{A}{u-a} + \frac{B}{u-b}$$

así

$$\begin{aligned} 1 &= A(u-b) + B(u-a) \\ &= (A+B)u - bA - aB. \end{aligned}$$

Formamos el sistema

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -bA - aB &= 1. \end{aligned}$$

Despejamos A de la primera tenemos

$$A = -B$$

y sustituimos en la segunda

$$\begin{aligned} -b(-B) - aB &= 1 \\ (b-a)B &= 1 \\ B &= \frac{1}{b-a} \end{aligned}$$

De manera que

$$A = -B = \frac{-1}{b-a}.$$

Así

$$\begin{aligned} -2\int \frac{du}{u^2 - 2u - 1} &= -2\left(\frac{1}{b-a}\int \frac{-du}{u-a} + \frac{1}{b-a}\int \frac{du}{u-b}\right) \\ &= \frac{-2}{b-a}\left(-\int \frac{du}{u-a} + \int \frac{du}{u-b}\right) \\ &= \frac{-2}{b-a}\left(-\ln|u-a| + \ln|u-b|\right) + k \\ &= \frac{-2}{b-a}\ln\left|\frac{u-b}{u-a}\right| + k \end{aligned}$$

pero

$$b - a = 1 - \sqrt{2} - \left(1 + \sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

de donde

$$\begin{aligned} -2\int \frac{du}{u^2 - 2u - 1} &= \frac{-2}{-2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-b}{u-a}\right| + k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-1+\sqrt{2}}{u-1-\sqrt{2}}\right| + k \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} \right| + k.$$

2. Calcular $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x + \operatorname{sen} x}\, dx$

Solución:

Sea $u = \tan \frac{x}{2}$, de donde

$$\begin{aligned} x &= 2 \arctan u \\ dx &= \frac{2}{1+u^2}\, du. \end{aligned}$$

entonces

$$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{u^2+1} \qquad\qquad \cos x = \frac{1-u^2}{u^2+1}$$

Si $x = 0$, entonces $u = \tan 0$, de donde $u = 0$.

Si $x = \frac{\pi}{2}$, entonces $u = \tan \frac{\pi}{4}$, de donde $u = 1$.

Así

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x + \operatorname{sen} x}\, dx &= \int_0^1 \frac{\frac{2u}{u^2+1}\left(\frac{2}{1+u^2}\right)}{1 + \frac{1-u^2}{u^2+1} + \frac{2u}{u^2+1}}\, du \\ &= \int_0^1 \frac{4u}{\left(u^2+1\right)^2 \left(\frac{u^2+1+1-u^2+2u}{u^2+1}\right)}\, du \\ &= \int_0^1 \frac{4u}{\left(u^2+1\right)\left(2+2u\right)}\, du \\ &= \int_0^1 \frac{2u}{\left(u^2+1\right)\left(u+1\right)}\, du. \end{aligned}$$

Escribimos la función como

$$\frac{2u}{\left(u^2+1\right)\left(u+1\right)} = \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2+1}$$

de donde

$$2u = A\left(u^2+1\right) + \left(Bu+C\right)\left(u+1\right)$$

Si $u = -1$,

$$\begin{aligned} -2 &= A\left(1+1\right) \\ -1 &= A. \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de A

$$\begin{aligned} 2u &= -\left(u^2+1\right) + B\left(u^2+u\right) + C(u+1) \\ &= (-1+B)u^2 + (B+C)u + C - 1 \end{aligned}$$

Formamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -1+B &= 0 \\ B+C &= 2 \\ -1+C &= 0 \end{aligned}$$

De donde

$$B = 1$$

y

$$C = 1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2u}{(u^2+1)(u+1)}\,du &= \int_0^1 \frac{-1}{u+1}\,du + \int_0^1 \frac{u+1}{u^2+1}\,du \\ &= -\ln|u+1|\big|_0^1 + \int_0^1 \frac{u}{u^2+1}\,du + + \int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= -\ln|u+1|\big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right|\Big|_0^1 + \arctan u\big|_0^1 \\ &= -\ln|2| - (-\ln|1|) + \frac{1}{2}\ln|2| - \frac{1}{2}\ln|1| + \arctan 1 - \arctan 0 \\ &= -\frac{1}{2}\ln|2| + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Integrales de potencias de funciones trigonométricas

Este tipo de integrales se resuelven utilizando identidades trigonométricas. Recordemos algunas de ellas.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= \cos^2 x - (1-\cos^2 x) &= 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

así

$$\begin{array}{rclcrcl} 2\cos^2 x &=& \cos 2x + 1 & \quad \text{y} \quad & 2\operatorname{sen}^2 x &=& 1 - \cos 2x \\ \cos^2 x &=& \dfrac{1+\cos 2x}{2} & & \operatorname{sen}^2 x &=& \dfrac{1-\cos 2x}{2}. \end{array}$$

Ejemplos

1. Calcular $\int \cos^2 x \, dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int 1 + \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos 2x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} (2 \operatorname{sen} x \cos x) \right) + C \\ &= \frac{1}{2} (x + \operatorname{sen} x \cos x) + C. \end{aligned}$$

2. Calcular $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} (x - \operatorname{sen} x \cos x) + C. \end{aligned}$$

3. Calcular $\int \cos^4 x \, dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left(x + \operatorname{sen} 2x + \int \frac{1+\cos 2\,(2x)}{2}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x + 2\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)\right) + C \\
&= \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{2\operatorname{sen} 2x\cos 2x}{4}\right) + C \\
&= \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x\cos 2x}{16} + C.
\end{aligned}$$

4. Calcular $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\,dx \\
&= \frac{1}{4}\left(x - 2\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)\right) + C \\
&= \frac{x}{4} + \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{2} + \frac{x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x\cos 2x}{16} + C.
\end{aligned}$$

La potencias pares de seno y coseno se integran usando las sustituciones anteriores. También se pueden integrar por partes.
Ejemplo

- Calcular $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$.

  Solución:

  Escribimos la integral como

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x\,dx$$

  y utilizamos integración por partes

$$\begin{aligned}
u &= \operatorname{sen}^{n-1} x & dv &= \operatorname{sen} x\,dx \\
du &= (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x\cos x\,dx & v &= -\cos x
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^n x\,dx &= \operatorname{sen}^{n-1} x\,(-\cos x) - \int (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x\cos x\,(-\cos x)\;dx \\
&= -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\cos^2 x\,dx \\
&= -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\,dx \\
&= -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^{n} x\,dx,
\end{aligned}$$

de donde

$$((n-1)+1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx,$$

así

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{-\operatorname{sen}^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{(n-1)}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx.$$

Veamos ahora las potencias pares del resto de las funciones trigonométricas.
Ejemplos

1. Calcular $\int \tan^2 x\,dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x\,dx &= \int \sec^2 x\;-1dx \\
&= \tan x - x + C.
\end{aligned}$$

2. Calcular $\int \cot^2 x\,dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int \cot^2 x\,dx &= \int \csc^2 x\;-1dx \\
&= -\cot x - x + C.
\end{aligned}$$

3. Calcular $\int \tan^4 x\,dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\,dx &= \int \tan^2 x\left(\sec^2 x\ -1\right)dx\\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x\ -\tan^2 x\,dx\\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x - \left(\sec^2 x - 1\right)\ dx\\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x - \sec^2 x + 1\,dx\\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C.\end{aligned}$$

4. Calcular $\int \sec^4 x\,dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned}\int \sec^4 x\,dx &= \int \sec^2 x\left(\tan^2 x + 1\right)\ dx\\ &= \int \sec^2 x \tan^2 x + \sec^2 x\,dx\\ &= \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C.\end{aligned}$$

Veamos ahora el caso en que la potencia es impar.
Ejemplos

1. Calcular $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx$.

   Solución:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right)\operatorname{sen} x\,dx\\ &= \int \operatorname{sen} x - 2\cos^2 x \operatorname{sen} x + \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx\\ &= -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

2. Calcular $\int \tan^3 x\,dx$.