Examen 2
Rigoberto Canseco López

1. **Dé un ejemplo de una familia F_1 de funciones compatibles y un ejemplo de una familia F_2 de funciones no compatibles. Para el primer ejemplo, mencione quién es la función unión de la familia F_1.**
   A un conjunto de funciones F es llamado compatible si cualquier dos funciones f, g de F son compatibles. A su vez las funciones $f(x) = g(x)$ para todo $x \in dom\ f \cap dom\ g$

   1. ejemplo

$$f = \{\sqrt{x} | x \in \mathbb{N}\}, g = \{\sqrt{x} | x \in \mathbb{R}\}$$
$$dom(\bigcup F) = \bigcup \{dom\ f | f \in F\}$$
$$f = \{\sqrt{x} | x \in \mathbb{N}\}$$

   2. ejemplo

$$f = \{\sqrt{x} | x \in \mathbb{N}\}, g = \{x | x \in \mathbb{R}\}$$

2. **Sea $f : X \to Y$ función con $X \neq \emptyset$. Muestre que f es una función sobreyectiva si y sólo si para todo $B \subseteq Y, B = f(f^{-1}(B))$**
   Tenemos que $B \subseteq Y$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(B)) &= \{y \in Y : \exists x \in f^{-1}(B)[f(x) = y]\} \\ &= \{y \in Y : \exists x \in \{z \in X : f(z) \in B\}[f(x) = y]\} \\ &= \{y \in Y : \exists x \in X[f(x) = y \wedge f(x) \in B]\} \\ &= B \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. **Sean f y g funciones. Muestre que si $ran\ f \subseteq dom\ g$ entonces $dom\ g \circ f = dom\ f$**
   Sabemos que $dom\ g \circ f = dom\ f \cap f^{-1}(dom\ g) \subseteq dom\ f$. Por la otra dirección de la inclusión tenemos que,

$$dom\ g \circ f = dom\ f \cap f^{-1}(dom\ g) \supseteq dom\ f \cap f^{-1}(dom\ f) = dom\ f$$

   donde usamos el hecho de que $f^{-1}(ran\ f) = dom\ f$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(ran\ f) &\iff \exists y \in ran\ f \text{ tal que } (y, x) \in f^{-1} \\ &\iff \exists y \in ran\ f \text{ tal que } (x, y) \in f \\ &\iff x \in dom\ f \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. **Muestre que si $f : X \to Y$ es una función inyectiva, con $X \neq \emptyset$ y $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de subconjuntos de X, entonces:**

$$f\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

Sea f una función. Entonces

$$\begin{aligned} y \in f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) &\iff \exists x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \text{ tal que } (x,y)\in f \\ &\iff \forall i \in I, x \in A_\alpha \text{ tal que } (x,y) \in f \\ &\iff \forall i \in I, y \in f(A_\alpha) \\ &\iff y \in \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha) \quad \blacksquare \end{aligned}$$