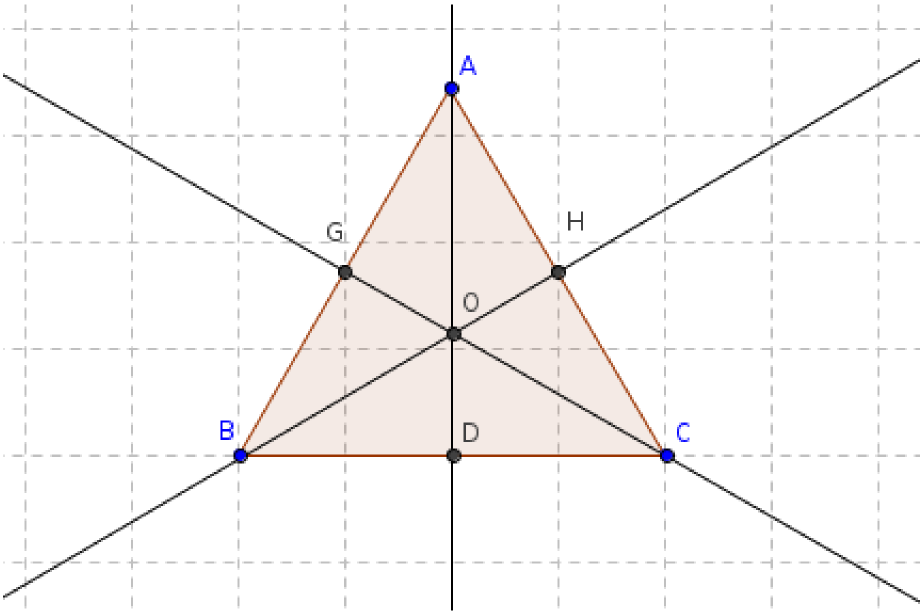
Teorema de Ceva

1. Pruebe que las medianas de un triángulo son concurrentes

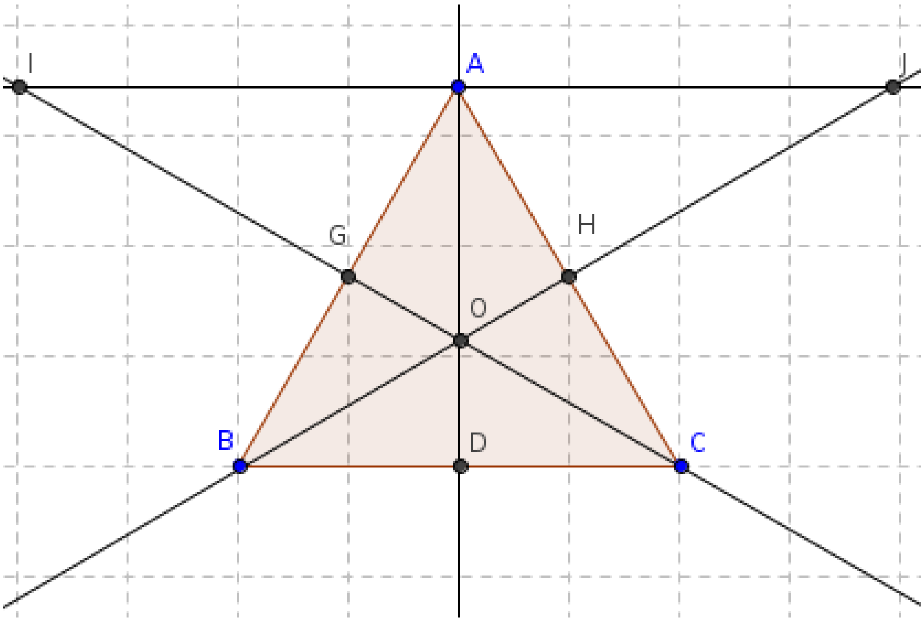


Tenemos el trángulo **ABC** y las rectas medianas que concurren en el punto **O**. Por el teorema de Ceva tenemos que tres cenevas **AD**, **BH** y **CG** que son las medianas son concurrentes en un punto **O** si y solo si.

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CH}{HA} = 1$$

Demostración

Trazamos una paralela al segmento **BC** que pase por el punto **A**.



Sea **I**, **J** las intersecciones de **CG** y **BH**, respectivamente.

Se tiene que:

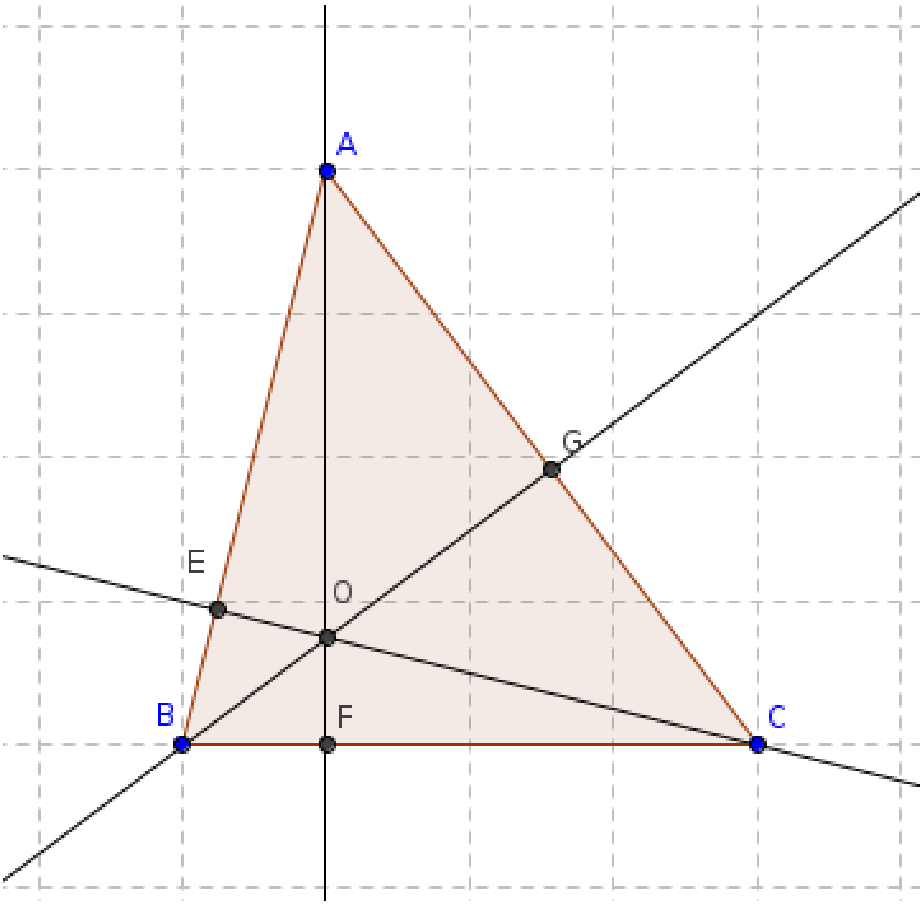
- El triángulo **BOD** y el triángulo **AOJ** son semejantes ya que las rectas **BC** y **IJ** son paralelas cortadas por la transversal **AD** por lo tanto
$$\frac{BD}{DO} = \frac{JA}{AO}(1)$$
- De igual manera el triángulo **COD** y el triángulo **AOI** son semejantes por lo tanto
$$\frac{OD}{CD} = \frac{OA}{AI}(2)$$
- El triángulo **CHB** y el triángulo **AHJ** son semejantes ya que las rectas **BC** y **IJ** son paralelas cortadas por la transversal **AC** por lo tanto
$$\frac{CH}{HA} = \frac{BC}{JA}(3)$$
- El triángulo **BGC** y el triángulo **AGI** son semejantes ya que las rectas **BC** y **IJ** son paralelas cortadas por la transversal **AB** por lo tanto
$$\frac{AG}{GB} = \frac{AI}{BC}(4)$$

Multiplicando **(1), (2), (3) y (4)**
$$\frac{BD}{DO} \cdot \frac{OD}{CD} \cdot \frac{CH}{HA} \cdot \frac{AG}{GB} = \frac{JA}{AO} \cdot \frac{OA}{AI} \cdot \frac{BC}{JA} \cdot \frac{AI}{BC} = 1$$
$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CH}{HA} \cdot \frac{AG}{GB} = 1$$

Como los puntos **D**. **G** y **H** son los puntos medios de los segmentos **BC**, **AB** y **AC**, respectivamente tenemos que **BD = CD**, **CD = HA** y **AG = GB**

Por lo tanto las medianas **AD**, **BH** y **CG** del triángulo **ABC** concurren en el punto **O**.

Pruebe que las alturas de un triángulo son concurrentes.



Tenemos el siguiente triángulo **ABC** y las alturas **AF**, **BG** y **CE** que concurren en el punto **O**.

Demostración

Los triángulos **BGC** y **AFC** son semejantes por ángulo-ángulo-ángulo, por lo tanto

$$\frac{CG}{FC} = \frac{BC}{AC}(1)$$

Los triángulos **BEC** y **BAF** son semejantes por ángulo-ángulo-ángulo, por lo tanto

$$\frac{BF}{EB} = \frac{AB}{BC}(2)$$

Los triángulos **ABG** y **AEC** son semejantes por ángulo-ángulo-ángulo, por lo tanto

$$\frac{AE}{AG} = \frac{CA}{AB}(3)$$

Multiplicando **(1), (2), (3)** tenemos

$$\frac{CG}{FC} \cdot \frac{BF}{EB} \cdot \frac{AE}{AG} = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CA}{AB} = 1(4)$$

Además por el teorema de Ceva aplicado a el triángulo **ABC**

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1(5)$$

Por **(4) y (5)**, tenemos que

$$\frac{CG}{FC} \cdot \frac{BF}{EB} \cdot \frac{AE}{AG} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$$

Por lo tanto, las alturas AF, BG y CE son concurrentes.