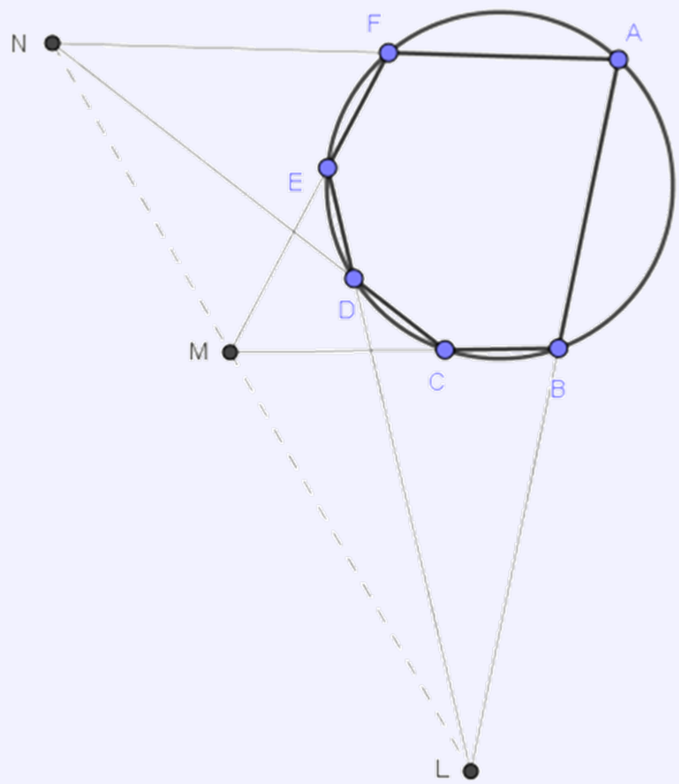
Teorema de Pascal.

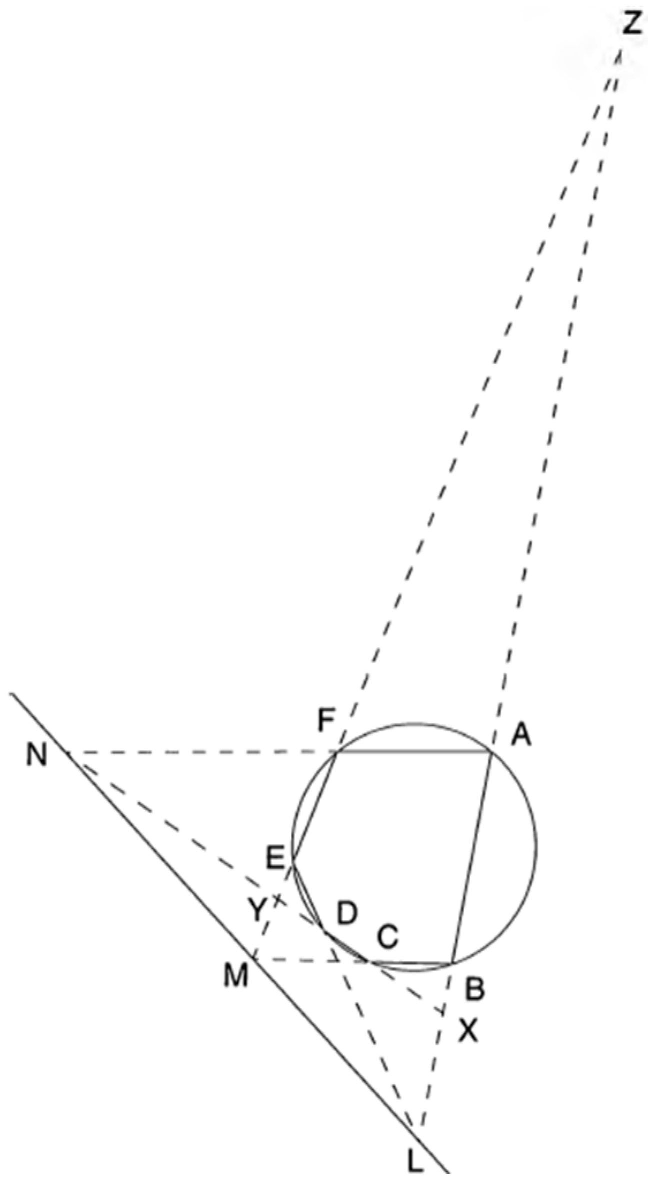
Blaise Pascal (1623-1662), un contemporáneo de Desargues, es considerado hoy como uno de los verdaderos genios en la historia de las matemáticas. Aunque las excentricidades le impidieron alcanzar su verdadero potencial, se le considera uno de los creadores del estudio formalizado de la probabilidad (una consecuencia de sus correspondencias con Fermat), e hizo muchas contribuciones importantes a otras ramas de las matemáticas. Nos ocupamos aquí de una de sus contribuciones a la geometría. En 1640, a la edad de dieciséis años, Pascal publicó un artículo de una página titulado Essay pour les coniques. Contenía un teorema que Pascal denominó misterium hexagrammicum. El trabajo impresionó mucho a Descartes, que no podía creer que fuera el trabajo de un niño. Este teorema establece que las intersecciones de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una sección cónica son colineales. Para nuestros propósitos, consideraremos solo el caso en el que la sección cónica es un círculo y el hexágono no tiene un par de lados opuestos paralelos.

Teorema 1. *Si un hexágono sin par de lados opuestos paralelos se inscribe en un círculo, entonces las intersecciones de los lados opuestos son colineales.*

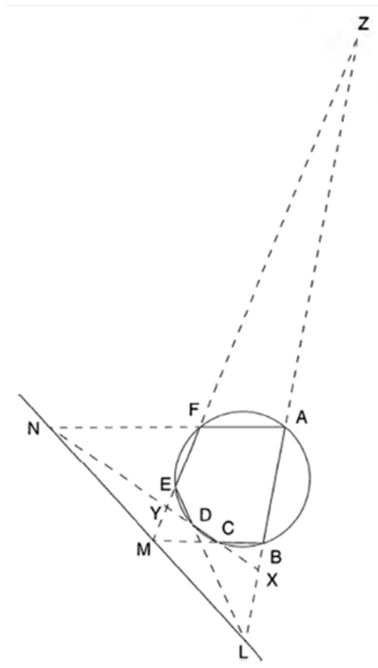


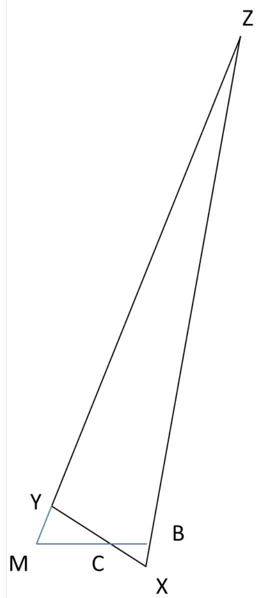
Demostración. En la figura, el hexagono ABCDEF esta inscrito en una circunferencia, para la prueba consideramos el triángulo $\triangle XYZ$ donde

$$Y = EF \cap DC,\ X = AB \cap DC,\ Z = EF \cap AB$$



En el triángulo $\triangle\ XYZ$ considerando el punto B sobre el lado ZX, el punto M sobre el lado ZY y el punto C sobre el lado YX.





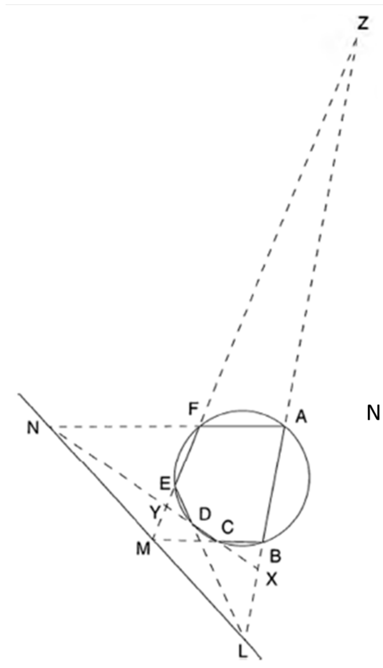
Luego, por el teorema de Menelao:

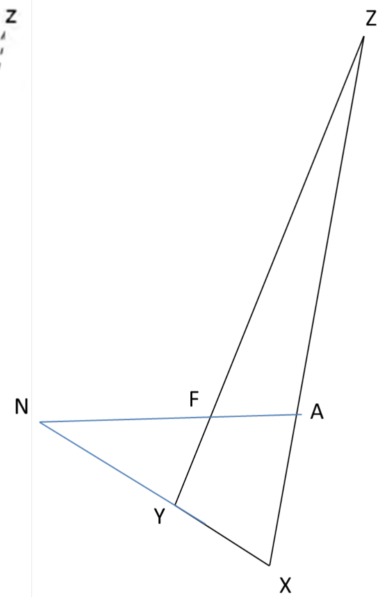
$$\frac{XB}{BZ}\cdot\frac{ZM}{MY}\cdot\frac{YC}{CX}=-1$$

esta expresión se puede escribir

$$\frac{ZB}{BX}\cdot\frac{XC}{CY}\cdot\frac{YM}{MZ}=-1 \tag{1}$$

En el triángulo $\triangle\, XYZ$ considerando el punto A sobre el lado ZX, el punto F sobre el lado ZY y el punto N sobre el lado YX.

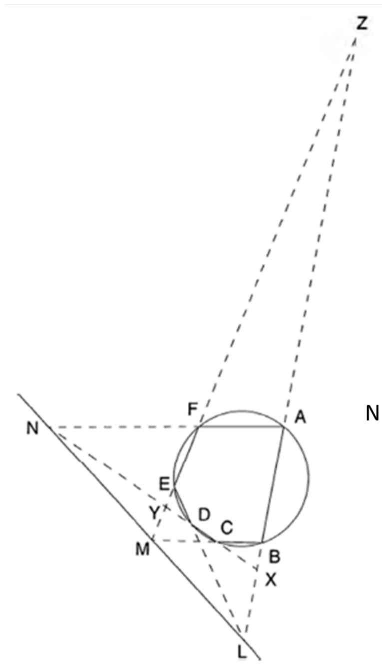


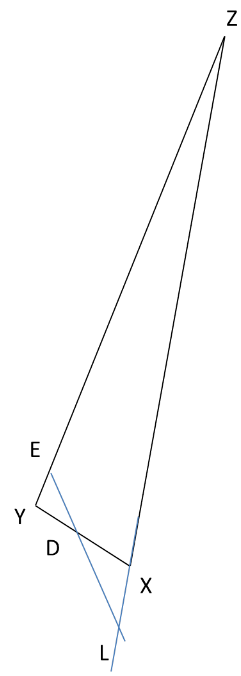


Luego, por el teorema de Menelao:

$$\frac{ZA}{AX} \cdot \frac{YF}{FZ} \cdot \frac{XN}{NY} = -1 \tag{2}$$

En el triángulo $\triangle\, XYZ$ considerando el punto L sobre el lado ZX, el punto E sobre el lado ZY y el punto D sobre el lado YX.





Luego, por el teorema de Menelao:

$$\frac{XD}{DY}\cdot\frac{YE}{EZ}\cdot\frac{ZL}{LX}=-1 \tag{3}$$

Multiplicando (??), (??) y (??)

$$\left(\frac{ZB}{BX}\cdot\frac{XC}{CY}\cdot\frac{YM}{MZ}\right)\left(\frac{ZA}{AX}\cdot\frac{XF}{FZ}\cdot\frac{XN}{NY}\right)\left(\frac{XD}{DY}\cdot\frac{YE}{EZ}\cdot\frac{ZL}{LX}\right)=-1 \tag{4}$$

Cuando dos segmentos secantes se dibujan en un círculo desde un punto externo, el producto de las longitudes de una secante y su segmento externo es igual al producto de las longitudes de la otra secante y su segmento externo (Potencia).
Por tanto

a) Para las cuerdas secntes FE y AB se tiene

$$ZA\cdot ZB=ZF\cdot ZE$$

b) Para las cuerdas secntes DC y AB se tiene

$$XC\cdot XD=XB\cdot XA$$

c) Para las cuerdas secntes FE y DC se tiene

$$YE \cdot YF = YD \cdot YC$$

Según lo anterior

$$\frac{(ZB)(ZA)}{(EZ)(FZ)} = 1$$
$$\frac{(XD)(XC)}{(AX)(BX)} = 1$$
$$\frac{(YE)(YF)}{(DY)(CY)} = 1$$

Por lo que (**??**) nos queda

$$\frac{YM}{MZ} \cdot \frac{XN}{NY} \cdot \frac{ZL}{LX} = -1$$

Por lo tanto, según el teorema de Menelao, los puntos M, N y L deben ser colineales. □