Tarea II

Calcular las siguientes derivadas.

1. $\mathbf{y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3}$

Tenemos que la función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

La derivada de un polinomio es $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kc_k x^{k-1}$ por lo tanto podemos derivar cualquier polinomio sumando las derivadas de cada uno de los términos.

Tenemos que la deriva de $f(x)$ es

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5)(x^{5-1}) - (3)(4x^{3-1}) + (1)(2x^{1-1}) - (0)(3) \\ &= 5x^4 - 12x^2 + 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2 \quad \blacksquare$$

---

2. $\mathbf{y = (x+2)^8 (x-3)^4}$

La función $f(x) = (x+2)^8 (x-3)^4$

Tenemos que la derivada del producto de dos funciones es igual a

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Donde $f(x) = (x+2)^8$ y $g(x) = (x-3)^4$.

- Calculamos la derivada de $f'(x)$ usando el teorema de la derivada de la potencia de una función con exponente entero positivo, que dice :

  Si $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = v^n \; \forall x \in \mathbb{N}$ entonces $f'(x) = nv^{n-1}v'(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$.

  Donde $v = (x+2)$ y $n = 8$

  $$\begin{aligned} f'(x) &= (8)(x+2)^{8-1} \\ &= 8(x+2)^7 \end{aligned}$$

  Por lo tato tenemos que

  $$f'(x)g(x) = (8(x+2)^7)(x-3)^4$$

- Calculamos la derivada de $g'(x)$ usando el teorema de la derivada de la potencia de una función con exponente entero positivo, que dice :

  Si $n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = v^n \; \forall x \in \mathbb{N}$ entonces $f'(x) = nv^{n-1}v'(x) \; \forall x \in \mathbb{R}$.

  Donde $v = (x-3)^4$ y $n = 4$

  $$\begin{aligned} f'(x) &= (4)(x-3)^{4-1} \\ &= 4(x-3)^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$f(x)g'(x) = ((x+2)^8)(4(x-3)^3)$$

Sumando ambos términos

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\\ &= (8(x+2)^7)(x-3)^4 + (x+2)^8(4(x-3)^3)\\ &= 8(x-3)^4(x+2)^7 + 4(x-3)^3(x+2)^8\\ &= 4(x-3)^3(x+2)^7(2(x-3)+(x+2))\\ &= 4(x-3)^3(x+2)^7(2x-6+x+2)\\ &= 4(x-3)^3(x+2)^7(3x-4)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f'(x) = 4(x-3)^3(x+2)^7(3x-4) \quad \blacksquare$$

---

3. $\mathbf{y = sec\ 2x}$

Sea la función $f(x) = sec\ 2x$

La secante es el inverso multiplicativo del coseno por lo tanto $sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$, por lo tanto $f(x) = \frac{1}{cos\ 2x}$.

Ahora calculamos la derivada de $f'(x)$

Por el teorema que dice:

Si f es derivable y $f(a) \neq 0$ entonce $\frac{1}{f(x)}$ es derivable en a y

$$(\frac{1}{f})'(a) = \frac{-1}{f^2(a)} f'(a)$$

Donde $a = cos\ 2x$

Por lo tanto

$$(\frac{1}{f})'(a) = \frac{-1}{cos^2\ (2x)}(cos\ 2x)'$$

Ahora la derivada del coseno es $cos'(u) = -sen\ u \cdot u'(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

Donde $u = 2x$

$$(cos\ 2x)' = -sen\ 2x \cdot (2x)'$$

Y la derivada de $(2x)'$ es 2 por lo tanto

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-1}{cos^2(2x)}(-sen(2x)(2))\\ &= \frac{2 \cdot sen(2x)}{cos^2(2x)}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f'(x) = \frac{2 \cdot sen(2x)}{cos^2(2x)} \quad \blacksquare$$

---

4. $\mathbf{y = sen(cos\ x)}$

Sea la función $f(x) = sen(cos\ x)$

Calculamos la derivada del seno que es $sen'\ (u) = cos\ (u) \cdot u'(x)$.

Donde $u = cos(x)$

$$sen'(u) = cos(cos\ (x)) \cdot u'(x)$$

Ahora la derivada de $u'(x)$ que es la derivada del coseno es el $cos'(x) = -sen(x)$, por lo tanto

$$u'(x) = -sen(x)$$

La deriva de $f'(x)$ es

$$\begin{aligned} f'(x) = sen'(u) &= cos(u) \cdot u'(x) \\ &= cos(cos(x)) \cdot (-sen(x)) \\ &= -sen(x) \cdot cos(cos(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f'(x) = -sen(x) \cdot cos(cos(x)) \quad \blacksquare$$

---

5. $\mathbf{y = \sqrt{1 - 3x^5}}$

Sea la función $f(x) = \sqrt{1 - 3x^5}$

Calculamos la derivada de $\frac{dy}{dx}$ usando la regla para calcular la derivada de una raíz cuadrada

$$\frac{d\sqrt{u}}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Donde

$$u = 1 - 3x^5 \quad \text{y} \quad \frac{d\sqrt{u}}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\frac{1}{2\sqrt{1 - 3^5}} \cdot \frac{dy}{dx}(1 - 3x^5)$$

- Derivamos $\frac{dy}{dx}(1 - 3x^5) = \frac{dy}{dx}1 - \frac{dy}{dx}3x^5$, es igual a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}1 = 0 &\quad \text{La derivada de una constante es 0} \\ -\frac{dy}{dx}3x^5 = 15x^4 &\quad \text{Usando la regla de la potencia} \end{aligned}$$

  Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx}(1 - 3x^5) = 0 - 15x^4$$

-

Tenemos que

$$\frac{1}{2\sqrt{1-3^5}} \cdot \frac{dy}{dx}(1-3x^5) = \frac{1}{2\sqrt{1-3x^5}} \cdot (-15x^4)$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-15x^4}{2\sqrt{1-3x^5}} \quad \blacksquare$$

---

6. $\mathbf{y = (5 + 2cos5x)^{10}}$

Sea la función $f(x) = (5 + 2cos5x)^{10}$

Calculamos la derivada $\frac{dy}{dx}$ usamos la regla para derivar una potencia

$$\frac{du^n}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Donde

$$u = (5 + 2cos5x) \quad \text{y} \quad n = 10$$

- La derivada de $\frac{d}{du}(u^{10}) = 10u^9$

$$= (10(5 + 2cos5x)^9)(\frac{d}{dx}(5 + 2cos5x))$$

- Derivamos $\frac{d}{dx}(5 + 2cos5x)$

$$= \frac{d}{dx}5 + \frac{d}{dx}(2\ cos\ 5x)$$

  - $$\frac{d}{dx}5 = 0$$

  Usamos la regla de la derivada para coseno $\frac{dcos(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

  - $$\frac{d}{dx}(2\ cos\ 5x),$$
    $$\text{donde } u = 5x$$
    $$\text{y}$$
    $$\frac{d}{du}(cos(u)) = -sin(u)$$

  Por lo tanto tenemos

$$2\frac{d}{dx}(\ cos\ 5x) = -sin(5x)(\frac{d}{dx}5x) = 2(-5sin(5x))$$

La derivada resultante es

$$2\frac{d}{dx}(5+2cos5x) = 0 + -5\ sin(5x) = 2(-5\ sin(5x))$$

La derivada resultante de

$$\begin{aligned} &= (10(5+2cos5x)^9)2(\frac{d}{dx}(5+2cos5x)) \\ &= (10(5+2cos5x)^9)2(-5\ sin(5x)) \\ &= -100(5+2\ cos\ 5x)^9 sin\ 5x \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = -100(5+2\ cos\ 5x)^9 sin\ 5x \quad \blacksquare$$

---

7. $\mathbf{y = \frac{4-x}{3+x}}$

Sea la funcion $f(x) = \frac{4-x}{3+x}$

Calculamos la drivada $\frac{dy}{dx}$ usando la regla de cociente,

$$\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Donde

$$u = 4 - x \quad \text{y} \quad v = 3 + x$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3+x)(\frac{d}{dx}(4-x)) - (4-x)(\frac{d}{dx}(3+x))}{(3+x)^2}$$

Derivamos $\frac{d}{dx}(4-x)$:

$$= \frac{d}{dx}4 - \frac{d}{dx}x = 0 - 1 = -1$$

Derivamos $\frac{d}{dx}(3+x)$:

$$= \frac{d}{dx}3 + \frac{d}{dx}x = 0 + 1 = 1$$

Por lo tanto tenemos que

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(3+x)(\frac{d}{dx}(4-x)) - (4-x)(\frac{d}{dx}(3+x))}{(3+x)^2} \\
&= \frac{(3+x)(-1) - (4-x)(1)}{(3+x)^2} \\
&= \frac{-3-x-4+x}{(3+x)^2} \\
&= \frac{-7}{(3+x)^2}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-7}{(3+x)^2} \quad \blacksquare$$

---

8. $\mathbf{y = \frac{x}{\sqrt{9-4x}}}$

Sea la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9-4x}}$

Calculamos la derivada usando la regla del producto

$$\frac{d}{dx}uv = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx},$$

Donde

$$u = \frac{1}{\sqrt{9-4x}} \quad \text{y} \quad v = x$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = x(\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{9-4x}}) + \frac{1}{\sqrt{9-4x}}(\frac{d}{dx}x)$$

Derivamos: $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{9-4x}}$

- Usando la regla de la derivada para una raiz $\frac{d}{du}\frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$

  Donde

$$
\begin{aligned}
u = 9-4x \quad y \quad \frac{d}{du}\frac{1}{\sqrt{u}} &= -\frac{1}{2u^{3/2}} \\
&= -\frac{1}{2u^{3/2}}(\frac{d}{dx}(9-4x))
\end{aligned}
$$

  Derivamos $\frac{d}{dx}(9-4x)$

$$= \frac{d}{dx}9 - 4x\frac{d}{dx} = 0 - 4 = -4$$

  Por lo tanto tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{9-4x}} &= -\frac{1}{2u^{3/2}}\left(\frac{d}{dx}(9-4x)\right)\\
&= -\frac{1}{2u^{3/2}}(-4)\\
&= \frac{2}{u^{3/2}} \quad \text{sustituyendo } u\\
&= \frac{2}{(9-4x)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Calculamos la derivada de: $\frac{d}{dx}x$

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

Sustutuyendo las 2 derivadas obtenidas previamente

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= x\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{9-4x}}\right) + \frac{1}{\sqrt{9-4x}}\left(\frac{d}{dx}x\right)\\
&= x\left(\frac{2}{(9-4x)^{3/2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{9-4x}}(1)\\
&= \frac{2x}{(9-4x)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{9-4x}}\\
&= \frac{2x}{(9-4x)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{9-4x}}\\
&= \frac{2x}{(9-4x)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{9-4x}}\left(\frac{9-4x}{9-4x}\right)\\
&= \frac{2x+(9-4x)}{(9-4x)^{3/2}}\\
&= \frac{-2x+9}{(9-4x)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+9}{(9-4x)^{3/2}} \quad \blacksquare$$

---

9. $\mathbf{y = \frac{sen\ x + cos\ x}{sen\ x - cos\ x}}$

Sea la funcion $f(x) = \frac{sen\ x+cos\ x}{sen\ x-cos\ x}$

Calculamos la drivada $\frac{dy}{dx}$ usando la regla de cociente,

$$\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Donde

$$u = sen\ x + cos\ x \quad \text{y} \quad v = sen\ x - cos\ x$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(sen\ x - cos\ x)\left(\frac{d}{dx}(sen\ x + cos\ x)\right) - (sen\ x + cos\ x)\left(\frac{d}{dx}(sen\ x - cos\ x)\right)}{(sen\ x - cos\ x)^2}$$

Derivamos $\frac{d}{dx}(sen\ x + cos\ x)$:

- Derivamos el término $\frac{d}{dx} sen\ x$:

  Usando la regla para derivar el seno tenemos que

  $$\frac{d}{dx} sen\ x = \frac{d\ sen\ u}{du} \frac{du}{dx}$$

  Donde

  $$u = x \quad \text{y} \quad \frac{d}{du}\ sen\ u = cos\ u$$

  Por lo tanto tenemos que la derivadea de $\frac{d}{dx} sen\ x$

  $$\begin{aligned} \frac{d}{dx} sen\ x &= xdx(\frac{d}{dx} sen\ x) \\ &= 1(cos\ x) \\ &= cos\ x \end{aligned}$$

- Derivamos el término $\frac{d}{dx} cos\ x$

  Usando la regla para derivar el seno tenemos que

  $$\frac{d}{dx} cos\ x = \frac{d\ cos\ u}{du} \frac{du}{dx}$$

Donde

$$u = x \quad \text{y} \quad \frac{d}{du}\ cos\ u = -sen\ u$$

Por lo tanto tenemos que la derivadea de $\frac{d}{dx} cos\ x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} cos\ x &= xdx(\frac{d}{dx} cos\ x) \\ &= 1(-sen\ x) \\ &= -sen\ x \end{aligned}$$

Derivamos $\frac{d}{dx}(sen\ x - cos\ x)$:

- Derivamos el término $\frac{d}{dx} sen\ x$:

  Usando la regla para derivar el seno tenemos que

  $$\frac{d}{dx} sen\ x = \frac{d\ sen\ u}{du} \frac{du}{dx}$$

  Donde

  $$u = x \quad \text{y} \quad \frac{d}{du}\ sen\ u = cos\ u$$

  Por lo tanto tenemos que la derivadea de $\frac{d}{dx} sen\ x$

  $$\begin{aligned} \frac{d}{dx} sen\ x &= xdx(\frac{d}{dx} sen\ x) \\ &= 1(cos\ x) \\ &= cos\ x \end{aligned}$$

- Derivamos el término $\frac{d}{dx} - cos\ x$

  Usando la regla para derivar el seno tenemos que

  $$-\frac{d}{dx} cos\ x = \frac{d\ cos\ u}{du} \frac{du}{dx}$$

Donde

$$u = x \quad \text{y} \quad \frac{d}{du}\, cos\ u = -sen\ u$$

Por lo tanto tenemos que la derivadea de $\frac{d}{dx} cos\ x$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} cos\ x &= xdx(\frac{d}{dx} cos\ x) \\ &= -1(-sen\ x) \\ &= sen\ x \end{aligned}$$

Sustituimos las derivadas en $\frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(sen\ x - cos\ x)(\frac{d}{dx}(sen\ x + cos\ x)) - (sen\ x + cos\ x)(\frac{d}{dx}(sen\ x - cos\ x))}{(sen\ x - cos\ x)^2} \\ &= \frac{(sen\ x - cos\ x)(cos\ x - sen\ x) - (sen\ x + cos\ x)(cos\ x + sen\ x)}{(sen\ x - cos\ x)^2} \\ \text{Simplificando la ecuación:} \\ &= \frac{sen\ x \cdot cos\ x - sen^2\ x - cos^2\ x + cos\ x \cdot sen\ x}{(sen\ x - cos\ x)^2} \\ &- \frac{(sen\ x \cdot cos\ x + sen^2\ x + sen\ x \cdot cos\ x + cos^2\ x)}{(sen\ x - cos\ x)^2} \\ &= \frac{-2sen^2\ x - 2cos^2\ x}{(sen\ x - cos\ x)^2} \\ &= \frac{-2(sen^2\ x + cos^2\ x)}{(sen\ x - cos\ x)^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(sen^2\ x + cos^2\ x)}{(sen\ x - cos\ x)^2} \quad \blacksquare$$

---

10. $\mathbf{y = \sqrt{cot\ x} - \sqrt{csc\ x}}$

Sea la función $f(x) = \sqrt{cot\ x} - \sqrt{csc\ x}$

Derivamos cada elemento de la resta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{cot\ x} - \frac{d}{dx}\sqrt{csc\ x}$$

- Calculamos la drivada $\frac{d}{dx}\sqrt{cot\ x}$ usando la regla de raiz,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x \cot} = \frac{d\sqrt{u}}{du}\frac{du}{dx}$$

Donde

$$u = cot\ x \quad \text{y} \quad \frac{d}{du}(\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

Por lo tanto

$$\frac{\frac{d}{dx} x \cot x}{2\sqrt{\cot x}}$$

La derivada de $\frac{d}{dx} x\ cot\ x$

$$\frac{d}{dx}x\cot\ x=\frac{d\cot(u)}{du}\frac{du}{dx}$$
Donde
$$u=x\quad \text{y}\quad \frac{d}{du}(\cot u)=-\left(\csc^2 u\right)$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\sqrt{cot\ x}=\frac{\frac{d}{dx}x\cot x}{2\sqrt{\cot x}}=\frac{-\ csc^2\ x}{2\sqrt{\cot x}}$$

- Calculamos la drivada $\frac{d}{dx}\sqrt{csc\ x}$ usando la regla de raiz,

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x\csc}=\frac{d\sqrt{u}}{du}\frac{du}{dx}$$

Donde

$$u=csc\ x\quad \text{y}\quad \frac{d}{du}(\sqrt{u})=\frac{1}{2\sqrt{u}}$$

Por lo tanto

$$\frac{\frac{d}{dx}x\csc x}{2\sqrt{\csc x}}$$

La derivada de $\frac{d}{dx}x\ csc\ x$

$$\frac{d}{dx}x\csc\ x=\frac{d\csc(u)}{du}\frac{du}{dx}$$
Donde
$$u=x\quad \text{y}\quad \frac{d}{du}(\cot u)=-cot\ u\cdot csc\ u$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\sqrt{csc\ x}=\frac{\frac{d}{dx}x\csc x}{2\sqrt{\csc x}}=\frac{-\ cot\ x\cdot csc\ x}{2\sqrt{\csc x}}$$

Sustituyendo las derivas en

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\sqrt{cot\ x}-\frac{d}{dx}\sqrt{csc\ x}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}\sqrt{cot\ x}-\frac{d}{dx}\sqrt{csc\ x}\\&=\frac{-\ csc^2\ x}{2\sqrt{\cot x}}-\frac{-\ cot\ x\cdot csc\ x}{2\sqrt{\csc x}}\\&=\frac{-\ csc^2\ x}{2\sqrt{\cot x}}+\frac{cot\ x\cdot csc\ x}{2\sqrt{\csc x}}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\ csc^2\ x}{2\sqrt{\cot x}}+\frac{cot\ x\cdot csc\ x}{2\sqrt{\csc x}}\quad \blacksquare$$

---

11. $\mathbf{y = arc\ cos\ 2x}$

Sea la función $f(x) = arc\ cos\ 2x = cos^{-1}\ 2x$

Usando la regla para calcular la derivada de $\frac{d}{dx}(cos^{-1}\ 2x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\ cos^{-1}(u)}{du}\frac{du}{dx}$$

Donde

$$u = 2x \quad \text{y} \quad \frac{d}{du}\left(cos^{-1}\ u\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

Por tanto, tenemos que

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1}\ 2x) = -\frac{\frac{d}{xd}2x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

La derivada de

$$\frac{d}{dx}2x = 2(\frac{d}{dx}x) = 2(1) = 2$$

Sustituyendo las derivadas calculadas

$$\frac{d}{dx}(cos^{-1}\ 2x) = -\frac{\frac{d}{xd}2x}{\sqrt{1-4x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \quad \blacksquare$$

---

12 . $\mathbf{x^2y^3 + 3y^2 = x - 4y}$

13. $\mathbf{y = arc\ tan(\frac{1+x}{1-x})}$

Sea la función $f(y) = arc\ tan\ (\frac{1+x}{1-x}) = tan^{-1}(\frac{1+x}{1-x})$

Usando la regla para derivar un arco tangente

$$\frac{d}{dx}\ tan^{-1}(\frac{x+1}{1-x}) = \frac{d\tan^{-1}u}{du}\frac{du}{dx}$$

Donde

$$u = \frac{x+1}{1-x} \quad \text{y} \quad \frac{d}{du}\left(tan^{-1}u\right) = \frac{1}{u^2+1}$$

Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\frac{x+1}{1-x}}{\frac{(x+1)^2}{(1-x)^2}+1}$$

Usamos la regla de la división para calcular la derivada de $\frac{d}{dx}\frac{x+1}{1-x}$

$$\frac{d}{dx}\frac{u}{v}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Donde

$$u=x+1 \quad \text{y} \quad v=1-x$$

Tenemos que

$$=\frac{(1-x)\frac{d}{dx}(x+1)-(x+1)\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2}$$

- La derivada de $\frac{d}{dx}(x+1)$ es:

$$\frac{d}{dx}(x+1)=\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}1=1+0=1$$

- La derivada de $\frac{d}{dx}(1-x)$ es :

$$\frac{d}{dx}(1-x)=\frac{d}{dx}1-\frac{d}{dx}x=0-1=-1$$

Sustituimos los valores en la derivada $\frac{d}{dx}\frac{x+1}{1-x}$

$$\begin{aligned}&=\frac{(1-x)\frac{d}{dx}(x+1)-(x+1)\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2}\\&=\frac{(1-x)(1)-(x+1)(-1)}{(1-x)^2}\\&=\frac{(1-x)+(x+1)}{(1-x)^2}\\&=\frac{2}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

Sustituimos la derivada anterior en

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\frac{d}{dx}\frac{x+1}{1-x}}{\frac{(x+1)^2}{(1-x)^2}+1}\\&=\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{(x+1)^2}{(1-x)^2}+1}\\&=\frac{2(1-x)^2}{(1-x)^2((x+1)^2+(1-x)^2)}\\&=\frac{2}{(x+1)^2+(1-x)^2}\\&=\frac{2}{x^2+1}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{(1-x)^2} \quad \blacksquare$$

---

14. $y = \frac{-2}{\sqrt[4]{x^3}}$

Sea la función $f(x) = -2/x^{3/4}$

Calcular la derivada

$$= -2\left(\frac{d}{dx}\frac{1}{x^{3/4}}\right)$$

Usamos la regla de la potencia para calcular la derivada de $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Donde $n = -3/4$, por tanto tenemos que:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^{3/4}} = \frac{d}{dx}x^{-3/4} = \frac{1}{4}(-3)x^{-7/4}$$
$$= -2(\frac{-3}{4x^{7/4}})$$

Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2x^{7/4}} \quad \blacksquare$$

---

15. $\mathbf{y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}}$

Sea la funcion $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$, encontrar la derivada $\frac{dy}{dx}$.

Derivamos usando la regla para raíz cúbica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}} = \frac{d}{du}\frac{1}{\sqrt[3]{u}}\frac{du}{dx}$$

Donde

$$u = x + \sqrt{x} \quad y \quad \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{u}}\right) = -\frac{1}{3u^{4/3}}$$

De modo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x})}{3(x+\sqrt{x})^{4/3}}$$

- La derivada $\frac{d}{dx}x$ = 1
- Derivamos $\frac{d}{dx}\sqrt{x}$, usando al regla para potencias

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Donde $n = 1/2$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{x^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Sustituimos las valores de las derivadas en

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -\frac{\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x})}{3(x+\sqrt{x})^{4/3}} \\ &= -\frac{(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})}{3(x+\sqrt{x})^{4/3}}\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})}{3(x+\sqrt{x})^{4/3}} \quad \blacksquare$$