1. Escribe las *ecuaciones canónicas* de las cónicas indicando qué cumple cada una.

2. De todas las formas de ecuación de las siguiente rectas:

a) Tiene vector director $(3,3,1)$ **y pasa por** $(0,4,2)$

- Usando la ecuación paramétrica $\ell : (x,y,z) = P + \lambda v$

  Donde: $P = (0,4,2) \quad \text{y} \quad v = (3,3,1)$

$$\begin{aligned} \ell : (x,y,z) &= P + \lambda v \\ &= (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \\ &= (0,4,2) + \lambda(3,3,1) \\ &= (0,4,2) + (\lambda 3, \lambda 3, \lambda 1) \\ &= (0 + \lambda 3, 4 + \lambda 3, 2 + \lambda 1) \end{aligned}$$

  Por lo tanto tenemos que

$$\begin{gathered} x = x_0 + \lambda v_1, \quad x - x_0 = \lambda v_1, \quad \frac{x - x_0}{v_1} = \lambda \\ \frac{x-0}{3} = \lambda \\ y = y_0 + \lambda v_2, \quad y - y_0 = \lambda v_2, \quad \frac{y - y_0}{v_2} = \lambda \\ \frac{y-4}{3} = \lambda \\ z = z_0 + \lambda v_3, \quad z - z_0 = \lambda v_3, \quad \frac{z - z_0}{v_3} = \lambda \\ \frac{z-2}{1} = \lambda \end{gathered}$$

- La ecuación simétrica está dada por

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

  Sustituyendo los valores en la ecuación tenemos que:

$$\begin{gathered} \frac{x-0}{3} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{1} \\ \frac{x}{3} = \frac{y-4}{3} = z - 2 \end{gathered}$$

---

b) Pasa por $(1,-2,5)$ **y por** $(3,-3,4)$

- La ecuación paramétrica es $\ell : (x,y,z) = P + \lambda v$

Calculamos el vector v que es la diferencia de P_1 y P_2

Tenemos los siguientes puntos $P_1(1,-2,5)$ y $P_2(3,-3,4)$

El vector director es:

$$\begin{aligned} v =& P_1 - P_2 \\ =&(1,-2,-5)-(3,-3,4) \\ =&(1-3,-2+3,-5-4) \\ =&(-2,1,-9) \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación paramétrica para el punto P_1 es:

$$\begin{aligned} \ell:(x,y,z) &= P+\lambda v \\ &= (x_0,y_0,z_0)+\lambda(v_1,v_2,v_3) \\ &= (1,-2,5)+\lambda(-2,1,-9) \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación paramétrica para el punto P_2 es:

$$\begin{aligned} \ell:(x,y,z) &= P+\lambda v \\ &= (x_0,y_0,z_0)+\lambda(v_1,v_2,v_3) \\ &= (3,-3,4)+\lambda(-2,1,-9) \end{aligned}$$

- La ecuación simétrica está dada por:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x1}=\frac{y-y_1}{y_2-y1}=\frac{z-z_1}{z_2-z1}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-(-2)}{3-(-2)}=\frac{z-5}{4-5}$$
$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{3+2}=\frac{z-5}{4-5}$$

---

c) Tiene como vector director al vector normal de los vectores $(1,1,1)$ y $(-1,0,2)$ y que pasa por el punto $(4,2,1)$

---

3. Encuentra la ecuación del plano cuyo vector normal es el $(3,-1,5)$ y que contiene el punto $(2,-1,0)$

La ecuación del plano es $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, donde nuestro vector normal es $v(A,B,C)=(3,-1,5)$ y nuestro punto $P(x_0,y_0,z_0)=(2,-1,0)$

Sustituyendo el punto P en la ecuación del plano $Ax+By+Cz+D=0$

$$\begin{aligned} Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0=-D \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de el v y P en la ecuación de arriba nos queda que:

$$\begin{aligned} & Ax_0+By_0+Cz_0=-D \\ & =(3)(2)+(-1)(-1)+(5)(0)=-D \\ & =6+1+0=-D \\ & =7=-D \end{aligned}$$

Por lo tanto $D=-7$

Por último tenemos que la ecuación de plano es $Ax+By+Cz+D=0$, sustituimos los valores del vector normal v y de D.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$(3)x + (-1)y + (5)z + (-7) = 0$$
$$3x - y + 5z - 7 = 0$$

---

4. Encuentra la ecuación del plano que pasa por los puntos $(3, 4, 1), (-1, -2, -5)$ y $(1, 7, 1)$

Tenemos tres puntos $P_1(3, 4, 1)$, $P_2(-1, -2, -5)$ y $P_3(1, 7, 1)$

Obtenemos la diferencia de dos puntos P_1 y P_2

$$P_1 - P_2 = (3, 4, 1) - (-1, -2, -5) = (3 - (-1), 4 - (-2), 1 - (-5)) = (3 + 1, 4 + 2, 1 + 5)$$
$$= (4, 6, 6)$$

5. Sea $P = (x, y, z)$ demuestre lo siguiente

d) P y $(-x, y, z)$ son simétricos respecto al plano π_{YZ}.

e) P y $(x, -y, z)$ son simétricos respecto al plano π_{XZ}.

6. Para cada uno de los siguientes lugares geométricos analice las siete simetrías vistas en clase. En caso de que se cumpla alguna, demuéstrela, de lo contrario exhiba un contra ejemplo:

a) $\mathscr{G} : 2x + 3y + z = 0$

b) $\mathscr{G} : 3x^2 - z^2 = 9$

c) $\mathscr{G} : x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 16$

d) $\mathscr{G} : x + y - z^2 = 1$

e) $\mathscr{G} : x^3 - y/2 - z^2 = 3$

Superficies de revolución

7. Suponga $C, S \in R^3$. Pruebe que si $(C - S) \perp e_1$, entonces C y S tienen la misma primer coordenada.

8. Suponga $C, S \in R_3$. Pruebe que si $(C - S) \perp e_2$, entonces C y S tienen la misma segunda coordenada.

9. En cada inciso halle la ecuación cartesiana para la superficie de revolución generada por el lugar geométrico $\mathscr{G}$ y la recta l.

a) $\mathscr{G} : x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ y l es el eje X.

b) $\mathscr{G} : x^2 - 2y + 3 = 1, z = 0$ y l es el eje Y.

c) $\mathscr{G} : x^2 + 2y^2 + 6y - 7 = 1, z = 0$ y l es el eje X.

d) $\mathscr{G} : x^2 + 8y = 1, z = 0$ y l es el eje Y.

e) $\mathscr{G} : 2x^2 - 5y + 7 = 1, z = 0$ y l es el eje X.

10. Para cada uno de los siguientes incisos deberá:

a) Identificar a $\mathscr{Q}$

b) Obtener ecuaciones cartesianas de $\mathscr{Q} \cap \pi_{XY}, \mathscr{Q} \cap \pi_{YZ}$ y $\mathscr{Q} \cap \pi_{XY}$ indicando qué lugar geométrico es. En caso de ser una cónica, indicar centros, vértices, ejes mayores y menores (donde existan según el caso).

c) Hallar las secciones transversales de $\mathscr{Q}$ para $\pi_1 : x = 4, \pi_2 : y = 4, \pi_3 : z = 4$. En caso de ser una cónica, indicar centros, vértices, ejes mayores y menores (donde existan según el caso).

i) $\mathscr{Q} : x^2/9 + y^2/16 - z^2/4 = 1$
ii) $\mathscr{Q} : x^2/4 + y^2/9 = 0$
iii) $\mathscr{Q} : 2y^2 - 4z^2 = x^2$
iv) $\mathscr{Q} : 5y^2 + y^2/3 - z = x^2$
v) $\mathscr{Q} : x + y^3 - z/5 = x^2$

Cierto o falso

11. Indique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justifica tu respuesta con una demostración o un contra ejemplo.

a) $\mathscr{G} : 5z^2 + 5y^2 = 1$ es un cilindro elíptico cuyo eje es el eje X

b) $\mathscr{G} : x^2 + 2z^2 = 0$ posee las siete simetrías vistas en clase.

c) Considera $P = (2, 3, 8)$ y $P' = (-2, -3, -8), PyP'$ son simétricos respecto al plano π_{XZ}

d) Considera $P = (2, 3, 8)$ y $P' = (-2, -3, -8), PyP'$ son simétricos respecto al eje Y .

e) La intersección entre una superficie cuadrática y un plano cartesiano $(\pi_{XY}, \pi_{YZ}, \pi_{XZ})$ es una cónica.

f) $x^2 + y^2 = 25$ Es la ecuación de una circunferencia con radio 5

g) Todo lugar geométrico cumple al menos una de las simetrías respecto a ejes, planos (coordenados) o el origen.