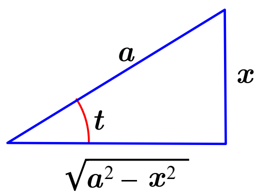
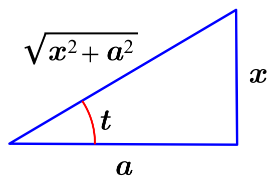
Sustitución trigonométrica

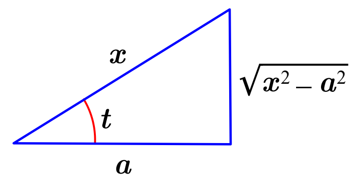
Si en el integrando aparece $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ podemos hacer las siguientes sustituciones

	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\sqrt{x^2+a^2}$	$\sqrt{x^2-a^2}$
Sustituciones:	$x = a \operatorname{sen} t$ $dx = a \cos t \, dt$	$x = a \tan t$ $dx = a \sec^2 t \, dt$	$x = a \sec t$ $dx = a \sec t \tan t \, dt$

Figuras:







En el caso de integrales indefinidas, hay que poner el resultado en función de la variable original para lo cual utilizamos los triángulos que aparecen en la tabla anterior.

Si la integral es definida, por ejemplo $\displaystyle\int_b^c f(x)\ dx$, entonces el cambio de variable afecta a los límites de integración de la siguiente manera:

- Para el cambio de variable $x = a \operatorname{sen} t$.

  Si $x = b$, entonces

$$\begin{aligned} b &= a \operatorname{sen} t \\ \frac{b}{a} &= \operatorname{sen} t \\ t &= \operatorname{arcsen} \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

  Si $x = c$, entonces

$$\begin{aligned} c &= a \operatorname{sen} t \\ \frac{c}{a} &= \operatorname{sen} t \\ t &= \operatorname{arcsen} \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

  Por tanto,

$$\int_b^c f(x)\ dx = \int_{\operatorname{arcsen} \frac{b}{a}}^{\operatorname{arcsen} \frac{c}{a}} f(t)\ dt.$$

- Para el cambio de variable $x = a \tan t$.

Si $x = b$, entonces

$$\begin{aligned} b &= a\tan t \\ \frac{b}{a} &= \tan t \\ t &= \arctan\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Si $x = c$, entonces

$$\begin{aligned} c &= a\tan t \\ \frac{c}{a} &= \tan t \\ t &= \arctan\frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_b^c f(x)\ dx = \int_{\arctan\frac{b}{a}}^{\arctan\frac{c}{a}} f(t)\ dt.$$

- Para el cambio de variable $x = a\sec t$.

  Si $x = b$, entonces

$$\begin{aligned} b &= a\sec t \\ \frac{b}{a} &= \sec t \\ t &= \operatorname{arcsec}\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Si $x = c$, entonces

$$\begin{aligned} c &= a\sec t \\ \frac{c}{a} &= \sec t \\ t &= \operatorname{arcsec}\frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_b^c f(x)\ dx = \int_{\operatorname{arcsec}\frac{b}{a}}^{\operatorname{arcsec}\frac{c}{a}} f(t)\ dt.$$

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$.

   Solución:

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} x &= 3\tan t \\ dx &= 3\sec^2 t\,dt \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx &= \int \frac{(9\tan^2 t)\,(3\sec^2 t)}{\sqrt{9+9\tan^2 t}}\,dt \\ &= \int \frac{(9\tan^2 t)\,(3\sec^2 t)}{3\sec t}\,dt \\ &= 9\int \tan^2 t \sec t\ dt. \end{aligned}$$

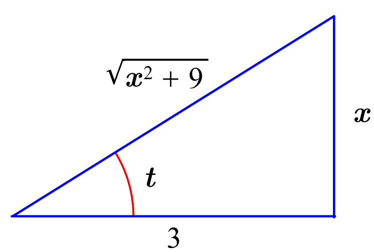
Ahora calculamos la última integral utilizando el método de integración por partes:

$$\begin{aligned} u &= \tan t & \qquad dv &= \tan t \sec t\,dt \\ du &= \sec^2 t\,dt & v &= \sec t, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} 9\int \tan^2 t \sec t\ dt &= 9\left(\tan t \sec t - \int \sec^3 t\,dt\right) \\ &= 9\left(\tan t \sec t - \frac{1}{2}\left(\tan t \sec t + \ln|\sec t + \tan t|\right)\right) + C \\ &= \frac{9}{2}\tan t \sec t - \frac{9}{2}\ln|\sec t + \tan t| + C. \end{aligned}$$

Ahora, utilizamos el siguiente triángulo para escribir el resultado de la integral, en términos de x



$$\tan t = \frac{x}{3}$$

$$\sec t = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$$

Así

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx &= \frac{9}{2}\tan t \sec t - \frac{9}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C \\ &= \frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right) - \frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3}\right| + C \\ &= \frac{x\sqrt{x^2+9}}{2} - \frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{3}\right| + C. \end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-16x^2}}$.

   Solución:

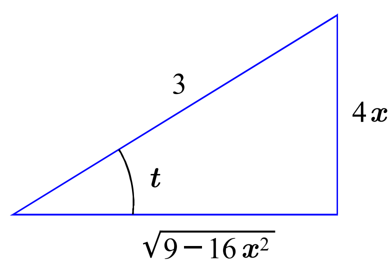
   Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} 4x &= 3\operatorname{sen} t \\ x &= \frac{3}{4}\operatorname{sen} t \\ dx &= \frac{3}{4}\cos t\, dt \end{aligned}$$

   entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-16x^2}} &= \int \frac{\frac{3}{4}\cos t}{\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen} t\right)^2\sqrt{9-16\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen} t\right)^2}}\, dt \\ &= \frac{4}{3}\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t\ (3\cos t)}\, dt \\ &= \frac{4}{9}\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}\, dt \\ &= \frac{4}{9}\int \csc^2 t\, dt \\ &= -\frac{4}{9}\cot t + C \end{aligned}$$

   Ahora, utilizamos el siguiente triángulo, para escribir el resultado de la integral en términos de x



$$\operatorname{sen} t = \frac{4x}{3}$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{9-16x^2}}{3}$$

   Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-16x^2}} &= -\frac{4}{9}\left(\frac{\sqrt{9-16x^2}}{4x}\right) + C \\ &= \frac{-\sqrt{9-16x^2}}{9x} + C \end{aligned}$$

3. Calcular $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\, dx$.

Solución:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx &= \int \frac{2x-4+4+2}{x^2-4x+8}\,dx \\ &= \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + \int \frac{6}{x^2-4x+8}\,dx \\ &= \ln\left|x^2-4x+8\right| + 6\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx.\end{aligned}$$

Calculamos la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$. Para ello escribimos es denominador como

$$\begin{aligned}x^2-4x+8 &= x^2-4x+4-4+8 \\ &= (x-2)^2+4.\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned}x-2 &= 2\tan t \\ dx &= 2\sec^2 t\,dt\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-4x+8} &= \int \frac{dx}{(x-2)^2+4} \\ &= \int \frac{2\sec^2 t\,dt}{(2\tan t)^2+4} \\ &= \frac{1}{2}\int dt \\ &= \frac{1}{2}t + C \\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{x-2}{2} + C.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx &= \ln\left|x^2-4x+8\right| + 6\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x-2}{2}\right) + C \\ &= \ln\left|x^2-4x+8\right| + 3\arctan\frac{x-2}{2} + C.\end{aligned}$$

Integración por fracciones parciales

Consideremos la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P, Q son funciones polinomiales. Si derivamos una función racional, obtenemos una función racional. Si integramos una función racional puede resultar una función NO racional. Por ejemplo

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad \text{y} \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

Definición:

Una función racional $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en la que el grado del numerador es menor que el grado de denominador se llama función racional propia.

Si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una función racional impropia, se puede expresar como la suma de un polinomio y una función racional propia:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$$

donde el grado de $R(x)$ es menor que el grado de $g(x)$.

Por ejemplo

$$\frac{x^4+5x}{x^2-3x-1} = x^2+3x+10+\frac{38x+10}{x^2-3x-1}.$$

Como toda función racional impropia se puede expresar como la suma de un polinomio y una función racional propia, sólo estudiaremos las funciones racionales propias.

Un teorema general de Álgebra dice que toda función racional propia se puede expresar como la suma finita de fracciones de la forma

$$\frac{A}{(x+a)^k} \qquad \text{y} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}$$

con $k, m \in \mathbb{N}$, A, B, C, a, b, c constantes y $b^2-4c<0$, es decir, el polinomio $x^2+bx+c=0$ no tiene raíces reales, o sea, es un polinomio irreducible.

Cuando una función racional se expresa de la manera antes indicada, se dice que se ha descompuesto en fracciones simples.

Para integrar una función racional propia analizaremos cuatro caso.

Caso 1: El denominador es un producto de factores lineales distintos.

Sea $g(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ el producto de n factores distintos, entonces la combinación lineal

$$\frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-x_n)}$$

se reduce a una única fracción con $g(x)$ como común denominador, siendo el numerador un polinomio de grado menor que n que contiene a las A_i con $i = 1, \ldots, n$.

Por tanto, si podemos encontrar las A_i de manera que este numerador sea igual a $f(x)$, se tiene que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-x_n)}$$

y

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{n} A_i \ln|x-x_i| + k.$$

Observación:

$$\begin{aligned}
(x+a)(x+b) &= x^2+(a+b)x+ab \\
(x+a)(x+b)(x+c) &= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc \\
(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) &= x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 \\
&\quad +(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.
\end{aligned}$$

Esta propiedad se puede demostrar por inducción sobre el número de sumandos.

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)}$.

   Solución:

   Escribimos

$$\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

   de donde

$$\begin{aligned}
1 &= A(x+2)+B(x-3) \\
1 &= Ax+2A+Bx-3B \\
&= (A+B)x+2A-3B.
\end{aligned}$$

   Formamos el sistema

$$\begin{aligned}
A+B &= 0 \\
2A-3B &= 1.
\end{aligned}$$

   De la primera ecuación tenemos

$$A=-B$$

   y sustituyendo este valor en la segunda ecuación

$$\begin{aligned}
2(-B)-3B &= 1 \\
-5B &= 1 \\
B &= -\frac{1}{5},
\end{aligned}$$

   de donde

$$A=\frac{1}{5}.$$

   Así

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} &= \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+2} \\
&= \frac{1}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{5}\ln|x+2|+k \\
&= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+k \\
&= \ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|^{\frac{1}{5}}+k.
\end{aligned}$$

2. Calcular $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$.

Solución:

Factorizamos el denominador

$$\begin{aligned} x^3+x^2-2x &= x\left(x^2+x-2\right) \\ &= x\left(x+2\right)\left(x-1\right). \end{aligned}$$

Escribimos la función racional como

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$$

de donde

$$2x^2+5x-1 = A\left(x+2\right)\left(x-1\right) + Bx\left(x-1\right) + Cx\left(x+2\right).$$

Si $x=0$, entonces al sustituir este valor en la igualdad tenemos

$$\begin{aligned} -1 &= A\left(2\right)\left(-1\right) \\ \frac{1}{2} &= A. \end{aligned}$$

Sustituimos $x=1$, de donde

$$\begin{aligned} 2\left(1\right)^2+5\left(1\right)-1 &= C\left(1\right)\left(1+2\right) \\ 6 &= 3C \\ 2 &= C. \end{aligned}$$

Por último sustituimos $x=-2$,

$$\begin{aligned} 2\left(-2\right)^2+5\left(-2\right)-1 &= B\left(-2\right)\left(-2-1\right) \\ -3 &= 6B \\ -\frac{1}{2} &= B. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2} + 2\int\frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + 2\ln|x-1| + k \\ &= \ln\left(\left|\frac{x}{x+2}\right|^{\frac{1}{2}}|x-1|^2\right) + k. \end{aligned}$$

Caso 2: El denominador es un producto de factores lineales algunos de los cuales se repita.

Ejemplo

- $\int \frac{x^2+2x+3}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2}\,dx.$

Solución:

Escribimos la función racional como

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

de donde

$$x^2+2x+3=A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1).$$

Sustituimos $x=1$,

$$\begin{aligned}1^2+2+3 &= A(1+1)^2\\ 6 &= 4A\\ A &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Ahora sustituimos $x=-1$,

$$\begin{aligned}(-1)^2+2(-1)+3 &= C(-1-1)\\ 2 &= -2C\\ C &= -1.\end{aligned}$$

Sustituimos los valores de A y C en

$$\begin{aligned}x^2+2x+3 &= \frac{3}{2}(x+1)^2+B(x-1)(x+1)-(x-1)\\ &= \frac{3}{2}\left(x^2+2x+1\right)+B\left(x^2-1\right)-x+1\\ &= \frac{3}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}+B\left(x^2-1\right)-x+1\\ &= \left(\frac{3}{2}+B\right)x^2+2x-B+\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Basta con igualar los coeficientes de x^2:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}+B &= 1\\ B &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

De manera que la integral es

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx &= \frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}\\ &= \frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+k\\ &= \ln\left(\frac{|x-1|^3}{|x+1|}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{x+1}+k.\end{aligned}$$

En general si un factor lineal aparece p veces en el denominador se toma

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

Para cada factor repetido se toma una suma de este tipo.

Caso 3: El denominador tiene factores cuadráticos irreducibles ninguno de los cuales se repite.

Ejemplo

- Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x\left(x^2+x+1\right)}\,dx.$

  Solución:

  Escribimos la función racional como

$$\frac{x^2-1}{x\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

  de donde

$$\begin{aligned} x^2-1 &= A\left(x^2+x+1\right) + (Bx+C)\,x \\ &= A\left(x^2+x+1\right) + Bx^2 + Cx \\ &= (A+B)\,x^2 + (A+C)\,x + A \end{aligned}$$

  Formamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A+B &= 1 \\ A+C &= 0 \\ A &= -1 \end{aligned}$$

  Sustituimos el valor de A en las dos primeras ecuaciones

$$\begin{aligned} -1+B &= 1 \\ -1+C &= 0 \end{aligned}$$

  de donde

$$\begin{aligned} B &= 2 \\ C &= 1. \end{aligned}$$

  Así

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-1}{x\left(x^2+x+1\right)}\,dx &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= -\ln|x| + \ln\left|x^2+x+1\right| + k \\ &= \ln\left|\frac{x^2+x+1}{x}\right| + k. \end{aligned}$$

Caso 4: El denominador tiene factores cuadráticos irreducibles algunos de los cuales están repetidos.

Si en la descomposición de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en fracciones simples tiene algún factor lineal que se repita p veces, entonces aparecerán primero factores de la forma

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

y en segundo lugar, si un factor cuadrático irreducible se repite m veces, entonces se puede descomponer en una suma de términos de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{(x^2+bx+c)^k}$$

donde cada numerador es lineal.

Ejemplo

- Calcular $\int \dfrac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx.$

  Solución:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}$$

de donde

$$\begin{aligned}
& x^4+4x^3+11x^2+12x+8 \\
= \; & A\left(x^2+2x+3\right)^2 + (Bx+C)\left(x^2+2x+3\right)(x+1) + (Dx+E)(x+1) \\
= \; & A\left(x^4+4x^3+10x^2+12x+9\right) + B\left(x^4+3x^3+5x^2+3x\right) + C\left(x^3+3x^2+5x+3\right) \\
& +D\left(x^2+x\right) + E(x+1) \\
= \; & (A+B)x^4 + (4A+3B+C)x^3 + (10A+5B+3C+D)x^2 \\
& +(12A+3B+5C+D+E)x + 9A+3C+E
\end{aligned}$$

Formamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
A+B &= 1 \\
4A+3B+C &= 4 \\
10A+5B+3C+D &= 11 \\
12A+3B+5C+D+E &= 12 \\
9A+3C+E &= 8
\end{aligned}$$

De la primera ecuación tenemos que

$$B = 1 - A. \tag{4.5}$$

Sustituimos este valor en las otras ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned} 4A + 3(1-A) + C &= 4 \\ 10A + 5(1-A) + 3C + D &= 11 \\ 12A + 3(1-A) + 5C + D + E &= 12 \\ 9A + 3C + E &= 8, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} A + C &= 1 \\ 5A + 3C + D &= 6 \\ 9A + 5C + D + E &= 9 \\ 9A + 3C + E &= 8. \end{aligned}$$

Despejando C de la primera ecuación tenemos

$$C = 1 - A \tag{4.6}$$

y sustituimos este valor en las otras ecuaciones del segundo sistema

$$\begin{aligned} 5A + 3(1-A) + D &= 6 \\ 9A + 5(1-A) + D + E &= 9 \\ 9A + 3(1-A) + E &= 8, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} 2A + D &= 3 \\ 4A + D + E &= 4 \\ 6A + E &= 5. \end{aligned}$$

Despejando D de la primera

$$D = 3 - 2A \tag{4.7}$$

y sustituyendo en la segunda

$$\begin{aligned} 4A + 3 - 2A + E &= 4 \\ 2A + E &= 1. \end{aligned}$$

Consideramos el sistema

$$\begin{aligned} 2A + E &= 1 \\ 6A + E &= 5. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por -1 y las sumamos

$$\begin{array}{rcr} 2A + E &=& 1 \\ -6A - E &=& -5 \\ \hline -4A \qquad &=& -4 \end{array}$$

de donde $A = 1$. Sustituimos este valor en (4.8)

$$\begin{aligned} 6\,(1) + E &= 5 \\ E &= -1 \end{aligned}$$

Sustituimos $A = 1$ en (4.7), (4.6) y (4.5)

$$\begin{aligned} D &= 3 - 2\,(1) = 1 \\ C &= 1 - 1 = 0 \\ B &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{\left(x^2 + 2x + 3\right)^2 (x+1)}\,dx &= \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{x-1}{\left(x^2 + 2x + 3\right)^2}\,dx \\ &= \ln|x+1| + \int \frac{x-1}{\left(x^2 + 2x + 3\right)^2}\,dx. \end{aligned}$$

Calculamos la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{\left(x^2 + 2x + 3\right)^2}\,dx &= \int \frac{x+1-1-1}{\left(x^2 + 2x + 3\right)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2\,(x+1)}{\left(x^2 + 2x + 3\right)^2}\,dx - 2\int \frac{dx}{\left(x^2 + 2x + 3\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\left(x^2 + 2x + 3\right)^{-1}}{-1} - 2\int \frac{dx}{\left(x^2 + 2x + 3\right)^2}. \end{aligned}$$

Ahora para calcular la última integral

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + 2x + 3\right)^2}$$

expresamos el denominador de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \left(x^2 + 2x + 3\right)^2 &= \left(x^2 + 2x + 1 - 1 + 3\right)^2 \\ &= \left((x+1)^2 + 2\right)^2 \end{aligned}$$

y hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} x + 1 &= \sqrt{2}\tan t \\ dx &= \sqrt{2}\sec^2 t\,dt. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} &= \int \frac{dx}{\left((x+1)^2+2\right)^2} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 t\,dt}{\left(\left(\sqrt{2}\tan t\right)^2+2\right)^2} \\
&= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 t\,dt}{2^2\sec^4 t} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dt}{\sec^2 t} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \cos^2 t\,dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int 1+\cos 2t\,dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(t+\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(t+\operatorname{sen} t\cos t\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2x+3}}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}\,(x+1)}{x^2+2x+3}\right)
\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} = \int \frac{dx}{\left((x+1)^2+2\right)^2}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{\left(x^2+2x+3\right)^2(x+1)}\,dx \\
&= \ln|x+1| - \frac{1}{2\left(x^2+2x+3\right)} - 2\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}\,(x+1)}{x^2+2x+3}\right)+k \\
&= \ln|x+1| - \frac{1}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}\,(x+1)}{x^2+2x+3}\right)+k \\
&= \ln|x+1| - \frac{1}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{x+1}{2\left(x^2+2x+3\right)}+k \\
&= \ln|x+1| - \frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+k.
\end{aligned}$$

El problema de la integración de funciones racionales propias se reduce al cálculo de las integrales de la forma:

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} \qquad \int \frac{xdx}{(x^2+bx+c)^m} \qquad \int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^m}$$

donde x^2+bx+c es un polinomio irreducible, es decir, $b^2-4c<0$.

- Si $n=1$, entonces
$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + k.$$

- Si $n>1$, entonces
$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \int (x+a)^{-n}\ dx = \frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1} + k.$$

Para calcular las otras dos integrales escribimos x^2+bx+c de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= x^2+bx+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c \\ &= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$

Sea
$$\alpha = \sqrt{c-\frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}$$
siempre $4c-b^2>0$ ya que $b^2-4c<0$.

Hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned} x+\frac{b}{2} &= u \\ dx &= du \end{aligned}$$

de donde

$$\int \frac{xdx}{(x^2+bx+c)^m} = \int \frac{u-\frac{b}{2}}{(u^2+\alpha^2)^m}du = \int \frac{u}{(u^2+\alpha^2)^m}du - \frac{b}{2}\int \frac{1}{(u^2+\alpha^2)^m}du$$

- Si $m=1$, entonces
$$\int \frac{u}{(u^2+\alpha^2)^m}du = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+\alpha^2}du = \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\alpha^2\right| + k.$$

- Si $m>1$, entonces
$$\int \frac{u}{(u^2+\alpha^2)^m}du = \frac{1}{2}\int 2u\left(u^2+\alpha^2\right)^{-m} = \frac{(u^2+\alpha^2)^{-m+1}}{2(-m+1)} + k.$$

Por último:

- Si $m = 1$, entonces
$$\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m} = \int \frac{du}{u^2+\alpha^2}$$
utilizamos el cambio de variable
$$\begin{aligned} u &= \alpha \tan t \\ du &= \alpha \sec^2 t\, dt \end{aligned}$$
de donde
$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u^2+\alpha^2} &= \int \frac{\alpha \sec^2 t}{\alpha^2 \tan^2 t + \alpha^2}\, dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\int dt \\ &= \frac{1}{\alpha} t + k \\ &= \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{u}{a} + k \end{aligned}$$

- Si $m > 1$, entonces
$$\int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^m} = \frac{u}{2\alpha^2 (m-1)(u^2+\alpha^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2a^2(m-1)} \int \frac{du}{(u^2+\alpha^2)^{m-1}}$$
que se obtiene integrando por partes como sigue:
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m} = \int \frac{a^2 x}{a^2 x (x^2+a^2)^m}\, dx = \int \frac{a^2 x}{a^2 x (x^2+a^2)^{m-2} (x^2+a^2)^2}\, dx$$
Hacemos
$$u = \frac{1}{a^2 x (x^2+a^2)^{m-2}} \qquad dv = \frac{a^2 x}{(x^2+a^2)^2}\, dx$$
$$v = \frac{a^2}{2} \frac{(x^2+a^2)^{-1}}{-1} = \frac{-a^2}{2(x^2+a^2)}$$
y
$$\begin{aligned} du &= \frac{-\left(a^2 (x^2+a^2)^{m-2} + a^2 x (m-2)(x^2+a^2)^{m-3} 2x\right)}{\left(a^2 x (x^2+a^2)^{m-2}\right)^2}\, dx \\ &= \frac{-a^2 (x^2+a^2)^{m-3} \left((x^2+a^2) + 2x^2(m-2)\right)}{a^4 x^2 (x^2+a^2)^{2m-4}}\, dx \\ &= \frac{-(x^2+a^2+2x^2 m - 4x^2)}{a^2 x^2 (x^2+a^2)^{2m-4-m+3}}\, dx \\ &= \frac{-((2m-3)x^2+a^2)}{a^2 x^2 (x^2+a^2)^{m-1}}\, dx \end{aligned}$$

Proponemos que

$$v = \frac{x^2}{2\left(x^2+a^2\right)}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dx} &= \frac{2x\left(2\left(x^2+a^2\right)\right) - 4x\left(x^2\right)}{\left(2\left(x^2+a^2\right)\right)^2} \\
&= \frac{4x^3+4a^2x-4x^3}{4\left(x^2+a^2\right)^2} \\
&= \frac{a^2x}{\left(x^2+a^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

Como dos primitivas de la misma función difieren en una constante, entonces tenemos que

$$\frac{x^2}{2\left(x^2+a^2\right)} = \frac{-a^2}{2\left(x^2+a^2\right)} + k$$

de donde

$$\begin{aligned}
k &= \frac{x^2}{2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{a^2}{2\left(x^2+a^2\right)} \\
&= \frac{x^2+a^2}{2\left(x^2+a^2\right)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{a^2x\left(x^2+a^2\right)^{m-2}} & dv &= \frac{a^2x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\,dx \\
du &= \frac{-\left(\left(2m-3\right)x^2+a^2\right)}{a^2x^2\left(x^2+a^2\right)^{m-1}}\,dx & v &= \frac{x^2}{2\left(x^2+a^2\right)}
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
uv - \int v\,du &= \frac{1}{a^2x\left(x^2+a^2\right)^{m-2}}\frac{x^2}{2\left(x^2+a^2\right)} - \int \frac{x^2}{2\left(x^2+a^2\right)}\frac{-\left(\left(2m-3\right)x^2+a^2\right)}{a^2x^2\left(x^2+a^2\right)^{m-1}}\,dx \\
&= \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} + \int \frac{\left(2m-3\right)x^2+a^2}{2a^2\left(x^2+a^2\right)^m}\,dx \\
&= \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{\left(2m-3\right)x^2+\left(2m-3\right)a^2-\left(2m-3\right)a^2+a^2}{\left(x^2+a^2\right)^m}\,dx \\
&= \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{2a^2}\left(\int \frac{\left(2m-3\right)\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^m}\,dx + \int \frac{\left(-2m+3+1\right)a^2}{\left(x^2+a^2\right)^m}\,dx\right) \\
&= \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{m-1}} - \left(m-2\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^m}
\end{aligned}$$

de donde

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^m}+(m-2)\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^m}=\frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{m-1}}$$

así

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^m} &= \frac{1}{m-1}\left(\frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2a^2}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{m-1}}\right)\\ &= \frac{x}{2a^2\left(m-1\right)\left(x^2+a^2\right)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2a^2\left(m-1\right)}\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{m-1}}\end{aligned}$$

Método de Ostrogradski

Este método sirve para calcular integrales que son del caso 4 de fracciones parciales. Aunque el proceso sigue siendo largo las integrales que hay que calcular son de una función racional en la que el denominador tiene factores lineales o cuadráticos o ambos pero elevados a la primera potencia.

Escribimos

$$\int \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\,dx=\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}+\int \frac{r\left(x\right)}{s\left(x\right)}\,dx \tag{4.9}$$

donde

$$\begin{aligned} g\left(x\right) &= \left(x-a_1\right)^{\alpha}\left(x-a_2\right)^{\beta}\cdots\left(x^2+c_1x+d_1\right)^{\lambda}\\ q\left(x\right) &= \left(x-a_1\right)^{\alpha-1}\left(x-a_2\right)^{\beta-1}\cdots\left(x^2+c_1x+d_1\right)^{\lambda-1}\\ s\left(x\right) &= \left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x^2+c_1x+d_1\right)\end{aligned}$$

y $p\left(x\right)$ es un polinomio cuyo grado es uno menos que el grado de $q\left(x\right)$ y el grado de $r\left(x\right)$ es uno menor que el de $s\left(x\right)$.

Derivamos de ambos lados de la ecuación (4.9)

$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\frac{p'\left(x\right)q\left(x\right)-q'\left(x\right)p\left(x\right)}{q^2\left(x\right)}+\frac{r\left(x\right)}{s\left(x\right)}$$

Se pone denominador común y se resuelve para encontrar los coeficientes indeterminados.

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+x-4}{x^2\left(x^2+4\right)^2}\,dx$

   Solución:

   Escribimos

$$\int \frac{x^3+4x^2+x-4}{x^2\left(x^2+4\right)^2}\,dx=\frac{Ax^2+Bx+C}{x\left(x^2+4\right)}+\int \frac{Dx^2+Ex+F}{x\left(x^2+4\right)}\,dx.$$

Derivamos ambos miembros de la igualdad anterior

$$\frac{x^3+4x^2+x-4}{x^2\left(x^2+4\right)^2}=\frac{(2Ax+B)\left(x^3+4x\right)-\left(3x^2+4\right)\left(Ax^2+Bx+C\right)}{x^2\left(x^2+4\right)^2}+\frac{Dx^2+Ex+F}{x\left(x^2+4\right)}.$$

Quitamos denominadores

$$x^3+4x^2+x-4=(2Ax+B)\left(x^3+4x\right)-\left(3x^2+4\right)\left(Ax^2+Bx+C\right)+\left(Dx^2+Ex+F\right)\left(x^3+4x\right)$$

Evaluamos en $x=0$

$$\begin{aligned}-4&=-4C\\1&=C\end{aligned}$$

de donde

$$x^3+4x^2+x-4=(2Ax+B)\left(x^3+4x\right)-\left(3x^2+4\right)\left(Ax^2+Bx+1\right)+\left(Dx^2+Ex+F\right)\left(x^3+4x\right)$$

: $4Ax^2-Ax^4-2Bx^3+Fx^3+4x^2E+4x^3D+x^4E+x^5D+4Fx-3x^2-4=Dx^5+(E-A)\,x^4+(F-2B+4D)\,x^3+(4A+4E-3)\,x^2+4Fx-4$desarrollamos el segundo miembro de la igualdad:

$$Dx^5-Ax^4+Ex^4-2Bx^3+Fx^3+4Dx^3+4Ex^2-3x^2+4Ax^2+4Fx-4$$

agrupamos

$$Dx^5+(-A+E)\,x^4+(F+4D-2B)\,x^3+(4A+4E-3)\,x^2+4Fx-4$$

Establecemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}D&=0\\-A+E&=0\\-2B+4D+F&=1\\4A+4E-3&=4\\4F&=1\end{aligned}$$

Entonces $D=0$. Despejamos F de la última ecuación

$$F=\frac{1}{4}$$

y sustituimos estos valores en el sistema

$$\begin{aligned}-A+E&=0\\-2B+\frac{1}{4}&=1\\4A+4E&=7\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} E &= A \\ B &= -\frac{3}{8} \\ 8A &= 7 \end{aligned}$$

Entonces, $A = E = \dfrac{7}{8}$ y $B = -\dfrac{3}{8}$ y sabíamos que $C = 1,\ D = 0, F = \dfrac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+4x^2+x-4}{x^2\left(x^2+4\right)^2}\,dx &= \frac{\frac{7}{8}x^2-\frac{3}{8}x+1}{x^3+4x} + \int \frac{\frac{7}{8}x+\frac{1}{4}}{x^3+4x}\,dx \\ &= \frac{\frac{7}{8}x^2-\frac{3}{8}x+1}{x^3+4x} + \frac{7}{8}\int \frac{x}{x^3+4x}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^3+4x}\,dx \\ &= \frac{\frac{7}{8}x^2-\frac{3}{8}x+1}{x^3+4x} + \frac{7}{8}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^3+4x}\,dx \end{aligned}$$

Calculamos la integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$ usando sustitución trigonométrica.

$$\begin{aligned} x &= 2\tan t \\ dx &= 2\sec^2 t\,dt \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+4}\,dx &= \int \frac{2\sec^2 t}{4\tan^2 t+4}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{2\sec^2 t}{\sec^2 t}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int dx \\ &= \frac{1}{2}t \\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} \end{aligned}$$

Por último, calculamos la integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+4x}\,dx$.

Escribimos la integral como

$$\int \frac{1}{x^3+4x}\,dx = \int \frac{1}{x\left(x^2+4\right)}\,dx$$

y usamos fracciones parciales:

$$\frac{1}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

Poniendo denominador común tenemos:

$$1 = A\left(x^2+4\right) + (Bx+C)\,x \tag{4.10}$$

Sustituimos $x = 0$:

$$1 = A\,(4) + 0$$

de donde

$$A = \frac{1}{4}.$$

Sustituimos el valor de A en (4.10)

$$1 = \frac{1}{4}\left(x^2+4\right) + (Bx+C)\,x$$

y desarrollamos el segundo miembro de la ecuación anterior

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{4}x^2 + 1 + Bx^2 + xC \\ &= \left(\frac{1}{4}+B\right)x^2 + xC + 1 \end{aligned}$$

Establecemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + B &= 0 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

de donde $B = -\frac{1}{4}$, $C = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+4x}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{4}x}{x^2+4}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{x}{x^2+4}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left|x^2+4\right| \\ &= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln\left|x^2+4\right| \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+4x^2+x-4}{x^2\left(x^2+4\right)^2}\,dx &= \frac{\frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{8}x + 1}{x^3+4x} + \frac{7}{8}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^3+4x}\,dx \\ &= \frac{\frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{8}x + 1}{x^3+4x} + \frac{7}{8}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{8}\ln\left|x^2+4\right|\right) + k \\ &= \frac{\frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{8}x + 1}{x^3+4x} + \frac{7}{16}\arctan\frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln\left|x^2+4\right| + k \end{aligned}$$

2. Calcular $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{\left(x^2+25\right)^2}\,dx$

Solución:

Escribimos

$$\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{\left(x^2+25\right)^2}\,dx = \frac{Ax+B}{x^2+25} + \int \frac{Cx+D}{x^2+25}\,dx$$

derivamos ambos miembros de la igualdad anterior

$$\frac{x^3-3x^2+x-1}{\left(x^2+25\right)^2} = \frac{A\left(x^2+25\right)-2x\left(Ax+B\right)}{\left(x^2+25\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+25}$$

Quitamos denominadores

$$\begin{aligned}
x^3-3x^2+x-1 &= A\left(x^2+25\right)-2x\left(Ax+B\right)+\left(Cx+D\right)\left(x^2+25\right)\\
&= Ax^2+25A-2Ax^2-2Bx+Cx^3+25Cx+Dx^2+25D\\
&= Cx^3-Ax^2+Dx^2-2Bx+25Cx+25A+25D\\
&= Cx^3+\left(-A+D\right)x^2+\left(-2B+25C\right)x+25A+25D.
\end{aligned}$$

Establecemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
C &= 1\\
-A+D &= -3\\
-2B+25C &= 1\\
25A+25D &= -1
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Sustituimos $C=1$ en la tercera ecuación

$$\begin{aligned}
-2B+25C &= 1\\
-2B+25\left(1\right) &= 1\\
-2B &= -24\\
B &= 12.
\end{aligned}$$

Despejamos D de la segunda ecuación de (4.11)

$$\begin{aligned}
-A+D &= -3\\
D &= -3+A
\end{aligned}$$

y sustituimos este valor en la cuarta ecuación:

$$\begin{aligned}
25A+25D &= -1\\
25A+25\left(-3+A\right) &= -1\\
50A-75 &= -1\\
50A &= 74\\
A &= \frac{37}{25}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} D &= -3 + A \\ &= -3 + \frac{37}{25} \\ &= -\frac{38}{25} \end{aligned}$$

De donde $A = \dfrac{37}{25}, B = 12, C = 1, D = -\dfrac{38}{25}$, es decir,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{\left(x^2+25\right)^2}\, dx &= \frac{Ax+B}{x^2+25} + \int \frac{Cx+D}{x^2+25}\, dx \\ &= \frac{\frac{37}{25}x + 12}{x^2+25} + \int \frac{x - \frac{38}{25}}{x^2+25}\, dx \end{aligned}$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} \int \frac{x - \frac{38}{25}}{x^2+25}\, dx &= \int \frac{x}{x^2+25}\, dx - \frac{38}{25}\int \frac{1}{x^2+25}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+25}\, dx - \frac{38}{25}\int \frac{1}{x^2+25}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+25\right) - \frac{38}{25}\int \frac{1}{x^2+25}\, dx \end{aligned}$$

Finalmente calculamos $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+25}\, dx$ utilizando la sustitución trigonométrica

$$\begin{aligned} x &= 5\tan t \\ dx &= 5\sec^2 t\, dt \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+25}\, dx &= \int \frac{5\sec^2 t}{25\tan^2 t + 25}\, dt \\ &= \int \frac{5\sec^2 t}{25\sec^2 t}\, dt \\ &= \frac{1}{5}\int dt \\ &= \frac{1}{5}t \\ &= \frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{\left(x^2+25\right)^2}\, dx = \frac{\frac{37}{25}x + 12}{x^2+25} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+25\right| - \frac{38}{125}\arctan\frac{x}{5} + k.$$

3. Calcular $\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$

Solución:

Escribimos

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2} + \int \frac{Ex+F}{x^2+1}\,dx$$

derivamos ambos miembros de la igualdad anterior

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^2+1)^3} &= \frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)^2 - (2(x^2+1))\,2x\,(Ax^3+Bx^2+Cx+D)}{(x^2+1)^4} + \frac{Ex+F}{x^2+1} \\
\frac{1}{(x^2+1)^3} &= \frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1) - 4x\,(Ax^3+Bx^2+Cx+D)}{(x^2+1)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+1} \\
\frac{1}{(x^2+1)^3} &= \frac{-Ax^4-2Bx^3+3Ax^2-3Cx^2+2Bx-4Dx+C}{(x^2+1)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+1}
\end{aligned}$$

Quitamos denominadores

$$1 = -Ax^4+3Ax^2-2Bx^3+2Bx-3Cx^2+C-4Dx+(Ex+F)\left(x^2+1\right)^2.$$

Desarrollando el miembro derecho de la ecuación anterior y agrupando, tenemos

$$Ex^5+(-A+F)\,x^4+(-2B+2E)\,x^3+(3A-3C+2F)\,x^2+(2B-4D+E)\,x+C+F$$

Establecemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
E &= 0 \\
-A+F &= 0 \\
-2B+3E &= 0 \Rightarrow B=0 \\
3A-3C+2F &= 0 \\
2B-4D+E &= 0 \Rightarrow D=0 \\
C+F &= 1
\end{aligned}$$

Como $E=0$, $B=0$ y $D=0$, sustituimos en las ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned}
-A+F &= 0 \\
3A-3C+2F &= 0 \\
C+F &= 1.
\end{aligned}$$

De donde $F=A$ sustituimos este valor de A en la segunda:

$$\begin{aligned}
5F-3C &= 0 \\
C+F &= 1.
\end{aligned}$$

De la última ecuación, despejamos F, es decir, $F = 1 - C$. Sustituimos este valor en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 5(1-C) - 3C &= 0 \\ 5 - 8C &= 0 \\ C &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Sustituimos el valor de C en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} 5F - 3\left(\frac{5}{8}\right) &= 0 \\ 5F &= \frac{15}{8} \\ F &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

De donde $A = \dfrac{3}{8}, B = 0, C = \dfrac{5}{8}, D = 0, E = 0, F = \dfrac{3}{8}$ es decir,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3}\, dx &= \frac{\frac{3}{8}x^3 + \frac{5}{8}x}{\left(x^2+1\right)^2} + \int \frac{\frac{3}{8}}{x^2+1}\, dx \\ &= \frac{\frac{3}{8}x^3 + \frac{5}{8}x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{8}\int \frac{1}{x^2+1}\, dx \\ &= \frac{\frac{3}{8}x^3 + \frac{5}{8}x}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3}{8}\arctan x + k. \end{aligned}$$

Método de Euler

Para resolver integrales de la forma

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\; dx$$

el matemático suizo Leonard Euler, ideó unas sustituciones que permiten transformar estas integrales a integrales de funciones racionales.

- **Primer método de Euler**

  Para calcular la integral

  $$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\; dx$$

  donde $a > 0$ hacemos la siguiente sustitución:

  $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$$

Hay que considerar sólo un signo, cualquiera de los dos, ya que se obtiene el mismo resultado. Vamos a considerar la ecuació

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t \tag{4.12}$$

Elevamos al cuadrado ambos términos de la igualdad y despejamos x:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)^2 &= \left(\sqrt{a}x+t\right)^2 \\ ax^2+bx+c &= ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2 \\ bx-2\sqrt{a}xt &= t^2-c \\ x &= \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}. \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2t\left(b-2\sqrt{a}t\right)-\left(-2\sqrt{a}\right)\left(t^2-c\right)}{\left(b-2\sqrt{a}t\right)^2}\,dt \\ &= \frac{2tb-2\sqrt{a}t^2-2\sqrt{a}c}{\left(b-2\sqrt{a}t\right)^2}\,dt \end{aligned}$$

Así la ecuación (4.12) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a}\left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}\right)+t \\ &= \frac{-\sqrt{a}t^2-\sqrt{a}c+tb}{b-2\sqrt{a}t} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx &= \int\left(\frac{-\sqrt{a}t^2-\sqrt{a}c+tb}{b-2\sqrt{a}t}\right)\left(\frac{-2\sqrt{a}t^2+2bt-2\sqrt{a}c}{\left(b-2\sqrt{a}t\right)^2}\right)dt \\ &= 2\int\frac{\left(-\sqrt{a}t^2+bt-\sqrt{a}c\right)^2}{\left(b-2\sqrt{a}t\right)^3}\,dt \end{aligned}$$

Las expresiones que se obtienen son racionales y podemos utilizar el método de fracciones parciales para calcular las integrales.

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$.

   Solución:

   Hacemos la sustitución

$$\sqrt{x^2+3} = x+t.$$

Elevando al cuadrado cada término de la igualdad y despejando la x tenemos:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 &= (x+t)^2\\ x^2+3 &= x^2+2xt+t^2\\ -2xt &= t^2-3\\ x &= \frac{t^2-3}{-2t}\\ x &= \frac{3-t^2}{2t}\end{aligned}$$

entonces

$$dx = \frac{-2t\,(2t)-2\,(3-t^2)}{(2t)^2} = \frac{-2t^2-6}{4t^2} = -\left(\frac{t^2+3}{2t^2}\right)\,dt$$

Así:

$$\sqrt{x^2+3} = \frac{3-t^2}{2t}+t = \frac{3+t^2}{2t}$$

De donde la integral es:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} &= \int \frac{1}{\left(\dfrac{3+t^2}{2t}\right)}\left(-\frac{t^2+3}{2t^2}\right)dt\\ &= -\int \frac{1}{t}\,dt\\ &= -\ln|t|+C\\ &= -\ln\left|\sqrt{x^2+3}-x\right|+C.\end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$.

Solución:

Sea

$$\sqrt{x^2-x+3} = -x+t.$$

Elevando al cuadrado y despejando x tenemos:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2-x+3}\right)^2 &= (-x+t)^2\\ x^2-x+3 &= x^2-2xt+t^2\\ 2xt-x &= t^2-3\\ x &= \frac{t^2-3}{2t-1},\end{aligned}$$

entonces:

$$dx = \frac{2t\,(2t-1)-2\,(t^2-3)}{(2t-1)^2}\,dt = \frac{2t^2-2t+6}{(2t-1)^2}\,dt$$

de donde:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x+3} &= -x+t \\ &= -\frac{t^2-3}{2t-1}+t \\ &= \frac{t^2-t+3}{2t-1}.\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}} &= \int \frac{1}{\left(\frac{t^2-3}{2t-1}\right)\left(\frac{t^2-t+3}{2t-1}\right)}\left(\frac{2t^2-2t+6}{(2t-1)^2}\right)dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-3}\,dt \\ &= 2\int \frac{1}{t^2-3}\,dt.\end{aligned}$$

Para calcular esta última integral utilizaremos el método de fracciones parciales.

$$\frac{1}{t^2-3} = \frac{A}{t-\sqrt{3}} + \frac{B}{t+\sqrt{3}}$$

de donde

$$\begin{aligned}1 &= A\left(t+\sqrt{3}\right) + B\left(t-\sqrt{3}\right) \\ &= (A+B)\,t + \sqrt{3}A - \sqrt{3}B\end{aligned}$$

Si $t=\sqrt{3}$, tenemos

$$\begin{aligned}1 &= A\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} &= A.\end{aligned}$$

Si $t=-\sqrt{3}$, tenemos

$$\begin{aligned}1 &= B\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right) \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} &= B.\end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la integral:

$$\begin{aligned}2\int \frac{1}{t^2-3}\,dt &= 2\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(\int \frac{1}{t-\sqrt{3}}\,dt - \int \frac{1}{t+\sqrt{3}}\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\left|t-\sqrt{3}\right| - \ln\left|t+\sqrt{3}\right|\right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C.\end{aligned}$$