Lista de ejercicios para el segundo parcial

Rigoberto Canseco López

1.

Menciona tres cosas con ejemplos en los que se utilicen las superficies cuádricas y simetrías. Además de lo visto en clase.

2.

Para cada uno de los siguientes lugares geométricos analice las siete simetrías vistas en clase. En caso de que se cumpla alguna, demuéstrela, de lo contrario exhiba un contra ejemplo:

a) $\mathscr{G} : 2x + 3y + z = 0$

Probamos con el punto $P(1, 1, -5)$, vemos que cumple la igualdad $2(1) + 3(1) + (-5) = 0$

- **Origen:** Sea el punto $P'(-1, -1, 5)$
$$\begin{gathered} 2x + 3y + z = 0 \\ 2(-1) + 3(-1) + (5) = 0 \quad \textbf{Cumple} \end{gathered}$$
- **Eje X:** Sea el punto $P'(1, -1, 5)$
$$\begin{gathered} 2x + 3y + z = 0 \\ 2(1) + 3(-1) + (5) = 4 \quad \textbf{No cumple} \end{gathered}$$
- **Eje Y:** Sea el punto $P'(-1, 1, 5)$
$$\begin{gathered} 2x + 3y + z = 0 \\ 2(-1) + 3(1) + (5) = 6 \quad \textbf{No cumple} \end{gathered}$$
- **Eje Z:** Sea el punto $P'(-1, -1, 5)$
$$\begin{gathered} 2x + 3y + z = 0 \\ 2(-1) + 3(-1) + (-5) = -10 \quad \textbf{No cumple} \end{gathered}$$
- **Plano π_{xy}:** Sea el punto $P'(1, 1, 5)$
$$\begin{gathered} 2x + 3y + z = 0 \\ 2(1) + 3(1) + (5) = 10 \quad \textbf{No cumple} \end{gathered}$$
- **Plano π_{yz}:** Sea el punto $P'(-1, 1, -5)$
$$\begin{gathered} 2x + 3y + z = 0 \\ 2(-1) + 3(1) + (-5) = -4 \quad \textbf{No cumple} \end{gathered}$$
- **Plano π_{xz}:** Sea el punto $P'(1, -1, -5)$
$$\begin{gathered} 2x + 3y + z = 0 \\ 2(1) + 3(-1) + (-5) = -6 \quad \textbf{No cumple} \end{gathered}$$
-

---

b) $\mathscr{G} : 3x^2 - z^2 = 9$

c) $\mathscr{G} : x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 16$

d) $\mathscr{G} : x + y - z^2 = 1$

e) $\mathscr{G} : x^3 - y/2 - z^2 = 3$

3.

Pruebe que si $\ell : x-1=y-2=z+1$ y $\mathscr{G} : z^2-xy+2x+y+2z-1=0$ entonces $\ell \subseteq \mathscr{G}$.

Solución

Sea $\ell : x-1=y-2=z+1$ y $\mathscr{G} : z^2-xy+2x+y+2z-1=0$

$$\begin{aligned} \text{Factorizando} \\ z^2-xy+2x+y+2z-1=0 \\ z^2+2z+1+2x+y-xy-2=0 \\ (z+1)(z+1)+(x-1)(-y+2)=0 \\ \mathscr{G} : (z+1)^2+(x-1)(2-y)=0 \end{aligned}$$

Vemos que los puntos P_1, P_2 se encuentran en $\ell, \mathscr{G}$:

- $P_1(1,2,-1) \in \ell$

$$\begin{gathered} x-1=y-2=z+1 \\ (1)-1=(2)-2=(-1)+1 \\ 0=0=0 \end{gathered}$$

- $P_1(1,2,-1) \in \mathscr{G}$

$$\begin{gathered} (z+1)^2+(x-1)(2-y)=0 \\ ((-1)+1)^2+((1)-1)(2-(2))=0 \\ 0^2+(0)(0)=0 \end{gathered}$$

- $P_2(-1,0,-3) \in \ell$

$$\begin{gathered} x-1=y-2=z+1 \\ (-1)-1=(0)-2=(-3)+1 \\ -2=-2=-2 \end{gathered}$$

- $P_2(-1,0,-3) \in \mathscr{G}$

$$\begin{gathered} (z+1)^2+(x-1)(2-y)=0 \\ ((-3)+1)^2+((-1)-1)(2-(0))=0 \\ -2^2+(-2)(2)=0 \\ 4-4=0 \end{gathered}$$

Ahora demostramos que $\ell \subseteq \mathscr{G}$

Vemos que ℓ se en encuentra en el plano π_{xz}

$$\begin{aligned} y-2&=x-1 \\ y&=x+1 \end{aligned}$$

Sustituimos y en $\mathscr{G}$

$$\begin{gathered} \mathscr{G} : (z+1)^2+(x-1)(2-y)=0 \\ (z+1)^2+(x-1)(2-(x+1))=0 \\ (z+1)^2+(x-1)(2-x-1)=0 \\ \pi_{xz} : (z+1)^2+(x-1)(-x+1)=0 \end{gathered}$$

Probamos que los puntos se encuentren en el plano

- $P_1(1, 2, -1) \in \pi_{xy}$

$$\begin{gathered}(z+1)^2 + (x-1)(-x+1) = 0 \\ ((-1)+1)^2 + ((1)-1)(-(1)+1) = 0 \\ 0^2 + (0)(0) = 0\end{gathered}$$

- $P_2(-1, 0, -3) \in \pi_{xy}$

$$\begin{gathered}(z+1)^2 + (x-1)(-x+1) = 0 \\ ((-3)+1)^2 + ((-1)-1)(-(-1)+1) = 0 \\ -2^2 + (-2)(2) = 0 \\ 4-4=0\end{gathered}$$

Por lo tanto se cumple que $\ell \subseteq \mathscr{G}$ $\blacksquare$

4.

Considere a $\mathscr{G}$ como el hiperboloide de un manto ($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ donde a, b, c son números reales positivos). Denote como ℓ^* a la recta que pasa por ae_1 y tiene dirección $(0, b, c)$ y por m^* a la recta que pasa por $-ae_1$ y tiene dirección $(0, -b, c)$. Pruebe que los enunciados siguientes son ciertos.

a) $\ell^* \neq m^*$

Para la recta ℓ^* tenemos que pasa por el punto $ae_1(a, b, c)$ y tiene como dirección $\langle 0, b, c\rangle$, por lo tanto la recta es

$$\ell^* = a_{e1} + \lambda\langle 0, b, c\rangle = (a, b, c) + \lambda\langle 0, b, c\rangle$$
$$\text{ecuación simétrica}$$
$$\frac{y-b}{b} = \frac{z-c}{c}$$

Para la recta m^* tenemos que pasa por el punto $ae_1(-a, b, c)$ y tiene como dirección $\langle 0, -b, c\rangle$, por lo tanto la recta es

$$m^* = -a_{e1} + \lambda\langle 0, b, c\rangle = (-a, b, c) + \lambda\langle 0, -b, c\rangle$$
$$\text{ecuación simétrica}$$
$$-\frac{y-b}{b} = \frac{z-c}{c}$$

Por lo tanto ℓ^*, m^* son diferentes

b) $\ell^* \subseteq \mathscr{G}^*$

Vemos que los puntos P_1, P_2 se encuentran en $\ell, \mathscr{G}$:

- $P_1(a, b, c) \in \ell$

$$\frac{y-b}{b} = \frac{z-c}{c}$$
$$\frac{b-b}{b} = \frac{c-c}{c}$$
$$0 = 0$$

- $P_1(a, b, c) \in \mathscr{G}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$
$$\frac{a^2}{a^2}+\frac{b^2}{b^2}-\frac{c^2}{c^2}=1$$
$$1 + \cancel{1-1} = 1$$

- $P_2(a, -b, -c) \in \ell$

$$\frac{y-b}{b} = \frac{z-c}{c}$$
$$\frac{-b-b}{b} = \frac{-c-c}{c}$$
$$\frac{-2\cancel{b}}{\cancel{b}} = \frac{-2\cancel{c}}{\cancel{c}}$$

- $P_1(a, -b, -c) \in \mathscr{G}$

$$
\begin{gathered}
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\
\frac{a^2}{a^2}+\frac{(-b)^2}{b^2}-\frac{(-c)^2}{c^2}=1 \\
1+\cancel{1-1}=1
\end{gathered}
$$

Ahora demostramos que $\ell \subseteq \mathscr{G}$

Vemos que ℓ se en encuentra en el plano π_{yz}

$$
\begin{gathered}
\frac{y-b}{b}=\frac{z-c}{c} \\
y=b\left(\frac{z-c}{c}+1\right)
\end{gathered}
$$

Sustituimos y en $\mathscr{G}$

$$
\begin{gathered}
\mathscr{G}: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{(b\left(\frac{z-c}{c}+1\right))^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{\cancel{b^2}\left(\frac{z-c}{c}+1\right)^2}{\cancel{b^2}}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\
\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{z-c}{c}+1\right)^2-\frac{z^2}{c^2}=1 \\
\pi_{yz}: \frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{z-c}{c}+1\right)^2-\frac{z^2}{c^2}=1
\end{gathered}
$$

Probamos que los puntos se encuentren en el plano

- $P_1(a,b,c) \in \pi_{yz}$

$$
\begin{gathered}
\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{z-c}{c}+1\right)^2-\frac{z^2}{c^2}=1 \\
\frac{a^2}{a^2}+\left(\frac{c-c}{c}+1\right)^2-\frac{c^2}{c^2}=1 \\
1+(0+1)^2-1=1 \\
1=1
\end{gathered}
$$

- $P_2(a,-b,-c) \in \pi_{yz}$

$$
\begin{gathered}
\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{z-c}{c}+1\right)^2-\frac{z^2}{c^2}=1 \\
\frac{a^2}{a^2}+\left(\frac{-c-c}{c}+1\right)^2-\frac{(-c)^2}{c^2}=1 \\
1+\left(\frac{-2c}{c}+1\right)^2-1=1 \\
1+(-1)^2-1=1 \\
1=1
\end{gathered}
$$

Por lo tanto se cumple que $\ell \subseteq \mathscr{G}$

c) $m^* \subseteq \mathscr{G}^*$

Vemos que los puntos P_1, P_2 se encuentran en $m^*, \mathscr{G}$:

- $P_1(-a,b,-c) \in \ell$

$$\begin{gathered}\frac{-y-b}{b}=\frac{z-c}{c}\\ \frac{-b-b}{b}=\frac{-c-c}{c}\\ \frac{-2\cancel{b}}{\cancel{b}}=\frac{-2\cancel{c}}{\cancel{c}}\\ -2=-2\end{gathered}$$

- $P_1(-a,b,-c)\in\mathscr{G}$

$$\begin{gathered}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ \frac{(-a)^2}{a^2}+\frac{b^2}{b^2}-\frac{(-c)^2}{c^2}=1\\ 1+\cancel{1-1}=1\end{gathered}$$

- $P_2(-a,-b,c)\in\ell$

$$\begin{gathered}\frac{-y-b}{b}=\frac{z-c}{c}\\ \frac{-(-b)-b}{b}=\frac{c-c}{c}\\ 0=0\end{gathered}$$

- $P_1(-a,-b,c)\in\mathscr{G}$

$$\begin{gathered}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ \frac{(-a)^2}{a^2}+\frac{(-b)^2}{b^2}-\frac{(-c)^2}{c^2}=1\\ 1+\cancel{1-1}=1\end{gathered}$$

Ahora demostramos que $\ell\subseteq\mathscr{G}$

Vemos que ℓ se en encuentra en el plano π_{yz}

$$\begin{gathered}\frac{-y-b}{b}=\frac{z-c}{c}\\ y=-b\big(\frac{z-c}{c}+1\big)\end{gathered}$$

Sustituimos y en $\mathscr{G}$

$$\begin{gathered}\mathscr{G}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{(-b\big(\frac{z-c}{c}+1\big))^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{\cancel{b^2}\big(\frac{z-c}{c}+1\big)^2}{\cancel{b^2}}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ \frac{x^2}{a^2}+\big(\frac{z-c}{c}+1\big)^2-\frac{z^2}{c^2}=1\\ \pi_{yz}:\frac{x^2}{a^2}+\big(\frac{z-c}{c}+1\big)^2-\frac{z^2}{c^2}=1\end{gathered}$$

Probamos que los puntos se encuentren en el plano

- $P_1(-a,b,c)\in\pi_{yz}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{z-c}{c} + 1\right)^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$\frac{(-a)^2}{a^2} + \left(\frac{c-c}{c} + 1\right)^2 - \frac{c^2}{c^2} = 1$$
$$1 + (0+1)^2 - 1 = 1$$
$$1 = 1$$

- $P_2(-a, -b, -c) \in \pi_{yz}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{z-c}{c} + 1\right)^2 - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$\frac{(-a)^2}{a^2} + \left(\frac{(-c)-c}{c} + 1\right)^2 - \frac{(-c)^2}{c^2} = 1$$
$$1 + \left(\frac{-2c}{c} + 1\right)^2 - 1 = 1$$
$$1 + -1^2 - 1 = 1$$
$$1 = 1$$

Por lo tanto se cumple que $\ell \subseteq \mathscr{G}$

5.

Considere el *paraboloide hiperbólico* $(\mathscr{G} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz)$**. Demuestre que hay una recta** $\ell_* \subseteq \mathscr{G}$ **tomando en cuenta los siguientes planos:**

$$\pi_h^0 := \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = h \quad \pi_h^1 := h\Big(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\Big) = cz$$

Es decir:

i) Prueba que $\forall h \in \mathbb{R}, \ell_k \subseteq \mathscr{G}$

El vector normal de π_h^0 es $u = \langle 1/a, -1/b, 0\rangle$ y el vector normal de π_h^1 es $v = \langle h/a, h/b, -c\rangle$ y podemos ver que no son paralelos, por lo tanto la $\pi_h^0 \cap \pi_h^1$ es una linea recta ℓ_k que depende de h

Vamos a demostrar que $\ell_k \subseteq \pi_h^0$ y $\ell_k \subseteq \pi_h^1$

$$\begin{aligned}(\pi_h^0)(\pi_h^1) &= h\Big(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\Big)\Big(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\Big) = hcz \\ &= \Big(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\Big)\Big(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\Big) = cz \\ &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz\end{aligned}$$

La última ecuación coincide con la ecuación de $\mathscr{G}$, por lo tanto ℓ_k queda contenida en $\mathscr{G}$.

ii) Prueba que $\forall P \in \mathscr{G}\ \exists r \in \mathbb{R}$ **tal que** $P \in \ell_r \subseteq \mathscr{G}$

Tenemos que el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y los plano π_r^0, π_r^1 , sabemos que $\pi_r^0 \cap \pi_r^1$ es una linea recta ℓ_r nuestros planos son:

$$\begin{aligned}\pi_r^0 &:= \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} = r \\ \pi_r^1 &:= r\Big(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\Big) = cz_0\end{aligned}$$

Donde $P \in \ell_r$ y también sabemos que $\ell_r \subseteq \mathscr{G}$ por el inciso anterior. La ℓ_r es normal al plano π_r^0 y normal al plano π_r^1 por lo que necesitamos que el vector director sea normal a los planos, por lo que hacemos el producto cruz de los vectores u y v. $u = \langle 1/a, -1/b, 0\rangle$ y $v = \langle h/a, h/b, -c\rangle$

```
In[13]:= (1/a,-1/b,0)×(h/a,h/b,-c)
         Cross[{1/a, -b^(-1), 0}, {h/a, h/b, -c}]
```

Out[13]= $\left\{\frac{c}{b}, \frac{c}{a}, \frac{2\,h}{a\,b}\right\}$

$$\begin{aligned}u \times v &= \langle \frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, 0\rangle \times \langle \frac{h}{a}, \frac{h}{b}, -c\rangle \\ &= \langle \frac{c}{b}, \frac{c}{a}, \frac{2h}{ab}\rangle\end{aligned}$$

6.

Demuestre que el cono cuadrático ($\mathscr{K} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ **donde** a, b, c **son números reales positivos) es superficie reglada.**

7.

Demuestre que el *paraboloide hiperbólico* ($\mathscr{G}: x^2 - y^2 = z$) es una superficie doblemente reglada

Dado el paraboloide hiperbólico en posición canónica $x^2 - y^2 = z$, podemos factorizar como una diferencia de cuadrados

$$\begin{gathered} x^2 - y^2 = z \\ (x+y)(x-y) = z \end{gathered}$$

Multiplicamos el lado derecho de la igualdad por $1/k, k$, donde $k \neq 0$

$$(x+y)(x-y) = (kz)(\frac{1}{k})$$

Ahora se forma un sistema de ecuaciones

$$L_{13} : x + y = kz \quad L_{24} : x - y = \frac{1}{k} \tag{1}$$

$$L_{14} : x - y = kz \quad L_{23} : x + y = \frac{1}{k} \tag{2}$$

Para las ecuaciones (1)

Las ecuaciones son lineales, y por tanto corresponde a planos. La ecuación general del plano es $Ax + By + Cz + D = 0$.
El vector normal de L_{13} es $u = \langle 1, 1, -k \rangle$. El vector normal de L_{24} es $v = \langle 1, -1, 0 \rangle$.

Hacemos el producto cruz de los vectores $u = \langle 1, 1, -k \rangle$ y $v = \langle 1, -1, 0 \rangle$ para obtener el vector de dirección de la las rectas $L_{13} \cap L_{24}$
Usando Wolfram.

```
In[14]:=  (1,1,-k)×(1,-1,0)
          Cross[{1, 1, -k}, {1, -1, 0}]

Out[14]=  {-k, -k, -2}
```

$$= \langle -k, -k, -2 \rangle \tag{3}$$

Buscamos un punto que satisfaga la ecuación $L_{13} : x + y = kz$.
Tomamos el punto $P(0, 1, -1)$ y lo sustituimos en la ecuación L_{13} para obtener el valor de k

$$\begin{gathered} x + y = kz \\ 0 + 1 = k(-1) \\ k = -1 \end{gathered}$$

Sustituimos el valor de k en (3), tenemos que vector de dirección es $\langle 1, 1, -2 \rangle$
Tenemos que la primer recta que contienen al punto $P(0, 1, -1)$ es

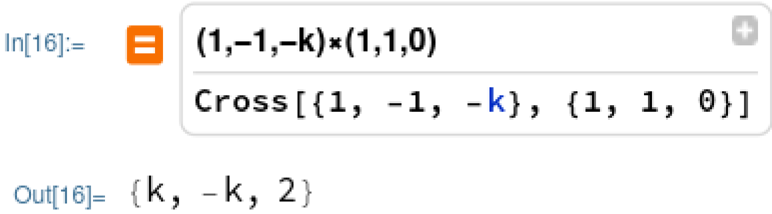
$$(x, y, z) = (0, 1, -1) + \lambda \langle 1, 1, -2 \rangle \tag{Primer recta}$$

Por lo tanto todos los puntos de esa recta también satisfacen la ecuación del paraboloide hiperbólico, es decir la recta está contenida en la superficie.

Para las ecuaciones (2)

Las ecuaciones son lineales, y por tanto corresponde a planos. La ecuación general del plano es $Ax + By + Cz + D = 0$.
El vector normal de L_{14} es $u = \langle 1, -1, -k \rangle$. El vector normal de L_{23} es $v = \langle 1, 1, 0 \rangle$.

Hacemos el producto cruz de los vectores $u = \langle 1, -1, -k \rangle$ y $v = \langle 1, 1, 0 \rangle$ para obtener el vector de dirección de la las rectas $L_{14} \cap L_{23}$
Usando Wolfram



$$= \langle k, -k, 2 \rangle \tag{4}$$

Tomamos el punto $P(0, 1, -1)$ y lo sustituimos en la ecuación $L_{14} : x - y = kz$. para obtener el valor de k

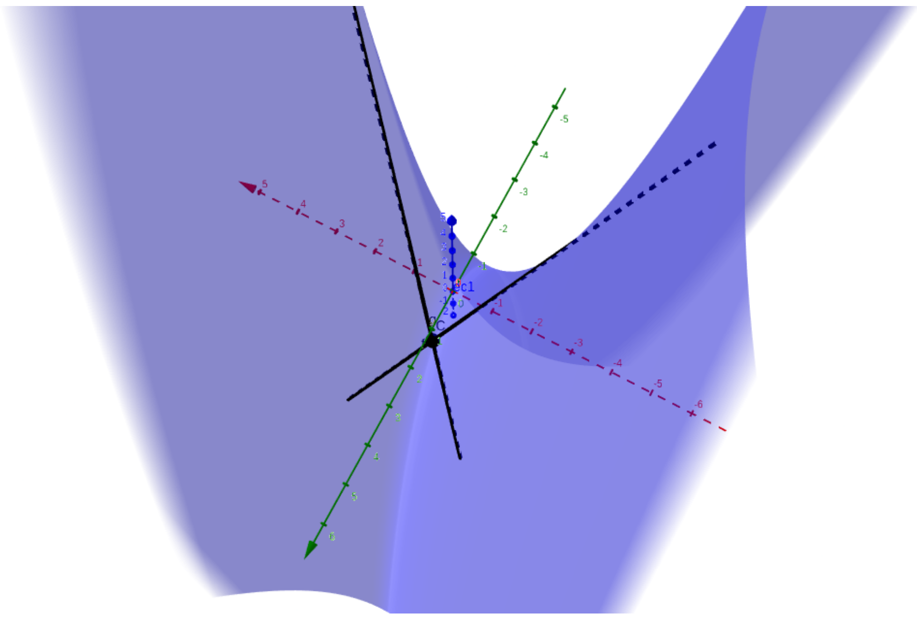
$$\begin{gathered} x - y = kz \\ 0 - 1 = k(-1) \\ k = 1 \end{gathered}$$

Sustituimos el valor de k en (4), tenemos que vector de dirección es $\langle 1, -1, 2 \rangle$
Tenemos que la primer familia de rectas que contienen al punto $P(0, 1, -1)$ es

$$(x, y, z) = (0, 1, -1) + \lambda \langle 1, -1, 2 \rangle \tag{Segunda recta}$$

Por lo tanto todos los puntos de esa recta también satisfacen la ecuación del paraboloide hiperbólico, es decir la recta está contenida en la superficie.

Por lo tanto se demuestra que el *paraboloide hiperbólico* ($\mathscr{G} : x^2 - y^2 = z$) es una superficie doblemente reglada $\blacksquare$



8.