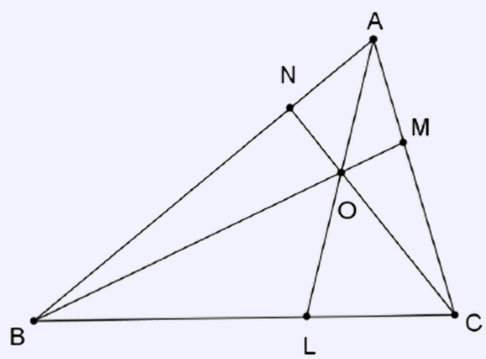
Teorema de Ceva. Teorema de Menelao.

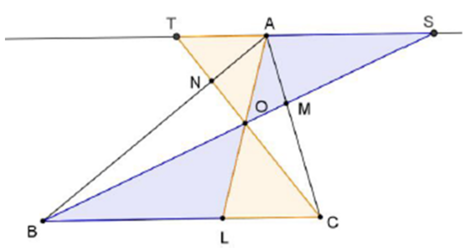
Los teoremas de Ceva y Menelao son herramientas que permiten trabajar muchos problemas en los que intervienen la colinealidad de puntos y la concurrencia de rectas. Ambos están estrechamente relacionados, aun cuando el de Menelao es del siglo primero y el de Ceva del siglo XVII.
Una recta que pasa por un vértice de un triángulo pero que no coincide con ningún lado, se llama usualmente **recta ceviana** del triángulo.
Un punto que esté en un lado de un triángulo, pero que no coincida con ningún vértice, se llama usualmente **punto de Menelao** del triángulo para dicho lado.

Teorema 1. *Teorema de Ceva*
Tres cevianas AL, BM y CN de un triángulo ABC son concurrentes en el punto O si y sólo si:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$



Demostración. Se traza por A una paralela a BC. Sean S y T las intersecciones de BM y CN con esta paralela, respectivamente.



Se tiene que

$$\triangle\ BLO \sim \triangle\ SAO$$

, por lo que

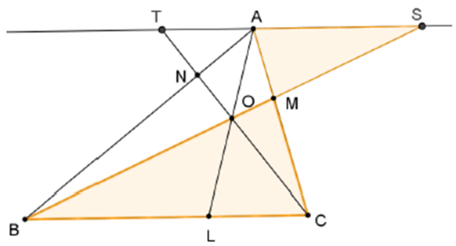
$$\frac{BL}{LO} = \frac{SA}{AO} \tag{1}$$

$$\triangle\ OLC \sim \triangle\ OAT$$

, por lo que

$$\frac{OL}{LC} = \frac{OA}{AT} \tag{2}$$

Por otro lado



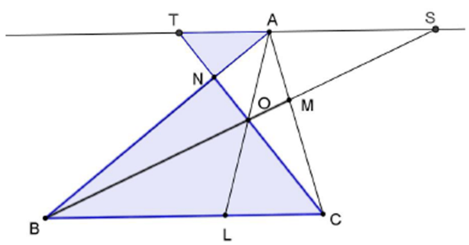
Se tiene que

$$\triangle\, CMB \sim \triangle\, AMS$$

, por lo que

$$\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{SA} \tag{3}$$

finalmente



Se tiene que

$$\triangle\, ANT \sim \triangle\, BNC$$

, por lo que

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AT}{BC} \tag{4}$$

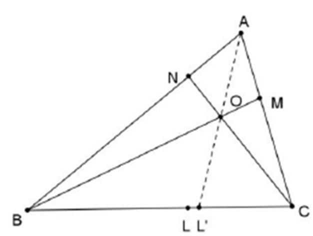
Multiplicando (1), (2), (3) y (4), se obtiene:

$$\frac{BL}{LO} \cdot \frac{OL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{SA}{AO} \cdot \frac{AO}{AT} \cdot \frac{BC}{SA} \cdot \frac{AT}{BC}$$

por lo tanto

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Inversamente, supóngase que L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC y que la relación anterior se satisface. Sea O el punto de intersección de BM y CN. Se traza la recta AO. Sea L' el punto de intersección de AO con BC. Por el teorema de Ceva:



$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

por tanto

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 = \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA}$$

de donde

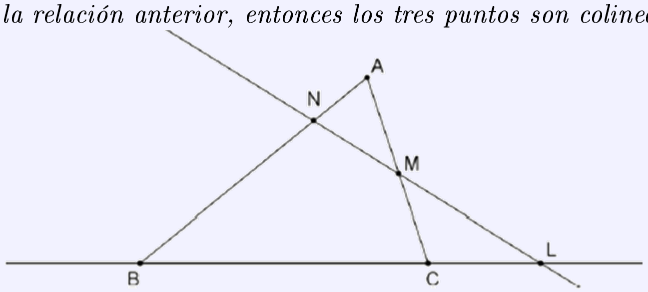
$$\frac{BL'}{L'C} = \frac{BL}{LC}$$

y por tanto $L = L'$ $\square$

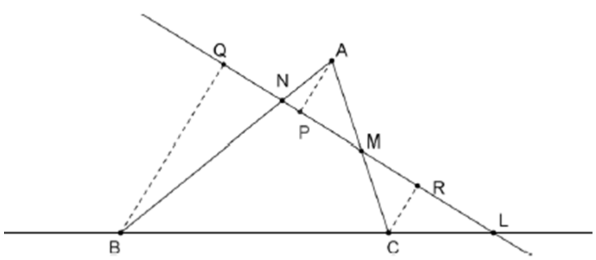
Teorema 2. *(Teorema de Menelao) Si una recta interseca los tres lados BC, CA y AB del triángulo ABC en los puntos L, M y N respectivamente, entonces:*

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

e inversamente si L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, para los cuales se cumple la relación anterior, entonces los tres puntos son colineales.



Demostración. Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares desde A, B y C a la recta determinada por L, M y N.



Se tiene $\triangle\, ANO \sim \triangle\, BNQ$

$$\frac{AN}{NB} = \frac{PA}{BQ} \tag{5}$$

Se tiene $\triangle\, BLQ \sim \triangle\, CLR$

$$\frac{BL}{LC} = \frac{QB}{CR} \tag{6}$$

Se tiene $\triangle\, CMR \sim \triangle\, AMP$

$$\frac{CM}{MA} = \frac{RC}{AP} \tag{7}$$

Multiplicando (5), (6) y (7), se obtiene:

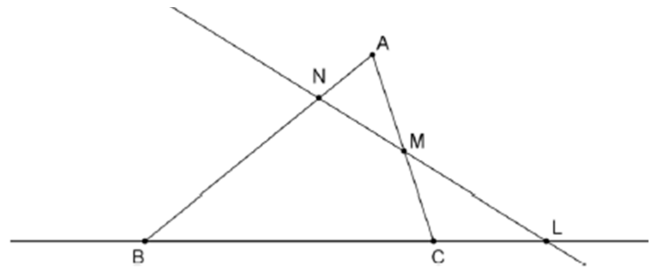
$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{PA}{BQ} \cdot \frac{QB}{CR} \cdot \frac{RC}{AP} = -1$$

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

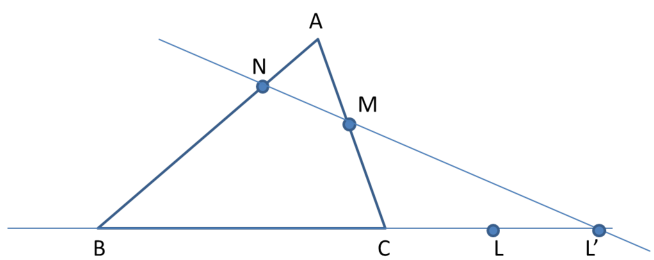
Inversamente Supongamos que si L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, para los cuales se cumple la relación anterior,

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

entonces los tres puntos son colineales.



Dado un triángulo ABC y dos puntos N,M en los lados AB y AC respectivamente, ahora unimos con una recta los puntos N y M



y al punto de intersección con BC lo llamamos L'.
Se tiene entonces por Menelao que

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

y por hipótesis

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

de manera que

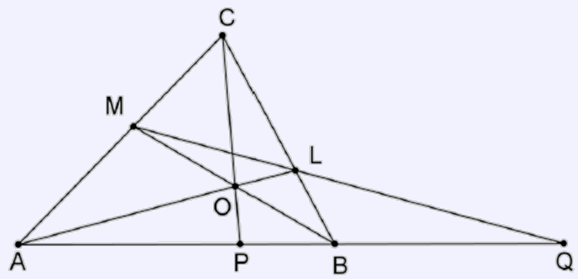
$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1 = \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA}$$

se tiene entonces que

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BL'}{L'C}$$

y consecuentemente $L = L'$ y entonces los tres puntos son colineales □

Teorema 3. (*Teorema de la división interna y externa*) *Si P, L y M son puntos respectivamente en los lados AB, BC y CA del triángulo ABC, tales que AL, BM y CP son concurrentes y si la recta LM interseca AB en Q, entonces los puntos P y Q son conjugados armónicos con respecto al segmento AB.*



Demostración. Ya que AL, BM y CP son concurrentes, por el teorema de Ceva se tiene que,

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Ya que L, M y Q son colineales, por el teorema de Menelao se tiene que,

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

Se tiene entonces que,

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$$

por lo que P y Q son conjugados armónicos respecto del segmento AB. $\square$