UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Grupo: 4094

Álgebra Superior II

1er Examen parcial

Recuerda escribir en tu resolución: Fecha, Nombre y No. de Cuenta

1. Sea X un conjunto no vacío. ¿Son grupos los siguientes? Justifica.

   a) $\mathcal{P}(X)$ con la unión

   b) $\mathcal{P}(X)$ con la intersección

   c) $\mathbb{Z}$ con la operación $a * b = a + b - ab$

   d) $\mathbb{Z}$ con la operación $a * b = ab + 1$

   e) $\mathbb{Z}$ con la operación $a * b = a + b - 1$

2. Sean $\langle G_1, *_1\rangle$ y $\langle G_2, *_2\rangle$ grupos, $G = G_1 \times G_2$ y la operación * definida como

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 *_1 a_2, b_1 *_2 b_2)$$

   ¿G es grupo? Justifica tu respuesta.

3. Sea G tal que todo elemento es su propio inverso. Demuestra que G es abeliano.

4. Sea G un grupo, y sean $a, b \in G$ tales que $(ab)^2 = a^2b^2$. Demuestra que G es abeliano.

5. Sea G un grupo y sea $a \in G$. El **normalizador** de G es el conjunto:

$$N(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$$

   Demuestra que el conjunto $N(a)$ es un subgrupo de G.

Definición. Una función, f entre dos grupos G, H es un *homomorfismo* si

$$f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$$

es decir, si la función preserva las operaciones respectivas. Un homomorfismo biyectivo, se llama *isomorfismo.*

6. Sea G un grupo. Demuestra que la función $f : G \to G$ definida por $f(a) = a^2$ es un homomorfismo si y solo si G es abeliano.

1. Sea $A = \mathbb{Z}$ con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas como:

$$a \oplus b = a + b - 1 \text{ y } a \odot b = a + b - ab$$

   $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ¿Es un anillo?, si tu respuesta es afirmativa ¿es conmutativo? ¿tiene elemento unitario?

2. Sea X un conjunto arbitrario pero fijo, y sea $A = \mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia de X con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas como:

$$V \oplus W = V \cup W - V \cap W \text{ y } V \odot W = V \cap W$$

   $(A, \oplus, \odot)$ ¿Es un anillo? (puedes suponer que unión e intersección son asociativas), si tu respuesta es afirmativa ¿es conmutativo? ¿tiene elemento unitario?

3. Sea $A = \mathbb{Z}$ con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas como:

$$a \oplus b = a + b - 7 \text{ y } a \odot b = a + b - 3ab$$

   $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ ¿Es un anillo?, si tu respuesta es afirmativa ¿es conmutativo? ¿tiene elemento unitario?

4. Sea A un anillo con elemento unitario. Una **unidad en** A es un elemento que tiene inverso multiplicativo. Demuestra que si a, b son unidades en A, entonces ab también es una unidad en A.