Ejercicios de inducción matemática

Rigoberto Canseco

October 14, 2020

Principio de inducción matemático, PI

Sea $P(n)$ un enunciado en el dominio de los números naturales.
i. $P(0)$ es verdadera y
ii. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ es verdadera, entonces $P(n+1)$ es verdadera

Entonces $P(n)$ es verdadera parar todo $n \in \mathbb{N}$

Principio de inducción fuerte(completo), PIF

Sea $P(n)$ un enunciado en el dominio de los números naturales.
i. $P(0)$ es verdadera y
ii. Para todo $n \in \mathbb{N}$, Si $P(1), ..., P(n-1), P(n)$ son todas verdaderas, entonces $P(n+1)$ es verdadera

Entonces $P(n)$ es verdadera parar todo $n \in \mathbb{N}$

PIC $\Rightarrow$ PI

El principio de inducción completo implica el principio de inducción

El enunciado C se deduce a partir del enunciado A, y esto a su vez puede deducir al enunciado C a partir del enunciado A con alguna otra hipótesis adicional B.

$$(A \Rightarrow C) \Rightarrow (AB \Rightarrow C) \equiv \text{Tautología}$$

Donde

$$A = P(n), \quad B = P(0)P(1)...P(n-1) \quad \text{y} \quad C = P(n+1)$$

Es decir, se puede usar el PI para demostrar PIC. Supongamos que asumimos como cierto el PI y queremos demostrar PIC.

Sea $P(n) \in \mathbb{N}$ que satisface *(i)* y *(ii)*.

Queremos demostrar que $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$, usando solo PI.

Para esto creamos otro enunciado $Q(n)$ tal que

$$Q(n) = P(0)P(1)...P(n)$$

Tenemos que $Q(1) = P(1)$ y por *(ii)*

$$Q(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Pero sabemos que

$$Q(n) = P(1)P(2)...P(n)$$

y también conocemos $P(n+1)$

Entonces conocemos

$$P(1)P(2)...P(n)P(n+1) = Q(n+1)$$

Entonces $Q(1)$ se cumple y para todo n, $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$

Entonce por el principio de inducción, $Q(n)$ se cumple para toda n por tanto, $P(n)$ se cumple para todo n