Conjuntos y lógica

Rigoberto Canseco López

1. Para los siguientes conjuntos de proposiciones, considera la interpretación de las variables proposicionales sugerida y traduce al lenguaje formal de la lógica proposicional.

Ejercicio 1

Si Argentina o Brasil se incorpora a la alianza entonces si o Chile o Ecuador la boicotea entonces, aunque Perú no la boicotee, Venezuela la boicotea. Si o Perú o Nicaragua no la boicotea entonces Uruguay se incorpora a la alianza. **Por lo tanto**, si Argentina se incorpora a la alianza entonces si Chile la boicotea entonces Uruguay se incorpora a la alianza.

- $p_0 :=$ Argentina se incorpora a la alianza
- $p_1 :=$ Brasil se incorpora a la alianza
- $p_2 :=$ Chile boicotea la alianza
- $p_3 :=$ Ecuador boicotea la alianza
- $p_4 :=$ Perú boicotea la alianza
- $p_5 :=$ Venezuela boicotea la alianza
- $p_6 :=$ Nicaragua boicotea la alianza
- $p_7 :=$ Uruguay se incorpora a la alianza

$$\Big(\big((p_0 \vee p_1) \to \big((p_2 \vee p_3) \to (\neg p_4 \to p_5)\big)\big) \wedge \big(\neg(p_4 \vee p_6) \to p_7\big)\Big) \to \Big(p_0 \to (p_2 \to p_7)\Big) \quad \blacksquare$$

Ejercicio 2

Si te inscribes en el curso y estudias duro entonces pasarás, pero si te inscribes en el curso y no estudias duro, entonces no pasaras. **Por lo tanto**, si te inscribes en el curso entonces o estudias duro y pasarás o no estudias duro y no pasarás.

- $p_0 :=$ Te inscribes en el curso
- $p_1 :=$ Estudias duro
- $p_2 :=$ Pasarás el curso

$$\big(((p_0 \wedge p_1) \to p_2) \wedge ((p_0 \wedge \neg p_1) \to \neg p_2)\big) \to \big(p_0 \to ((p_1 \wedge p_2) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2))\big) \quad \blacksquare$$

---

2. Para cada inciso del ejercicio anterior, determina si el conjunto de fórmulas que antecede al "Por lo tanto" implica lógicamente a la fórmula que le precede.

Ejercicio 1

Tenemos la siguiente fórmula

$$\underbrace{\Big(\Big((p_0 \vee p_1) \rightarrow \big((p_2 \vee p_3) \rightarrow (\neg p_4 \rightarrow p_5)\big)\Big) \wedge \Big(\neg(p_4 \vee p_6) \rightarrow p_7\Big)\Big)}_{\text{antecedente}} \rightarrow \underbrace{\Big(p_0 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_7)\Big)}_{\text{consecuente}}$$

Reemplazamos las implicaciones $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$

$$((\neg(p_0 \vee p_1) \vee (\neg(p_2 \vee p_3) \vee (p_4 \vee p_5))) \wedge ((p_4 \vee p_6) \vee p_7)) \rightarrow (\neg p_0 \vee (\neg p_2 \vee p_7))$$

Reemplazamos $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ y $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

$$((\neg p_0 \wedge \neg p_1 \vee ((\neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee p_4 \vee p_5)) \wedge (p_4 \vee p_6 \vee p_7)) \rightarrow (\neg p_0 \vee \neg p_2 \vee p_7)$$

Separamos la implicación

Antecedente: $(\neg p_0 \wedge \neg p_1 \vee ((\neg p_2 \wedge \neg p_3) \vee p_4 \vee p_5)) \wedge (p_4 \vee p_6 \vee p_7)$
Consecuente: $\neg p_0 \vee \neg p_2 \vee p_7$

Negamos el consecuente y afirmamos el antecedente para llegar a una contradicción

$$\neg p_0 \vee \neg p_2 \vee p_7 = \bot \quad \text{Por lo tanto } p_0 = \top, p_2 = \top, p_7 = \bot$$

Reemplazamos los valores de p_0, p_2, p_7 en el antecedente y lo simplificamos

$$(\neg(T) \wedge \neg p_1 \vee ((\neg(T) \wedge \neg p_3) \vee p_4 \vee p_5)) \wedge (p_4 \vee p_6 \vee (F))$$
$$(F \wedge \neg p_1 \vee ((F \wedge \neg p_3) \vee p_4 \vee p_5)) \wedge (p_4 \vee p_6 \vee F)$$
$$(F \wedge \neg p_1 \vee (F \vee p_4 \vee p_5)) \wedge (p_4 \vee p_6 \vee F)$$
$$(F \vee (F \vee p_4 \vee p_5)) \wedge (p_4 \vee p_6 \vee F)$$
$$(F \vee p_4 \vee p_5) \wedge (p_4 \vee p_6 \vee F)$$
$$(p_4 \vee p_5) \wedge (p_4 \vee p_6)$$

Realizamos la tabla de verdad para $(p_4 \vee p_5) \wedge (p_4 \vee p_6)$

p_4	p_5	p_6	$(p_4 \vee p_5) \wedge (p_4 \vee p_6)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Por lo tanto el antecedente es verdadero cuando $p_4 \vee (p_5 \wedge p_6) = \top$, y como el antecedente es cierto y el consecuente $\neg p_0 \vee \neg p_2 \vee p_7$ es falso la implicación es una contradicción. ∎

Ejercicio 2

Tenemos la siguiente fórmula

$$\underbrace{\Big(\big((p_0 \land p_1) \to p_2\big) \land \big((p_0 \land \neg p_1) \to \neg p_2\big)\Big)}_{\text{antecedente}} \to \underbrace{\Big(p_0 \to \big((p_1 \land p_2) \lor (\neg p_1 \land \neg p_2)\big)\Big)}_{\text{consecuente}}$$

Antecedente: $((p_0 \land p_1) \to p_2) \land ((p_0 \land \neg p_1) \to \neg p_2)$

Consecuente: $p_0 \to ((p_1 \land p_2) \lor (\neg p_1 \land \neg p_2))$

Negamos el consecuente y buscamos que el antecedente sea una tautología para llegar a una contradicción

$$p_0 \to ((p_1 \land p_2) \lor (\neg p_1 \land \neg p_2)) \equiv \bot$$
$$p_0 = \bot, \quad p_1 = \top, \quad p_2 = \top$$

Reemplazamos los valores de p_0, p_1, p_2 en el antecedente y lo simplificamos

$$((\bot \land \top) \to \top) \land ((\bot \land \neg\top) \to \neg\top)$$
$$(\bot \to \top) \land (\bot \to \neg\top)$$
$$\top \land (\bot \to \bot)$$
$$\top \land \top$$
$$\top$$

Tenemos que el antecedente es Tautología y el consecuente es una contradicción, por lo tanto no se cumple la implicación. ■

---

3. Paréntesis

Elimina tantos paréntesis como sea posible

Solución

$$
\begin{gathered}
(p_0 \to \neg p_7) \land p_5 \\
p_0 \leftrightarrow p1 \leftrightarrow \neg(p_5 \lor p_6) \\
p_1 \land \neg p_0 \lor p5 \land p1
\end{gathered}
$$

Restaura los paréntesis de las siguientes fórmulas

Solución

$$
\begin{gathered}
p_0 \lor (\neg p_1 \land p_5) \\
p_5 \to \neg(\neg(\neg p_1 \land p_0)) \\
(p_0 \to (\neg((p_5 \land p_1) \to p_0) \land p_5)) \leftrightarrow p1
\end{gathered}
$$

---

4. Para las siguientes fórmulas ofrece una fórmula equivalente en la que la negación afecte sólo a variables proposicionales, simplificando la fórmula dada a su expresión más simple.

$$\neg\big((p_0 \lor p_1) \land p_5 \leftrightarrow \neg p_6 \to p_5\big)$$
$$(((p_0 \lor p_1) \land p_5) \leftrightarrow (\neg p_6 \to p_5))$$
$$(\neg((p_0 \lor p_1) \land p_5) \land (\neg p_6 \to p_5)) \lor (((p_0 \lor p_1) \land p_5) \land \neg(\neg p_6 \to p_5))$$
$$(((\neg p_0 \land p_1) \lor \neg p_5) \land (\neg p_6 \to p_5)) \lor (((p_0 \lor p_1) \land p_5) \land (\neg p_6 \land \neg p_5))$$
$$\Big(((\neg p_0 \land \neg p_1) \lor \neg p_5) \land (\neg p_6 \to p_5)\Big) \lor \Big(((p_0 \lor p_1) \land p_5) \land (\neg p_6 \land \neg p_5)\Big) \quad \blacksquare$$

$$\neg(p_6 \leftrightarrow p_7 \land p_8 \lor \neg(p_9 \land \neg p_6 \to p_8))$$
$$\neg(((p_6 \leftrightarrow p_7) \land p_8) \lor \neg((p_9 \land \neg p_6) \to p_8))$$
$$\neg((p_6 \leftrightarrow p_7) \land p_8) \land \neg((p_9 \land \neg p_6) \to p_8)$$
$$(\neg(p_6 \leftrightarrow p_7) \lor \neg p_8) \land ((p_9 \land \neg p_6) \to p_8)$$
$$\big((\neg p_6 \land p_7) \lor (p_6 \land \neg p_7) \lor \neg p_8\big) \land \big((p_9 \land \neg p_6) \to p_8\big) \quad \blacksquare$$

$$\neg(p_5 \to p_7 \lor p_2 \leftrightarrow p_9 \land p_2 \lor p_7 \to p_8)$$
$$\neg((p_5 \to (p_7 \lor p_2)) \leftrightarrow (((p_9 \land p_2) \lor p_7) \to p_8)$$
$$\neg((p_5 \to (p_7 \lor p_2)) \leftrightarrow (((p_9 \land p_2) \lor p_7) \to p_8))$$
$$(\neg(p_5 \to (p_7 \lor p_2)) \land (((p_9 \land p_2) \lor p_7) \to p_8)) \lor ((p_5 \to (p_7 \lor p_2)) \land \neg(((p_9 \land p_2) \lor p_7) \to p_8))$$
$$((p_5 \land \neg(p_7 \lor p_2)) \land (((p_9 \land p_2) \lor p_7) \to p_8)) \lor ((p_5 \to (p_7 \lor p_2)) \land \neg((p_9 \land p_2) \lor p_7) \lor p_8)$$
$$((p_5 \land \neg p_7 \land \neg p_2) \land (((p_9 \land p_2) \lor p_7) \to p_8)) \lor ((p_5 \to (p_7 \lor p_2)) \land (\neg(p_9 \land p_2) \land \neg p_7) \lor p_8)$$
$$\Big((p_5 \land \neg p_7 \land \neg p_2) \land \Big(((p_9 \land p_2) \lor p_7) \to p_8\Big)\Big) \lor \Big((p_5 \to (p_7 \lor p_2)) \land ((\neg p_9 \lor \neg p_2) \land \neg p_7) \lor p_8\Big) \quad \blacksquare$$

---

5. Recuerde la definición de fórmula de primer orden vista en clase (puede consultarla al final de esta tarea). Proponga un lenguaje de primer orden y con él realice lo siguiente.

- Dé tres ejemplos de una fórmula en donde use al menos un cuantificador y al menos tres conectivos

$$\begin{gathered}
f_0^1(x) := x \text{ es ave} \\
f_2^1(x) := x \text{ puede volar} \\
f_3^1(x) := x \text{ tiene plumas} \\
f_4^1(x) := x \text{ es ovíparo} \\
f_5^1(x) := x \text{ es omnívoro} \\
f_6^1(x) := x \text{ tiene pico} \\
f_7^1(x) := x \text{ es terrestre} \\
f_8^1(x) := x \text{ puede nadar} \\
f_9^1(x) := x \text{ es acuático}
\end{gathered}$$

  Existe un animal que es un ave terrestre tiene plumas pero no puede volar.

$$\exists x\ (f_0^1(x) \wedge f_7^1(x) \wedge f_3^1(x) \wedge \neg f_2^1(x))$$

  Un animal es un ave si y sólo si es ovíparo tiene pico y plumas.

$$\forall x f_0^1(x) \leftrightarrow (f_4^1(x) \wedge f_6^1(x) \wedge f_3^1(x))$$

  Todas las aves o son acuáticas o terrestres si es acuática entonces puede nadar.

$$\forall x f_0^1(x) \wedge (f_9^1(x) \vee f_7^1(x)) \wedge (f_9^1(x) \rightarrow f_2^1(x))$$

- Dé dos ejemplos de una expresión que no es fórmula de primer orden

$$\text{L}os\ f_0^1(x) = \text{ vuelan}$$

$$¿\exists x, f_0^1(x) \neg f_1^1(x)?$$

---

6. En las siguientes fórmulas $A_1^1(x)$ significa x es una persona, $A_1^2(x_1, x_2)$ significa x_1 odia a x_2 . Traduzca las siguientes fórmulas al lenguaje natural.

Algunas personas odian a todas las personas

$$((\exists x_1)A_1^1(x_1) \wedge ((\forall x_2)A_1^1(x_2) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2)))$$

Existen personas que odian a las personas que se odian a ellas mismas

$$((\exists x_1)A_1^1(x_1) \wedge ((\forall x_2)A_1^1(x_2) \rightarrow (A_1^2(x_1, x_2) \leftrightarrow A_1^2(x_2, x_2))))$$

---

7. Para las fórmulas del inciso anterior, dé un ejemplo de un universo y un conjunto de personas en la relación indicada que las haga verdaderas, y otro que las haga falsas.

$$\text{Animales} = \{gato, pero\} \quad \text{Personas} = \{Juan, Pedro\} \quad \text{Universo} = \{P, A\}$$

Verdaderos

$$x_1, x_2 \in \text{Personas}$$
$$x_1 := \text{Juan} \quad x_2 := \text{Pedro}$$
$$((\exists x_1)A_1^1(x_1) \wedge ((\forall x_2)A_1^1(x_2) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2)))$$
$$((\exists x_1)A_1^1(x_1) \wedge ((\forall x_2)A_1^1(x_2) \rightarrow (A_1^2(x_1, x_2) \iff A_1^2(x_2, x_2))))$$

Falso

$$x_1, x_2 \in \text{Animales}$$
$$x_1 := \text{Gato} \quad x_2 := \text{Perro}$$
$$((\exists x_1)A_1^1(x_1) \wedge ((\forall x_2)A_1^1(x_2) \rightarrow A_1^2(x_1, x_2)))$$
$$((\exists x_1)A_1^1(x_1) \wedge ((\forall x_2)A_1^1(x_2) \rightarrow (A_1^2(x_1, x_2) \leftrightarrow A_1^2(x_2, x_2))))$$

---

8. Para las siguientes proposiciones, dé un lenguaje de primer orden para su traducción

- Una persona que posee todas las virtudes es una persona virtuosa, pero hay personas virtuosas que no poseen todas las virtudes.

$$A_0^1(x) := x \text{ es persona} \quad A_1^1(x) := x \text{ es virtud} \quad A_2^2(x,y) := x \text{ tiene } y \quad A_3^1(x) := x \text{ es virtuoso}$$
$$\Big(\exists x_1 A_0^1(x) \wedge \big(\forall y_1 A_1^1(y_1) \wedge A_2^2(x_1, y_1) \to A_3^1(x_1)\big)\Big) \wedge \Big(\exists x_2 A_0^1(x_2) \wedge A_3^1(x_2) \wedge \neg(\forall y_2 A_1^1(y_2) \wedge A_2^2(x_2, y_2))\Big) \quad \blacksquare$$

- Cada cual tiene algún atributo no usual

$$A_0^2(x,y) := x \text{ tiene un } y \quad A_1^1(x) := x \text{ es usual}$$
$$\forall x\Big(\exists y(\neg A_1^1(y) \wedge A_0^2(x,y))\Big) \quad \blacksquare$$

- Pancho Villa tenía todos los atributos de un gran general

$$A_1^1(x) := x \text{ es Pancho Villa} \quad A_2^2(x,y) := x \text{ tiene } y \quad A_3^1(x) := x \text{ es atributo de general}$$
$$\exists x A_1^1(x) \wedge \big(\forall y A_3^1(y) \wedge A_2^2(x,y)\big) \quad \blacksquare$$

- Si los círculos son elipses, entonces los círculos tienen todas las propiedades de las elipses

$$A_0^1(x) := x \text{ es círculo} \quad A_1^1(x) := x \text{ es elipse} \quad A_2^2(x,y) := x \text{ tiene } y \quad A_3^1(x) := x \text{ es una propiedad}$$
$$\exists x A_0^1(x) \wedge A_1^1(x) \to (\forall y A_3^1(y) \wedge A_2^2(x,y)) \quad \blacksquare$$

---

9. Para las siguientes fórmulas, presenta una fórmula equivalente en la quge la negación afecte sólo a fórmulas atómicas.

$$\neg(((\forall x_1)A_0^1(x_3) \wedge A_1^1(x_1)) \rightarrow ((\exists x_2)A_0^1(x_2) \leftrightarrow A_1^1(x_2)))$$
$$((\forall x_1)A_0^1(x_3) \wedge A_1^1(x_1)) \wedge \neg((\exists x_2)A_0^1(x_2) \leftrightarrow A_1^1(x_2))$$
$$((\forall x_1)A_0^1(x_3) \wedge A_1^1(x_1)) \wedge \neg((\exists x_2)A_0^1(x_2) \leftrightarrow A_1^1(x_2))$$
$$((\forall x_1)A_0^1(x_3) \wedge A_1^1(x_1)) \wedge \neg((\exists x_2)A_0^1(x_2)) \wedge A_1^1(x_2) \vee (\exists x_2 A_0^1)) \wedge \neg A_1^1(x_2)$$
$$((\forall x_1)A_0^1(x_3) \wedge A_1^1(x_1)) \wedge (\neg\exists x_2 A_0^1(x_2) \vee \neg A_1^1(x_2) \vee ((\exists x_2 A_0^1(x_2)) \wedge \neg A_1^1(x_2)))$$
$$\left(\forall x_1 A_0^1(x_3) \wedge A_1^1(x_1)\right) \wedge \Big(\left(\forall x_2 \neg A_0^1(x_2) \vee \neg A_1^1(x_2)\right) \vee \left((\exists x_2 A_0^1(x_2)) \wedge \neg A_1^1(x_2)\right)\Big) \quad \blacksquare$$

$$\neg((\forall x_1)((\exists x_2)(A_0^2(x_1, x_2) \leftrightarrow A_0^1(x_1)) \rightarrow (\exists x_4)(\forall x_3)A_0^2(x_3, x_4)))$$
$$(\exists x_1)\neg((\exists x_2)(A_0^2(x_1, x_2) \leftrightarrow A_0^1(x_1)) \rightarrow (\exists x_4)(\forall x_3)A_0^2(x_3, x_4))$$
$$(\exists x_1)((\exists x_2)(A_0^2(x_1, x_2) \leftrightarrow A_0^1(x_1))) \wedge \neg(\exists x_4)(\forall x_3)A_0^2(x_3, x_4)$$
$$(\exists x_1)((\exists x_2)(A_0^2(x_1, x_2) \leftrightarrow A_0^1(x_1))) \wedge (\forall x_4)\neg(\forall x_3)A_0^2(x_3, x_4)$$
$$(\exists x_1)((\exists x_2)(A_0^2(x_1, x_2) \leftrightarrow A_0^1(x_1))) \wedge (\forall x_4)(\exists x_3)\neg A_0^2(x_3, x_4) \quad \blacksquare$$

$$\neg((\exists x_0)A_1^1(x_0) \rightarrow ((\forall x_1)A_0^2(x_1, x_0) \wedge A_0^2(x_0, x_1)))$$
$$(\exists x_0)A_1^1(x_0) \wedge \neg((\forall x_1)A_0^2(x_1, x_0) \wedge A_0^2(x_0, x_1))$$
$$(\exists x_0)A_1^1(x_0) \wedge (\neg(\forall x_1)A_0^2(x_1, x_0) \vee \neg A_0^2(x_0, x_1))$$
$$(\exists x_0)A_1^1(x_0) \wedge ((\exists x_0)\neg A_0^2(x_1, x_0) \vee \neg A_0^2(x_0, x_1)) \quad \blacksquare$$
