

# Ejercicios Semana 3

## Lógica Matemática I

Instrucciones: Lea cuidadosamente cada pregunta y conteste adecuadamente. Valor Total: 50 puntos

# 1. [30 puntos] Investiga qué dice el teorema de lectura única para el lenguaje proposicional (también conocido como teorema de descomposición única) y demuéstalo utilizando alguna de las 3 construcciones que dimos para el lenguaje proposicional.

*Toda fórmula bien formada en el lenguaje proposicional se expresa de manera única*

Tenemos las siguientes fórmula bien formadas (**F.B.F.**)  $f_1$  y  $f_2$

$$A = \{P_k | k \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{(, )\}$$

$$\Phi = \text{Expresición bien formada}$$

$$\Psi = \text{Expresición bien formada}$$

$$\Phi_*(\alpha, \beta) := (*, \alpha, \beta)$$

$$\Psi_*(\gamma, \delta) := (*, \gamma, \delta)$$

Donde

$$* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

$$\Phi_*(\alpha, \beta) = (*, \alpha, \beta) = \Psi_*(\gamma, \delta) = (*, \gamma, \delta)$$

Por lo tanto

$$\Phi_*(\alpha, \beta) = \Psi_*(\gamma, \delta)$$

$$(*, \alpha, \beta) = (*, \gamma, \delta)$$

$$* = *, \quad \alpha = \gamma, \quad \beta = \delta$$

$$\Phi = \Psi$$

---

## 2. Determina si las siguientes expresiones son o no fórmulas bien formadas.

- a) [10 puntos]  $((P_0 \wedge (\neg P_1)) \rightarrow (P_8 \vee (P_2 \leftrightarrow P_3)))$

En el primer nivel

$$\left( \overbrace{(P_0 \wedge (\neg P_1))}^{\alpha} \overbrace{\rightarrow}^* \overbrace{(P_8 \vee (P_2 \leftrightarrow P_3))}^{\beta} \right) \quad (\alpha, *, \beta) \quad \text{donde } \alpha, \beta \in P \quad \text{y} \quad * = \rightarrow \quad (1)$$

En el segundo nivel

$$\left( \overbrace{P_0}^{\alpha} \overbrace{\wedge}^* \overbrace{(\neg P_1)}^{\beta} \right) \quad (\alpha, *, \beta) \quad \text{donde } \alpha, \beta \in P \quad \text{y} \quad * = \wedge \quad (2)$$

$$\left( \overbrace{P_8}^{\alpha} \overbrace{\vee}^* \overbrace{(P_2 \leftrightarrow P_3)}^{\beta} \right) \quad (\alpha, *, \beta) \quad \text{donde } \alpha, \beta \in P \quad \text{y} \quad * = \vee \quad (3)$$

- En (2)

$$\left( P_0 \wedge \overbrace{(\neg P_1)}^{\alpha} \right)$$

$P_0$  es una fórmula bien formada  
 $\alpha$  es una fórmula bien formada  $(\neg, \alpha)$

- En (3)

$$\left( \overbrace{P_8}^{\alpha} \overbrace{\vee}^* \overbrace{(P_2 \leftrightarrow P_3)}^{\beta} \right)$$

$\alpha$  es una fórmula bien formada

En el tercer nivel

$$\left( \overbrace{P_2}^{\alpha} \overbrace{\leftrightarrow}^* \overbrace{P_3}^{\beta} \right) \quad (\alpha, *, \beta) \quad \text{donde } \alpha, \beta \in P \quad \text{y} \quad * = \leftrightarrow \quad (4)$$

- En (4)

$P_2$  es una fórmula bien formada  
 $P_3$  es una fórmula bien formada

Por lo tanto es una fórmula bien formada. ■

- b) [10 puntos]  $((\neg P_4 \rightarrow P_8) \leftrightarrow (P_1 \vee P_7)) \wedge ((\neg P_3) \vee P_9)$

En el primer nivel

$$\left( \overbrace{((\neg P_4 \rightarrow P_8) \leftrightarrow (P_1 \vee P_7))}^{\alpha} \overbrace{\wedge}^* \overbrace{((\neg P_3) \vee P_9)}^{\beta} \right) \quad (\alpha, *, \beta) \quad \text{donde } \alpha, \beta \in P \quad \text{y} \quad * = \wedge \quad (1)$$

En el segundo nivel

$$\left( \overbrace{(\neg P_4 \rightarrow P_8)}^{\alpha} \overbrace{\leftrightarrow}^* \overbrace{(P_1 \vee P_7)}^{\beta} \right) \quad (\alpha, *, \beta) \quad \text{donde } \alpha, \beta \in P \quad \text{y} \quad * = \leftrightarrow \quad (2)$$

$$\left( \overbrace{(\neg P_3)}^{\alpha} \overbrace{\vee}^* \overbrace{P_9}^{\beta} \right) \quad (\alpha, *, \beta) \quad \text{donde } \alpha, \beta \in P \quad \text{y} \quad * = \vee \quad (3)$$

- En (3)

$$\overbrace{(\neg P_3)}^{\alpha} \overbrace{\vee}^* \overbrace{P_9}^{\beta}$$

$\alpha$  es una fórmula bien formada ( $\neg, \alpha$ )

$\beta$  es una fórmula bien formada

En el tercer nivel

$$\overbrace{(\neg P_4)}^{\alpha} \overbrace{\rightarrow}^* \overbrace{P_8}^{\beta} \quad (\alpha, *, \beta) \quad \text{donde } \alpha, \beta \in P \quad \text{y} \quad * = \rightarrow \quad (4)$$

$$\overbrace{P_1}^{\alpha} \overbrace{\vee}^* \overbrace{P_7}^{\beta} \quad (\alpha, *, \beta) \quad \text{donde } \alpha, \beta \in P \quad \text{y} \quad * = \vee \quad (5)$$

- En (4)

$$\overbrace{(\neg P_4)}^{\alpha} \overbrace{\rightarrow}^* \overbrace{P_8}^{\beta}$$

$\alpha$  es una fórmula mal formada ya que hace falta ( $\neg$ )

$\beta$  es una fórmula bien formada

- En (5)

$$\overbrace{P_1}^{\alpha} \overbrace{\vee}^* \overbrace{P_7}^{\beta}$$

$\alpha$  es una fórmula bien formada

$\beta$  es una fórmula bien formada

Por lo tanto no es una fórmula bien formada. ■

---