# Geometría Analítica II
# Lista de ejercicios para el segundo parcial

Profesora: Nora Isabel Pérez Quezadas
Ayudante: Adán Israel Espinosa de la Cruz

Fecha tentativa de examen: 28 de octubre del 2020

**Instrucciones:** Escriba de manera clara cada ejercicio. En el examen se pedirán tres o cuatro problemas de aquí. En caso de que venga alguno de los que tienen incisos, a lo más vendrán dos incisos. El examen debe entregarse al correo eléctronico de la preofesora y el ayudante.

Recuerde que el examen debe ser enviado en formato PDF.

1. Menciona tres cosas con ejemplos en los que se utilicen las superficies cuádricas y simetrías. Además de lo visto en clase.

**Simetrías**

2. Para cada uno de los siguientes lugares geométricos analice las siete simetrías vistas en clase. En caso de que se cumpla alguna, demuéstrela, de lo contrario exhiba un contraejemplo:

a) $\mathscr{G}$ : "$2x + 3y + z = 0$"
b) $\mathscr{G}$ : "$3x^2 - z^2 = 9$"
c) $\mathscr{G}$ : "$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 16$"
d) $\mathscr{G}$ : "$x + y - z^2 = 1$
e) $\mathscr{G}$ : "$x^3 - \frac{y}{2} - z^2 = 3$

**Superficies Regladas**

3. Pruebe que si $\ell : x - 1 = y - 2 = z + 1$ y $\mathscr{G}$ : "$z^2 - xy + 2x + y + 2z - 1 = 0$" entonces $\ell \subseteq \mathscr{G}$.

4. Considere a $\mathscr{G}$ como el hiperboloide de un manto ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ donde $a, b$, y $c$ son números reales positivos) . Denote como $\ell^*$ a la recta que pasa por $ae_1$ y tiene dirección $(0, b, c)$ y por $m^*$ a la recta que pasa por $-ae_1$ y tiene dirección $(0, -b, c)$. Pruebe que los enunciados siguientes son ciertos:
a) $\ell^* \neq m^*$
b) $\ell^* \subseteq \mathscr{G}$
c) $m^* \subseteq \mathscr{G}$

5. Considere el *paraboloide hiperbólico* $\left(\mathscr{G} : \text{"}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz\text{"}\right)$ Demuestra que hay una recta $\ell_k \subseteq \mathscr{G}$ tomando en cuenta los siguientes planos:

$$\pi_h^0 := \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = h \qquad\qquad \pi_h^1 := h\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = cz$$

Es decir:
i) Prueba que $\forall\ h \in \mathbb{R},\ \ \ell_k \subseteq \mathscr{G}$
ii) Prueba que $\forall\ P \in \mathscr{G}\ \exists\ r \in \mathbb{R}$ tal que $P \in \ell_r \subseteq \mathscr{G}$.

6. Demuestre que el cono cuadrático ($\mathscr{K} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ donde $a, b$, y $c$ son números reales positivos) es una superficie reglada.

7. Demuestre que el *paraboloide hiperbólico* ($\mathscr{G} : x^2 - y^2 = z$) es una superficie doblemente reglada.

**Plano tangente**

8. Considere el paraboloide hiperbólico $\mathscr{G} : 9x^2 - 16y^2 = z$, pruebe que las rectas $l$ y $m$ que pasan por el punto $P = (0, 1, -16)$, donde $\ell : (0, 1, -16) + \alpha(4, -3, 96)$ y $m : (0, 1, -16) + \beta(4, 3, -96)$ cumplen que:
a) $P \in \ell \subseteq \mathscr{G}$
b) $P \in m \subseteq \mathscr{G}$
c) Demuestre mediante la definición de plano tangente **(NO gradiente[1], puesto que esta es una herramienta de cálculo en varias variables)** que esté en el punto $P$ está dado por la ecuación cartesiana: $32y + z - 16 = 0$

9. Considere el paraboloide hiperbólico $\mathscr{G} : 9x^2 - 16y^2 = z$, pruebe que las rectas $l$ y $m$ que pasan por el punto $P = (1, 0, 9)$, donde $\ell : (1, 0, 9) + \alpha(4, -3, 72)$ y $m : (1, 0, 9) + \beta(4, 3, 72)$ cumplen que:
a) $P \in \ell \subseteq \mathscr{G}$
b) $P \in m \subseteq \mathscr{G}$
c) Obtenga la ecuación del plano tangente en $P$ mediante la definición anterior

10. Considera el paraboloide hiperbólico $\mathscr{P} : x^2 - \frac{y^2}{4} - 5z = 0$, obtenga la ecuación del plano tangente en el punto $P = (\sqrt{6}, 2, 1)$

**Cierto o falso**

11. Diga si los siguientes enuciados son verdadros o no. En el primer caso, demuestre la afirmación, en el segundo dé un contraejemplo.

- Para todo punto $P$ en el paraboloide hiperbólico existe un plano tangente.
- Toda superficie cuádrica es superficie reglada
- El paraboloide hiperbólico posee las siete simetrías vistas en clase.

[1] No obstante, pueden comprobarlo con esta herramienta