Examen 2

Rigoberto Canseco López

1.

Existe una función f definida y continua para todo real x que satisface

$$\int_1^x tf(t)dt = \int_0^x f(t)cos^3 t\ dt + \tan^2 x - \cos^2 x + \sin x + 3$$

Encontrar la fórmula explícita para $f(x)$

Para obtener la forma explícita de $f(x)$ hay que derivar utilizando el TFC.

Derivando ambas partes de la ecuación y aplicando el TFC nos queda que

$$\frac{d}{dx}(\int_1^x f(t)\ dt) = \frac{d}{dx}(\int_0^x f(t)cos^3 t\ dt + \int_0^x \tan^2 x\ dt - \int_0^x \cos^2 x\ dt + \int_0^x \sin x\ dt + \int_0^x 3\ dt)$$
$$xf(x) = f(x)(cos^3 t) + \tan^2 x - \cos^2 x + \sin x + 3$$

Por lo tanto despejando $f(x)$ tenemos que:

$$f(x)(x - \cos^3 x) = \tan^2 x - \cos^2 x + \sin x + 3$$
$$f(x) = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x + \sin x + 3}{(x - \cos^3 x)} \quad \blacksquare$$

2

Encontrar $F'(x)$ si $F(x) = \int_{\sec x}^{x^5} \frac{t^4}{5+t^8} dt$

Podemos escribir la integral como:

$$F(x) = \int_{\sec x}^{c} \frac{t^4}{5+t^8} dt + \int_{c}^{x^5} \frac{t^4}{5+t^8} dt$$

Resolvemos la primer integral

$$\int_{\sec x}^{c} \frac{t^4}{5+t^8} dt$$

Para resolver esta derivada, es útil tratarla como una composición de funciones, tenemos que:

$$f(x) = \int_{x}^{c} \frac{t^4}{5+t^8} dt \quad \text{y} \quad g(x) = \sec x$$

Por lo que, por regla de la cadena tenemos que $F(x) = f(g(x))$ por lo tanto, usando el TFC y las reglas de derivación:

$$f'(x) = \frac{t^4}{5+t^8} \quad \text{y} \quad g'(x) = \tan(x)\sec(x)$$

Sustituyendo los valores de g, f', g'. Tenemos:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= f'(\sec x)(\tan x \sec x) \\ &= (\tan x \sec x)\frac{\sec^4 x}{5+\sec^8 x} \end{aligned}$$

Resolvemos la segunda integral

$$\int_{c}^{x^5} \frac{t^4}{5+t^8} dt$$

Para resolver esta derivada, es útil tratarla como una composición de funciones, tenemos que:

$$f(x) = \int_{x}^{c} \frac{t^4}{5+t^8} dt \quad \text{y} \quad g(x) = x^5$$

Por lo que, por regla de la cadena tenemos que $F(x) = f(g(x))$ por lo tanto, usando el TFC y las reglas de derivación:

$$f'(x) = \frac{t^4}{5+t^8} \quad \text{y} \quad g'(x) = 5x^4$$

Sustituyendo los valores de g, f', g'. Tenemos:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= f'(x^5)(5x^4) \\ &= (5x^4)\frac{x^{20}}{5+x^{40}} \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
&= (5x^4)\frac{x^{20}}{5+x^{40}} - ((\tan x \sec x)\frac{\sec^4 x}{5+\sec^8 x}) \\
&= \frac{5x^{24}}{5+x^{40}} - \frac{\sec^5 x \tan x}{5+\sec^8 x} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.

Calcula $\int_{-6}^{4} |4x+2|dx$

Lo primero que hay que hacer es identificar el punto donde el argumento vale cero, debido a que la función valor absoluto depende de si su argumento es positivo o negativo.

$$\begin{aligned} 4x+2 &= 0 \\ x &= -2/4 \\ x &= -1/2 \end{aligned}$$

La solución encontrada es $x=-1/2$, quiere decir que en $x<-1/2$, el argumento de la función es negativo y en $x \geq -1/2$ positivo; por lo que separando la integral en ambos intervalos:

$$\int_{-6}^{4} |4x+2| \; dx = \int_{-6}^{-1/2} |4x+2| \; dx + \int_{-1/2}^{4} |4x+2| \; dx$$

Sustituyendo el valor absoluto:

$$\begin{aligned} |4x+2| = -(4x+2) = -4x-2 \quad &\text{si } x < -1/2 \\ |4x+1| = 4x+1 = \quad &\text{si } x \geq -1/2 \end{aligned}$$

Tenemos que la integral es

$$= \int_{-6}^{-1/2} -4x-2 \; dx + \int_{-1/2}^{4} 4x+2 \; dx$$

Separando las integrales de acuerdo a las notas del **(pdf 1, pag-17-18)**

$$\begin{aligned} &= \int_{-6}^{-1/2} -4x \; dx + \int_{-6}^{-1/2} -2 \; dx + \int_{-1/2}^{4} 4x \; dx + \int_{-1/2}^{4} 2 \; dx \\ &= -4 \int_{-6}^{-1/2} x \; dx - 2 \int_{-6}^{-1/2} \; dx + 4 \int_{-1/2}^{4} x \; dx + 2 \int_{-1/2}^{4} \; dx \\ &= -4(x^2/2) - 2x + 4(x^2/2) + 2x \end{aligned}$$

Realizando las integrales, de acuerdo a las notas del **(pdf 1, pag-17-18)**

$$\begin{aligned} &= -4\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{(-6)^2}{2}\right) - 2\left(-\frac{1}{2} - -6\right) + 4\left(\frac{4^2}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2\left(4 - -\frac{1}{2}\right) \\ &= 101 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\int_{-6}^{4} |4x+2| \; dx = 101 \quad \blacksquare$