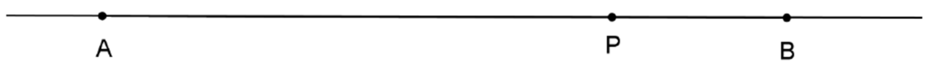
Razón en que un punto divide a un segmento

Definición 1. *Dado un segmento dirigido AB y un punto P, distinto de A y B, en la recta que determinan A y B, se define la razón en que el punto P, distinto de los puntos A y B, divide a un segmento AB como:*

$$r = \frac{AP}{PB}$$



Note que para cualquier punto P en el interior del segmento AB, los sentidos de AP y PB son iguales y por tanto la razón r es positiva. Se dice que P divide al segmento AB internamente.
Se puede observar que independientemente del sentido positivo de la recta, en este caso la razón es positiva, ya que, si el sentido de AP y PB es el mismo que el sentido positivo de la recta, entonces los dos segmentos son positivos y en caso contrario, los dos son negativos y por tanto la razón r también es positiva. Por lo tanto, el valor de r no depende del sentido considerado positivo en la recta, lo importante es si los segmentos considerados para calcular esta razón tienen o no el mismo sentido.

Teorema 1. *Dada una razón r $(\neq 1)$ hay exactamente un punto que divide a un segmento dado en dicha razón.*

Demostración. Unicidad.
Sea AB el segmento orientado dado ($A \neq B$).
Recordando la fórmula de Euler. Si A, B, C y D son cuatro puntos alineados, entonces

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0 \tag{1}$$

a) $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QB} \;\Rightarrow\; AP \cdot QB = AQ \cdot PB$

b) $AP \cdot QB + AQ \cdot BP + AB \cdot PQ$ (fórmula de Euler)

c) $AB \cdot PQ = 0$ (a) y (b)

d) $PQ = 0$

e) $P = Q$

Existencia.
Sea $x = AP$
Recordando Si A, B y C son tres puntos alineados, entonces $AB + BC + CA = 0$ (fórmula de Chasles)

a) $PB = AB - x$ (Chasles)

b) $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{x}{AB - x}$ $\;(= r)$

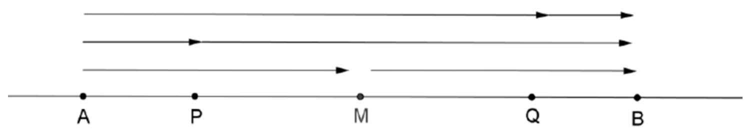
c) y de aquí que $x = \dfrac{r \cdot AB}{1 + r}$

□

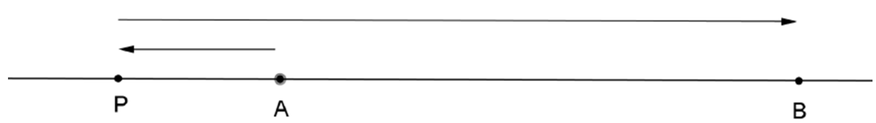
Es decir, el punto P está determinado por las dos condiciones que siguen:

1. Se encuentra a una distancia $\left(x = \dfrac{r \cdot AB}{1+r}\right)$ del punto A y
2. P está entre A y B $\Leftrightarrow$ $r > 0$

Nótese que hay dos puntos posibles que satisfecen la primera de las dos condiciones anteriores, de aquí que no baste esa sola condición para determinar al punto P. Sin embargo, la segunda condición resuelve tal ambigüedad.
Si M es el punto medio del segmento AB, entonces AM = MB y $\dfrac{AM}{MB} = 1$, aunque nunca es 0, si $P \neq A$. Se puede observar que mientras menor es AP, PB es mayor y por tanto r es menor. Dicho de otra manera, mientras más se acerca P a A, r se acerca más a 0 y si P se acerca a M, entonces r se acerca a 1.



Ahora, si Q está en el segmento MB, entonces $AQ > QB$ y $\dfrac{AQ}{QB} > 1$. Se puede observar que mientras mayor es AQ, QB es menor y por tanto r es mayor. Dicho de otra manera, mientras más se acerca Q a B, r crece y si Q se acerca a M, entonces r se acerca a 1. Una pregunta que se puede hacer es si para este caso r puede tomar cualquier valor positivo mayor que 1.
Si P está en el exterior de un segmento AB se dice que P lo divide externamente y la razón es negativa.



Se considera primero el caso en que P y B están en diferentes semirrectas determinadas por A, como en la figura. AP y PB tienen diferentes sentidos. Además, PB = PA + AB, por lo tanto:

a) $r = \dfrac{AP}{PB}$ es negativa, ya que AP y PB tienen diferentes sentidos.

b) $r = \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AP}{PA+AB}$ y $|AP| < |PA+AB|$ y por tanto $\left|\dfrac{AP}{PA+AB}\right| < 1$. Esto indica que en este caso $-1 < r < 0$.

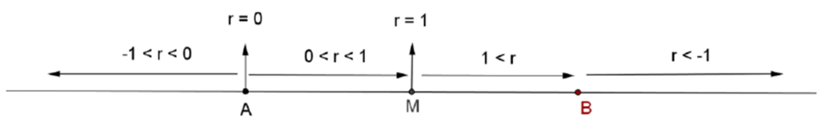
Ahora, si P es externo al segmento AB y P y B están en la misma semirrecta determinada por A, como en la figura

AP y PB tienen diferentes sentidos. Además, AP = AB + BP, por lo tanto:

a) $r = \dfrac{AP}{PB}$ es negativa, ya que AP y PB tienen diferentes sentidos.

b) $r = \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AB + BP}{PB}$ es tal que $|AB + BP| > |PB|$ y por tanto $\left|\dfrac{AB + BP}{PB}\right| > 1$. Esto indica que en este caso $r < -1$.

De acuerdo con los resultados anteriores para cada segmento AB y cada $r \neq -1$, existe un único punto P, tal que $\dfrac{AP}{PB} = r$?. Si $r > 0$, el punto P está el interior del segmento AB y si $r < 0$, y $r \neq -1$, el punto P está el exterior del segmento AB. ¿Qué punto divide al segmento AB en la razón r = 0?
Sea P el punto que divide al segmento AB en la razón $r = 0 \Rightarrow r = \dfrac{AP}{PB} = 0$ y por tanto $AP = 0 \Rightarrow P = A$. Análogamente si $P = A$, $AP = 0 \Rightarrow r = 0$. Esto es, P divide al segmento AB en la razón $r = 0 \Leftrightarrow P = A$. En el caso que P = B, se tiene que PB = 0 y la razón es indeterminada.



De acuerdo con los resultados anteriores se tiene que, dado un segmento AB, a cualquier punto P en la recta que determinan, con excepción de B, se asocia la razón r en que ese punto divide al segmento AB. Asimismo, para cada número real $r \neq -1$, existe un único punto en la recta AB que divide al segmento AB en esa razón.