Ejercicios

Rigoberto Canseco López

Podemos definir la idea de construcción como: Sea una sucesión de construcción finita $\langle \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{n-1}, \epsilon_n \rangle$ de expresiones tal que, para cada $i < n$, tenemos al menos uno de los siguientes hechos:

- ϵ_i es un símbolo de enunciado.
- $\epsilon_i = \epsilon_\square(\epsilon_i, \epsilon_j)$ para algún $j < n, i < n$, y $\square$ un símbolo de conectivo binarios $(\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow)$

Sea S un conjunto de fórmulas que contiene todos los símbolos de enunciado y es cerrado bajo las operaciones de construcción, entonces S es el conjunto de todas las fórmulas.

1. **Sea α la fórmula, sea c el número posible de lugares en los que aparecen símbolos de conectivo binarios $(\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow)$ en α; sea s el número de lugares en los que aparece símbolos de enunciado en α. (Por ejemplo, si α es $(A \rightarrow (\neg A))$, entonces $c = 1$ y $s = 2$). Usando el principio de inducción, pruebe que $s = c + 1$.**

   Demostración por inducción

   - **Caso base:** Sea α una fórmula bien formada con un símbolo de enunciado y ningún conector binario, es decir $\alpha = A_1$
     Por lo tanto se cumple que $s = c + 1$ ya que el numero de símbolos conectivos es $c = 0$ y el número de símbolos de enunciado es $s = 1$.

     $$s_1 = c_0 + 1$$

   - **Hipótesis de inducción:** Entonces $s = c + 1$ es cierta para cualquier paso ϵ_n de construcción y $\epsilon_n \in S$.

   - **Paso inductivo:** Se demuestra que, $s = c + 1$ es cierta para el paso n de construcción, entonces para el paso ϵ_{n+1} lo es también.

     Al agregar un símbolo de conector binario $\square$ a la formula α es evidente que debemos agregar un símbolo de enunciado , es decir.

     $$\begin{aligned} \text{Para } \epsilon_1 & \\ \alpha &= A_1 \\ \text{Para } \epsilon_n & \\ \alpha &= (A_1 \square_1 \_\_) \quad \text{Agregamos un símbolo conectivo binario} \\ \alpha &= (A_1 \square_1 A_2) \\ \text{Para } \epsilon_{n+1} & \\ \alpha &= (\alpha_n \square_n A_{n+1}) \end{aligned}$$

     Por lo tanto

     $$\begin{gathered} s_n = c_n + 1 \\ \text{Agregando un símbolo conectivo al paso } n \\ s_{n+1} = s_n + 1 = c_n + 1 + 1 \\ s_{n+1} = (c_n + 1) + 1 \end{gathered}$$

     Como $\epsilon_n \in S$ también lo es ϵ_{n+1}, queda demostrado $s = c + 1$ ■

2. **Suponga que α es una fórmula que no contiene el símbolo de negación $\neg$**

   - **Muestre que la longitud de α (es decir, el número de símbolos en la sucesión) es impar.**

     Longitud de $\alpha = 4k + 1$

     Demostración por inducción

     - **Caso base:** Sea α una fórmula bien formada con un símbolo de enunciado y ningún conector binario, es decir $\alpha = A_1$

$$
\begin{aligned}
&\text{Para } k = 0\\
&\text{Longitud de } \alpha = 4k + 1 = 4(0) + 1 = 1\\
&\text{Longitud de } \alpha = 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se cumple que la longitud de α es impar.

- **Hipótesis de inducción:** Entonces la longitud de $\alpha = 4k + 1$ es cierta para cualquier paso ϵ_n de construcción y $\epsilon_n \in S$. Donde k es el numero de símbolos conectivos y $k \leq n$.
- **Paso inductivo:** Se demuestra que, la longitud de $\alpha = 4k + 1$ es cierta para el paso n de construcción, entonces para el paso ϵ_{n+1} lo es también.

  Al agregar un símbolo de conector binario $\Box$ a la formula α es evidente que debemos agregar un símbolo de enunciado y en consecuencia se agregan 4 símbolos más es decir, $\{(,),\Box, A\}$,

$$
\begin{aligned}
&\text{Para } \epsilon_1\\
&\qquad \alpha = A_1\\
&\text{Para } \epsilon_n\\
&\qquad \alpha = (A_1 \Box_1 \_\_) \quad \text{Agregamos un símbolo conectivo binario}\\
&\qquad \alpha = (A_1 \Box_1 A_2) \quad \text{Tenemos 5 símbolos y que es un número impar}\\
&\text{Para } \epsilon_{n+1}\\
&\qquad \alpha = (\alpha_n \Box_n A_{n+1})
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\text{Longitud de } \alpha \text{ para } n &\\
&= \sum_{k=0}^{n} 4k + 1 \quad \text{Es impar}\\
\text{Para } n + 1 \text{ tenemos que} &\\
4 + \Big(\sum_{k=0}^{n} 4k + 1\Big) &= (4k + 1) + 4\\
&= 4(k + 1) + 1 \quad \text{Es impar}
\end{aligned}
$$

Como $\epsilon_n \in S$ también lo es ϵ_{n+1}, queda demostrado la longitud de α es un número impar ■

- **Muestre que más de una cuarta parte de los símbolos son símbolos de enunciado.**

  Número de símbolos de enunciado es $k + 1$

  Demostración por inducción

  - **Caso base:** Sea α una fórmula bien formada $\alpha = (A_1 \Box A_2)$ con un total de 5 símbolos $\{(, A_1, \Box, A_2,)\}$
    Donde $2/5$ son símbolos de enunciados y por lo tanto cumple que, $1/5 > 1/4$ parte de los símbolos.
  - **Hipótesis de inducción:** Entonces más de una cuarta parte de los símbolos son símbolos de enunciado.
    Donde el número de símbolos de enunciado es $k + 1$ es cierta para cualquier paso ϵ_n de construcción y $\epsilon_n \in S$. Donde k es el numero de símbolos conectivos y $k \leq n$.

- **Paso inductivo:** Se demuestra que, la longitud de $\alpha = k+1$ es cierta para el paso n de construcción, entonces para el paso ϵ_{n+1} lo es también.

  Al agregar un símbolo de conector binario $\Box$ a la formula α es evidente que debemos agregar un símbolo de enunciado y en consecuencia se agregan 4 símbolos más es decir, $\{(,),\Box, A\}$,

$$
\begin{aligned}
&\text{Para } \epsilon_1\\
&\quad \alpha = (A_1 \Box_1 A_{n+1})\\
&\quad\quad \text{Tenemos } 2/5 \text{ son símbolos de enunciado}\\
&\text{Para } \epsilon_n\\
&\quad \alpha = ((A_1 \Box_1 \ A_n)\Box_n A_{n+1})\\
&\quad\quad \text{Tenemos } 3/9 \text{ son símbolos de enunciado}\\
&\text{Para } \epsilon_{n+1}\\
&\quad \alpha = (((A_1 \Box_1 \ A_2)\Box_2 A_3)\Box_{n+1} A_{n+1})\\
&\quad\quad \text{Tenemos } 4/13 \text{ son símbolos de enunciado}
\end{aligned}
$$

  Por lo tanto la longitud de símbolos de enunciado es $\sum_{k=0}^{n} k+1$ del total de símbolos de $\alpha(\sum_{k=0}^{n} 4k+1)$ donde k es el número de símbolos conectivos.

  Es decir, longitud de símbolos de enunciado es:

$$
\begin{aligned}
&\text{Para } n \text{ tenemos que}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{4k+1}\\
&\text{Para } n+1 \text{ tenemos que}\\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n}(k+1)+1}{\sum_{k=0}^{n}(4k+1)+4} = \frac{k+1+1}{(4k+1)+4}\\
&= \frac{(k+1)+1}{4(k+1)+1} > \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

  Como $\epsilon_n \in S$ también lo es ϵ_{n+1}, queda demostrado la longitud de símbolos es más de una cuarta parte de símbolos de α $\blacksquare$.