Solución:

$$\begin{aligned}
\int \tan^3 x\,dx &= \int \left(\sec^2 x - 1\right)\tan x\,dx \\
&= \int \tan x \sec^2 x - \tan x\,dx \\
&= \frac{\tan^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.
\end{aligned}$$

Veamos ahora como se calculan las integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\,dx.$$

- Si m y n uno es par y el otro impar.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^2 x\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\cos x\,dx \\
&= \int \operatorname{sen}^2 x \cos x - \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx \\
&= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + C.
\end{aligned}$$

- Si ambos son impares

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \cos x\,dx \\
&= \int \operatorname{sen}^3 x\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\cos x\,dx \\
&= \int \operatorname{sen}^3 x \cos x - \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx \\
&= \frac{\operatorname{sen}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + C.
\end{aligned}$$

- Si ambos son pares

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1-\cos^2 2x \, dx \\
&= \frac{1}{4}\int 1-\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}-\frac{\cos 4x}{2} \, dx \\
&= \frac{1}{8}\int 1-\cos 4x \, dx \\
&= \frac{1}{8}\left(x-\frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)+C \\
&= \frac{x}{8}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{32}+C.
\end{aligned}$$

La integral de funciones inversas

Teorema

Si $y = f(x)$ y $x = g(y)$ son funciones una inversa de la otra entonces:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}}.$$

Demostración:

Consideramos la igualdad $x = g(y)$ y derivamos implícitamente con respecto a x:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dx} &= \frac{dg(y)}{dy}\frac{dy}{dx} \\
1 &= \frac{dg(y)}{dy}\frac{dy}{dx}.
\end{aligned}$$

De donde:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}}.$$

■

En el caso de la integral de dos funciones mutuamente inversas, también hay una relación:

Teorema

Si f y g son $y = f(x)$ y $x = g(y)$ son funciones una inversa de la otra entonces:

$$\int f(x)\ dx = xf(x) - \int g(y)\ dy.$$

Demostración:

Puesto que f y g son inversas:

$$x = g(f(x)).$$

Multiplicando ambos lados por $f'(x)$, tenemos:

$$xf'(x) = g(f(x))\,f'(x),$$

entonces:

$$xf'(x) - g(f(x))\,f'(x) = 0,$$

sumando $f(x)$ de ambos lados:

$$xf'(x) + f(x) - g(f(x))\,f'(x) = f(x).$$

Integrando de ambos lados:

$$\begin{aligned}\int xf'(x) + f(x) - g(f(x))\,f'(x)\ dx &= \int f(x)\ dx\\ \int xf'(x) + f(x)\,dx - \int g(f(x))\,f'(x)\ dx &= \int f(x)\ dx\\ xf(x) - \int g(y)\ dy &= \int f(x)\ dx.\end{aligned}$$

En el caso de integrales definidas, tenemos:

$$\begin{aligned}\int_a^b xf'(x) + f(x) - g(f(x))\,f'(x)\ dx &= \int_a^b f(x)\ dx\\ \int_a^b xf'(x) + f(x)\ dx - \int_a^b g(f(x))\,f'(x)\ dx &= \int_a^b f(x)\ dx.\end{aligned}$$

Calculemos ahora:

$$\int_a^b g(f(x))\,f'(x)\ dx.$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned}y &= f(x)\\ dy &= f'(x)\,dx,\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}x = a &\implies y = f(a)\\ x = b &\implies y = f(b).\end{aligned}$$

De donde

$$\int_a^b g(f(x))\, f'(x)\ dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\ dy,$$

entonces:

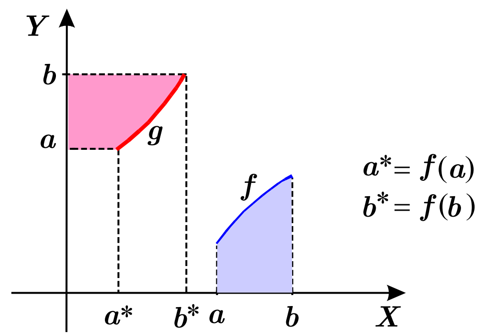
$$\begin{aligned}
\int_a^b xf'(x) + f(x)\ dx - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\ dy &= \int_a^b f(x)\ dx \\
xf(x)\big|_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\ dy &= \int_a^b f(x)\ dx.
\end{aligned}$$

De aquí que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\ dy.$$

■

Otra manera de deducir esta última fórmula es observando la siguiente figura en la que representamos a f y a su inversa:



De la figura tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\ dx &= b^*(b-a) - \int_{a^*}^{b^*} (g(x) - a)\ dx \\
&= b^*(b-a) + ax\big|_{a^*}^{b^*} - \int_{a^*}^{b^*} g(x)\ dx \\
&= b^*(b-a) + a(b^* - a^*) - \int_{a^*}^{b^*} g(x)\ dx \\
&= b^*b - a^*a - \int_{a^*}^{b^*} g(x)\ dx \\
&= bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int \ln x\ dx$.

Solución:

Esta integral se calcula comúnmente utilizando el método de integración por partes. Ahora la calcularemos recordando que la función exponencial es la inversa de $\ln x$.

Escribimos:

$$y = \ln x \qquad\qquad x = e^y.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \ln x \; dx &= x \ln x - \int e^y \; dy \\ &= x \ln x - e^y + C \\ &= x \ln x - e^{\ln x} + C \\ &= x \ln x - x + C.\end{aligned}$$

También podemos usar el resultado que hemos demostrado para calcular las integrales de las funciones trigonométricas inversas.

2. Calcular $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x \; dx$.

   Solución:

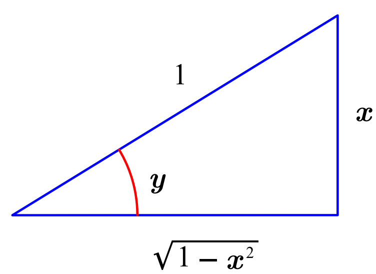
   Escribimos

$$y = f(x) = \operatorname{arcsen} x \qquad\qquad x = g(y) = \operatorname{sen} y.$$

   Entonces:

$$\begin{aligned}\int f(x) \; dx &= x f(x) - \int g(y) \; dy \\ &= x \operatorname{arcsen} x - \int \operatorname{sen} y \; dy \\ &= x \operatorname{arcsen} x + \cos y + C \end{aligned} \tag{4.19}$$

   Para escribir el resultado en función de x consideramos el siguiente triángulo



   ya que $x = \operatorname{sen} y$, de donde

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2}.$$

   Ahora, sustituyendo en (4.19):

$$\int \operatorname{arcsen} x \; dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

3. Calcular $\displaystyle\int \arctan x \; dx$.

Solución:

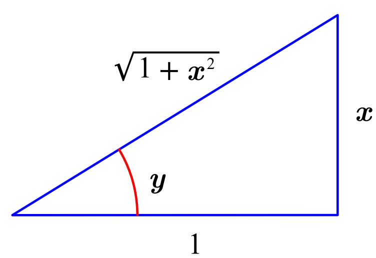
Escribimos

$$y = f(x) = \arctan x \qquad\qquad x = g(y) = \tan y.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int f(x)\; dx &= x f(x) - \int g(y)\; dy \\ &= x \arctan x - \int \tan y \; dy \\ &= x \arctan x + \ln|\cos y| + C. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Para escribir el resultado en función de x consideramos el siguiente triángulo



ya que $x = \tan y$, de donde

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ahora, sustituyendo en (4.20):

$$\begin{aligned}\int \arctan x \; dx &= x \arctan x + \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C \\ &= x \arctan x + \ln\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + C \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C. \end{aligned}$$

4. Calcular $\displaystyle\int \log_a x \; dx$.

Solución:

Escribimos

$$y = f(x) = \log_a x \qquad\qquad x = g(y) = a^y.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int f(x)\ dx &= xf(x) - \int g(y)\ dy \\ &= x\log_a x - \int a^y\ dy \\ &= x\log_a x - \frac{a^y}{\ln a} + C \\ &= x\log_a x - \frac{x}{\ln a} + C.\end{aligned}$$

Sustitución hiperbólica

El siguiente es un método obtenido durante la primera mitad del siglo XX en una escuela de ingeniería. Se trata de una sustitución sumamente ingeniosa llamada por su autor *sustitución imaginaria* por razones que explicaremos más adelante.

Este método se aplica para integrales de la forma

$$\int \cos^m x \operatorname{senh}^n x\ dx$$

donde m y n son números enteros y $m+n$ es impar y negativo. En estos casos se puede aplicar alguna de las dos sustituciones siguientes:

I. Sea $\tan x = \operatorname{senh}\theta$ entonces

$$\sec^2 x\ dx = d(\tan x) = \cosh\theta\ d\theta$$

y

$$\sec x = \sqrt{1+\tan^2 x} = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2\theta} = \cosh\theta,$$

de donde

$$\begin{aligned}\sec^2 x\ dx &= \cosh\theta\ d\theta \\ \cosh^2\theta\ dx &= \cosh\theta\ d\theta \\ dx &= \frac{\cosh\theta}{\cosh^2\theta}\ d\theta \\ dx &= \frac{1}{\cosh\theta}\, d\theta.\end{aligned}$$

En resumen

$$\left.\begin{aligned}\tan x &= \operatorname{senh}\theta \\ \sec^2 x\ dx &= \cosh\theta\ d\theta \\ \sec x &= \cosh\theta \\ dx &= \frac{1}{\cosh\theta}\, d\theta\end{aligned}\right\}\quad \text{si} -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

II. Sea $\cot x = \operatorname{senh}\theta$ entonces

$$-\csc^2 x\ dx = d(\cot x) = \cosh\theta\ d\theta$$

y

$$\csc x = \sqrt{1+\cot^2 x} = \sqrt{1+\operatorname{senh}^2\theta} = \cosh\theta,$$

de donde

$$\begin{aligned} -\csc^2 x\ dx &= \cosh\theta\ d\theta \\ -\cosh^2\theta\ dx &= \cosh\theta\ d\theta \\ dx &= -\frac{\cosh\theta}{\cosh^2\theta}\ d\theta \\ dx &= \frac{-1}{\cosh\theta}\,d\theta. \end{aligned}$$

En resumen

$$\left.\begin{aligned} \cot x &= \operatorname{senh}\theta \\ -\csc^2 x\ dx &= \cosh\theta\ d\theta \\ \csc x &= \cosh\theta \\ dx &= \frac{-1}{\cosh\theta}\,d\theta \end{aligned}\right\}\quad \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Los intervalos $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ y $0 < x < \frac{\pi}{2}$ aparecen en las sustituciones para asegurar que pueden efectuarse tales cambios y las transformaciones resultan inyectivas. Ahora bien, en cualquiera de los dos

$$e^\theta = \cosh\theta + \operatorname{senh}\theta$$

de donde

$$\theta = \ln(\cosh\theta + \operatorname{senh}\theta).$$

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int \sec x\ dx$.

   Solución:

   Como

$$\int \sec x\ dx = \int (\cos x)^{-1}\ dx \qquad m=-1,\quad n=0,\qquad m+n=-1.$$

   Utilizando la sustitución I tenemos

$$\begin{aligned} \tan x &= \operatorname{senh}\theta \\ \sec x &= \cosh\theta \\ dx &= \frac{1}{\cosh\theta}\ d\theta \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\int \sec x \; dx &= \int \cosh\theta \frac{1}{\cosh\theta} \; d\theta \\
&= \int d\theta \\
&= \theta + C. \\
&= \ln\left(\operatorname{senh}\theta + \cosh\theta\right) + C \\
&= \ln\left(\sec x + \tan x\right) + C.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int \sec x \; dx = \ln\left(\sec x + \tan x\right) + C.$$

2. Calcular $\displaystyle\int \sec^3 x \; dx$.

   Solución:

   Tenemos

$$\int \sec^3 x \; dx = \int (\cos x)^{-3} \; dx \qquad m = -3, \quad n = 0, \qquad m + n = -3.$$

   Con la sustitución I tenemos:

$$\begin{aligned}
\tan x &= \operatorname{senh}\theta \\
\sec x &= \cosh\theta \\
dx &= \frac{1}{\cosh\theta} \; d\theta,
\end{aligned}$$

   entonces

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x \; dx &= \int \frac{\cosh^3\theta}{\cosh\theta} \; d\theta \\
&= \int \cosh^2\theta \; d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int 1 + \cosh\left(2\theta\right) \; d\theta \\
&= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{senh}\left(2\theta\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{senh}\theta + \cosh\theta\right) + \frac{1}{2}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\sec x + \tan x\right) + \frac{1}{2}\sec x\tan x + C.
\end{aligned}$$

3. Calcular $\displaystyle\int \csc^3 x \; dx$.

Solución:

Tenemos

$$\int \csc^3 x\ dx = \int (\operatorname{sen} x)^{-3}\ dx \qquad m = 0, \quad n = -3, \qquad m + n = -3.$$

Con la sustitución II tenemos:

$$\begin{aligned} \cot x &= \operatorname{senh}\theta \\ \csc x &= \cosh\theta \\ dx &= \frac{-1}{\cosh\theta}\ d\theta \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int \csc^3 x\ dx &= \int \frac{-\cosh^3\theta}{\cosh\theta}\ d\theta \\ &= -\int \cosh^2\theta\ d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{senh}(2\theta) + C \\ &= -\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta + C \\ &= -\frac{1}{2}\ln(\operatorname{senh}\theta + \cosh\theta) - \frac{1}{2}\operatorname{senh}\theta\cosh\theta + C \\ &= -\frac{1}{2}\ln(\cot x + \csc x) - \frac{1}{2}\csc x\cot x + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cot x + \csc x}\right) - \frac{1}{2}\csc x\cot x + C. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \operatorname{sen}^2 x &= 1 - \cos^2 x \\ \operatorname{sen}^2 x &= (1 - \cos x)(1 + \cos x), \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\csc x + \cot x} &= \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \\ &= \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \\ &= \csc x - \cot x. \end{aligned}$$

Así

$$\int \csc^3 x \; dx = \frac{1}{2} \ln (\csc x - \cot x) - \frac{1}{2} \csc x \cot x + C.$$

4. Calcular $\displaystyle\int \tan^2 x \sec x \; dx$.

   Solución:

   Escribimos la integral como

$$\int \tan^2 x \sec x \; dx = \int \cos^{-3} x \operatorname{sen}^2 x \; dx \qquad m = -3,\ n = 2,\ m + n = -1.$$

   Usamos la sustitución I, entonces

$$\begin{aligned} \tan x &= \operatorname{senh} \theta \\ \sec x &= \cosh \theta \\ dx &= \frac{1}{\cosh \theta} \; d\theta. \end{aligned}$$

   De donde

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \sec x \; dx &= \int \operatorname{senh}^2 \theta \frac{\cosh \theta}{\cosh \theta} \; d\theta \\ &= \int \operatorname{senh}^2 \theta \; d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int \cosh (2\theta) - 1 \; d\theta \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{senh} (2\theta) - \frac{1}{2} \theta \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{senh} \theta \cosh \theta - \frac{1}{2} \ln (\operatorname{senh} \theta + \cosh \theta) \\ &= \frac{1}{2} \tan x \sec x - \frac{1}{2} \ln (\sec x + \tan x) + C. \end{aligned}$$

5. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}$.

   Solución:

   En este caso $m = -1$, $n = -2$, $m + n = -3$. Podemos escribir la integral como

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} = \int \frac{\sec^3 x}{\tan^2 x} \; dx.$$

   Usando la sustitución I tenemos:

$$\begin{aligned} \sec^3 x &= \cosh^3 \theta \\ \tan^2 x &= \operatorname{senh}^2 \theta \\ dx &= \frac{1}{\cosh \theta} \; d\theta. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sec^3 x}{\tan^2 x}\ dx &= \int \left(\frac{\cosh^3\theta}{\operatorname{senh}^2\theta}\right)\left(\frac{1}{\cosh\theta}\right)\ d\theta \\
&= \int \coth^2\theta\ d\theta \\
&= \int \left(\operatorname{csch}^2\theta + 1\right)\ d\theta \\
&= -\coth\theta + \theta + C \\
&= -\frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta} + \ln\left(\operatorname{senh}\theta + \cosh\theta\right) + C \\
&= -\frac{\sec x}{\tan x} + \ln\left(\sec x + \tan x\right) + C \\
&= -\csc x + \ln\left(\sec x + \tan x\right) + C.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} = -\csc x + \ln\left(\sec x + \tan x\right) + C.$$

Ahora bien, $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x}$ puede también escribirse como

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} = \int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^3 x}\ dx = \int \cot^2 x \sec^3 x\ dx.$$

Usando la sustitución II tenemos:

$$\begin{aligned}
\cot^2 x &= \operatorname{senh}^2\theta \\
\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} &= \operatorname{senh}\theta \\
\cos x \csc x &= \operatorname{senh}\theta \\
\cos x \cosh\theta &= \operatorname{senh}\theta \\
\cos x &= \frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta} \\
\sec x &= \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta} \\
dx &= -\frac{1}{\cosh\theta}\ d\theta,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int \cot^2 x \sec^3 x \; dx &= \int \operatorname{senh}^2 \theta \left(\frac{\cosh^3 \theta}{\operatorname{senh}^3 \theta} \right) \left(- \frac{1}{\cosh \theta} \right) \; d\theta \\
&= - \int \frac{\cosh^2 \theta}{\operatorname{senh} \theta} \; d\theta \\
&= - \int \frac{1 + \operatorname{senh}^2 \theta}{\operatorname{senh} \theta} \; d\theta \\
&= - \int \operatorname{csch} \theta \; d\theta - \int \operatorname{senh} \theta \; d\theta \\
&= \ln \left(\operatorname{csch} \theta + \coth \theta \right) - \cosh \theta + C \\
&= \ln \left(\frac{1}{\operatorname{senh} \theta} + \frac{\cosh \theta}{\operatorname{senh} \theta} \right) - \csc x + C \\
&= \ln \left(\frac{1}{\cot x} + \frac{\csc x}{\cot x} \right) - \csc x + C \\
&= \ln \left(\tan x + \sec x \right) - \csc x + C.
\end{aligned}$$

Este método es llamado sustitución imaginaria porque originalmente se uso la sustitución:

$$\tan x = i \operatorname{sen} \theta$$

de donde

$$d \left(\tan x \right) = i \cos \theta \; d\theta$$

y

$$\sec x = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} = \cos \theta.$$

Así en el ejemplo 1 tenemos

$$\int \sec x \; dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sec x} \; dx = \int \frac{d \left(\tan x \right)}{\sec x} = \int \frac{i \cos \theta}{\cos \theta} \; d\theta = \int i \; d\theta = i\theta + C.$$

Como

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \\
i\theta &= \ln \left(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \right) \\
&= \ln \left(\sec x + \tan x \right).
\end{aligned}$$