Geometría Analítica II | Lista de ejercicios

Alumno: *Rigoberto Canseco López*

1. Escribe las *ecuaciones canónicas* de las cónicas indicando qué cumple cada una.

2. De todas las formas de ecuación de las siguiente rectas:

a) Tiene vector director $(3, 3, 1)$ y pasa por $(0, 4, 2)$

Usando la ecuación paramétrica $\ell : (x, y, z) = P + \lambda v$

Donde: $P = (0, 4, 2) \quad \text{y} \quad v = (3, 3, 1)$

$$\begin{aligned} \ell : (x, y, z) &= P + \lambda v \\ &= (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \\ &= (0, 4, 2) + \lambda(3, 3, 1) \\ &= (0, 4, 2) + (\lambda 3, \lambda 3, \lambda 1) \\ &= (0 + \lambda 3, 4 + \lambda 3, 2 + \lambda 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{gathered} x = x_0 + \lambda v_1, \quad x - x_0 = \lambda v_1, \quad \frac{x - x_0}{v_1} = \lambda \\ \frac{x - 0}{3} = \lambda \\ y = y_0 + \lambda v_2, \quad y - y_0 = \lambda v_2, \quad \frac{y - y_0}{v_2} = \lambda \\ \frac{y - 4}{3} = \lambda \\ z = z_0 + \lambda v_3, \quad z - z_0 = \lambda v_3, \quad \frac{z - z_0}{v_3} = \lambda \\ \frac{z - 2}{1} = \lambda \end{gathered}$$

La ecuación simétrica está dada por:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Sustituyendo los valores en la ecuación tenemos que:

$$\begin{gathered} \frac{x - 0}{3} = \frac{y - 4}{3} = \frac{z - 2}{1} \\ \frac{x}{3} = \frac{y - 4}{3} = z - 2 \end{gathered}$$

b) Pasa por $(1, -2, 5)$ y por $(3, -3, 4)$

La ecuación paramétrica es $\ell : (x, y, z) = P + \lambda v$

Calculamos el vector v que es la diferencia de P_1 y P_2

Tenemos los siguientes puntos $P_1(1, -2, 5)$ y $P_2(3, -3, 4)$

El vector director es:

$$\begin{aligned} v =& P_1 - P_2 \\ =& (1, -2, -5) - (3, -3, 4) \\ =& (1 - 3, -2 + 3, -5 - 4) \\ =& (-2, 1, -9) \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación paramétrica para el punto P_1 es:

$$\begin{aligned}\ell : (x, y, z) &= P + \lambda v \\ &= (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \\ &= (1, -2, 5) + \lambda(-2, 1, -9)\end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación paramétrica para el punto P_2 es:

$$\begin{aligned}\ell : (x, y, z) &= P + \lambda v \\ &= (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \\ &= (3, -3, 4) + \lambda(-2, 1, -9)\end{aligned}$$

La ecuación simétrica está dada por:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z1}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-(-2)}{3-(-2)} = \frac{z-5}{4-5}$$
$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+2}{3+2} = \frac{z-5}{4-5}$$

c) Tiene como vector director al vector normal de los vectores $(1, 1, 1)$ y $(-1, 0, 2)$ y que pasa por el punto $(4, 2, 1)$

3. Encuentra la ecuación del plano cuyo vector normal es el $(3,-1,5)$ y que contiene el punto $(2,-1,0)$

La ecuación del plano es $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, donde nuestro vector normal es $v(A, B, C) = (3, -1, 5)$ y nuestro punto $P(x_0, y_0, z_0) = (2, -1, 0)$

Sustituyendo el punto P en la ecuación del plano $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{gathered} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D \end{gathered}$$

Sustituyendo los valores de el v y P en la ecuación de arriba nos queda que:

$$\begin{aligned} &Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D \\ &= (3)(2) + (-1)(-1) + (5)(0) = -D \\ &= 6 + 1 + 0 = -D \\ &= 7 = -D \end{aligned}$$

Por lo tanto $D = -7$

Por último tenemos que la ecuación de plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, sustituimos los valores del vector normal v y de D.

$$\begin{gathered} Ax + By + Cz + D = 0 \\ (3)x + (-1)y + (5)z + (-7) = 0 \\ 3x - y + 5z - 7 = 0 \end{gathered}$$

4. Encuentra la ecuación del plano que pasa por los puntos $(3,4,1),(-1,-2,-5)$ y $(1,7,1)$

Tenemos tres puntos $P_1(3,4,1)$, $P_2(-1,-2,-5)$ y $P_3(1,7,1)$

Obtenemos la diferencia de dos puntos P_1 y P_2

$$\begin{aligned} P_1 - P_2 &= (3,4,1) - (-1,-2,-5) \\ &= (3-(-1), 4-(-2), 1-(-5)) \\ &= (3+1, 4+2, 1+5) \\ &= (4,6,6) \end{aligned}$$

Obtenemos la diferencia de dos puntos P_2 y P_3

$$\begin{aligned} P_2 - P_3 &= (-1,-2,-5) - (1,7,1) \\ &= (-1-(1), -2-(7), -5-(1)) \\ &= (-1-1, -2-7, 5-1) \\ &= (-2,-9,4) \end{aligned}$$

Obtenemos el vector normal del producto cruz de $(4,6,6)$ y $(-2,-9,4)$

```
In[4]:= {4, 6, 6} × {-2, -9, 4}

Out[4]= {78, -28, -24}
```

Por lo tanto el vector normal del plano es $(78,-28,-24)$

Sustituyendo los valores de el vector $v(78,-28,-24)$ y $P_1(3,4,1)$ en la ecuación $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$ nos queda que:

$$\begin{aligned} &Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D \\ &= (78)(3) + (-28)(4) + (-24)(1) = -D \\ &= 234 + (-112) + (-24) = -D \\ &= -112 = -D \end{aligned}$$

Por lo tanto $D = 112$

Por último tenemos que la ecuación de plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, sustituimos los valores del vector normal v y de D.

$$\begin{gathered} Ax + By + Cz + D = 0 \\ (78)x + (-28)y + (-24)z + (112) = 0 \\ 78x - 28y + -24z + 112 = 0 \end{gathered}$$

5. Sea $P = (x, y, z)$ demuestre lo siguiente

a) P **y** $-P$ **son simétricos respecto al origen**

b) P **y** $(-x, y, -z)$ **son simétricos respecto al eje** Y

c) P **y** $(x, -y, -z)$ **son simétricos respecto al eje** X

d) P **y** $(-x, y, z)$ **son simétricos respecto al plano** π_{YZ}**.**

e) P **y** $(x, -y, z)$ **son simétricos respecto al plano** π_{XZ}**.**

6. Para cada uno de los siguientes lugares geométricos analice las siete simetrías vistas en clase. En caso de que se cumpla alguna, demuéstrela, de lo contrario exhiba un contra ejemplo:

a) $\mathscr{G} : 2x + 3y + z = 0$

b) $\mathscr{G} : 3x^2 - z^2 = 9$

c) $\mathscr{G} : x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 16$

d) $\mathscr{G} : x + y - z^2 = 1$

e) $\mathscr{G} : x^3 - y/2 - z^2 = 3$

7. Suponga $C, S \in \mathbb{R}^3$. Pruebe que si $(C - S) \perp e_1$, entonces C y S tienen la misma primer coordenada.

Demostración:

Sean que $C = (x_0, y_0, z_0)$ y $S(x_1, y_1, z_1)$ entonces tenemos que $C, S \in \mathbb{R}^3$ y $(C - S) \perp e_1$

Donde $e_1 = (1, 0, 0)$

$$(C - S) \perp e_1 = ((x_0, y_0, z_0) - (x_1, y_1, z_1)) \perp e_1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \perp e_1 \\
&= (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (1, 0, 0) \\
&= (x_0 - x_1)(1) + (y_0 - y_1)(0) + (z_0 - z_1)(0) = 0 \\
&= (x_0 - x_1) + 0 + 0 = 0 \\
&= x_0 - x_1 = 0
\end{aligned}$$

Nos queda que $x_0 = x_1$

Por lo tanto tienen la misma primer coordenada.

8. Suponga $C, S \in \mathbb{R}^3$. Pruebe que si $(C - S) \perp e_2$, entonces C y S tienen la misma segunda coordenada.

Demostración:

Sean que $C = (x_0, y_0, z_0)$ y $S(x_1, y_1, z_1)$ entonces tenemos que $C, S \in \mathbb{R}^3$ y $(C - S) \perp e_2$

Donde $e_1 = (1, 0, 0)$

$$(C - S) \perp e_2 = ((x_0, y_0, z_0) - (x_1, y_1, z_1)) \perp e_1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \perp e_2 \\
&= (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (0, 1, 0) \\
&= (x_0 - x_1)(0) + (y_0 - y_1)(1) + (z_0 - z_1)(0) = 0 \\
&= 0 + (y_0 - y_1) + 0 = 0 \\
&= y_0 - y_1 = 0
\end{aligned}$$

Nos queda que $y_0 = y_1$

Por lo tanto tienen la misma segunda coordenada.

9. En cada inciso halle la ecuación cartesiana para la superficie de revolución generada por el lugar geométrico $\mathscr{G}$ y la recta ℓ.

> **Lema 1:** Si $S, C \in \mathbb{R}^3$ y $C - S \perp e_3 \Rightarrow C$ y S tienen la misma tercer coordenada.
>
> **Lema 2:** Si $S, C \in \mathbb{R}^3$ y $C - S \perp e_2 \Rightarrow C$ y S tienen la misma segunda coordenada.
>
> **Lema 3:** Si $S, C \in \mathbb{R}^3$ y $C - S \perp e_1 \Rightarrow C$ y S tienen la misma primer coordenada.
>
> **Corolario 1:** Si $C \in Z$ y $Q \in \mathscr{R}$, donde $\mathscr{R}$ es la superficie de revolución generada por el eje Z, entonces C y Q tienen la misma tercer coordenada.
>
> **Corolario 2:** Si $C \in Y$ y $Q \in \mathscr{R}$, donde $\mathscr{R}$ es la superficie de revolución generada por el eje Y, entonces C y Q tienen la misma segunda coordenada.
>
> **Corolario 3:** Si $C \in X$ y $Q \in \mathscr{R}$, donde $\mathscr{R}$ es la superficie de revolución generada por el eje X, entonces C y Q tienen la misma primer coordenada.

a) $\mathscr{G}$:" $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ " y ℓ es el eje X.

Sean $C \in eje\ X,\ \ Q \in \mathscr{G}\ $ y $P \in \mathscr{R}$

Como $\mathscr{G}$:" $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ " por lo tanto

Se hace un cambio de variable $w = y$

$$w = y = \sqrt{\frac{(1 - x^2)}{2}}$$

Por el lema 3 y el corolario 3 podemos deducir los valores de C y Q.

Donde $C = (x, 0, 0)$, $Q = (x, w, 0)$, $P(x, y, z)$ y $v = e_1 = (1, 0, 0)$

- Probar que $(C - P) \perp v$:

$$\begin{aligned}(C - P) \perp e_1 &= ((x, 0, 0) - (x, y, z)) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (x - x, 0 - y, 0 - z) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, -y, -z) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

  Por lo tanto $(C - P)$ es perpendicular a e_1

- Probar que $(C - Q) \perp v$:

$$\begin{aligned}(C - Q) \perp e_1 &= ((x, 0, 0) - (x, w, 0)) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (x - x, 0 - w, 0 - 0) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, -w, 0) \cdot (1, 0, 0) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

  Por lo tanto $(C - Q)$ es perpendicular a e_1

- Probar que $d(P, C) = d(Q, C)$:

$$\begin{aligned} d(P,C) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} \\ &= \sqrt{(0)^2+(y)^2+(z)^2} \\ &= \sqrt{y^2+z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(Q,C) &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x-x)^2+(w-0)^2+(0-0)^2} \\ &= \sqrt{(0)^2+(w)^2+(0)^2} \\ &= \sqrt{(w)^2} = w \end{aligned}$$

Desarrollamos la igualdad

$$\begin{gathered} d(P,C) = d(Q,C) \\ \sqrt{y^2+z^2} = w \end{gathered}$$

Como $w = \sqrt{\frac{(1-x^2)}{2}}$

$$\begin{gathered} \sqrt{y^2+z^2} = \sqrt{\frac{(1-x^2)}{2}} \\ y^2+z^2 = \frac{(1-x^2)}{2} \\ 2(y^2+z^2) = (1-x^2) \\ \sqrt{1-2(y^2+z^2)} = x \end{gathered}$$

Por lo tanto los puntos $(x,y,z) \in \mathscr{R}$ tiene que ser la ecuación cartesiana $\sqrt{1-2(y^2+z^2)} = x$

---

b) $\mathscr{G} : x^2 - 2y + 3 = 1, z = 0$ y ℓ es el eje Y.

Sean $C \in eje\ Y$, $Q \in \mathscr{G}$ y $P \in \mathscr{R}$

Por el lema 2 y el corolario 2 podemos deducir los valores de C y Q.

Donde $C = (0,y,0)$, $Q = (x,y,0)$, $P(x,y,z)$ y $v = e_2 = (0,1,0)$.

Despejamos x en $x^2 - 2y + 3 = 1$ tenemos que

$$x = \sqrt{2y-2}$$

- Probar que $(C-P)\perp v$:

$$\begin{aligned} (C-P)\perp e_2 &= ((0,y,0)-(x,y,z)) \cdot (0,1,0) \\ &= (0-x, y-y, 0-z) \cdot (0,1,0) \\ &= (-x,0,-z) \cdot (0,1,0) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

  Por lo tanto $(C-P)$ es perpendicular a e_2

- Probar que $(C-Q)\perp v$:

$$\begin{aligned} (C-Q)\perp e_2 &= ((0,y,0)-(x,y,0)) \cdot (0,1,0) \\ &= (0-x, y-y, 0-0) \cdot (0,1,0) \\ &= (-x,0,0) \cdot (0,1,0) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

  Por lo tanto $(C-Q)$ es perpendicular a e_2

- Probar que $d(P,C) = d(Q,C)$:

$$\begin{aligned} d(P,C) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} \\ &= \sqrt{(x)^2 + (0)^2 + (z)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + z^2} \\ d(Q,C) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (0-0)^2} \\ &= \sqrt{(x)^2 + (0)^2 + (0)^2} \\ &= \sqrt{(x)^2} = x \end{aligned}$$

Desarrollamos la igualdad

$$d(P,C) = d(Q,C)$$
$$\sqrt{x^2 + z^2} = x$$

Como $x = \sqrt{2y-2}$

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{2y-2}$$
$$x^2 + z^2 = 2y - 2$$
$$\frac{x^2 + z^2}{2} + 1 = y$$

Por lo tanto los puntos $(x,y,z) \in \mathscr{R}$ tiene que ser $\frac{x^2+z^2}{2} + 1 = y$

c) $\mathscr{G} : x^2 + 2y^2 + 6y - 7 = 1, z = 0$ y ℓ es el eje X.

d) $\mathscr{G} : x^2 + 8y = 1, z = 0$ y ℓ es el eje Y.

e) $\mathscr{G} : 2x^2 - 5y + 7 = 1, z = 0$ y ℓ es el eje X.

10. Para cada uno de los siguientes incisos deberá:

a) Identificar a $\mathscr{Q}$

b) Obtener ecuaciones cartesianas de $\mathscr{Q} \cap \pi_{XY}$, $\mathscr{Q} \cap \pi_{YZ}$ y $\mathscr{Q} \cap \pi_{XY}$ indicando qué lugar geométrico es. En caso de ser una cónica, indicar centros, vértices, ejes mayores y menores (donde existan según el caso).

c) Hallar las secciones transversales de $\mathscr{Q}$ para $\pi_1 : x = 4, \pi_2 : y = 4, \pi_3 : z = 4$. En caso de ser una cónica, indicar centros, vértices, ejes mayores y menores (donde existan según el caso).

i) $\mathscr{Q} : x^2/9 + y^2/16 - z^2/4 = 1$
ii) $\mathscr{Q} : x^2/4 + y^2/9 = 0$
iii) $\mathscr{Q} : 2y^2 - 4z^2 = x^2$
iv) $\mathscr{Q} : 5y^2 + y^2/3 - z = x^2$
v) $\mathscr{Q} : x + y^3 - z/5 = x^2$

11. Indique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justifica tu respuesta con una demostración o un contra ejemplo.

a) $\mathscr{G} : 5z^2 + 5y^2 = 1$ **es un cilindro elíptico cuyo eje es el eje** X

b) $\mathscr{G} : x^2 + 2z^2 = 0$ **posee las siete simetrías vistas en clase.**

c) Considera $P = (2, 3, 8)$ **y** $P' = (-2, -3, -8), PyP'$ **son simétricos respecto al plano** π_{XZ}

d) Considera $P = (2, 3, 8)$ **y** $P' = (-2, -3, -8), PyP'$ **son simétricos respecto al eje** Y **.**

e) La intersección entre una superficie cuadrática y un plano cartesiano $(\pi_{XY}, \pi_{YZ}, \pi_{XZ})$ **es una cónica.**

f) $x^2 + y^2 = 25$ **Es la ecuación de una circunferencia con radio** 5

g) Todo lugar geométrico cumple al menos una de las simetrías respecto a ejes, planos (coordenados) o el origen.