# Tarea 6

**Rigoberto Canseco López**

## **1.** $\int \frac{1}{x^2+5x+6}\, dx$

Se puede completar la diferencia de cuadrados, $x^2+5x+6=(x+\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4}$

$$\int \frac{1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\, dx$$

Para la integral $\frac{1}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$, sustituimos $u=x+\frac{5}{2}$ y $du=dx$

$$\int \frac{1}{u^2-\frac{1}{4}}\, du$$

Multiplicamos por 4 el denominar y el nominador

$$\begin{gathered}\int \frac{4}{4u^2-1}\, du \\ =4\int \frac{1}{4u^2-1}\, du \\ =-4\int \frac{1}{1-4u^2}\, du\end{gathered}$$

Para la integral $\frac{1}{1-4u^2}$, sustituimos $s=2\,u$ y $ds=2\,du$

$$-2\int \frac{1}{1-s^2}\, ds$$

La integral de $\frac{1}{1-s^2}$ es $\tanh^{-1}(s)$

$$=-2\tanh^{-1}(s)+C$$

Sustituimos de regreso $s=2\,u$

$$=-2\tanh^{-1}(2u)+C$$

Sustituimos de regreso $u=x+\frac{5}{2}$

$$=-2\tanh^{-1}(2x+5)+C$$

Por lo tanto la integral es igual a

$$-2\tanh^{-1}(2x+5)+C \quad \blacksquare$$

## 2. $\int x^2\sqrt{5-x^2}\ dx$

Para la integral $x^2\sqrt{5-x^2}$, sustituimos $x=\sqrt{5}(u\sin)$ y $dx=\sqrt{5}\cos u\,du$. Por lo tanto $\sqrt{5-x^2}=\sqrt{5-5\sin^2 u}=\sqrt{5}\cos u$ y $u=sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{5}})$

$$=\sqrt{5}\int 5\sqrt{5}\left(\sin^2 u\right)\left(\cos^2 u\right)\ du$$
$$=25\int\left(\sin^2 u\right)\left(\cos^2 u\right)\ du$$

Reescribimos $\cos^2 u$ como $1-\sin^2 u$

$$=25\int\left(\sin^2 u\right)\left(1-\sin^2 u\right)\ du$$
$$=25\int\left(\sin^2 u-\sin^4 u\right)\ du$$
$$=-25\int\sin^2 u\,du-25\int\sin^4 u\,du$$

Usando la fórmula, $\int\sin^m u\,du=-\frac{(u\cos)(\sin^{m-1}u)}{m}+\frac{m-1}{m}\int\sin^{-2+m}u\,du$, donde $m=4$

$$=\frac{25}{4}\left(\sin^3 u\right)(\cos u)+\frac{25}{4}\int\sin^2 u\,du$$

Escribiendo $\sin^2 u$ como $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2u)$

$$=\frac{25}{4}\left(\sin^3 u\right)(\cos u)+\frac{25}{4}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2u)\right)\ du$$

Integrando la suma término por término y factorizando las constantes

$$=\frac{25}{4}\left(\sin^3 u\right)(\cos u)-\frac{25}{8}\int\cos(2u)\,du+\frac{25}{8}\int 1\,du$$

Para el integrando $\cos 2u$, sustituimos $s=2\ u$ y $ds=2\ du$

$$=\frac{25}{4}\left(\sin^3 u\right)(\cos u)-\frac{25}{16}\int\cos s\,ds+\frac{25}{8}\int 1\,du$$

La integral de $\cos s$ es $\sin s$

$$-\frac{25(\sin s)}{16}+\frac{25}{4}\left(\sin^3 u\right)(\cos u)+\frac{25}{8}\int 1\,du$$

La integral de 1 es $u$

$$-\frac{25(\sin s)}{16}+\frac{25u}{8}+\frac{25}{4}\left(\sin^3 u\right)(\cos u)+C$$

Sustituimos $s=2\ u$

$$\frac{25u}{8}+\frac{25}{4}\left(\sin^3 u\right)(\cos u)-\frac{25}{8}(\sin u)(\cos u)+C$$

Sustituimos $u=\sin^{-1}(x/\sqrt{5})$

$$=\frac{25}{8}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{25}{4}\sin(\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{5}}))^3\cos(\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{5}}))-\frac{25}{8}\sin(\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{5}}))\cos(\sin^{-1}(\frac{x}{\sqrt{5}}))+C$$

Simplificando $\cos(\sin^{-1}z)=\sqrt{1-z^2}$ y $\sin(\sin^{-1}z)=z$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\sqrt{5-x^2}x^3 - \frac{5}{8}\sqrt{5-x^2}x + \frac{25}{8}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + C \\
&= \frac{1}{8}\left(x\left(2x^2-5\right)\sqrt{5-x^2} + 25\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right) + C
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la integral es

$$
\frac{1}{8}\left(x\left(2x^2-5\right)\sqrt{5-x^2} + 25\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right) + C \quad \blacksquare
$$

## 3. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\ dx$

Para la integral de $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$, sustituimos $x = 2\tan u$ y $dx = 2\sec^2 u\ du$. Entonces $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4\tan^2 u + 4} = 2\sec u$ y $u = \tan^{-1}\frac{x}{2}$

$$= 2\int \frac{\sec u}{2}\, du$$
$$= \int \sec u\ du$$

Multiplicando el numerador y denominador de $\sec u$ por $\tan u + \sec u$

$$= \int \frac{\sec^2 u + (\sec u)(\tan u)}{\sec u + \tan u}\ du$$

Para la integral de $\frac{\sec^2 u + (\sec u)(\tan u)}{\sec u + \tan u}$, sustituimos $s = \tan u + \sec u$ y $ds = \sec^2 u + (\tan u)(\sec u)\ du$

$$= \int \frac{1}{s}\, ds$$

La integral de $\frac{1}{s}$ es $\ln s$

$$= \ln s + C$$

Sustituyendo $s = \tan u + \sec u$

$$\ln(\tan u + \sec u) + C$$

Sustituyendo $u = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= \ln(\tan(\tan^{-1}\frac{x}{2}) + \sec(\tan^{-1}\frac{x}{2})) + C$$

Simplificando $\sec\tan^{-1} z = \sqrt{z^2+1}$ y $\tan(\tan^{-1} z) = z$

$$= \ln(\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+4} + x)) + C$$

Por lo tanto la integral es

$$\ln(\frac{1}{2}(\sqrt{x^2+4} + x)) + C \quad \blacksquare$$

## 4. $\int \frac{1}{3x^2-x+1}\ dx$

Se completa el binomio cuadrado $3x^2 - x + 1$

$$= \int \frac{1}{\left(\sqrt{3}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{11}{12}}\ dx$$

Para la integral $\frac{1}{\left(\sqrt{3}x-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\frac{11}{12}}$, sustituimos $u = \sqrt{3}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ y $du = \sqrt{3}\ dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2 + \frac{11}{12}}\ du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{12}{11\left(\frac{12u^2}{11} + 1\right)}\ du$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{11} \int \frac{1}{\frac{12u^2}{11} + 1}\ du$$

Para la integral $\frac{1}{\frac{12u^2}{11}+1}$ , sustituimos $s = 2\sqrt{\frac{3}{11}}\ u$ y $ds = 2\sqrt{\frac{3}{11}}\ du$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}} \int \frac{1}{s^2+1} ds$$

La integral de $\frac{1}{s^2+1}$ es $\tan^{-1} s$

$$\frac{2\tan^{-1} s}{\sqrt{11}} + C$$

Sustituimos $s = 2\sqrt{\frac{3}{11}}u$

$$= \frac{2\tan^{-1}\left(2\sqrt{\frac{3}{11}}u\right)}{\sqrt{11}} + C$$

Sustituimos $u = \sqrt{3}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$$= \frac{2\tan^{-1} \frac{(6x-1)}{\sqrt{11}}}{\sqrt{11}} + C$$

Por lo tanto la integral es

$$\frac{2\tan^{-1} \frac{(6x-1)}{\sqrt{11}}}{\sqrt{11}} + C \quad \blacksquare$$

## 5. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\ dx$

Sustituimos $x = \sin u$ y $dx = \cos u\ du$. Entonces $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-u\sin^2} = \cos u$ y $u = \sin^{-1} x$

$$= \int \cot^2 u\, du$$

Reescribimos $\cot^2 u$ como $\csc^2 u - 1$

$$= \int \csc^2 u - 1\ du$$

Integramos la suma término por término

$$= \int \csc^2 u\, du - \int 1\, du$$

La integral de $\csc^2 u$ es $-\cot u$

$$= -\cot u - \int 1\, du$$

La integral de $1$ es $u$

$$= -u - \cot u + C$$

Sustituimos $u = \sin^{-1} x$

$$-\sin^{-1} x - \cot(\sin^{-1} x) + C$$

Simplificamos usando $\cot(\sin^{-1} z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^2} + x\sin^{-1} x}{x} + C$$

Por lo tanto la integral buscada es

$$-\frac{\sqrt{1-x^2} + x\sin^{-1} x}{x} + C \quad \blacksquare$$

**6.** $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\, dx$

## 7. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}\, dx$

Para la integral $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$, sustituimos $u = e^x$ y $du = e^x\ dx$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u^2+u+1}}\, du$$

Completamos el cuadrado

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\, du$$

Para la integral $\frac{1}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$, substituimos $s = u + \frac{1}{2}$ y $ds = du$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{s^2+\frac{3}{4}}}\, ds$$

Para la integral $\frac{1}{\sqrt{s^2+\frac{3}{4}}}$, substituimos $s = \frac{1}{2}\sqrt{3}\tan r$ y $ds = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sec^2 r\ dr$. Entonces $\sqrt{s^2+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\tan^2 r\right)+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}(\sec r)$ y $r = \tan^{-1}\frac{2s}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2(\sec r)}{\sqrt{3}}\, dr$$
$$= \int \sec r\ dr$$

La integral de $\sec r$ es $\ln(\tan r + \sec r)$

$$= \ln(\tan r + \sec r) + C$$

Substituimos $p = \tan^{-1}\left(\frac{2s}{\sqrt{3}}\right)$

$$= \ln\left(\tan(\tan^{-1}\frac{2s}{\sqrt{3}}) + \sec(\tan^{-1}\frac{2s}{\sqrt{3}})\right) + C$$

Simplificamos $\sec\ \tan^{-1} z = \sqrt{z^2+1}$ y $\tan\ \tan^{-1} z = z$

$$= \ln\frac{\left(\sqrt{4s^2+3}+2s\right)}{\sqrt{3}} + C$$

Sustituimos $s = u + 1/2$

$$= \ln\frac{2\sqrt{u^2+u+1}+2u+1}{\sqrt{3}} + C$$

Se sustituye $u = e^x$

$$\ln\frac{2\sqrt{e^x+e^{2x}+1}+2e^x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Por lo tanto la integral buscada es

$$\ln\frac{2\sqrt{e^x+e^{2x}+1}+2e^x+1}{\sqrt{3}} + C \quad \blacksquare$$

**8.** $\int \frac{x^4+4x^3-5x^2+2x-6}{x^2\left(x-1\right)^3}$