Tarea 3.
Geometría Moderna

1. Sean A, $B\, y\, C$ tres puntos colineales y sean P el punto medio de BC, Q el punto medio de CA y R el punto medio de AB. Demuestre que el punto medio de CR coincide coon el punto medio de PQ.

2. Dados tres puntos $A, B\, y\, C$ están alineados si y solo si para cualquier otro puntos $\angle ABD = \angle CBD$.

3. Sean A, B, $C\, y\, D$ cuatros puntos distitnos en uuna recta, tenemos que $(AB, CD) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \lambda$.Demuestra que $(AD, CB) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.

4. Demuestre que tres rectas en el plano ampliado determinan un triángulo o son concurrentes.

5. Si A, B, C, D son cuatro puntos armónicos y $O\, y\, O'$ son los puntos medios de AB y CD respectivamente, entonces $(OB)^2 + (O'C)^2 = (OO')^2$.

6. Muestra que los siguientes teoremas son duales:
Teormea 1: Por cada punto diagonal de un cuadrángulo completo pasan cuatro rectas armónicas que son los dos lados que pasan por el punto y las rectas que lo unen con los otros dos puntos diagonales.

Teorema 2: En cada diagonal de un cuadrilátero completo hay una hilera armónica que consiste de los dos vértices en esa diagonal y los puntos en los cuales esta es intersecada por las otras dos diagonales.

7. Si dos circunferencias son tangentes internamente en un punto A y si una secante común interseca a las circunferencias en B', B, $C\, y\, C'$, entonces $\angle B'AC = \angle BAC'$.

8. Dados dos círculos C_1 y C_2 y un circulo T es tangente a C_1 y C_2 en puntos T_1 y T_2 respectivamente, entonces T_1 y T_2 son puntos antihomólogos. Y el centro O de T es la intersección de las rectas T_1O_1 y T_2O_2 Inversamente si T_1 y T_2 son antihomólogos y un círculo T, de centro $T_1O_1 \cap T_2O_2$, es tangente a C_1, entonces es tangente a C_2.

9. La circunferencia de similitud de dos circunferencias no concéntricas y de radios diferentes es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales las dos circunferencias subtienden ángulos iguales.