Puntos armónicos

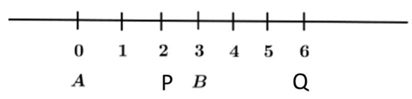
Definición 1. *Si P es un punto, distinto de A y B, que divide un segmento dado AB en una razón r (independientemente que r sea positiva o negativa) y Q divide al mismo segmento en la razón $-r$, se dice que Q es el* ***conjugado armónico*** *de P con respecto a AB.*

Esta definición es equivalente decir que:

$$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$$

dado cualquier punto P, distinto de A y B, tiene conjugado armónico, con respecto a AB, con excepción del punto medio del segmento, ya que no hay un punto que divida al segmento en la razón -1.

Ejemplo Si $AP = 2$, $AQ = 6$, $PB = 1$ y $QB = -3$

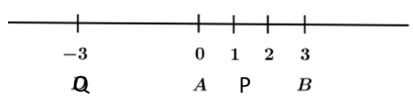


entonces

$$\frac{AP}{PB} = \frac{2}{1} = 2 \qquad y \qquad \frac{AQ}{QB} = \frac{6}{-3} = -2$$

Por tanto Q es el **conjugado armónico** de P con respecto a AB.

Ejemplo Si $AP = 1$, $AQ = -3$, $PB = 2$ y $QB = 6$

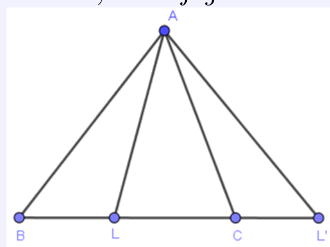


entonces

$$\frac{AP}{PB} = \frac{1}{2} \qquad y \qquad \frac{AQ}{QB} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto Q es el **conjugado armónico** de P con respecto a AB.
¿Y si P es el punto medio de AB? ¿Qué punto sería Q? **El punto al infinito**.

Teorema 1. *Dados tres puntos colineales, el conjugado armónico de cualquiera de ellos es único*



Demostración. Sean B, L, C y L' cuatro puntos colineales tales que

$$\frac{BL}{LC} = -\frac{BL'}{L'C}$$

y sea L" tal que

$$\frac{BL}{LC} = -\frac{BL''}{L''C}$$

ello implica que $L' = L''$, pues no puede haber dos puntos que dividan a un segmento en la misma razón. Es decir, el cuarto armónico es único □

Teorema 2. *Si Q es conjugado armónico de P respecto del segmento AB, entonces Q es conjugado armónico de P respecto del segmento BA.*

Teorema 3. *Si Q es conjugado armónico de P respecto del segmento AB, entonces P es conjugado armónico de Q respecto del segmento AB. Se dice entonces que P y Q son conjugados armónicos respecto de AB o bien que el segmento AB está dividido armónicamente por P y Q.*

Teorema 4. *Si P y Q son conjugados armónicos respecto del segmento AB, entonces A y B son conjugados respecto del segmento PQ. Se dice entonces que A, B; P y Q son una hilera armónica.*

Los tres teoremas anteriores demuestran que todas las permutaciones de A, B, P y Q que conservan las parejas de conjugados armónicos, es también armónica.
Se dice entonces que A, B; P y Q es una hilera armónica y se acostumbra representar como

$$(AB, PQ) = -1$$

Esto es,

$$(AB, PQ) = -1 \Leftrightarrow (BA, PQ) = -1 \Leftrightarrow (BA, QP) = -1 \Leftrightarrow (AB, QP) = -1 \Leftrightarrow (QP, AB) = -1$$

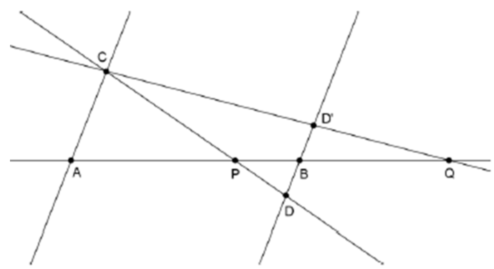
$$\Leftrightarrow (PQ, AB) = -1 \Leftrightarrow (PQ, BA) = -1 \Leftrightarrow (QP, BA) = -1$$

La notación anterior obedece a que dadas dos parejas de puntos A, B y P, Q, se define su razón cruzada como la razón

$$\frac{\frac{AP}{PB}}{\frac{AQ}{QB}}$$

que se denota como (AB, PQ). Dada la definición de puntos armónicos, es claro que su razón cruzada es -1.
Se considera que la razón cruzada de cuatro puntos es el primer invariante proyectivo que fue determinado. De hecho, se desconoce su origen exacto, pero se presume que Menelao de Alejandría (siglo I) lo conocía, ya que un resultado homólogo para grandes círculos aparece en su obra Sphaerica.

Ejemplo Dado un segmento AB y un punto P, para construir el cuarto armónico, es decir el conjugado armónico de P respecto de AB, se puede proceder de la siguiente manera:



Se trazan dos rectas paralelas cualesquiera por A y B, se traza una recta por P que corte a estas paralelas en C y D respectivamente. En la recta DB se construye D' tal que $DB = BD'$. Se traza la recta CD'. El punto Q de intersección de esta recta con AB es el cuarto armónico buscado.
Para demostrar que efectivamente este es el punto buscado, basta comprobar que $\triangle\, ACP \approx \triangle\, BDP$ y que $\triangle\, CAQ \approx \triangle\, D'BQ$, por tener sus ángulos correspondientes iguales, de donde:
por la semejanza $\triangle\, ACP \approx \triangle\, BDP$

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BD}$$

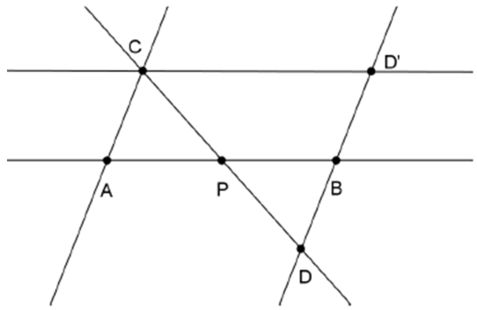
por la semejanza $\triangle\, CAQ \approx \triangle\, D'BQ$

$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{AC}{BD}$$

por tanto

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{DB} \quad y \quad \frac{AQ}{QB} = \frac{AC}{-BD'} \;\Rightarrow\; \frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$$

el único punto, distinto de A y B, que no tiene conjugado armónico con respecto a un segmento dado es el punto medio del segmento, ya que no existe un punto ordinario del plano euclidiano que divida al segmento en la razón r = -1. De la misma forma se vio que dado un segmento AB, la razón r en que los puntos exteriores al segmento dividen al segmento se acerca por los dos lados a r= -1, mientras más se alejan los puntos de A y B.
Si además se retoma la construcción que se acaba de realizar, cuando P es el punto medio de AB, se tiene que los triángulos $\triangle\, ACP$ y $\triangle\, BDP$, no sólo son semejantes, sino congruentes y por tanto la recta CD' es paralela a la recta determinada por AB y por tanto su intersección es el punto al infinito de esas rectas.



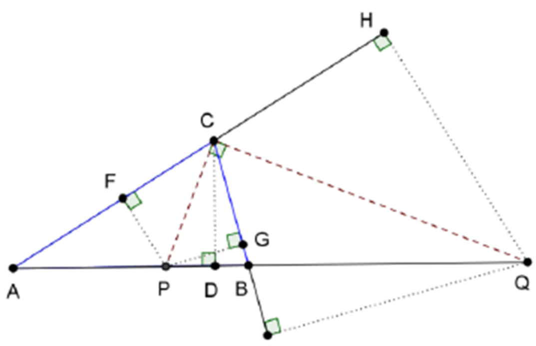
Definición 2. *El conjugado armónico del punto medio de un segmento es el punto al infinito de esa recta. Esto es, si P es el punto al infinito de una recta que contiene al segmento AB, se define*

$$\frac{AP}{PB} = -1$$

De esta forma, dado un segmento AB, cualquier punto P, distinto de A y B, tiene un único conjugado armónico Q respecto del segmento dado.

> **Teorema 5.** *Dado un triángulo cualquiera, los puntos en que las bisectrices interna y externa de cualquiera de sus ángulos cortan al lado opuesto, son conjugados armónicos con respecto a ese lado.*

Demostración. Sea ABC un triángulo, CP y CQ las bisectrices interior y exterior del $\angle C$, respectivamente. Para demostrar que $(AB, PQ) = -1$, se calculará el área de algunos triángulos. Sea entonces CD la perpendicular a AB desde C. Sean PF y PG las perpendiculares a CA y BC desde P y QH y QI las perpendiculares a estos mismos lados desde Q.



Tenemos que

$$\acute{A}rea(\triangle\ APC) = \frac{1}{2}AP \cdot CD, \quad \acute{A}rea(\triangle\ PBC) = \frac{1}{2}PB \cdot CD$$

de donde,

$$\frac{\acute{A}rea(\triangle\ APC)}{\acute{A}rea(\triangle\ PBC)} = \frac{\frac{1}{2}AP \cdot CD}{\frac{1}{2}PB \cdot CD} = \frac{AP}{PB}$$

Pero si ahora se calcula el área de estos mismos triángulos, tomando como base CA y BC respectivamente se tiene que

$$\acute{A}rea(\triangle\ APC) = \frac{1}{2}CA \cdot PF, \quad \acute{A}rea(\triangle\ PBC) = \frac{1}{2}BC \cdot PG$$

pero $PF = PG$ por estar P en la bisectriz del $\angle\ C$, por tanto,

$$\frac{\acute{A}rea(\triangle\ APC)}{\acute{A}rea(\triangle\ PBC)} = \frac{\frac{1}{2}CA \cdot PF}{\frac{1}{2}BC \cdot PG} = \frac{CA}{BC}$$

Se tiene entonces que

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CA}{BC} \tag{1}$$

Ahora se calculará el área de los triángulos AQC y BQC:

$$\acute{A}rea(\triangle\ AQC) = \frac{1}{2}AQ \cdot CD, \quad \acute{A}rea(\triangle\ BQC) = \frac{1}{2}BQ \cdot CD$$

de donde

$$\frac{\acute{A}rea(\triangle\ AQC)}{\acute{A}rea(\triangle\ BQC)} = \frac{\frac{1}{2}AQ \cdot CD}{\frac{1}{2}BQ \cdot CD} = \frac{AQ}{BQ}$$

Pero si ahora se calcula el área de estos mismos triángulos, tomando como base CA y BC respectivamente se tiene que

$$\acute{A}rea(\triangle\ AQC) = \frac{1}{2}CA \cdot QH, \quad \acute{A}rea(\triangle\ BQC) = \frac{1}{2}BC \cdot QI$$

pero $QH = QI$ por estar Q en la bisectriz exterior del $\angle\ C$, por tanto,

$$\frac{\acute{A}rea(\triangle\ AQC)}{\acute{A}rea(\triangle\ BQC)} = \frac{CA}{BC}$$

Se tiene entonces,

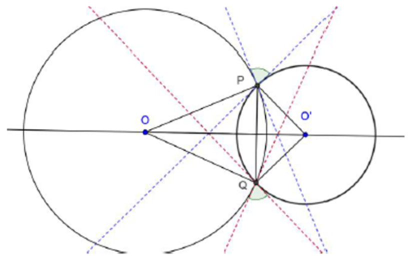
$$\frac{AQ}{BQ} = \frac{CA}{BC} \tag{2}$$

De (1) y (2) se tiene que

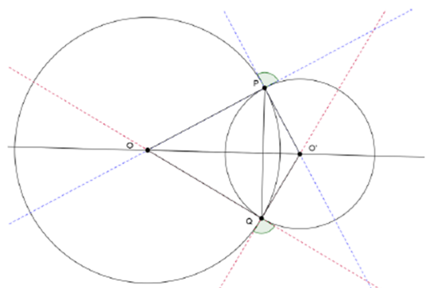
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} = -\frac{AQ}{QB}$$

Por lo tanto $(AB, PQ) = -1$, como se quería demostrar. $\square$

Definición 3. *El ángulo de intersección de dos circunferencias es el ángulo entre sus tangentes en sus puntos de intersección.*

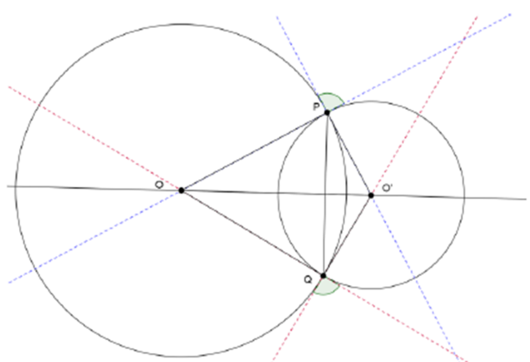


Definición 4. *Dos circunferencias son ortogonales si su ángulo de intersección es recto; esto es, si sus tangentes en sus puntos de intersección son perpendiculares.*



Teorema 6. *Si dos circunferencias son ortogonales entonces el cuadrado de la distancia entre sus centros es igual a la suma de los cuadrados de sus radios.*

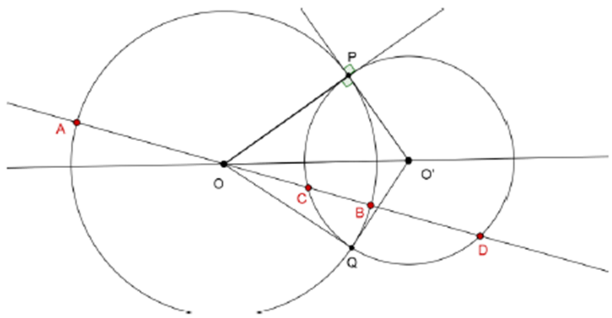
Demostración. Tomando como base la figura



el triángulo OO'P es rectángulo, ya que el ángulo entre sus radios es el ángulo entre las tangentes que es recto, por tanto, por el Teorema de Pitágoras $(OO')^2 = (OP)^2 + (O'P)^2$. □

Teorema 7. *Si dos circunferencias ortogonales son cortadas por una recta que pasa por el centro de una de ellas, los cuatro puntos de intersección forman una hilera armónica.*

Demostración. Sean C y C' dos circunferencias ortogonales con centro en O y O', respectivamente. Sean P y Q, sus puntos de intersección. Sea AB un diámetro en C, que corta a C' en C y D.



Por definición, la potencia del punto O respecto al círculo C con centro en O' es igual a $OC \cdot OD$. Pero, por otro lado, la potencia de O es igual al cuadrado de la longitud de la tangente desde O al círculo C . Por ser ortogonales los dos círculos, OP es tangente a C', por tanto, $OP^2 = OC \cdot OD$, pero ya que $OP = OB$, se tiene que $OB^2 = OC \cdot OD$, y por el teorema anterior, $(AB, CD) = -1$. □