Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable y $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ continua. Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c y

$$F'(c) = f(c).$$

Si $c = a$ o $c = b$, entonces $F'(c)$ representa la derivada lateral de F.

Demostración:

Supongamos que $c \in (a, b)$.
P.D.

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Si $h > 0$, entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\, dt.$$

Sean

$$\begin{aligned} m_h &= \inf \{ f(t) |\ t \in [c, c+h] \} \\ M_h &= \sup \{ f(t) |\ t \in [c, c+h] \} \end{aligned}$$

entonces

$$m_h \leq f(t) \leq M_h \qquad \forall t \in [c, c+h],$$

así

$$h m_h \leq \int_c^{c+h} f(t)\, dt \leq h M_h,$$

de manera que

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Si $h < 0$, sean

$$\begin{aligned} m_h &= \inf \{ f(t) |\ t \in [c+h, c] \} \\ M_h &= \sup \{ f(t) |\ t \in [c+h, c] \} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} m_h(-h) &\leq \int_{c+h}^{c} f(t)\, dt \leq M_h(-h) \\ h m_h &\geq F(c+h) - F(c) \geq h M_h \\ m_h &\leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h. \end{aligned}$$

Hasta aquí no hemos utilizado la continuidad de f.

P. D. $\lim\limits_{h\to 0} m_h = \lim\limits_{h\to 0} M_h = f(c)$.

Probaremos que $\lim\limits_{h\to 0} M_h = f(c)$, es decir,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |h| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |M_h - f(c)| < \varepsilon$$

Como f es continua en c, dada $\varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

es decir,

$$|x - c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\varepsilon}{2} < f(x) - f(c) < \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \quad \Longrightarrow \quad f(c) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(c) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea h tal que $|h| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} -\delta &< h < \delta \\ c - \delta &< c + h < c + \delta \end{aligned}$$

de donde

$$c + h \in (c - \delta, c + \delta)$$

En particular

$$f(x) < f(c) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\, x \in (c, c+h) \quad \text{o} \quad \forall\, x \in (c+h, c)$$

es decir, $f(c) + \frac{\varepsilon}{2}$ es una cota superior de f, de manera que

$$f(c) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < M_h < f(c) + \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde

$$\begin{aligned} f(c) - \frac{\varepsilon}{2} &< M_h < f(c) + \frac{\varepsilon}{2} \\ -\frac{\varepsilon}{2} &< M_h - f(c) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

así

$$|M_h - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Por tanto,

$$0 < |h| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |M_h - f(c)| < \varepsilon,$$

es decir, $\lim\limits_{h\to 0} M_h = f(c)$.

Así

$$\begin{array}{ccccc} m_h & \leq & \dfrac{F(c+h) - F(c)}{h} & \leq & M_h \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ f(c) & & & & f(c) \end{array}$$

de donde

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(c+h)-F(c)}{h}=f(c).$$

Por tanto $F'(c)=f(c)$.

■

A pesar de que parezca extraño definir una función como

$$F(x)=\int_a^x f(t)\ dt,$$

funciones de este estilo aparecen con frecuencia en física, química y estadística. Por ejemplo, la función de Fresnel

$$S(x)=\int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\ dt,$$

que se utiliza en la teoría de difracción de las ondas luminosas. En este caso podemos encontrar la derivada de S, así

$$S'(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right).$$

Ejemplos

1. Calcular $f'(x)$ si

$$f(x)=\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$$

Solución:

La función f es una composición de funciones. Sean

$$F(x)=\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt \qquad \text{y} \qquad g(x)=x^3,$$

entonces

$$F'(x)=\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{y} \qquad g'(x)=3x^2.$$

Como $f(x)=F(g(x))$ entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(g(x))\,g'(x)\\ &= F'\left(x^3\right)3x^2\\ &= \frac{3x^2}{1+\operatorname{sen}^2 x^3}. \end{aligned}$$

2. Calcular $h'(x)$ si

$$h(x)=\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)^3.$$

Solución:

$$h'(x)=3\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)^2\left(\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right).$$

3. Calcular $F'(x)$ si
$$F(x)=\int_{15}^{x}\left(\int_a^y \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)dy.$$
Solución:
$$F'(x)=\int_a^x \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$$

4. Calcular $f'(x)$ si
$$f(x)=\int_a^{\operatorname{sen} x}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt$$
Solución:
$$f'(x)=\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)}.$$

5. Calcular $F'(x)$ si
$$F(x)=\int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$$
Solución:
Escribimos F como
$$F(x)=x\int_a^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\,dt$$
entonces
$$F'(x)=\int_a^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$$

6. Calcular $F'(x)$ si
$$F(x)=\int_a^x xf(t)\,dt.$$
Solución:
Escribimos $F(x)$ como
$$F(x)=x\int_a^x f(t)\,dt,$$
entonces derivamos F como un producto
$$F'(x)=\int_a^x f(t)\,dt+xf(x).$$

7. Calcular $f'(x)$ si
$$f(x)=\int_a^{\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt}\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$$
Solución:

Sea
$$F(x)=\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt$$
entonces
$$F'(x)=\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}.$$
Como $f(x)=F(F(x))$, entonces
$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(F(x))\,F'(x) \\ &= \left(\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt\right)}\right)\left(\frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right). \end{aligned}$$

Corolario

Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua y $f(x)=g'(x)$ para alguna función g, entonces
$$\int_a^b f(t)\,dt=g(b)-g(a).$$

Demostración:

Sea $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, de manera que
$$F'(x)=f(x)=g'(x)\qquad\qquad \forall\, x\in[a,b].$$
Entonces existe c constante tal que
$$F(x)=g(x)+c.$$
Como $F(a)=0$, entonces
$$\begin{aligned} g(a)+c &= 0 \\ c &= -g(a), \end{aligned}$$
de donde
$$F(x)=g(x)-g(a)\qquad\qquad \forall\, x\in[a,b].$$
En particular si $x=b$, tenemos
$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)=g(b)-g(a).$$

■

Definición:
Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Una función g es una primitiva de f en $[a,b]$ si $g'(x)=f(x) \quad \forall\, x\in[a,b]$.
Observación:
Si g_1 y g_2 son primitivas de f, entonces

$$g_1'=g_2' \qquad \text{y} \qquad g_1-g_2=k$$

donde k es una constante.

El corolario anterior muestra que si g es una primitiva de f, entonces $g=F+k$, más aún $g(x)=F(x)+g(a)$.

Para calcular $\int_a^b x^2\,dx$ usamos la defininción. Ahora utilizando el teorema anterior, tenemos que $g(x)=\frac{x^3}{3}$ satisface $g'(x)=x^2$ entonces por el corolario tenemos que

$$\int_a^b x^2\,dx=g(b)-g(a)=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}.$$

Puede pensarse que la conclusión del corolario es la definición de la integral, es decir que

$$\int_a^b f(t)\;dt \qquad \text{se define como } g(b)-g(a)$$

donde g es una primitiva de f. Veamos que tal suposición es errónea.

Sea

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\neq 1\\ 1 & \text{si } x=1\end{cases},$$

ya probamos que f es integrable, más aún $\int_a^b f(x)\;dx=0$, sin embargo no existe g tal que $g'(x)=f(x)$ para todo x.

Justifiquemos esto. Si $g'(x)=f(x)=0$ si $x\neq 1$, de donde g es constante, es decir,

$$g(x)=c \qquad \text{si } x\neq 1,$$

como g es derivable, entonces es continua, de donde g es constante en $\mathbb{R}$.

Por tanto $g(x)\equiv c$ y $g'(x)=0\neq f(x)$.

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, si f es continua entonces $f=g'$ para alguna función g.

Si $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ para $x\in[0,1]$ entonces $f(x)=F'(x)$ donde

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{\cos t}\,dt$$

pero no conocemos ninguna función f con $f=g'$.

Segundo teorema fundamental del Cálculo

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable y $f(x) = g'(x)$ para alguna función g, entonces

$$\int_a^b f(t)\ dt = g(b) - g(a).$$

Demostración:

Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$.

Aplicando el teorema del valor medio para derivadas a la función g en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ tenemos que existe $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$\begin{aligned} g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= f(x_i)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sean

$$\begin{aligned} m_i &= \text{ínf}\{ f(x) |\ x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ M_i &= \sup\{ f(x) |\ x \in [t_{i-1}, t_i]\} \end{aligned}$$

así

$$m_i \le f(x) \le M_i$$

multiplicando la desigualdad por $(t_i - t_{i-1})$, tenemos

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \le f(x)(t_i - t_{i-1}) \le M_i(t_i - t_{i-1})$$

y por (2.3)

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \le g(t_i) - g(t_{i-1}) \le M_i(t_i - t_{i-1}),$$

de donde

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^n g(t_i) - g(t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) = U(f,P)$$

para cualquier partición P. Pero

$$\sum_{i=1}^n g(t_i) - g(t_{i-1}) = g(b) - g(a),$$

así

$$L(f,P) \le g(b) - g(a) \le U(f,P) \qquad \forall P.$$

Como f es integrable, entonces

$$\int_a^b f(t)\ dt = g(b) - g(a).$$

■

Ahora nos interesa aplicar el 1er teorema fundamental del Cálculo a funciones continuas. Para ello es necesario demostrar que:

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \Longrightarrow f \text{ integrable sobre } [a, b] .$$

Observación:

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada entonces $\sup \{L (f, P)\}$ e $\inf \{U (f, P)\}$ existen aunque f no sea integrable.

Definición:

- Integral inferior de f sobre $[a, b] = \sup \{L (f, P)\} = L\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f.$
- Integral superior de f sobre $[a, b] = \inf \{U (f, P)\} = U\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f.$

Obviamente f es integrable si $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$

Probaremos que una función continua es integrable demostrando que esta igualdad se cumple siempre para funciones continuas.

Teorema

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces f integrable sobre $[a, b]$.

Demostración:

Definimos

$$L (x) = L\int_a^x f \qquad \text{y} \qquad U (x) = U\int_a^x f \qquad x \in [a, b] .$$

Sea $x \in (a, b)$ y $h > 0$:

$$\begin{aligned} m_h &= \inf \{ f (t)| \ t \in [x, x + h]\} \\ M_h &= \sup \{ f (t)| \ t \in [x, x + h]\} \end{aligned}$$

de donde

$$m_h (h) \leq L\int_x^{x+h} f \leq U\int_x^{x+h} f \leq M_h (h) ,$$

es decir,

$$m_h (h) \leq L (x + h) - L (x) \leq U (x + h) - U (x) \leq M_h (h) .$$

Así

$$m_h \leq \frac{L (x + h) - L (x)}{h} \leq \frac{U (x + h) - U (x)}{h} \leq M_h. \tag{2.4}$$

Si $h < 0$:

$$\begin{aligned} m_h &= \inf \{ f (t)| \ t \in [x + h, x]\} \\ M_h &= \sup \{ f (t)| \ t \in [x + h, x]\} \end{aligned}$$

De la misma manera que antes, tenemos que

$$m_h(-h) \leq L(x) - L(x+h) \leq U(x) - U(x+h) \leq M_h(-h),$$

de donde

$$m_h \leq \frac{L(x+h) - L(x)}{h} \leq \frac{U(x+h) - U(x)}{h} \leq M_h. \tag{2.5}$$

Como f es continua

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(x). \tag{2.6}$$

De (2.4), (2.5) y (2.6) tenemos que

$$L'(x) = U'(x) = f(x) \qquad x \in [a,b]$$

Entonces, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$U(x) = L(x) + k \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Como $U(a) = L(a) = 0$ se tiene que $k = 0$.

Por tanto,

$$U(x) = L(x) \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

En particular

$$U\int_a^b f = U(b) = L(b) = L\int_a^b f,$$

es decir, f es integrable en $[a,b]$.

■

Teorema

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $f^2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

Demostración:

Sabemos que

$$f^2(x) = (f(x))^2 \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Sean $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$,

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{\, f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ M_i &= \sup\{\, f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m_i' &= \inf\left\{\, (f(x))^2 \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\right\} \\ M_i' &= \sup\left\{\, (f(x))^2 \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\right\}. \end{aligned}$$

P.D. $m_i' = m_i^2$ y $M_i' = M_i^2$.

Sólo probaremos la primera igualdad.

$$\begin{array}{rcll} m_i & \leq & f(x) & \forall\, x \in [t_{i-1}, t_i] \\ m_i^2 & \leq & (f(x))^2 & \text{ya que } f(x) \geq 0, \end{array}$$

de donde m_i^2 es cota inferior de $\left\{ (f(x))^2 \right| \left. x \in [t_{i-1}, t_i] \right\}$.

Sea α cualquier cota inferior de $\left\{ (f(x))^2 \right| \left. x \in [t_{i-1}, t_i] \right\}$, supongamos que $\alpha \geq 0$, en otro caso el resultado se cumple fácilmente.

P.D. $\alpha \leq m_i^2$.

Como α es cota inferior de $\left\{ (f(x))^2 \right| \left. x \in [t_{i-1}, t_i] \right\}$, entonces

$$\begin{array}{rcll} \alpha & \leq & (f(x))^2 & \forall\, x \in [t_{i-1}, t_i] \\ \sqrt{\alpha} & \leq & f(x) & \forall\, x \in [t_{i-1}, t_i] \end{array}$$

entonces $\sqrt{\alpha}$ es cota inferior de $\{ f(x) | \; x \in [t_{i-1}, t_i] \}$ de donde

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{\alpha} & \leq & m_i \\ \alpha & \leq & m_i^2 \end{array}$$

por tanto

$$m_i' = m_i^2.$$

De donde

$$\begin{aligned} U\left(f^2, P\right) - L\left(f^2, P\right) &= \sum_{i=1}^{n} M_i^2 (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i^2 (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(M_i^2 - m_i^2\right)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(M_i + m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

donde $M = \sup \{ f(x) | \; x \in [a, b] \}$. Pero

$$2M \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) = 2M \left(U(f, P) - L(f, P)\right).$$

Como f es integrable, dado $\varepsilon > 0$ existe P partición de $[a, b]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

esto implica que

$$U\left(f^2, P\right) - L\left(f^2, P\right) < \varepsilon,$$

es decir, f^2 es integrable.

■

Teorema

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable, entonces $f^2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable. (f no necesariamente ≥ 0).

Demostración:

Como f es integrable, entonces en particular es acotada. Sea $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall x \in [a,b],$$

es decir

$$\begin{aligned} -M &\leq f(x) \leq M \\ M - M &\leq f(x) + M \leq 2M \\ 0 &\leq f(x) + M \leq 2M. \end{aligned}$$

Como f es integrable, entonces $f(x) + M$ es integrable y además $f(x) + M \geq 0$. Por el teorema anterior tenemos que $(f+M)^2$ es integrable.

Como

$$f^2 = (f+M)^2 - M^2 - 2fM,$$

entonces f^2 es integrable por ser suma de integrables.

■

Teorema

Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables, entonces $f\,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable.

Demostración:

$$fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right].$$

■

Definición:
Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos

$$f^+, f^- : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

como

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Llamamos a f^+ la parte positiva de f y a f^- la parte negativa de f.

Por ejemplo, si la gráfica de f es:

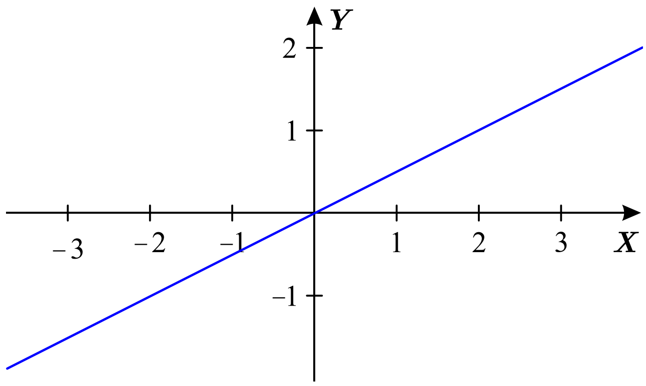

Figura 2-7

entonces las gráficas de f^+ y f^- son

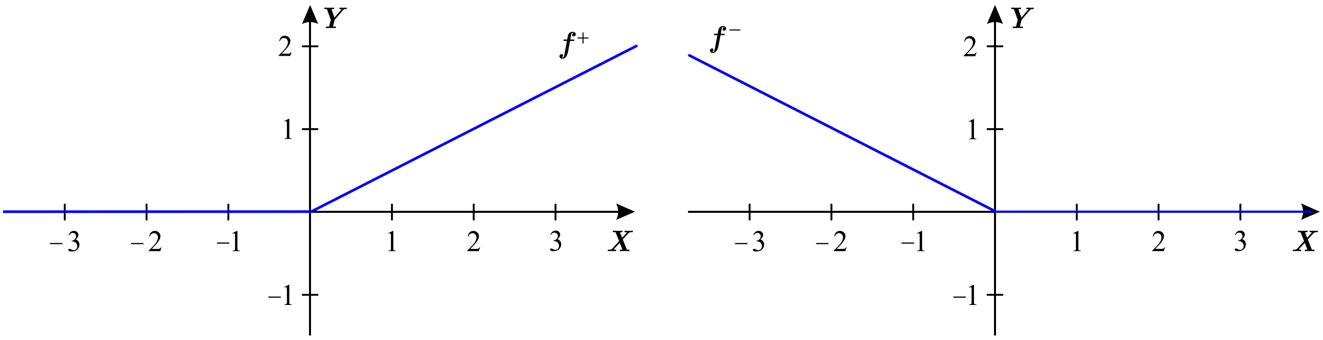

Figura 2-8

Observaciones:

1. $f^+ \geq 0$ y $f^- \geq 0$.
2. $f = f^+ - f^-$.
3. $|f| = f^+ + f^-$.

P.D. $f = f^+ - f^-$.

- Si $f(x) \geq 0$, entonces
$$f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x).$$
- Si $f(x) < 0$, entonces
$$f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x).$$

Se deja como ejercicio, probar que $|f| = f^+ + f^-$.

Lema

Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es integrable, entonces f^{+} es integrable.

Demostración:
Sean $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ una partición de $[a,b]$,

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x)|\ x\in[t_{i-1},t_i]\} \\ M_i &= \sup\{f(x)|\ x\in[t_{i-1},t_i]\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} m_i^{+} &= \inf\left\{f^{+}(x)\middle|\ x\in[t_{i-1},t_i]\right\} \\ M_i^{+} &= \sup\left\{f^{+}(x)\middle|\ x\in[t_{i-1},t_i]\right\}. \end{aligned}$$

Supongamos que existe $x\in[t_{i-1},t_i]$ tal que $f(x)>0$, entonces

$$M_i^{+}=M_i \qquad \text{y} \qquad m_i\le m_i^{+}$$

de donde

$$M_i^{+}-m_i^{+}\le M_i-m_i.$$

Si para todo $x\in[t_{i-1},t_i]$ tenemos que $f(x)\le 0$, entonces

$$M_i^{+}=m_i^{+}=0 \qquad \text{ya que } f^{+}(x)=0,$$

así

$$M_i^{+}-m_i^{+}\le M_i-m_i.$$

En cualquier caso dado $\varepsilon>0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon,$$

pero como

$$U\left(f^{+},P\right)-L\left(f^{+},P\right)\le U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon,$$

entonces f^{+} es integrable en $[a,b]$.

■

Corolario

Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es integrable, entonces f^{-} es integrable.

Demostración:

Escribimos f^{-} como

$$f^{-}=f^{+}-f.$$

■

Teorema

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ es integrable.

Demostración:

Escribimos $|f|$ como
$$|f| = f^{+} + f^{-}.$$
$\blacksquare$

Observación:
El recíproco de este teorema no es cierto.
Sea
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$
entonces
$$|f(x)| = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
De donde, $|f|$ es integrable pero f no lo es.

Teorema

1. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces
$$\int_a^b f(t)\, dt \geq 0.$$

2. Si $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son integrables y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces
$$\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt.$$

Demostración:

1. Sean $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$,
$$M_i = \sup\{ f(x) |\ x \in [t_{i-1}, t_i]\} \geq 0,$$
entonces
$$U(f, P) \geq 0.$$
Por tanto
$$\int_a^b f(t)\, dt = \text{ínf}\{U(f, P)\} \geq 0.$$

2. Como $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $g(x) - f(x) \geq 0$.

   Por el inciso anteior

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) - f(t)\ dt &\geq 0 \\ \int_a^b g(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ dt &\geq 0 \\ \int_a^b g(t)\ dt &\geq \int_a^b f(t)\ dt. \end{aligned}$$

■

Teorema

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $|f|$ es integrable y

$$\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt.$$

Demostración:

En un teorema anterior ya probamos que $|f|$ es integrable. Sólo falta probar la desigualdad.

Como

$$-f(t) \leq |f(t)| \qquad \text{y} \qquad f(t) \leq |f(t)|$$

entonces

$$-\int_a^b f(t)\ dt \leq \int_a^b |f(t)|\ dt \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(t)\ dt \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$$

de donde

$$\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt.$$

■

El siguiente teorema por analogía con el teorema del valor medio para derivadas es llamado el teorema del valor medio para integrales.

Teorema del valor medio para integrales

Sea f continua en $[a,b]$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a) f(c).$$

Observación:
Veamos la analogía entre los dos teoremas.
Si $F' = f$ entonces por el 1^{er} teorema fundamental del Cálculo tenemos que

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Aplicando el teorema del valor medio para derivadas a F en $[a,b]$, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{F(b)-F(a)}{b-a} &= F'(c) = f(c)\\ F(b)-F(a) &= (b-a)\, f(c)\\ \int_a^b f(x)\, dx &= (b-a)\, f(c).\end{aligned}$$

Geométricamente:
La interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales para funciones positivas f, es que existe un número c tal que el rectángulo con base $[a,b]$ y altura $f(c)$ tiene la misma área que la región debajo de la gráfica de f desde a hasta b.

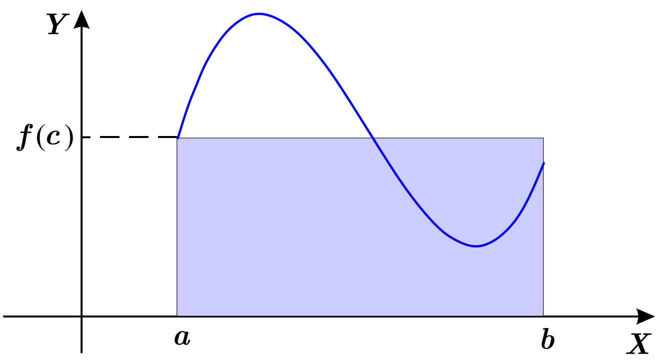

Figura 2-9

Demostración:

Sean m y M los valores mínimo y máximo de f en $[a,b]$, entonces

$$m \leq f(x) \leq M$$

de donde

$$\begin{aligned} m(b-a) &\leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)\\ m &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq M.\end{aligned}$$

Analizamos dos casos:

Si las desigualdades son estrictas

$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx < M.$$

Como f es continua, por el teorema del valor intermedio existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx.$$

Si

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

entonces por ser f continua en $[a,b]$, f alcanza su mínimo en un punto $c \in [a,b]$, de manera que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx.$$

Análogamente con el máximo.

■

Ejemplo

- Sea $f(x) = 4x - x^2$ definida en el intervalo $[0,3]$. Encontrar $c \in [0,3]$ que satisfaga el teorema del valor medio para integrales.

  Solución:

  Calculamos

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(4x - x^2\right)\ dx &= 4\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^3 \\ &= 2x^2 - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^3 \\ &= 2(9) - 9 = 9 \end{aligned}$$

  Aplicando el Teorema del valor medio para integrales

$$\begin{aligned} f(c)(3-0) &= \int_0^3 \left(4x - x^2\right)\ dx \\ 3\left(4c - c^2\right) &= 9 \\ c^2 - 4c + 3 &= 0 \\ (c-3)(c-1) &= 0, \end{aligned}$$

  de donde

$$c = 1 \qquad \text{o} \qquad c = 3.$$

Por tanto, hay dos valores, a saber

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 = \frac{1}{3-0}\int_0^3 \left(4x - x^2\right)\, dx \\ f(3) &= 3 = \frac{1}{3-0}\int_0^3 \left(4x - x^2\right)\, dx. \end{aligned}$$

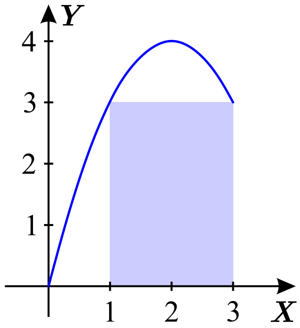

Figura 2-10