Geometría Moderna I

Material para el curso intersemestral en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: Agosto, 2020

Victory won't come to us unless we go to it.

Unidad 2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

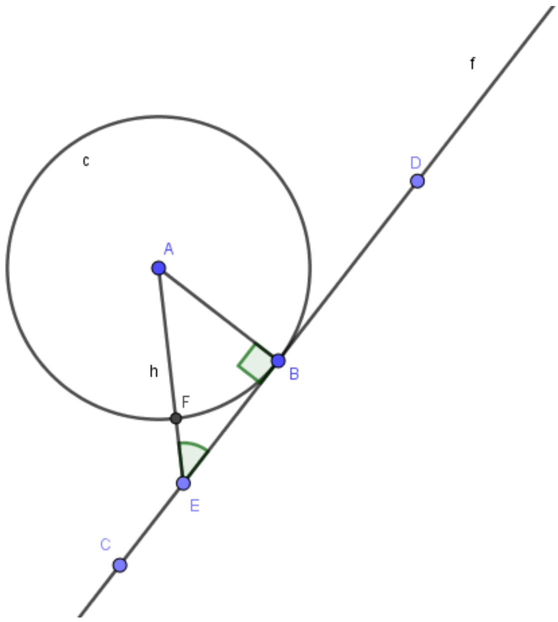
Rectas notables en la circunferencia

Teorema 0.1

Si una recta es tangente a una circunferencia y se construye una recta del centro al punto de contacto, la recta así construida será perpendicular a la tangente.

Demostración Por contradicción.

Sea f una recta tangente en el punto B de contacto de una circunferencia $\mathscr{C}$ con centro en A y radio AB. Por demostrar que f es perpendicular a AB.



Sean C y D puntos en la recta f distintos del punto de contacto. Supongamos que AB no es perpendicular a la recta CD.

Por una proposición vista en clase, podemos construir AE, una perpendicular a CD, entonces el ángulo $\angle BEA$ es un ángulo recto.

Sabemos también que en todo triángulo la suma de cualesquiera dos ángulos es menor que dos ángulos rectos, por lo tanto tenemos que el ángulo $\angle ABE$ es agudo.

Recordemos que en un triángulo el lado opuesto al ángulo mayor es el lado mayor, entonces $AB > AE$...(1)

Sea F un punto de intersección de la circunferencia c con el segmento AE. $AF = AB$ por ser radios de una circunferencia, entonces por (1) $AF > AE$. Sin embargo $AE = AF + FE$, entonces estaríamos diciendo que $AF > AF + FE$ lo cual es una contradicción ya que la parte menor nunca es mayor que la parte mayor.

Análogamente, podemos probar que ninguna otra recta es perpendicular a CD.

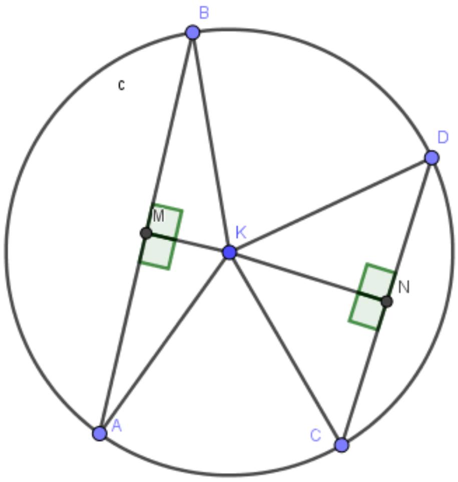
Por lo tanto AB es perpendicular a la recta CD que es la recta f. **Q.E.D**

Proposición 0.1

De un par de cuerdas de una circunferencia, la mayor está más cerca del centro. ♠

Demostración

Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro en K y sean las cuerdas AB y CD. Trazamos un segmento de recta perpendicular a partir de K a la cuerda AB con pie de perpendicular M y otro segmento perpendicular a partir de K al segmento CD con pie de perpendicular N, tal que $KM < NK$, es decir, la cuerda AB está más cerca del centro K que la cuerda CD. Por demostrar que la longitud de la cuerda AB es mayor que la longitud de la cuerda DC, es decir, $AB > CD$.



Determinamos las segmentos BK, AK, KD y KC, los cuáles son iguales entre sí por ser radios de la circunferencia c.

Como MK y KN son perpendiculares a una cuerda a partir del centro K, entonces $BM = MA$ y $DN = NC$ pues sabemos que la perpendicular a una cuerda por el centro de la circunferencia la biseca.

Tenemos cuatro pares de triángulos rectángulos BMK, AKM, KND y KCN, entonces por el teorema de Pitágoras tenemos las siguientes cuatro igualdades:

(1) $BK^2 = MK^2 + BM^2 \iff MK^2 = BK^2 - BM^2$. Esto en el triángulo BMK

(2) $AK^2 = MK^2 + AM^2 \iff MK^2 = AK^2 - AM^2$. Esto en el triángulo AKM

(3) $KD^2 = KN^2 + ND^2 \iff NK^2 = KD^2 - ND^2$. Esto en el triángulo KND

(4) $KC^2 = NC^2 + KN^2 \iff NK^2 = KC^2 - NC^2$. Esto en el triángulo KCN

Como $KN > MK \Rightarrow KN^2 > MK^2$, utilizando (1) y (3), tenemos que $KD^2 - ND^2 > BK^2 - BM^2$, pero $KD = BK \iff KD^2 = BK^2 \Rightarrow -ND^2 > -BM^2 \iff BM^2 > ND^2$. Por lo tanto $BM > ND$....(A)

Análogamente si utilizamos las ecuaciones (2) y (4) y partimos de que $KN > MK$ podemos concluir que $AM > NC$....(B). Sumando (A) y (B) tenemos que $AM + BM > NC + ND$ por lo tanto $AB > CD$. **Q.E.D.**

Ejercicios para ir pensando

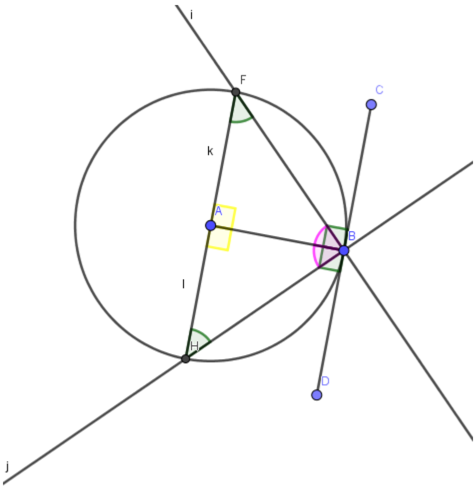
1. Demuestre que el diámetro es la cuerda de longitud máxima en un círculo dado.

Ángulos en la circunferencia y cuadriláteros cíclicos

Proposición 0.2

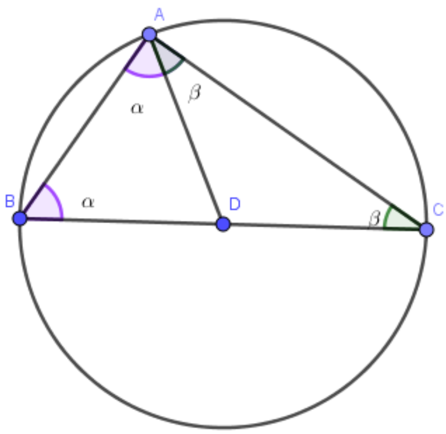
Un ángulo inscrito es recto si y sólo si abarca un diámetro.

Demostración



($\Longrightarrow$) Sea c una circunferencia con centro en A y radio AB, trazamos una recta tangente CD en el punto de contacto B, entonces sabemos que la recta CD es perpendicular al radio AB, por tanto el ángulo $\angle CBA = \angle ABD$, son ángulos rectos.
Trazamos las bisectrices i, j a los ángulos rectos respectivamente, las cuales cortan a la circunferencia en los puntos F y H, entonces es inmediato ver que $\angle FBA = \angle ABH$ son la mitad de un ángulo recto, por tanto $\angle FBH$ es recto, por lo que podemos concluir que AB es bisectriz de este ángulo.
Por otro lado, si trazamos los segmentos AF y AH formamos los triángulos isósceles FAB y AHB cuyos lados iguales son $AF = AB$ y $AH = AB$ por ser radios de la circunferencia, por tanto $\angle AFB = \angle FBA$ y $\angle ABH = \angle BHA$.
Como los ángulos interiores de un triángulo suman dos ángulos rectos, entonces inmediatamente podemos concluir que $\angle BAF = \angle HAB$. Además A es punto de la bisectriz AB por tanto AF y AH son perpendiculares a AB, entonces $\angle HAF$ es igual a dos ángulos rectos, es decir que es un ángulo llano. Por lo tanto XY es un diámetro.

($\Longleftarrow$) Supongamos que tenemos una circunferencia C con centro en D y diámetro BC.
Tomamos un punto A en la circunferencia que no sea B ni C.
Unimos los extremos B y C del diámetro con el vértice A formando los segmentos AB y AC, y a su vez formando el triángulo inscrito ABC.



Trazamos el segmento AD que divide al triángulo ABC, en dos triángulos isósceles ABD y ACD cuyos lados iguales son $BD = AD$ y $AD = DC$ por ser radios de la circunferencia; entonces $\angle DBA = \angle BAC = \alpha$ y $\angle ACD = \angle DAC = \beta$.

Notemos que el ángulo $\gamma = \angle BAC = \alpha + \beta$.

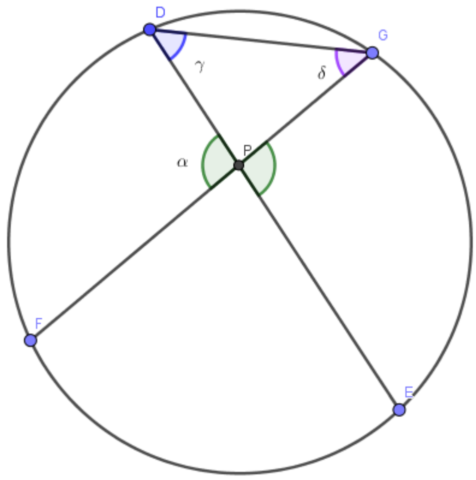
Sabemos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos es decir $180°$, entonces $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, pero $\gamma = \alpha + \beta$, entonces $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 180°$.

Por lo tanto, $\gamma = \alpha + \beta$ es recto. **Q.E.D**

Proposición 0.3

La medida del ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan dentro del círculo es igual a la semisuma de los arcos que abarca.

Demostración



Sea c una circunferencia con centro en C y radio AB, sea la cuerda DE y la cuerda FG que se interseca en el punto P. Sin pérdida de generalidad consideremos al ángulo $\angle DPF = \alpha$.

Queremos demostrar que $\alpha = \dfrac{\widehat{DF} + \widehat{EG}}{2}$

Unimos los puntos extremos de las cuerdas mediante el segmento DG. Por un teorema visto en clase, sabemos que la medida de un ángulo inscrito en una circunferencia, es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados.

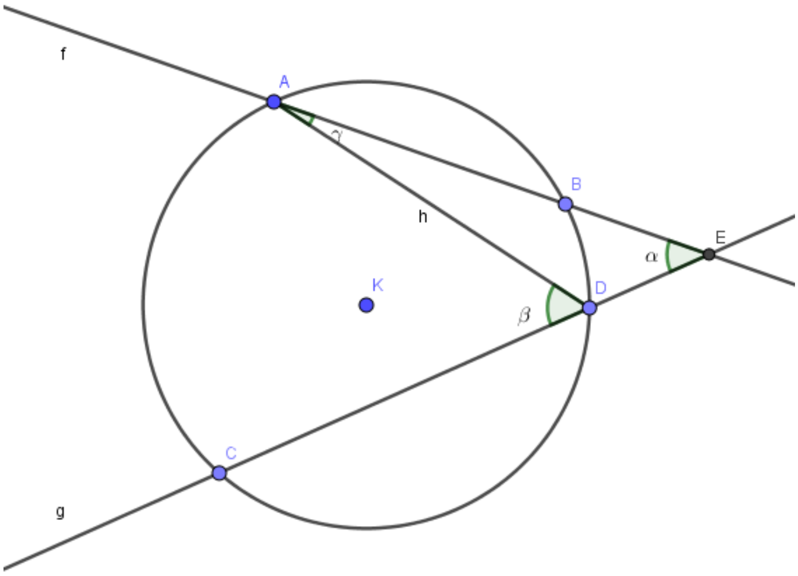
Entonces, como $\angle EDG = \gamma$ es inscrito, así $\gamma = \dfrac{\widehat{EG}}{2}$.....(1). Análogamente $\delta = \angle DGF = \dfrac{\widehat{DF}}{2}$....(2)

Por otro lado, el ángulo α es ángulo exterior al triángulo DPG, por tanto $\alpha = \gamma + \delta$, entonces por (1) y (2) concluimos que $\alpha = \dfrac{\widehat{EG} + \widehat{DF}}{2}$. **Q.E.D.**

Proposición 0.4

La medida del ángulo formado por dos secantes que se intersecan en un punto exterior al círculo es igual a la semidiferencia de los arcos que abarca.

Demostración



Sea una circunferencia con centro en K y radio KA, sean AB y CD las rectas secantes que se cortan en el punto exterior P. P.d. $\angle APC = \alpha = \dfrac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2}$

Unimos los puntos donde de intersección de las secantes con la circunferencia mediante el segmento AD y veamos que el ángulo $\angle ADC = \beta = \dfrac{\widehat{AC}}{2}$.....(1), pues β es inscrito y el otro ángulo $\angle DAB = \gamma$ también es inscrito, entonces $\gamma = \dfrac{\widehat{DB}}{2}$.....(2)
El ángulo β es un ángulo exterior del triángulo ADP que se forma, entonces $\beta = \alpha + \gamma$, entonces $\alpha = \beta - \gamma$. Por lo tanto por (1) y (2) concluimos que $\alpha = \dfrac{\widehat{DB}}{2} - \dfrac{\widehat{AC}}{2}$ **Q.E.D**

Proposición 0.5

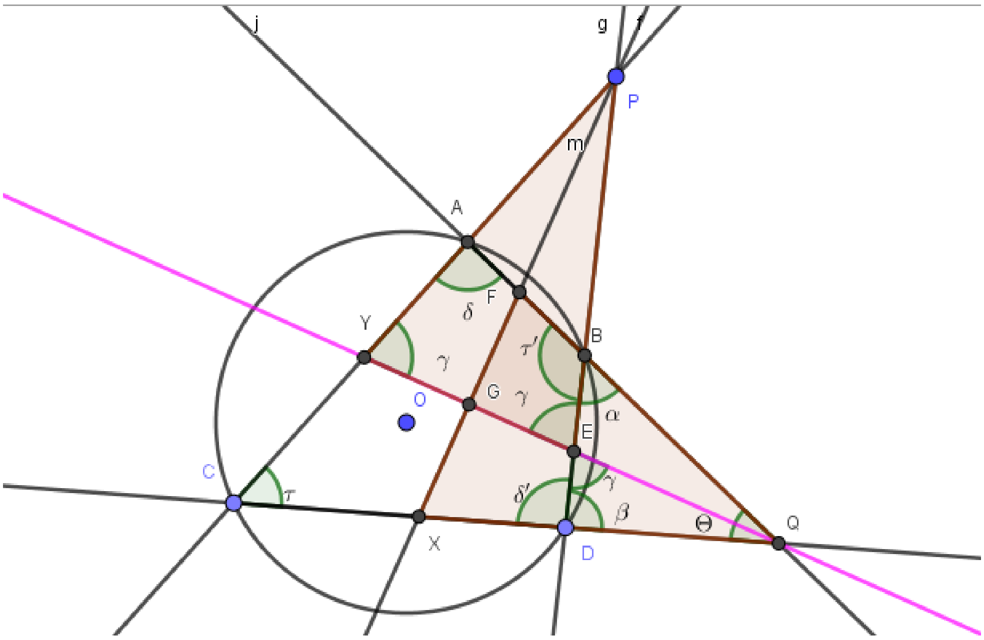
Sean c_1 y c_2 dos circunferencias que se cortan en los puntos P y Q. Se trazan los diámetros, de las dos circuferencias, que pasan por P. Sean X, Y los puntos de intersección de estos diámetros con cada una de las circunferencias, entonces la recta XY pasa por el punto Q.

Demostración La demostración se deja como tarea para el alumno.

Proposición 0.6

Dada una circunferencia C y dos puntos P y Q exteriores al círculo, se trazan dos secantes por cada uno de los puntos exteriores de tal forma que se corten sobre la circunferencia en cuatro puntos A, B, C y D, entonces las bisectrices PX y PY de los ángulos $\angle P$ y $\angle Q$ son perpendiculares.

Demostración



Sean l_1 y l_2 dos rectas secantes a la circunferencia trazadas desde el punto exterior P, que corta a la circunferencia en cuatro puntos A, B, CyD. Sean l_3 y l_4 las otras dos rectas secantes que pasan por los pares de puntos (A, B) y (C, D) respectivamente.

P.d. Que los triángulos PYE y QFX son isósceles, dónde F es un punto de intersección de l_3 y bisectriz PX, y E un punto de intersección de l_2 con PY.

Notemos que el cuadrilátero $ACDB$ es cíclico y además convexo ya que sus diagonales están dentro del cuadrilátero, por tanto sus ángulos opuestos son suplementarios, es decir, $\delta + \delta' = 180°$, pero también $\delta' + \beta = 180°$ por tanto $\beta = \delta$. También $\tau + \tau' = 180°$, pero también $\tau + +\alpha = 180°$. Por lo tanto, por (AA) nuestros triángulos ACQ y BDQ son semejantes.

Por otro lado, como PX es bisectriz , el triángulo AYQ y el triángulo EDQ son semejantes por (AA), por tanto el ángulo $\angle DEQ = \gamma = \angle QYA$, los cuales son ángulos interiores del triángulo PYE y $\gamma = \angle PEY$ pues son opuestos por el vértice.

Por lo tanto El triángulo PYE es isósceles, entonces la bisectriz PX es perpendicular a YE y YE está en QY por tanto las bisectrices son perpendiculares.