Geometría Moderna I

Material para el curso intersemestral en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: Julio 20, 2020

Victory won't come to us unless we go to it.

Unidad 1. La geometría del triángulo

Definiciones elementales

Para iniciar el curso de Geometría Moderna abordaremos primero algunas proposiciones (construcciones) presentadas en el Libro I de los Elementos de Euclides.

Estas proposiciones nos permitirán ver cómo se fue erigiendo el aparato geométrico y sus demostraciones, todo esto a partir de sus construcciones geométricas, considerando por un lado, los fundamentos de la geometría Euclideana, es decir, las definiciones, los postulados y las Nociones comunes que se encuentran el libro I de los Elementos de Euclides y que revisaste anteriormente; y por otro lado, considerando únicamente a la regla y al compás euclideanos como herramientas de construción.

Al hablar de construcciones con regla y compás se debe considerar que la regla que se "utiliza" es una regla no graduada, es decir, que no permite medir longitudes como lo hacemos actualmente. Además, el compás considerado es aquel que permite trazar circunferencias dados dos puntos, uno de ellos el centro de la circunferencia y el otro un punto sobre la circunferencia, de esta forma este compás en primera instancia no permite mantener una apertura dada para luego trasladar dicha distancia o longitud, a este tipo de compás se le llama Compás euclideano. Es importante mencionar que con las primeras proposiciones veremos que aunque estemos pensando en construcciones con regla y compás (euclideanos), pronto seremos capaces de trasladar distancias.

Finalmente, antes de adentrarnos en las construcciones y demostraciones correspondientes, es importante que interiorices la idea de que las demostraciones de los enunciados matemáticos no deben depender de un dibujo determinado, pues las afirmaciones a demostrar buscan mostrar que la validez de dichas afirmaciones se da siempre y cuando se parta de considerar como verdaderas las hipótesis o condiciones iniciales y no de casos particulares observables en el dibujo. De esta forma, las demostraciones buscan argumentar por medio de un pensamiento lógico la generalidad y validez de las afirmaciones presentadas.

En caso de que desees conocer un poco más sobre el pensamiento seguido por Euclides y sus construcciones, te recomendamos consultar el Capítulo 1 del libro: Hïlbert y Gödel del profesor Carlos Torres Alcaráz, editado por las prensas de ciencias.

Algunas proposiciones del Libro I de Euclides

Proposición. I.1.

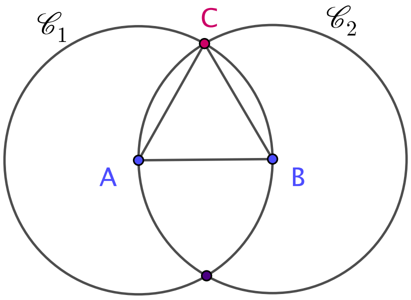
Es posible trazar un triángulo equilátero sobre un segmento dado.

Demostración

Hipotesis: Sea AB un segmento dado.

Tesis: Buscamos construir un triángulo equilátero sobre el segmento AB.

Construcción:



- Por el postulado 1 (P.1.), dados dos puntos A y B podemos trazar el segmento $\overline{AB}$.
- Por el postulado 3 (P.3) trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_1$ con centro en A y radio AB.
- Por el postulado 3 (P.3) trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_2$ con centro en B y radio AB.
- Obtenemos a C, punto de intersección de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.
- Por el postulado 1 (P.1) trazamos los segmentos AC y BC.
- Hemos construido el triángulo equilátero $\triangle ABC$ sobre el segmento dado AB.

Afirmamos que el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero pues AC y AB son radios de $\mathscr{C}_1$, entonces, por la Definición 15, $AB = AC$. De la misma forma $AB = BC$ por ser radios de $\mathscr{C}_2$.
Por la noción común 1 (NC.1) tenemos que $AB = AC$ y $AB = BC$, luego $BC = AB = AC$.
Por tanto, hemos construido el triángulo equilátero $\triangle ABC$. ■

Proposición. I.2.

Es posible colocar a partir de un punto dado (como extremo) un segmento igual a otro segmento dado.

Demostración

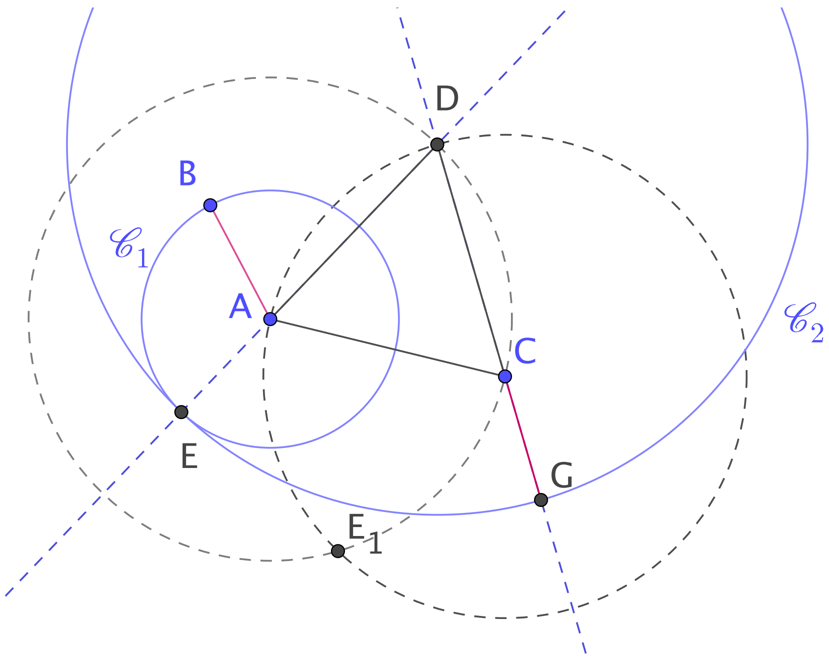
Hipótesis: Sea AB un segmento dado. Sea C un punto dado.

Tesis: (P.D.) Se puede construir un segmento CG tal que su longitud sea igual a la del segmento AB, es decir, $CG = AB$.

Construcción:

- Por P.1 trazamos el segmento AC.
- Por la proposición I.1 trazamos el triángulo equilátero con lado AC, sea éste el $\triangle ACD$.
- Por P.3 trazamos una circunferencia $\mathscr{C}_1$ con centro en A y radio AB.

- Por P.2 prolongamos el segmento DA de tal forma que corte a la circunferencia $\mathscr{C}_1$. Llamamos E al punto de intersección.
- Por P.3 trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_2$ con centro en D y radio DE.
- Por P.2 prolongamos el segmento DC hasta cortar a la circunferencia $\mathscr{C}_2$.
- Obtenemos así el punto de intersección G, el cual afirmamos cumple que $CG = AB$. Hemos así, construido un segmento por C de longitud igual a AB.



Esta afirmación resulta cierta pues $DE = DG$ por ser radios de $\mathscr{C}_2$.
Además

$$DE = DA + AE$$

$$DG = DC + CG$$

Luego, $DA + AE = DC + CG$.
Por otra parte, $DA = DC$ por ser lados del triángulo equilátero $\triangle ADC$.
De lo anterior y por NC.3 , tenemos que $AE = CG$ pues a cosas iguales, restamos cosas iguales.
Pero, $AE = AB$ por ser radios de $\mathscr{C}_1$, entonces por NC.1

$$CG = AE = AB \Rightarrow CG = AB$$

Por tanto, hemos demostrado que es posible construir a partir de un punto dado un segmento igual a otro dado. ■

Nota *Con esta construcción hemos* **trasladado** *el segmento AB de tal forma que tenga como uno de sus extremos a un punto dado C.*

Ejercicios para ir pensando

1. Dados dos segmentos, uno mayor que el otro, (demostrar que es posible) construir sobre el mayor un segmento igual al menor. (Proposición I.3)
2. Construir un triángulo que tenga un segmento dado de longitud a como uno de sus lados.
   - ¿El triángulo que has construido es el único triángulo posible?
   - ¿Cuántos triángulos más puedes construir?
   - ¿Cómo son, entre ellos, los tamaños (las longitudes) de los otros dos lados del triángulo?
3. Construir un triángulo que tenga dos segmentos dados AB y CD como dos de sus lados.
4. Dados tres segmentos de longitudes a, b y c, construye un triángulo que los tenga como lados.
   - ¿Siempre se puede construir el triángulo?
   - Si tu respuesta a la pregunta anterior es negativa, ¿cuál es la relación que debe haber entre la magnitud de los lados para que el triángulo sea construible?