# COTAS

## 1. Superior de un conjunto, elemento máximo, extremo superior

**Sea $S$ un conjunto no vacío de números reales y supongamos que existe un número $B$ tal que: $x \leq B$ para todo $x$ de $S$. Entonces decimos que $S$ está acotado superiormente por $B$.**

$$S \in \mathbb{R}, \exists B \mid \forall x \{x \in S, x \leq B\}$$

**El número $B$ se denomina una cota superior para $S$. Decimos una cota superior debido a que todo número mayor que $B$ también es una cota superior.**

**Si una cota superior $B$ pertenece a $S$, entonces $B$ se le llama el elemento máximo de $S$, si existe se escribe $B = max\, S$ .**

**Así que $B = max\, S$ si $B \in S$ y $x \leq B$ para todo $x$ de $S$. Un conjunto sin cota superior se dice que es no acotado superiormente.**

**Ejemplos:**

1. **Sea $S$ el conjunto de todos los números reales $x$ tales que $0 \leq x \leq 1$ . Este conjunto está acotado superiormente por el $1$. Su elemento máximo es $1$.**
2. **Sea $S$ el conjunto de todos los números reales positivos. Es un conjunto no acotado superiormente. No contiene cota superior ni máximo.**
3. **Sea $T$ el conjunto de todos los números reales $x$ tales que $0 \leq x < 1$. Este conjunto está acotado superiormente por el $1$ pero no tiene elemento máximo.**

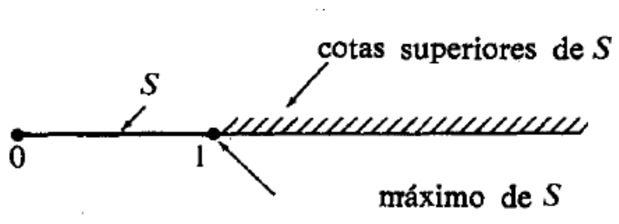
**Algunos conjuntos, parecidos al ejemplo 3, están acotados superiormente pero no tienen máximo. Para ellos existe un concepto que sustituye al máximo. Este se llama extremo superior del conjunto y se define como:**

**Un número $B$ se denomina extremo superior ($sup\, S = B$) de un conjunto no vacío $S$ si $B$ tiene las dos propiedades siguientes**

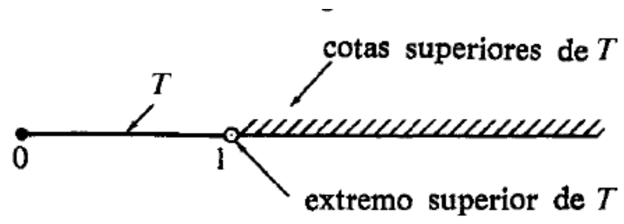
a) **$B$ es una cota superior de $S$**

b) **Ningún número menor que $B$ es cota superior para $S$**

**Si $S$ tiene máximo, éste es también extremo superior de $S$. Pero si $S$ no posee máximo puede tener extremo superior. En el ejemplo 3, el número $1$ es extremo superior para $T$ si bien $T$ no tiene máximo.**




a) $S$ tiene máximo: max $S = 1$




b) $T$ no tiene máximo, pero sí extremo superior: sup $T = 1$

**Teorema: Dos números distintos no pueden ser extremos superiores para el mismo conjunto.**

**Demostración:** Sean $B$ y $C$ dos elementos extremos superiores para un conjunto $S$ La propiedad b) implica que $C \geq B$ puesto que $B$ es extremo superior, análogamente , $B \geq C$ ya que $C$ es extremo superior por lo tanto $B = C$.

Este teorema nos expresa que si existe un extremo superior para un conjunto $S$ hay solamente uno y puede decirse el extremo superior.

## Axioma del supremo superior (axioma de completitud)

Podemos ahora establecer el axioma del supremo para número reales.

Axioma: Todo conjunto no vacío $S$ de números reales acotado superiormente posee extremo superior, esto es, existe un número real $B$ tal que $B = sup\ S$

El extremo superior de $S$ no pertenece necesariamente a $S$ en realidad $sup\ S$ pertenece a $S$ si y solo sí $S$ posee máximo, en cuyo caso $max\ S = sup\ S$.