Geometría Moderna I

Material para el curso intersemestral en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: Julio, 2020

La victoria no vendrá a nosotros a menos que vayamos por ella.

Unidad 1. La geometría del triángulo

Razón

Definición 0.1

Se llama razón al cociente entre dos magnitudes. Se denota por:

$$r = \frac{A}{B}$$

♣

La definición anterior nos lleva a la posibilidad de comparar magnitudes entre elementos de la misma índole. Por ejemplo, si consideramos dos triángulos podemos obtener la razón que existe entre cada par de lados de dichos triángulos. De igual forma podríamos comparar las longitudes de los lados de cualesquiera dos polígonos, las longitudes de las alturas, de las diagonales, las áreas y perímetros de dos triángulos o polígonos, etcétera.

Partiendo de la posibilidad de comparar estas magnitudes, ahora buscamos establecer algunas propiedades entre ciertas razones que nos permitan determinar cuándo dos figuras son iguales en forma pero tienen diferente tamaño.

Ejercicios para ir pensando

1. Analiza las siguientes afirmaciones, en caso de que sean verdaderas demuestra su veracidad, de lo contrario muestra un contraejemplo.
   - Si dos triángulos tienen una misma altura entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón de las bases donde se levanta la altura común.
   - Si dos triángulos tienen una base igual entonces la razón de sus áreas es igual a la razón entre las alturas que se levantan sobre la base.

Antes de poder enunciar los criterios que nos permitan asegurar bajo qué condiciones dos triángulos cumplen con lo anterior, analizaremos algunos resultados sumamente valiosos que nos serán de gran utilidad.

Primer teorema de Thales

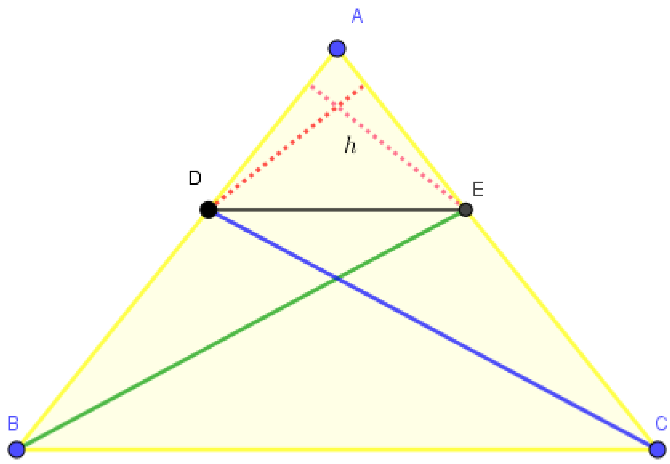
Teorema 0.1. Primer teorema de Thales

En un triángulo ABC, sean D y E puntos en AB y AC respectivamente, tales que DE es paralela a BC. Entonces $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.

Demostración

Sea ABC un triángulo y DE una recta paralela a la base BC.

Trazamos los segmentos BE y CD y consideramos los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle ADE$, los cuales tienen la misma altura desde el vértice E. Sabemos que si dos triángulos tienen una misma altura, entonces la razón entre sus áreas es igual a la razón de sus bases donde se levanta dicha altura; entonces tenemos que:



$$\frac{AB}{AD} = \frac{(ABE)}{(ADE)} ...(1).$$

Análogamente consideramos los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle ADE$; y la altura que comparten es la que se traza por el vértice D, entonces aplicando la misma propiedad tenemos que:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{(ADC)}{(ADE)} ...(2).$$

Ahora notamos que los triángulos $\triangle DEB$ y $\triangle DEC$, tienen a DE como base común, y como DE y BC son paralelas, las alturas respectivas sobre esta base miden los mismo, entonces las áreas: $(DBE) = (DCE)$.

Por lo que $(ABE) = (ADE) + (DBE) = (ADE) + (DCE) = (ADC)$.

Entonces $(ABE) = (ADC)....(3)$.

Por (1), (2) y (3) tenemos que $\dfrac{(ABE)}{(ADE)} = \dfrac{(ADC)}{(ADE)}$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \qquad \blacksquare$$

Observación

$\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} \iff \dfrac{AD+DB}{AD} = \dfrac{AE+EC}{AE} \iff 1 + \dfrac{DB}{AD} = 1 + \dfrac{EC}{AE}$. Por tanto $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{EC}{AE}$.

Esto significa que para dos rectas paralelas, la proporción que hay entre las rectas secantes que las cortan se conserva sin importar quienes sean las rectas secantes.

Teorema 0.2. Recíproco del primer teorema de Thales

Si en un triángulo ABC tenemos puntos D y E sobre los lados AB y AC respectivamente tal que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$, *entonces* $DE \parallel BC$.

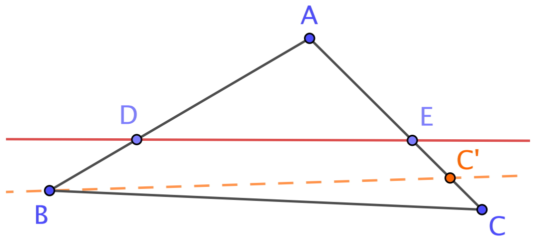
Demostración (Por reducción al absurdo o contradicción)

Supongamos que DE y BC no son paralelas.

Sea C' un punto en el lado AC tal que DE y BC' sean paralelas y C' sea distinto de C, entonces por el primer teorema de Thales, tenemos: $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC'}{AE}$,

pero por hipótesis tenemos que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.

Entonces $\dfrac{AC'}{AE} = \dfrac{AC}{AE}$, luego $AC = AC'$.



Por lo tanto $C = C'$ lo cual es un absurdo ya que habíamos supuesto que C era diferente de C'.

Por tanto $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.

$\therefore DE \parallel BC$.

Teorema 0.3. Segundo teorema de Thales

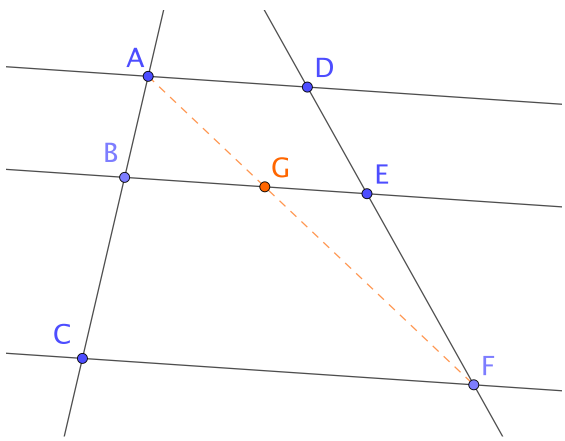
Sean las rectas AD, BE y CF paralelas entre si y considérense dos rectas transversales a éstas (que pasan por esos puntos), entonces $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

Demostración

Sea AF el segmento transversal a las tres paralelas.

Sea G la intersección de AF con BE.

Ahora, consideremos al $\triangle ACF$, luego por la observación obtenida en el primer teorema de Thales: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AG}{GF}$.



De manera análoga en el $\triangle ADF$ se tiene que: $\dfrac{AG}{GF} = \dfrac{DE}{EF}$.

Luego, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AG}{GF} = \dfrac{DE}{EF}$.

Por tanto, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$. ∎

Teorema 0.4. Recíproco del Segundo teorema de Thales

Sean AD, BE y CF tres rectas y considérense dos transversales a ellas, tales que, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$ y dos de las tres rectas son paralelas, entonces las tres rectas son paralelas. ♡

Demostración

Sea G el punto de intersección de AF con BE.

Supongamos $BE \parallel CF$, luego $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AG}{GF}$ (por Primer teorema de Thales).

Por hipótesis $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$, luego $\dfrac{DE}{EF} = \dfrac{AG}{GF}$, lo cual ocurre en el $\triangle ADF$, cortado por BE.

Por lo que $AD \parallel CF$.

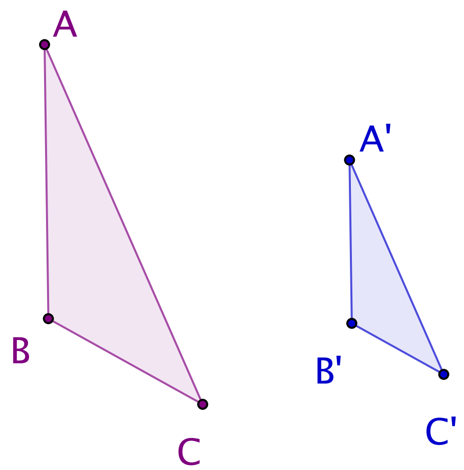
Por tanto $AD \parallel CF \parallel BE$. ■

Semejanza

Definición 0.2

Dos figuras que tienen el mismo número de lados son semejantes si tienen sus lados correspondientes proporcionales y sus ángulos correspondientes iguales. ♣

Observación El hecho de que dos triángulos, $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, sean semejantes lo denotamos como $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$. En donde: AB y $A'B'$, BC y $B'C'$, y CA y CA' son los pares de lados correspondientes de los triángulos.



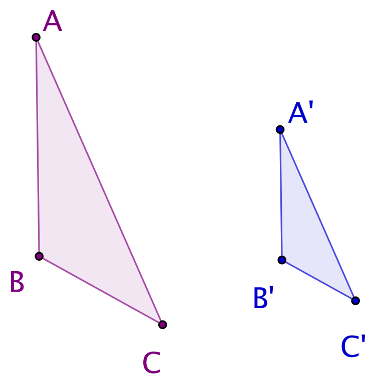
Además, tenemos que $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'} = k$, donde a k se le llama constante de proporcionalidad.

De las igualdades anteriores tenemos que:

- $AB = kA'B'$, $BC = kB'C'$, $CA = kC'A'$ Los lados del $\triangle A'B'C'$ se multiplican por k para obtener el $\triangle ABC$.
- $A'B' = \frac{1}{k}AB$, $B'C' = \frac{1}{k}BC$, $C'A' = \frac{1}{k}CA$ Los lados del $\triangle ABC$ se multiplican por $\frac{1}{k}$ para obtener el $\triangle A'B'C'$.

Por tanto, k o $\frac{1}{k}$ indican el factor o escala a la que está una figura con respecto de otra.

Por ejemplo,



Sean $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$, con

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = 2$$

Decimos que $\triangle ABC$ es el doble del $\triangle A'B'C'$.

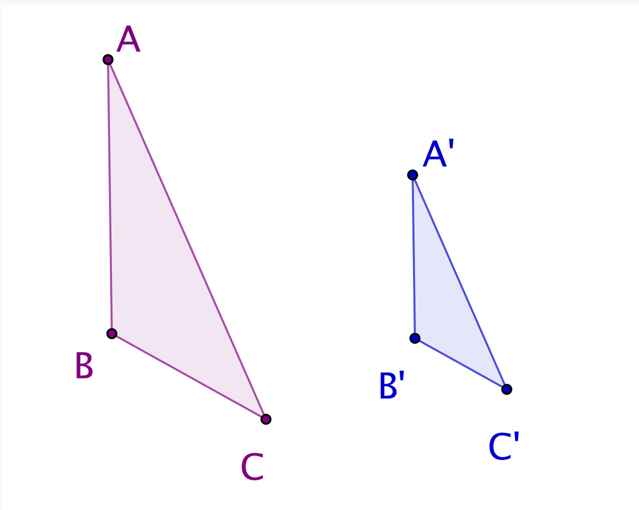
Criterios de semejanza de triángulos

Definición 0.3

Diremos que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son semejantes si sus ángulos respectivos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales; es decir:

$\angle CBA = \angle C'B'A'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$ y $\angle ACB = \angle A'C'B'$

y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.



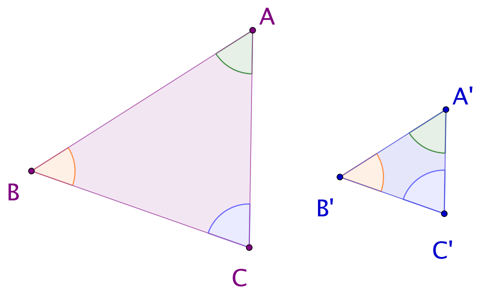
♣

Proposición 0.1. Primer criterio (AAA) ángulo- ángulo- ángulo.

Si dos triángulos tienen sus tres ángulos iguales, entonces son semejantes, esto es, tienen sus lados proporcionales.

Demostración

Sean el $\triangle ABC$ y el $\triangle A'B'C'$ dos triángulos tales que $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle CBA = \angle C'B'A'$ y $\angle ACB = \angle A'C'B'$. Queremos demostrar que $\dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{BA}{B'A'}$.



Para esto, construyamos los puntos X y Y sobre AC y BC respectivamente, tales que $CX = C'A'$, $CY = C'B'$.
Como $\angle ACB = \angle XCY$ entonces por el criterio de congruencia LAL se tiene $\triangle A'B'C' \cong \triangle XYC$, de donde $\angle B'A'C' = \angle YXC$, $\angle C'B'A' = \angle CYX$ y $A'B' = XY$.

Luego, por lo anterior y por hipótesis:
$\angle BAC = \angle B'A'C' = \angle YXC \Rightarrow \angle BAC = \angle YXC$
$\angle CBA = \angle C'B'A' = \angle CYX \Rightarrow \angle CBA = \angle CYX$.

Luego, por la proposición I.28, se tiene que $AB \parallel XY$.
Así, por el primer teorema de Thales se tiene que $\dfrac{CX}{XA} = \dfrac{CY}{YB}$, luego $\dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{CB}{C'B'}$.
De manera análoga se construye el $\triangle A'B'C'$ sobre B.

Así, $\dfrac{CB}{C'B'} = \dfrac{BA}{B'A'} \Rightarrow \dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{CB}{C'B'} = \dfrac{BA}{B'A'}$.

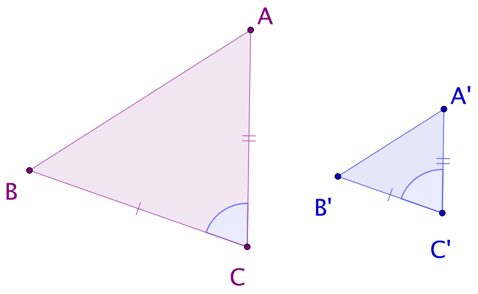
Por tanto, $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$ ■

Nota *Observa que basta con que dos pares de ángulos correspondientes sean iguales para que el tercer par de ángulos también lo sean, por lo que este criterio de semejanza se puede reducir a AA.*

Proposición 0.2. Segundo criterio (LAL) lado- ángulo- lado.

Dos triángulos que tienen un ángulo igual y los dos lados adyacentes a éste proporcionales son semejantes, es decir, tienen los otros dos ángulos respectivamente iguales y el otro lado está en la misma proporción.

Demostración



Sean el $\triangle ABC$ y el $\triangle A'B'C'$ dos triángulos tales que $\dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{BC}{B'C'}$ y $\angle ACB = \angle A'C'B'$.
Queremos demostrar que $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle CBA = \angle C'B'A'$ y $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{AB}{A'B'}$.
Colocamos el $\triangle A'B'C'$ sobre el $\triangle ABC$ de manera que $A'C'$ y $B'C'$ queden sobre los lados de AC y BC respectivamente y $C = C'$

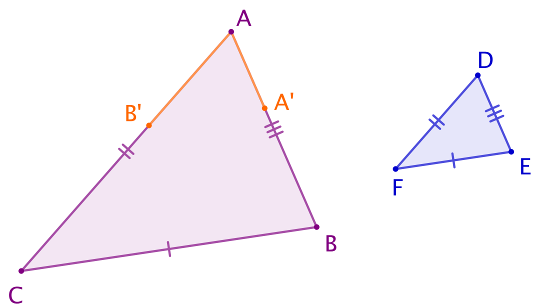
Por hipótesis $\dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{CB}{C'B'}$, luego por el recíproco del primer teorema de Thales tenemos que $A'B' \parallel AB$, entonces $\angle BAC = \angle B'A'C'$ y $\angle CBA = \angle C'B'A'$.

Por tanto, por el criterio de semejanza (AAA), el $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$.
Luego, $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{AB}{A'B'}$. ■

Proposición 0.3. Tercer criterio (LLL) lado- lado- lado.

Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Demostración



Sean el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ dos triángulos con lados correspondientes proporcionales, es decir, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$. Queremos demostrar que $\triangle ABC \approx \triangle DEF$.

Sean A' y B' puntos sobre AB y AC respectivamente, tales que $AA' = DE$ y $AB' = DF$....(1)

Sustituimos estas igualdades en la hipótesis y tenemos: $\dfrac{AC}{AB'} = \dfrac{AB}{AA'}$.

Luego, el $\angle BAC = \angle A'AB'$ en los $\triangle ABC$ y $\triangle AA'B'$.

Luego por el criterio LAL de semejanza, $\triangle ABC \approx \triangle AA'B'$.
De donde $\dfrac{AB}{AA'} = \dfrac{AC}{AB'} = \dfrac{BC}{A'B'}$, luego $A'B' = BC\dfrac{AA'}{AB}$, pero de (1), $AA' = DE$ y $AB' = DF$, entonces $A'B' = BC\dfrac{DE}{AB}$. Y de la hipótesis, $EF = BC\dfrac{DE}{AB}$.
Por lo que $A'B' = BC\dfrac{DE}{AB} = EF$, esto es, $A'B' = EF$.
Por el criterio de congruencia LLL tenemos que $\triangle AA'B' \cong \triangle DEF$.

Por lo que, $\triangle ABC \approx \triangle AA'B'$ y $\triangle AA'B' \cong \triangle DEF$. Por tanto, $\triangle ABC \approx \triangle DEF$. ■

Teorema de Pitágoras

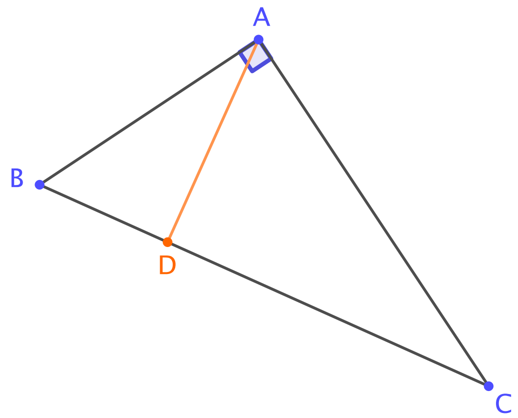
Teorema 0.5. Teorema de Pitágoras

Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, entonces $CB^2 = AB^2 + CA^2$, con ángulo recto en A e hipotenusa BC. ♡

Hipótesis: Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A e hipotenusa BC.

Tesis: Queremos demostrar que $CB^2 = AB^2 + CA^2$.

Demostración



Trazamos el segmento perpendicular a BC que pase por A, es decir la altura sobre BC. Sea D el pie de la perpendicular.

Así, tenemos el $\triangle ABD$ y el $\triangle ADC$ que son rectángulos con ángulos rectos en D.

Ahora consideremos $\triangle ABC$ y $\triangle DBA$ los cuales son rectángulos y comparten el ángulo en B, por lo que el $\angle ACB = \angle DAB$.

De donde por el criterios de semejanza AAA tenemos $\triangle ABC \approx \triangle DBA$.

Luego $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{CA}{DA'} = \dfrac{CB}{AB}$ con AA'.

Luego de $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{CB}{AB}$ se tiene $(DB)\cdot(CB) = (AB)^2$.

Análogamente $\triangle ABC \approx \triangle ADC$, luego $\dfrac{CA}{CD} = \dfrac{AB}{DA} = \dfrac{CB}{CA}$.

Entonces, $(CA)^2 = CB\cdot CD$, luego $AB^2 + CA^2 = (DB)\cdot(CB) + (CD)\cdot(CB) = (CB)(DB+CD) = (CB)(CB) = (BC)^2$. ■

Ejercicios para ir pensando

1. En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos semejantes al original.
2. Si ABC es un triángulo y AD es perpendicular a BC, se tiene que $AB^2 - AC^2 = DB^2 - DC^2$.
3. Sea ABC un triángulo con ángulos en B y C menores a un recto, y sea D el pie de la altura de A sobre BC. Si $AD^2 = BD \cdot DC$ entonces $\triangle ABC$ es rectángulo.