Capítulo 3

Logaritmo y exponencial

Logaritmo

Como se recordará de los cursos de trigonometría y de álgebra el logaritmo base 10 se define como:

Si $x > 0$, el logaritmo de x en base 10, denotado por $\log_{10} x$ es un número $u \in \mathbb{R}$ tal que $10^u = x$, es decir,

$$\log_{10} x = u \qquad \text{si} \quad 10^u = x \qquad \text{con } x > 0 \quad \text{y} \quad u \in \mathbb{R}.$$

Si $10^u = x$ y $10^v = y$, entonces $10^u 10^v = 10^{u+v} = xy$, es decir

$$\log_{10}(xy) = \log_{10} x + \log_{10} y.$$

Esta propiedad hace que los logaritmos se apliquen en los cálculos que contienen multiplicaciones. Así

$$\begin{array}{rcccccc} & 0.01 & 0.1 & 1 & 10 & 100 & 1000 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{Logaritmo base 10} & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

No sólo se puede definir el logaritmo de base 10, de hecho para cualquier $b \in \mathbb{Z}^+$ con $b \neq 1$,

$$\log_b x = u \qquad \text{si} \quad b^u = x$$

y entonces

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y.$$

Sin embargo esta definición presenta varios problemas, pues necesitamos saber exactamente qué significa b^u. Cuando u es un entero o un racional no hay problema pero si u es un irracional, por ejemplo $u = \sqrt{2}$ y $b = 10$ no conocemos el significado de $10^{\sqrt{2}}$. Utilizaremos técnicas del Cálculo para definir el logaritmo.

Lo que queremos definir es una función f tal que

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad x, y, xy \in Dom\ f \tag{3.1}$$

En general este problema no es sencillo, sin embargo si le pedimos a f más propiedades disminuye la dificultad. Para nuestro caso, bastará con encontrar las soluciones derivables.

Hay una solución muy sencilla, si

$$f(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

es la única solución de (3.1) que está definida para todos los reales. En efecto, sea f una función que satisfaga (3.1), si $0 \in Dom\ f$ entonces

$$f(0) = f(x) + f(0) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \in Dom\ f.$$

Entonces si $0 \in Dom\ f$, la función f es identicamente nula. Por tanto, una solución distinta de la trivial no podrá estar definida en cero.

Ahora si f es una solución de (3.1) y $1 \in Dom\ f$

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1) + f(1) \\ f(1) &= 2f(1) \\ 0 &= f(1). \end{aligned}$$

Si $-1, 1 \in Dom\ f$, entonces tomando $x = y = -1$ tenemos

$$\begin{aligned} f(1) &= f(-1) + f(-1) \\ f(1) &= 2f(-1) \end{aligned}$$

pero como

$$f(1) = 0$$

entonces

$$f(-1) = 0.$$

Si ahora $x, -x, 1, -1 \in Dom\ f$, entonces tomando $y = -1$ tenemos

$$f(-x) = f(x) + f(-1) = f(x)$$

de donde

$$f(-x) = f(x),$$

es decir, la función es par.

Por tanto, toda solución de (3.1) es una función par.

Supongamos ahora que f es derivable en cada punto $x \neq 0$. Como

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

si dejamos fijo y y derivamos (3.1) con respecto a x tenemos

$$yf'(xy) = f'(x).$$

Si $x = 1$, entonces

$$\begin{aligned} yf'(y) &= f'(1) \\ f'(y) &= \frac{f'(1)}{y} \qquad \text{si } y \neq 0. \end{aligned}$$

f' es continua en cualquier intervalo que no contenga al cero.

Como f es una primitiva de f', por el 2^o T.F.C. tenemos que

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)\ dt = f'(1) \int_c^x \frac{1}{t}\ dt.$$

Si $x > 0$, la ecuación vale para $c > 0$.

Si $x < 0$, la ecuación vale para $c < 0$.

Es decir $x, c \in [a, b]$ tal que $0 \notin [a, b]$.

Puesto que $f(1)=0$, eligiendo $c=1$, tenemos

$$f(x)=f'(1)\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{si } x>0.$$

Si $x<0$, entonces $-x>0$ y como $f(x)=f(-x)$ tenemos

$$f(x)=f'(1)\int_1^{-x} \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{si } x<0.$$

Por tanto,

$$f(x)=f'(1)\int_1^{|x|} \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{si } x\neq 0. \tag{3.2}$$

Conclusión: Si existe f una solución no nula de (3.1) con derivada en cada $x\neq 0$, entonces es de la forma (3.2).

¿Qué valores puede tomar $f'(1)$?

- Si $f'(1)=0$, entonces

  $$f(x)=f'(1)\int_1^{|x|} \frac{1}{t}\,dt=0,$$

  de donde $f(x)=0$ entonces f sería la función nula.

- Si f no es nula entonces $f'(1)\neq 0$. Sea g tal que

  $$g(x)=\frac{f(x)}{f'(1)}=\int_1^{|x|} \frac{1}{t}\,dt.$$

  Entonces g también es solución de (3.1) ya que si f es solución de (3.1), cf también lo es:

  $$\begin{aligned}(cf)(xy) &= c(f(xy))\\ &= c(f(x)+f(y))\\ &= cf(x)+cf(y)\\ &= (cf)(x)+(cf)(y).\end{aligned}$$

  Todas las soluciones son de la forma cg.

Este razonamiento no demuestra todavía que la función g sea una solución, puesto que partimos de la hipótesis de que existía por lo menos una solución no nula.

Además puesto que la función obtenida resultaría par, entonces no se tendría inyectividad y esto impediría que la función tuviera inversa, entonces es conveniente definirla sólo para $x>0$.

Definición:

Si $x\in\mathbb{R}^+$ definimos el logaritmo natural de x que denotamos por $\ln x$ como

$$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Observaciones:

La existencia de esta función se basa en el hecho de que la integral de una función continua siempre existe.

- Si $x > 1$, entonces $\ln x$ puede interpretarse geométricamente como el área bajo al hipérbola $y = \dfrac{1}{t}$ desde $t = 1$ hasta $t = x$.

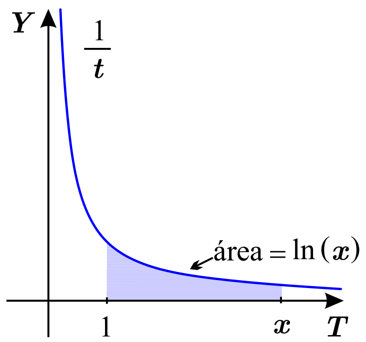

Figura 3-1

- Si $0 < x < 1$, entonces

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt < 0,$$

así, $\ln x$ es el negativo del área sombreada en la siguiente figura:

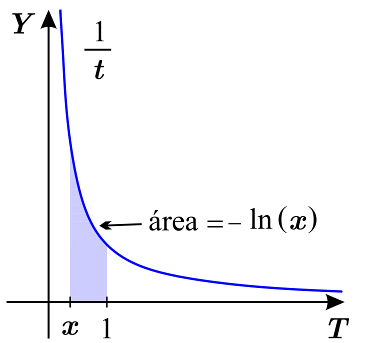

Figura 3-2

- Si $x = 1$, entonces

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0.$$

Teorema
La función logaritmo tiene las siguientes propiedades:

1. $\ln 1 = 0$.
2. $\dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{x}$ para todo $x > 0$.
3. $\ln (ab) = \ln a + \ln b$ para todo $a, b > 0$.

Demostración:

1. Sabemos que
$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0.$$
Por tanto, $\ln 1 = 0$.

2. Por definición tenemos que
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$
La función $f(t) = \dfrac{1}{t}$ es continua en $(0, \infty)$, entonces $f(t) = \dfrac{1}{t}$ es integrable. Por el 1^er^ T.F.C. tenemos que ln es derivable y
$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

3. Sean
$$F(x) = \int_b^{bx} \frac{1}{t}\, dt \qquad \text{y} \qquad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt,$$
de donde
$$F'(x) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$
Así
$$F'(x) = (\ln x)'$$
entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que
$$\ln x = F(x) + c.$$
Como
$$\ln 1 = F(1) = 0$$
entonces $c = 0$. De esta manera tenemos que
$$\ln x = F(x).$$
De donde
$$F(x) = \ln(bx) - \ln b$$
y como
$$\ln a = F(a) = \ln(ab) - \ln b,$$
es decir
$$\ln(ab) = \ln b + \ln a.$$

■

Para poder dibujar la gráfica del logaritmo natural hacemos el siguiente análisis.

1. $\ln 1 = 0$. La gráfica corta al eje X en 1.

2. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} > 0$ para todo $x \in (0, \infty)$, es decir, la función es estrictamente creciente.
3. La función logaritmo es derivable, entonces es continua.
4. $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ para todo $x \in (0, \infty)$, es decir, la gráfica es cóncava hacia abajo.

Lema

La función logaritmo natural no está acotada ni superior ni inferiormente.

Demostración:

P.D. $\ln x$ no está acotada superiormente, es decir, $\forall\, M > 0$ existe x tal que $\ln x > M$.
Como $\ln (ab) = \ln b + \ln a$ entonces tenemos que
Si $b = a$, tenemos $\ln (a^2) = 2 \ln a$.
Si $b = a^2$,tenemos $\ln (a^3) = 3 \ln a$.
Por inducción

$$\ln \left(a^{n+1}\right) = \ln (a^n a) = \ln (a^n) + \ln a = n \ln a + \ln a = (n + a) \ln a.$$

Entonces $\ln (a^n) = n \ln a$.
Si $a = 2$ entonces $\ln (2^n) = n \ln 2$.
Tomando $n > \dfrac{M}{\ln 2}$ con $n \in \mathbb{N}$ obtenemos

$$\begin{aligned} n \ln 2 &> M \\ \ln (2^n) &> M, \end{aligned}$$

es decir, existe $x = 2^n$ tal que $\ln x > M$. Por tanto, el logaritmo natural no está acotado superiormente.
P.D. $\ln x$ no está acotada inferiormente.
Sea $b = \dfrac{1}{a}$, entonces

$$0 = \ln 1 = \ln \left(a \left(\frac{1}{a}\right)\right) = \ln a + \ln \left(\frac{1}{a}\right)$$

de donde

$$\ln \left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a.$$

Si $n > \dfrac{M}{\ln 2}$ con $n \in \mathbb{N}$ obtenemos

$$\begin{aligned} n \ln 2 &> M \\ -n \ln 2 &< -M \\ \ln 2^{-n} &< -M \\ \ln \left(\frac{1}{2^n}\right) &< -M. \end{aligned}$$

Por tanto, $\ln x$ no está acotada inferiormente.

$\blacksquare$

Probaremos que la función logaritmo es biyectiva.

Teorema

Para cada número real b existe un único $a > 0$ tal que $\ln a = b$.

Demostración:

P.D. $\ln x$ es sobre, es decir, dado $b \in \mathbb{R}$ existe $a > 0$ tal que $\ln a = b$.

Si $b > 0$ elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \dfrac{b}{\ln 2}$, de donde

$$\ln 2^n > b.$$

Consideramos el intervalo $[1, 2^n]$ entonces

$$\begin{aligned} \ln 1 &= 0 \\ \ln 2^n &= \text{al valor del extremo derecho del intervalo.} \end{aligned}$$

Como $0 < b < \ln 2^n$ y la función logaritmo es continua, entonces por el Teorema del Valor Intermedio

$$\exists\, a > 0 \qquad \text{tal que} \qquad \ln a = b$$

y es el único ya que la función es estrictamente creciente lo que implica que es inyectiva.

Si $b = 0$, entonces $\ln 1 = 0$.

Si $b < 0$, entonces $-b > 0$ y por la primera parte $\exists\, a > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \ln a &= -b \\ -\ln a &= b \\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= b. \end{aligned}$$

■

En particular existe un único x tal que $\ln x = 1$. Este valor es de particular importancia para nosotros, por ello le daremos un nombre especial.

Definición:

Designaremos por e al número para el cual se tiene $\ln e = 1$.

La gráfica del logaritmo natural es:

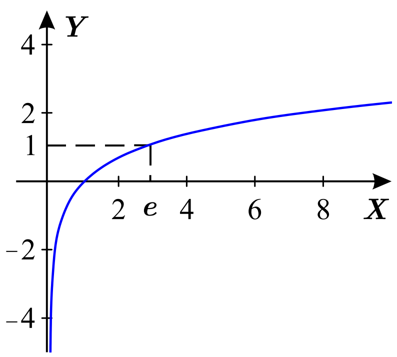

Figura 3-3

Parece que fue Leonard Euler (1707 - 1783) el primero que reconoció la importancia de este número y lo designo por e. Este número es irracional y

$$e = 2.718\,281\,82845\cdots$$

Los logaritmos naturales también son llamados logaritmos neperianos en honor de su inventor John Nepier (1550 - 1617).

Ejemplos

1. Escribir $\ln\left(\dfrac{(3x+1)^3(x-9)^7}{x^2+5}\right)$ de manera expandida.

   Solución:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{(3x+1)^3(x-9)^7}{x^2+5}\right) &= \ln(3x+1)^3+\ln(x-9)^7-\ln\left(x^2+5\right) \\ &= 3\ln(3x+1)+7\ln(x-9)-\ln\left(x^2+5\right). \end{aligned}$$

2. Expresar $5\ln x-\frac{1}{4}\ln y$ como un solo logaritmo.

   Solución:

$$\begin{aligned} 5\ln x-\frac{1}{4}\ln y &= \ln x^5-\ln y^{\frac{1}{4}} \\ &= \ln x^5-\ln\sqrt[4]{y} \\ &= \ln\left(\frac{x^5}{\sqrt[4]{y}}\right). \end{aligned}$$

3. Determinar la derivada de $f(x)=\ln(5x^3+3x-6)$.

   Solución:

$$f'(x)=\frac{15x^2+3}{5x^3+3x-6}.$$

4. Determinar la derivada de $f(x)=\ln\left(\dfrac{(2x-3)^2}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)$.

   Solución:

   Primero escribimos la función como

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{(2x-3)^2}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right) \\ &= \ln(2x-3)^2-\ln\sqrt[3]{x^2+1} \\ &= 2\ln(2x-3)-\frac{1}{3}\ln\left(x^2+1\right). \end{aligned}$$

Ahora calculamos la derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(2)}{2x-3} - \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{4}{2x-3} - \frac{2x}{3x^2+3}. \end{aligned}$$

Logaritmos con base positiva $b \neq 1$

Sabemos que la función derivable que satisface

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

tiene la forma

$$f(x) = f'(1)\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad \text{con } x > 0,$$

es decir,

$$f(x) = c\ln x \qquad \text{donde } c \text{ es una constante.}$$

Consideremos esta función, la cual no es la misma que $\ln x$.

1. Si $c = 0$ entonces f es la función cero.
2. Si $c \neq 0$ existe un único $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ tal que $f(b) = 1$

   $$1 = f(b) = c\ln b$$

   como $b \neq 1$ entonces

   $$c = \frac{1}{\ln b},$$

   de donde

   $$f(x) = \frac{\ln x}{\ln b}$$

   en este caso decimos que $f(x)$ es el logaritmo base b de x.

Definición:
Si $b > 0$, $b \neq 1$ y $x > 0$, el logaritmo base b de x es

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}.$$

Observaciones:

1. $\log_b 1 = \dfrac{\ln 1}{\ln b} = 0.$
2. $\log_b b = \dfrac{\ln b}{\ln b} = 1.$
3. Si $b = e$, entonces

   $$\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x,$$

   es decir, el logaritmo natural coincide con el logaritmo base e.

Ejemplos

1. La acidez de una solución, conocida como el pH, está dado por
$$pH = -\log_{10}\left[H^{+}\right]$$
donde H^{+} es la concentración de iones de hidrógeno. El pH varía entre 0 y 14. El agua pura tiene un $pH = 7$. Las sustancias ácidas tienen $0 \leq pH < 7$ y las sustancias alcalinas $7 < pH \leq 14$.

2. El nivel de intensidad de un sonido medido en decibeles está dada por
$$f(I) = 10\log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$
donde I es la intensidad del sonido. La constante 10^{-12} es la intensidad del sonido más débil que puede percibir el oído humano.

3. Para medir la intensidad de un movimiento sísmico se utiliza la escala Richter que se define como
$$R(A) = \log_{10}\left(\frac{A}{10^{-3}}\right)$$
donde A es la amplitud de la mayor onda sísmica del terremoto. 10^{-3} mm. es la lectura sismográfica de un terremoto de nivel cero a una distancia de 100 kilómetros del epicentro.

Gráfica de $\log_b x$

Como los logaritmos base b se calculan multiplicando el logaritmo natural por $\dfrac{1}{\ln b}$, sus gráficas se pueden obtener multiplicando las ordenadas por este factor, si $b < 1$ el factor es negativo y si $b > 1$ el factor es positivo.

- Si $1 < b < e$, entonces
$$\begin{aligned} \ln b &< \ln e \\ \frac{1}{\ln b} &> \frac{1}{\ln e} = 1. \end{aligned}$$

- Si $b > e > 1$, entonces
$$\begin{aligned} \ln b &> \ln e > \ln 1 \\ \ln b &> 1 > 0, \end{aligned}$$
de donde
$$\frac{1}{\ln b} > 0$$
y
$$\frac{1}{\ln b} < 1,$$

es decir
$$0 < \frac{1}{\ln b} < 1.$$

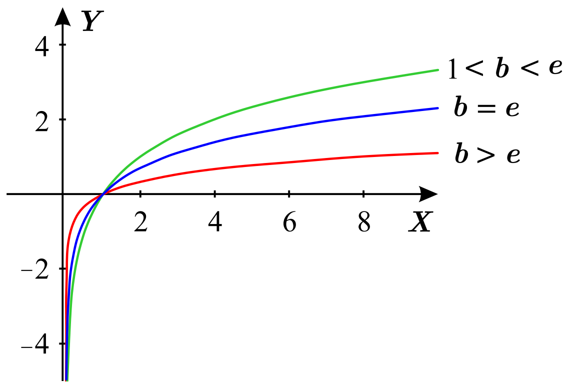

Figura 3-4

En el caso $b < 1$, $\dfrac{1}{b} > 1$ y $\ln b = -\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)$, entonces la gráfica de $y = \log_b x$ se obtiene de la gráfica de $y = \log_{1/e} x$ por simetría con respecto al eje X.

Así, por ejemplo, para $b = \dfrac{1}{e}$ tenemos
$$\ln \frac{1}{e} = -\ln e = -1.$$

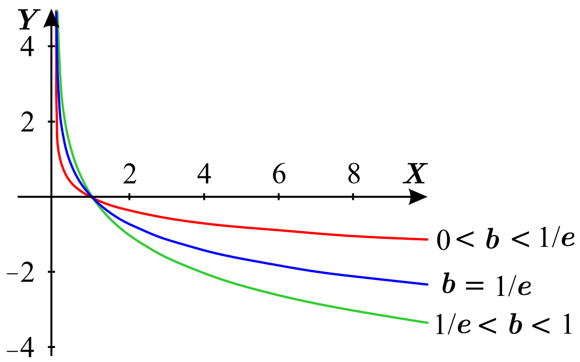

Figura 3-5

Propiedades

1. $\ln x^n = n \ln x$.

   Demostración:
$$\ln x^n = \ln \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ veces}} = \underbrace{\ln x + \cdots \ln x}_{n \text{ veces}} = n \ln x.$$

2. $\ln x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln x$.

   Demostración:
$$\ln x = \ln \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = n \ln \left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$
   de donde
$$\frac{1}{n} \ln x = \ln \left(x^{\frac{1}{n}}\right).$$

3. $\ln x^{-1} = -\ln x$.

   Demostración:
$$0 = \ln 1 = \ln \left(xx^{-1}\right) = \ln x + \ln x^{-1}$$
   de donde
$$-\ln x = \ln x^{-1}.$$

4. $\ln x^{-n} = -n \ln x$.

   Demostración:
$$\ln \left(x^{-n}\right) = \ln \left(\frac{1}{x}\right)^n = n \ln \frac{1}{x} = n\left(-\ln x\right) = -n \ln x.$$

Derivación e integración

Como $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ si $x > 0$, entonces
$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$
Más aún si $u = f(x)$, siendo f una función con derivada continua, se tiene que $du = f'(x)\,dx$ y
$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln\left(f(x)\right) + C \qquad \text{que es válida si } f(x) > 0,$$
pero hay que tener cuidado puesto que $\ln x$ sólo está definido para $x > 0$.

Sin embargo podemos definir una nueva función para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$$\ln\left(|x|\right) = \int_1^{|x|} \frac{dt}{t}$$
la cual habíamos obtenido al principio.

- Si $x \neq 0$, $y \neq 0$
$$\begin{aligned} \ln\left(|xy|\right) &= \ln\left(|x|\,|y|\right) \\ &= \ln|x| + \ln|y| \end{aligned}$$

- Además
$$\ln|-x| = \int_1^{|-x|} \frac{dt}{t} = \int_1^{|x|} \frac{dt}{t} = \ln|x|$$
entonces la función es par y esto implica que su gráfica es simétrica con respecto al eje Y.

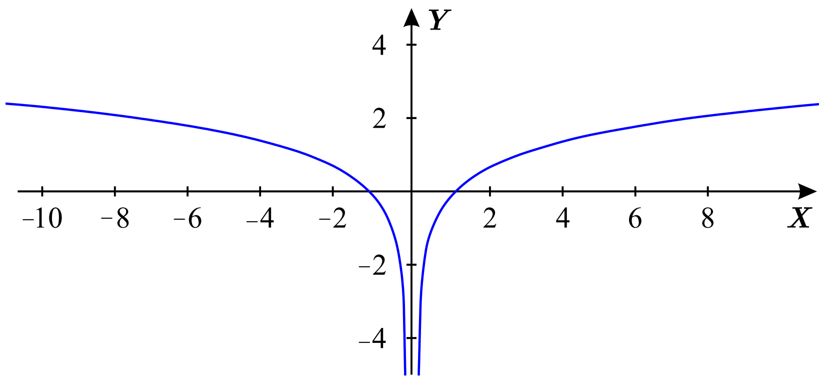

Figura 3-6

- Para $x > 0$
$$\ln(|x|) = \ln x \quad \Longrightarrow \quad \ln'(|x|) = \ln' x = \frac{1}{x}.$$

- Para $x < 0$
$$\ln(|x|) = \ln(-x) \quad \Longrightarrow \quad \ln'(|x|) = \ln'(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Por tanto,
$$\ln'(|x|) = \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \neq 0.$$

Entonces podemos escribir
$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \qquad\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$$

Si se trabaja con la integral definida hay que cuidar que el intervalo no contenga puntos en los que $f(x)$ sea cero.

Ejemplos

1. Calcular la derivada de la función $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$.

   Solución:
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\ln(\ln x)}\left(\frac{1}{\ln x}\right)\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}. \end{aligned}$$

2. Calcular $\int \tan x\, dx$.

   Solución:
$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx.$$
   Sea
$$\begin{aligned} u &= \cos x \\ du &= -\operatorname{sen} x dx \end{aligned}$$
   entonces
$$\begin{aligned} \int \tan x\, dx &= -\int \frac{du}{u} \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C \end{aligned}$$
   y es válida en cualquier intervalo donde $\cos x \neq 0$.

Derivación logarítmica

La derivación logarítmica es una técnica que sirve para calcular derivadas. El método fue desarrollado en 1617 por Johann Bernoulli.

Supongamos que queremos encontrar la derivada de una función f tal que $f(x) \neq 0$.

Definimos
$$g(x) = \ln|f(x)|$$
entonces
$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
de manera que si $g'(x)$ se puede calcular de manera independiente, entonces $f'(x)$ se obtiene como
$$f'(x) = f(x)\, g'(x).$$
Este método es útil cuando $g'(x)$ es fácil de calcular.

Ejemplos

1. Calcular $f'(x)$ si $f(x) = x^2 (1 + x^4)^{-7} \cos x$.

   Solución:
$$\begin{aligned} g(x) &= \ln|f(x)| \\ &= \ln\left|x^2 \left(1 + x^4\right)^{-7} \cos x\right| \\ &= \ln\left|x^2\right| + \ln\left|\left(1 + x^4\right)^{-7}\right| + \ln|\cos x| \\ &= 2\ln|x| - 7\ln\left|\left(1 + x^4\right)\right| + \ln|\cos x| \end{aligned}$$

de donde

$$g'(x) = \frac{2}{x} - \frac{7(4x^3)}{1+x^4} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Así

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\, g'(x) \\ &= \left(x^2 \left(1+x^4\right)^{-7} \cos x\right) \left(\frac{2}{x} - \frac{7(4x^3)}{1+x^4} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{2x \cos x}{\left(1+x^4\right)^7} - \frac{28x^5 \cos x}{\left(1+x^4\right)^8} - \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\left(1+x^4\right)^7}. \end{aligned}$$

2. Calcular $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{x\sqrt[3]{x+9}}{2+\operatorname{sen}^3 x}$.

Solución:

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln |f(x)| \\ &= \ln \left| \frac{x\sqrt[3]{x+9}}{2+\operatorname{sen}^3 x} \right| \\ &= \ln \left| x\sqrt[3]{x+9} \right| - \ln \left| 2+\operatorname{sen}^3 x \right| \\ &= \ln |x| + \ln \left| (x+9)^{\frac{1}{3}} \right| - \ln \left| 2+\operatorname{sen}^3 x \right| \\ &= \ln |x| + \frac{1}{3} \ln |x+9| - \ln \left| 2+\operatorname{sen}^3 x \right| \end{aligned}$$

de donde

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3(x+9)} - \frac{3 \operatorname{sen}^2 x \cos x}{2+\operatorname{sen}^3 x}.$$

Así

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\, g'(x) \\ &= \left(\frac{x\sqrt[3]{x+9}}{2+\operatorname{sen}^3 x}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3(x+9)} - \frac{3 \operatorname{sen}^2 x \cos x}{2+\operatorname{sen}^3 x}\right) \\ &= \frac{\sqrt[3]{x+9}}{2+\operatorname{sen}^3 x} + \frac{x\sqrt[3]{x+9}}{3(x+9)(2+\operatorname{sen}^3 x)} - \frac{3x\sqrt[3]{x+9}\, \operatorname{sen}^2 x \cos x}{\left(2+\operatorname{sen}^3 x\right)^2}. \end{aligned}$$

3. Trazar la gráfica de la función $f(x) = \ln(9-x^2)$.

Solución:

- Dominio:

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &> 0 \\ 9 &> x^2 \\ 3 &> |x| \end{aligned}$$

de donde
$$-3 < x < 3.$$
El dominio de la función es el intervalo $(-3, 3)$.

- Intersección con los ejes.
  - Si $x = 0$, entonces
  $$f(0) = \ln 9 \approx 2.2.$$
  La gráfica corta al eje Y en el punto $(0, \ln 9)$.
  - Si $f(x) = 0$, entonces
  $$\begin{aligned} \ln\left(9 - x^2\right) &= 0 \\ 9 - x^2 &= 1 \\ 8 &= x^2 \\ \sqrt{8} &= |x| \end{aligned}$$
  de donde
  $$x = \sqrt{8} \qquad \text{o} \qquad x = -\sqrt{8}.$$
  La gráfica corta al eje X en los puntos $\left(\sqrt{8}, 0\right)$ y$\left(-\sqrt{8}, 0\right)$.
- Primera derivada.
$$f'(x) = \frac{-2x}{9 - x^2}.$$
La derivada vale cero en $x = 0$. La derivada no existe si $x = 3$ o $x = -3$.
- Intervalos de crecimiento.
Consideramos los intervalos $(-3, 0)$ y $(0, 3)$.
  - $-1 \in (-3, 0)$ y
  $$f'(-1) = \frac{-2(-1)}{9 - (-1)^2} = \frac{2}{8} > 0.$$
  Así la función es creciente en $(-3, 0)$.
  - $1 \in (0, 3)$ y
  $$f'(1) = \frac{-2(1)}{9 - 1^2} = \frac{-2}{8} < 0.$$
  Así la función es decreciente en $(0, 3)$.
- Máximos y mínimos.
Como la derivada pasa de positiva en $(-3, 0)$ a negativa en $(0, 3)$, la función tiene un mínimo en 0.

- Segunda derivada.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2\left(9-x^2\right)-(-2x)(-2x)}{\left(9-x^2\right)^2} \\ &= \frac{-18+2x^2-4x^2}{\left(9-x^2\right)^2} \\ &= \frac{-18-2x^2}{\left(9-x^2\right)^2} \\ &= \frac{-2\left(9+x^2\right)}{\left(9-x^2\right)^2} \end{aligned}$$

La segunda derivada nunca es igual a cero y siempre es negativa, entonces la función es cóncava hacia abajo y no tiene puntos de inflexión.

- Límites laterales.

$$\begin{aligned} \text{Cuando } x &\longrightarrow -3^{+} \text{ entonces } 9-x^2 \longrightarrow 0 \\ \text{Cuando } x &\longrightarrow 3^{-} \text{ entonces } 9-x^2 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3^{+}} \ln\left(9-x^2\right) &= -\infty \\ \lim_{x\to 3^{-}} \ln\left(9-x^2\right) &= -\infty \end{aligned}$$

- Límites infinitos

  Como el dominio de la función es $(-3,3)$ no tiene límites infinitos.

- Asíntotas

  - Verticales:
    Como $\lim\limits_{x\to -3^{+}} \ln\left(9-x^2\right) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^{-}} \ln\left(9-x^2\right) = -\infty$, entonces $x=-3$ y $x=3$ son asíntotas verticales.

  - Horizontales:
    No tiene.

  - Oblicuas
    No tiene.

- Gráfica.

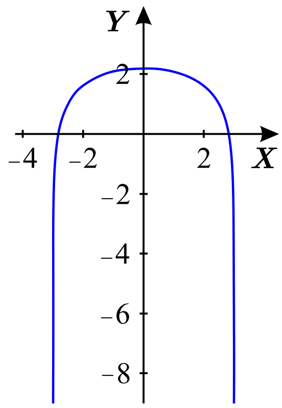

Figura 3-7

La función exponencial

Hemos probado que ln: $(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función biyectiva, por tanto existe su inversa que llamaremos la función exponencial, la cual denotaremos por $\exp(x)$.

Definición:

Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$\exp(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ln y = x.$$

Así

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty).$$

Como el logaritmo y la exponencial son funciones inversas, entonces se cumple

$$\begin{aligned} \ln(\exp(x)) &= x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \\ \exp(\ln(y)) &= y \qquad \forall\, y \in (0,\infty). \end{aligned}$$

La gráfica de la exponencial se obtiene de la gráfica del logaritmo mediante una simetría respecto a la recta $y = x$.

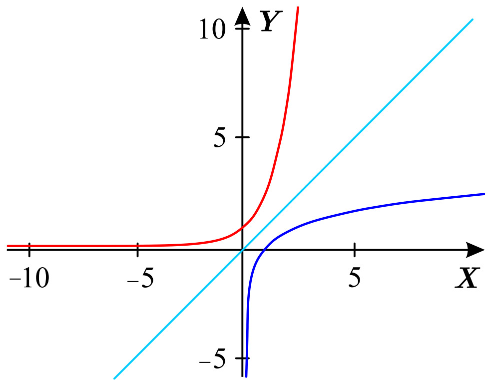

Figura 3-8

Teorema
La función exponencial tiene las siguientes propiedades:

1. $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$.
2. $\exp'(x) = \exp(x) \qquad$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) \qquad$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Demostración:Demostración:

1. Utilizamos el hecho de que la exponencial y el logaritmo son funciones inversas.

$$\begin{array}{rclcccc} \exp(0) & = & y & \Longleftrightarrow & 0 = \ln y & \Longrightarrow & y = 1. \\ \exp(1) & = & y & \Longleftrightarrow & 1 = \ln y & \Longrightarrow & y = e. \end{array}$$

2. Recordemos la siguiente fórmula de derivación:
   Si $y = f(x)$ y $x = \varphi(y)$ su inversa, entonces

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}\varphi(y)}$$

   lo cual se puede justificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(y) \\ \frac{dx}{dx} &= \frac{d}{dy}\varphi(y)\frac{dy}{dx} \\ 1 &= \frac{d}{dy}\varphi(y)\frac{dy}{dx} \\ \frac{1}{\frac{d}{dy}\varphi(y)} &= \frac{dy}{dx}. \end{aligned}$$

De donde
$$\frac{d}{dx}\exp(x)=\frac{1}{\dfrac{d}{d\exp(x)}\ln(\exp(x))}=\frac{1}{\dfrac{1}{\exp(x)}}=\exp(x).$$

3. Sabemos que
$$\ln(\exp(a+b))=a+b$$
pero
$$a+b=\ln(\exp(a))+\ln(\exp(b))=\ln(\exp(a)\exp(b)),$$
de donde
$$\ln(\exp(a+b))=\ln(\exp(a)\exp(b)).$$
Como el logaritmo es inyectivo, entonces
$$\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b).$$

■

Veamos otros resultados heredados de la propiedad $\exp(a+b)=\exp(a)\exp(b)$.
Lema
$$\exp(r)=e^r \qquad \text{con } r\in\mathbb{Q}.$$
Demostración:
Como $r\in\mathbb{Q}$, entonces $r=\dfrac{m}{n}$ con $m,n\in\mathbb{Z}$ y $n\neq 0$.

- P.D. $\exp(n)=e^n$ con $n\in\mathbb{N}$. Lo haremos por inducción.

  Por el teorema anterior, sabemos que $\exp(1)=e$.

  Supongamos que $\exp(n)=e^n$.

  P.D. $\exp(n+1)=e^{n+1}$.
$$\begin{aligned}\exp(n+1)&=\exp(n)\exp(1)\\&=e^ne\\&=e^{n+1}.\end{aligned}$$

- P.D. $\exp(-a)=\dfrac{1}{\exp(a)}$.
$$1=\exp(0)=\exp(a+(-a))=\exp(a)\exp(-a).$$
  de donde
$$\exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}.$$
  De manera que si $-n$ es un entero negativo,
$$\exp(-n)=\frac{1}{\exp(n)}=\frac{1}{e^n}=e^{-n}.$$

- P.D. $\exp(na) = \exp(a)^n$ con $n \in \mathbb{N}$.

  Si $n = 1$:
  $$\exp(1 \cdot a) = \exp(a) = \exp(a)^1 .$$
  Supongamos cierto el resultado para n, es decir, $\exp(na) = \exp(a)^n$.

  P.D. $\exp((n+1)a) = \exp(a)^{n+1}$.
  $$\exp((n+1)a) = \exp(na + a) = \exp(na)\exp(a) = \exp(a)^n \exp(a) = \exp(a)^{n+1} .$$

  Si $a = \dfrac{1}{n}$, tenemos
  $$e = \exp(1) = \exp\left(n\frac{1}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\right)^n$$
  de donde
  $$e^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\right).$$
  Finalmente
  $$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\right)^m = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m = e^{\frac{m}{n}}.$$
  Como
  $$\exp(-r) = \frac{1}{\exp(r)} = e^{-r}.$$
  Por tanto,
  $$\exp(r) = e^r \qquad \forall\, r \in \mathbb{Q}.$$

■

Definición:
$$\exp(x) = e^x \qquad \text{para cada } x \in \mathbb{R}.$$
Una justificación de esta definición es que se cumple la ley de los exponentes
$$e^{a+b} = e^a e^b.$$

Ejemplos

1. Las sustancias radiactivas, se desintegran y por tanto, la cantidad de un material radiactivo disminuye con el tiempo. La cantidad de material $C(t)$ presente al instante t está dada por la fórmula
   $$C(t) = C_0 e^{-kt}$$
   donde $k > 0$ es una constante, que varía de acuerdo a la sustancia de que se trate, y C_o es la cantidad al instante $t = 0$.

2. La gráfica de la función

$$f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

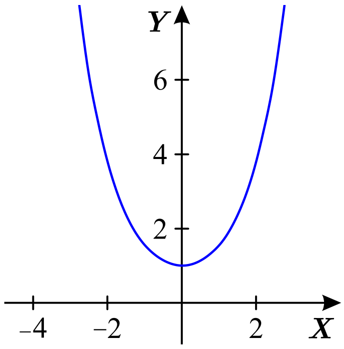

Figura 3-9

es la curva llamada *catenaria* que describe la forma de un cable colgante. Por ejemplo, un cable de luz entre dos postes describe una catenaria.

Comparamos la gráfica de f con la de $g(x) = x^2 + 1$.

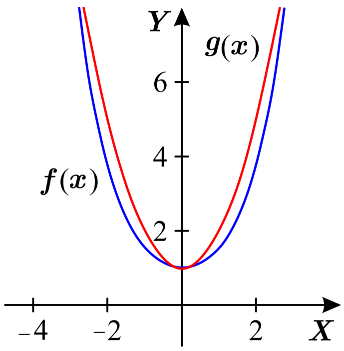

Figura 3-10

3. El valor futuro de una cantidad de dinero C_0 a una tasa de interés r compuesto continuamente durante t años está dada por

$$C(t) = C_0 e^{rt}$$

por ejemplo si se invierten 1000 pesos durante 9 meses a una tasa de interés de $4\,\%$ anual compuesto continuamente, al término del periodo se tendrá

$$C(t) = 1000e^{0.04\left(\frac{9}{12}\right)} = 1030.50.$$

4. En Probabilidad y en Estadística se utiliza la función de densidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

donde μ es la media de una variable aleatoria y $\sigma > 0$ es su desviación estándar.

Por ejemplo, si $\mu = 0$ y $\sigma = 0.2$, la función es

$$f(x) = \frac{1}{0.2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2(0.2)^2}$$

y su gráfica:

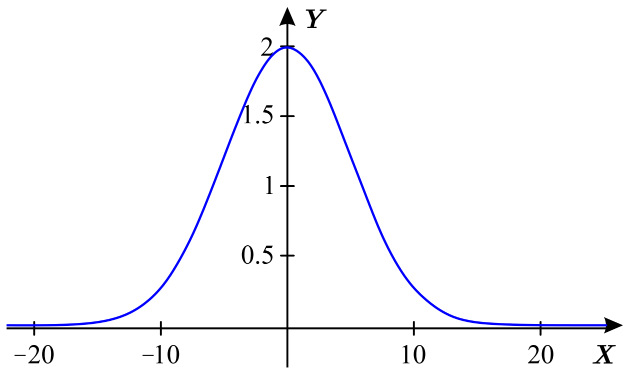

Figura 3-11

Nota: Las escalas de los ejes no son iguales.

Funciones exponenciales a^x con $a > 0$

Así como definimos logaritmos base b con $b > 0$ y $b \neq 1$, veremos ahora lo que significa a^x con $a > 0$.

Definición:

Sea $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ definimos

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Teorema

a^x tiene las siguientes propiedades:

1. $\ln a^x = x \ln a$.
2. $a^x a^y = a^{x+y}$.
3. $(ab)^x = a^x b^x$.
4. $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$.
5. Si $a \neq 1$ entonces $y = a^x \iff x = \log_a y$.

Demostración:

1. Sustituimos el valor de a^x

$$\ln a^x = \ln\left(e^{x\ln a}\right) = x\ln a.$$

2.

$$\begin{aligned} a^x a^y &= e^{x\ln a}e^{y\ln a} \\ &= e^{x\ln a + y\ln a} \\ &= e^{(x+y)\ln a} \\ &= a^{x+y}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (ab)^x &= e^{x\ln ab} \\ &= e^{x(\ln a+\ln b)} \\ &= e^{x\ln a + x\ln b} \\ &= e^{x\ln a}e^{x\ln b} \\ &= a^x b^x. \end{aligned}$$

4. Probaremos primero $(a^x)^y = a^{xy}$.

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= e^{y\ln a^x} \\ &= e^{xy\ln a} \\ &= a^{xy}. \end{aligned}$$

Ahora probaremos $(a^x)^y = (a^y)^x$

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= e^{y\ln a^x} \\ &= e^{xy\ln a} \\ &= e^{x\ln a^y} \\ &= (a^y)^x. \end{aligned}$$

5. Como $a^x = e^{x\ln a}$ entonces

$$y = a^x = e^{x\ln a},$$

de donde

$$\begin{aligned} y = e^{x\ln a} &\iff \ln y = x\ln a \\ &\iff \frac{\ln y}{\ln a} = x \\ &\iff \log_a y = x. \end{aligned}$$

∎

Gráfica de a^x

La gráfica de a^x con $a \neq 1$ se obtiene a partir de la de $\log_a x$ reflejando respecto a la recta $x = y$.

Si $a > 1$, entonces

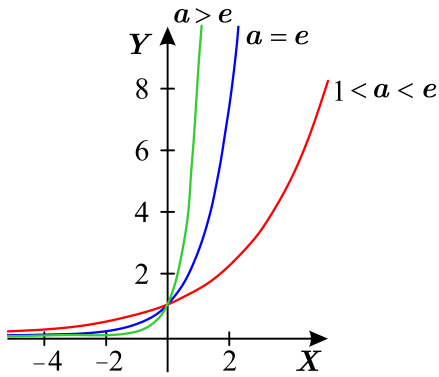

Figura 3-12

Si $0 < a < 1$, entonces

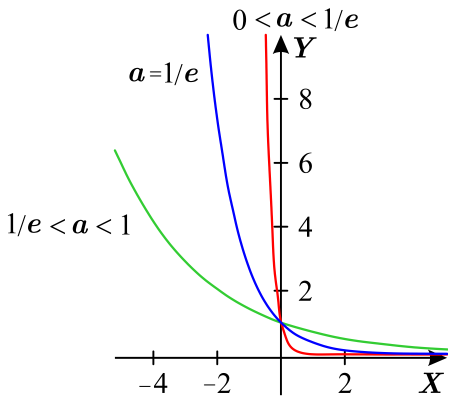

Figura 3-13

Fórmulas de derivación e integración

Teorema

1. La derivada de a^x es $a^x \ln a$.
2. La derivada de $a^{g(x)}$ es $a^{g(x)} g'(x) (\ln a)$.
3. La derivada de $f(x)^{g(x)}$ donde $f(x) > 0$ es $f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + \dfrac{f'(x)}{f(x)} g(x) \right)$.

Demostración:

1. Como $(\exp(x))' = \exp(x)$ y $a^x = e^{x \ln a} = \exp(x \ln a)$, entonces

$$\begin{aligned} (a^x)' &= (\exp(x \ln a))' \\ &= \exp'(x \ln a)(x \ln a)' \\ &= \exp(x \ln a)(\ln a) \\ &= a^x \ln a. \end{aligned}$$

2. Escribimos $a^{g(x)} = e^{g(x) \ln a}$, entonces

$$\begin{aligned} \left(a^{g(x)}\right)' &= \left(e^{g(x) \ln a}\right)' \\ &= e^{g(x) \ln a}\left(g'(x) \ln a + g(x)\, 0\right) \\ &= a^{g(x)} g'(x)(\ln a). \end{aligned}$$

3. Escribimos $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$, entonces

$$\begin{aligned} \left(f(x)^{g(x)}\right)' &= \left(e^{g(x) \ln f(x)}\right)' \\ &= e^{g(x) \ln f(x)}\left(g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} g(x)\right) \\ &= f(x)^{g(x)}\left(g'(x) \ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} g(x)\right). \end{aligned}$$

■

Observación:

Hay que distinguir muy bien entre x^n donde la base es variable y el exponente es constante, y cuya derivada es nx^{n-1} y a^x donde la base es constante y el exponente es variable, y cuya derivada es $a^x \ln a$.

Ejemplos

1. Determinar la derivada de $f(x) = x^x$.

   Solución:

   Escribimos $x^x = e^{x \ln x}$.

$$\begin{aligned} (x^x)' &= \left(e^{x \ln x}\right)' \\ &= e^{x \ln x}\left(\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= x^x(1 + \ln x). \end{aligned}$$

2. Determinar la derivada de $(\ln x)^{\cos x}$.

Solución:

Escribimos $(\ln x)^{\cos x} = e^{(\cos x)\ln(\ln x)}$

$$\begin{aligned}
\left((\ln x)^{\cos x}\right)' &= \left(e^{(\cos x)\ln(\ln x)}\right)' \\
&= e^{(\cos x)\ln(\ln x)}\left((-\operatorname{sen} x)\ln(\ln x) + \cos x\left(\frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\
&= (\ln x)^{\cos x}\left(-\operatorname{sen} x \ln(\ln x) + \frac{\cos x}{x\ln x}\right).
\end{aligned}$$

Las integrales relacionadas con las exponenciales son:

1. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C.$

2. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\int a^x \ln a\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

En general

1. $\displaystyle\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{f(x)} + C.$

2. $\displaystyle\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{1}{\ln a}\int a^u \ln a\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C.$

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx.$

   Solución:

   Hacemos

$$\begin{aligned}
u &= x^3 \\
du &= 3x^2\,dx
\end{aligned}$$

   de donde

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^{x^3}\,dx &= \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int e^u\,du \\
&= \frac{1}{3}e^u + C \\
&= \frac{1}{3}e^{x^3} + C.
\end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

   Solución:

   Hacemos

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x} \\ du &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \end{aligned}$$

   de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx \\ &= 2\int 2^u\,du \\ &= \frac{2}{\ln 2}\int 2^u \ln 2\,du \\ &= 2\left(\frac{2^u}{\ln 2}\right) + C. \end{aligned}$$

3. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

   Solución:

   Escribimos

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\left(\frac{1}{1+e^x}\right) = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

   Hacemos

$$\begin{aligned} u &= e^{-x}+1 \\ du &= -e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

   de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^x}\,dx &= -\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx \\ &= -\int \frac{du}{u} \\ &= -\ln|u| + C \\ &= -\ln\left|e^{-x}+1\right| + C \\ &= \ln\left(\frac{1}{e^{-x}+1}\right) + C. \end{aligned}$$

Definición:
Sea $a \in \mathbb{R}$, definimos

$$x^a : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$$

como

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

Teorema

x^a es derivable y su derivada es ax^{a-1}.

Demostración:

$$\begin{aligned} (x^a)' &= \left(e^{a \ln x}\right)' \\ &= e^{a \ln x} \left(\frac{a}{x}\right) \\ &= \frac{a}{x} x^a \\ &= a x^{a-1}. \end{aligned}$$

■

Observación:
Del teorema anterior tenemos que

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Funciones hiperbólicas

Utilizando la función exponencial pueden definirse nuevas funciones. Estudiaremos ahora las llamadas funciones hiperbólicas.

Definición:

Para cada $x \in \mathbb{R}$ se definen las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico como:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

La razón por la cual se llaman hiperbólicas es la siguiente:

Recordemos que al definir seno y coseno usamos el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Así, dado un número real x, el punto asociado a x en el círculo lo denotamos P_x y llamamos $\cos x$ a la abscisa y $\operatorname{sen} x$ ordenada de P_x respectivamente:

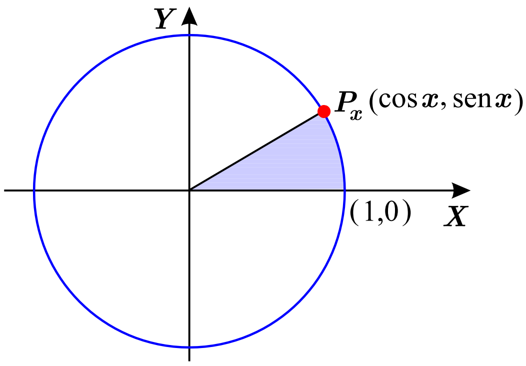

Figura 3-14

Además el área del sector circular que se encuentra entre $(1,0)$, $(0,0)$ y P_x es $\dfrac{x}{2}$:

$$\begin{array}{ccc} \pi & \longrightarrow & 2\pi \\ A & \longrightarrow & x \end{array}$$

de donde:

$$A = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{x}{2}.$$

Ahora, puede probarse que para cada $x > 0$ existe un único punto P_x de coordenadas ambas positivas que está sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

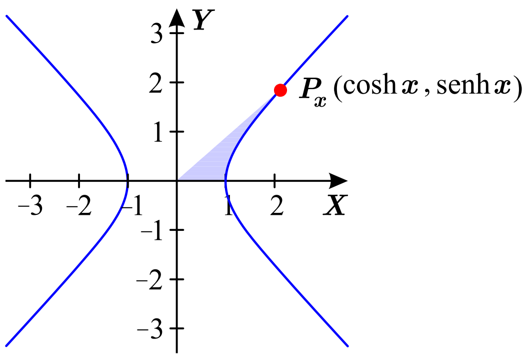

Figura 3-15

de tal manera que el área sombreada es también $\dfrac{x}{2}$.

- La gráfica de la función seno hiperbólico $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ es:

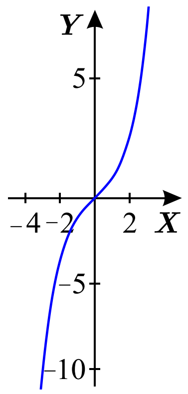

Figura 3-16

- La gráfica de la función coseno hiperbólico $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ es:

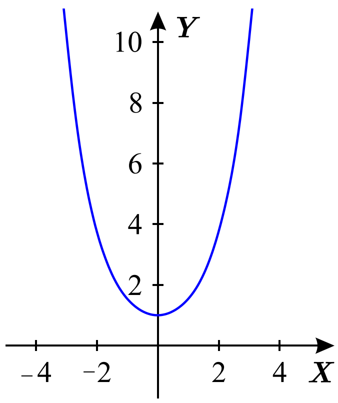

Figura 3-17

A partir de senh y cosh definimos las restantes funciones hiperbólicas:

$$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

claramente:

$$\begin{aligned} \text{Dom } \tanh &= \text{Dom } \sec h &&= \mathbb{R}. \\ \text{Dom } \coth &= \text{Dom } \csc h &&= \mathbb{R}\diagdown\{0\}. \end{aligned}$$

- La gráfica de la función tangente hiperbólica $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ es:

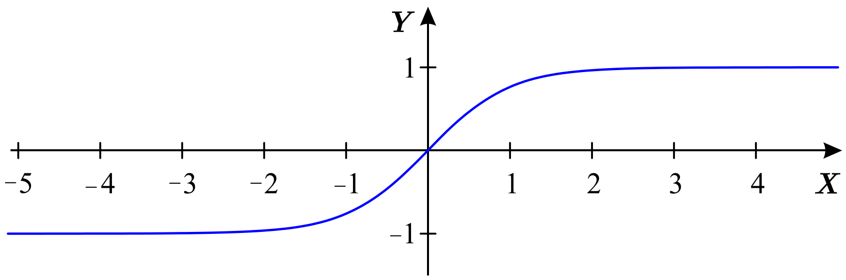

Figura 3-18

- La gráfica de la función cotangente hiperbólica $\coth(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ es:

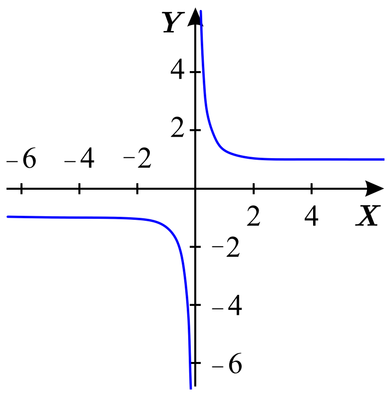

Figura 3-19

- La gráfica de la función secante hiperbólica $\operatorname{sech}(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ es:

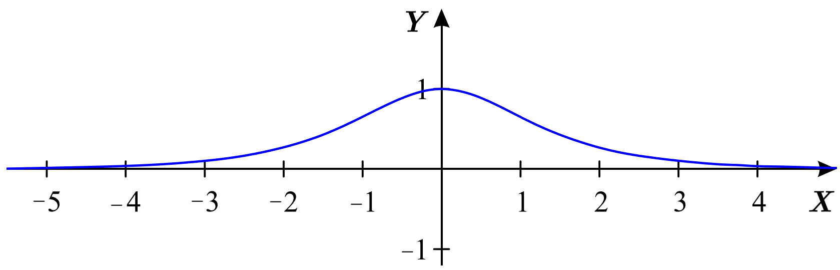

Figura 3-20

- La gráfica de la función cosecante hiperbólica $\operatorname{csch}(x) = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$ es:

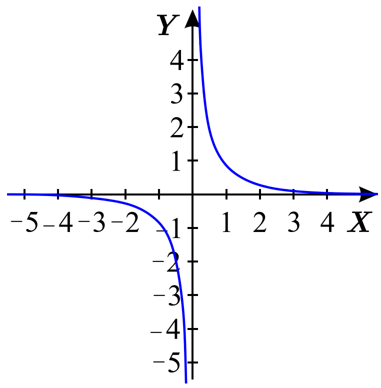

Figura 3-21

Teorema
Las funciones hiperbólicas son continuas en su dominio, más aún, son derivables y

1. $\operatorname{senh}'(t) = \cosh(t)$
2. $\cosh'(t) = \operatorname{senh}(t)$
3. $\tanh'(t) = \operatorname{sech}^2(t)$
4. $\coth'(t) = -\operatorname{csch}^2(t)$
5. $\operatorname{sech}'(t) = -\operatorname{sech}(t)\tanh(t)$
6. $\operatorname{csch}'(t) = -\operatorname{csch}(t)\coth(t)$

Demostración:
Sólo probaremos (1), (2) y (4).
(1)

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}'(t) &= \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)' \\ &= \frac{2\left(e^t + e^{-t}\right)}{4} = \cosh(t).\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cosh'(t) &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)' \\ &= \frac{2\left(e^t - e^{-t}\right)}{4} = \operatorname{senh}(t).\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\coth'(t) &= \left(\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}}\right)' \\
&= \frac{\left(e^t-e^{-t}\right)\left(e^t-e^{-t}\right)-\left(e^t+e^{-t}\right)\left(e^t+e^{-t}\right)}{\left(e^t-e^{-t}\right)^2} \\
&= \frac{\left(e^t-e^{-t}\right)^2-\left(e^t+e^{-t}\right)^2}{\left(e^t-e^{-t}\right)^2} \\
&= \frac{e^{2t}-2e^te^{-t}+e^{-2t}-\left(e^{2t}+2e^te^{-t}+e^{-2t}\right)}{\left(e^t-e^{-t}\right)^2} \\
&= \frac{-4}{\left(e^t-e^{-t}\right)^2} \\
&= \frac{-1}{\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{-1}{\operatorname{senh}^2(t)} \\
&= -\operatorname{csch}^2(t).
\end{aligned}$$

■

Las funciones hiperbólicas satisfacen identidades muy parecidas a las trigonométricas:
Ejemplos

1. Probar que $\operatorname{senh}(t)+\cosh(t)=e^t$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(t)+\cosh(t) &= \frac{e^t-e^{-t}}{2}+\frac{e^t+e^{-t}}{2} \\
&= \frac{2e^t}{2} \\
&= e^t.
\end{aligned}$$

2. Probar que $\cosh^2(t)-\operatorname{senh}^2(t)=1$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
\cosh^2(t)-\operatorname{senh}^2(t) &= \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\left(e^t+e^{-t}\right)^2-\left(e^t-e^{-t}\right)^2}{4} \\
&= \frac{e^{2t}+2e^te^{-t}+e^{-2t}-\left(e^{2t}-2e^te^{-t}+e^{-2t}\right)}{4} \\
&= \frac{4e^te^{-t}}{4}=1.
\end{aligned}$$

3. Probar que $\operatorname{senh}(2t) = 2\operatorname{senh}(t)\cosh(t)$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
2\operatorname{senh}(t)\cosh(t) &= 2\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) \\
&= 2\left(\frac{\left(e^t - e^{-t}\right)\left(e^t + e^{-t}\right)}{4}\right) \\
&= \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} \\
&= \operatorname{senh}(2t)\,.
\end{aligned}$$

4. Probar que $\cosh(2t) = \cosh^2(t) + \operatorname{senh}^2(t)$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
\cosh^2(t) + \operatorname{senh}^2(t) &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{2t} + 2e^te^{-t} + e^{-2t}}{4} + \frac{e^{2t} - 2e^te^{-t} + e^{-2t}}{4} \\
&= \frac{2e^{2t} + 2e^{-2t}}{4} \\
&= \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \cosh(2t)\,.
\end{aligned}$$

5. Probar que $\operatorname{senh}^2(t) = \frac{1}{2}(\cosh(2t) - 1)$.

   Solución:

   Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\cosh(2t) &= \cosh^2(t) + \operatorname{senh}^2(t) \\
\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) &= 1.
\end{aligned}$$

   Despejando de la segunda $\cosh^2(t)$ y sustituyendo en la primera, tenemos:

$$\begin{aligned}
\cosh(2t) &= 1 + \operatorname{senh}^2(t) + \operatorname{senh}^2(t) \\
&= 1 + 2\operatorname{senh}^2(t)\,,
\end{aligned}$$

   de donde

$$\operatorname{senh}^2(t) = \frac{\cosh(2t) - 1}{2}.$$

6. Probar que $\cosh^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \cosh(2t))$.

Solución:

Sabemos que

$$\begin{aligned}\cosh(2t) &= \cosh^2(t) + \operatorname{senh}^2(t)\\ \cosh^2(t) - 1 &= \operatorname{senh}^2(t).\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\cosh(2t) &= \cosh^2(t) + \cosh^2(t) - 1\\ &= 2\cosh^2(t) - 1.\end{aligned}$$

de donde

$$\cosh^2(t) = \frac{1 + \cosh(2t)}{2}.$$

7. Probar que $\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$.

   Solución:

   Como

   $$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

   entonces dividiendo entre $\operatorname{senh}^2 x$

   $$\begin{aligned}\frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} &= \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\\ \frac{\cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x} - 1 &= \operatorname{csch}^2 x\\ \coth^2 x - 1 &= \operatorname{csch}^2 x\\ \coth^2 x &= 1 + \operatorname{csch}^2 x\end{aligned}$$