

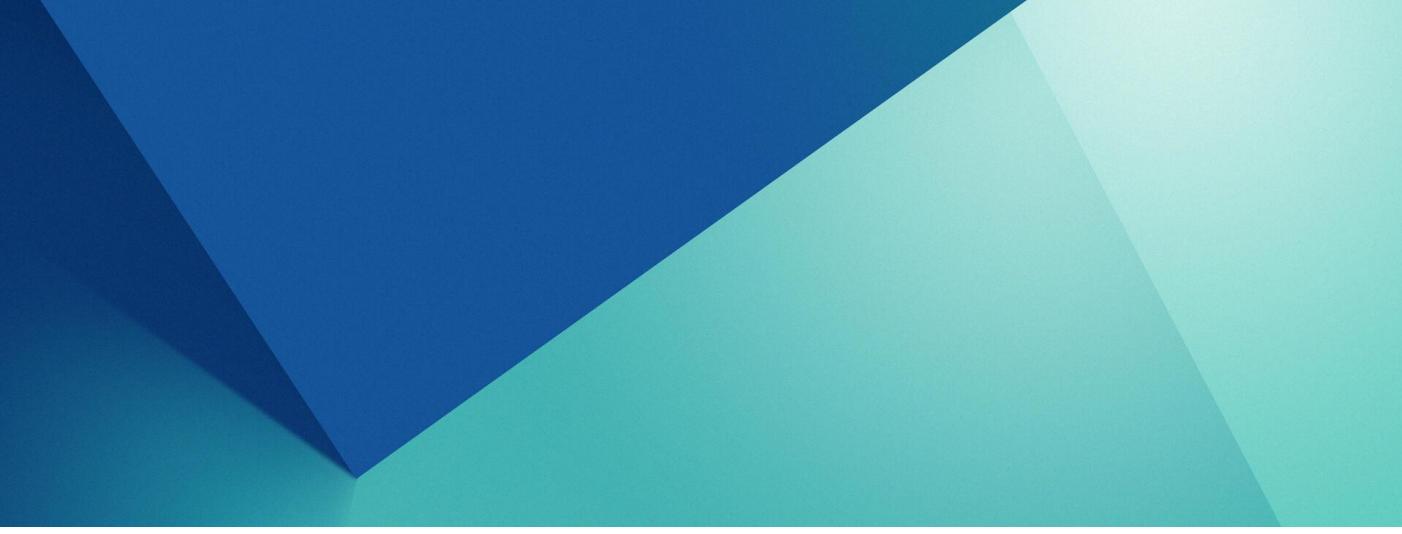
Economia Matemática

Álgebra matricial para a construção de modelos econômicos lineares

Apresentação

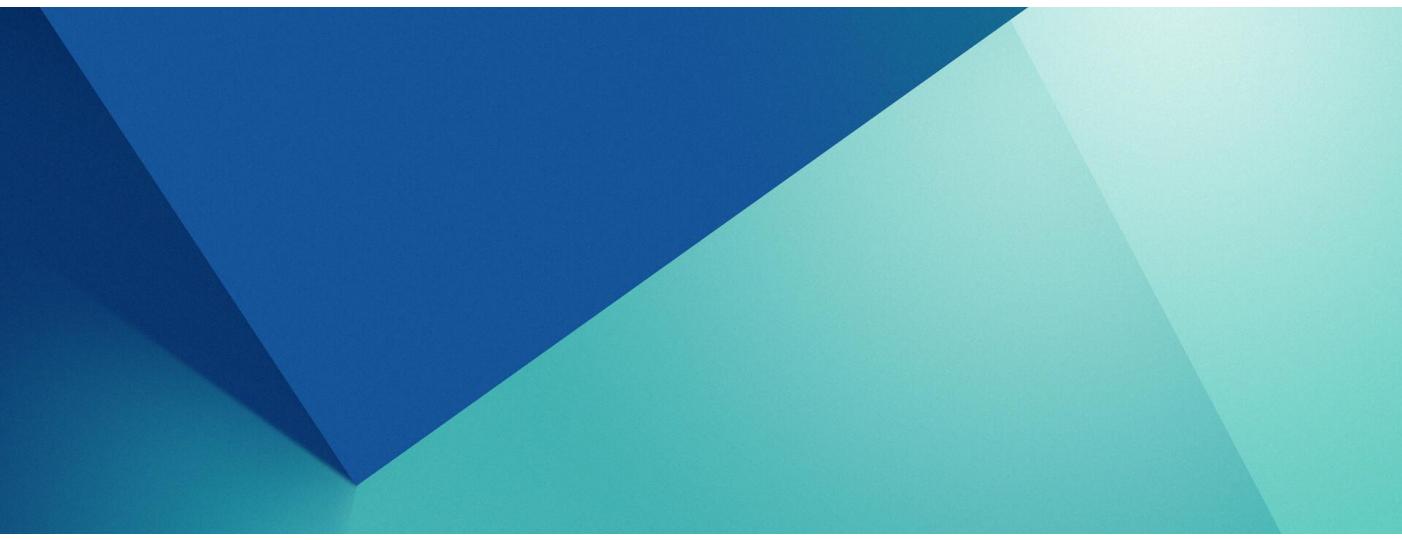
A álgebra matricial nos proporciona um modo compacto de resolver problemas. Para nos ajudar a resolver esses sistemas, bem como outros sistemas com muitos coeficientes e variáveis, vamos conhecer as principais características e propriedades da álgebra matricial e de operações com matrizes. Abordaremos aplicações em modelos econômicos de renda nacional e as características principais de estruturação das Cadeias de Markov, como aplicação de um processo para estimar mudanças de estado econômico ao longo do tempo.

Objetivos



MÓDULO 1

- Examinar as principais características e propriedades da álgebra matricial e de operações com matrizes.



MÓDULO 2

- Examinar conceitos e modelos lineares de equilíbrio parcial de mercado.

MÓDULO 1

- Examinar as principais características e propriedades da álgebra matricial e de operações com matrizes

Álgebra matricial

A large rectangular area representing a video player. It contains a smaller, empty rectangular frame in the center. At the bottom, there is a horizontal bar with various control icons: a play button, a volume icon, a timestamp (0:00 / 9:59), a download icon, a square icon, a double square icon, and a three-dot menu icon.

Vídeo

Atenção! Aqui existe uma videoaula, acesso pelo conteúdo online

O modelo de mercado de duas mercadorias é um sistema de duas equações lineares da forma em que os parâmetros ε_0 e β_0 aparecem do lado direito do sinal de igualdade, como vemos a seguir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 &= -\varepsilon_0 \\ \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 &= -\beta_0\end{aligned}$$

Equação (1)

É possível resolver o problema por meio de um sistema linear geral de **m** equações a **n** incógnitas, que pode ser escrito como:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_m = b_1$$

Equação (2)

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n$$

Nesses sistemas, a e b são valores pertencentes aos reais, sendo os coeficientes das incógnitas x.

A solução dos sistemas (2) é um conjunto de valores reais $x_1 \dots x_n$ que satisfaz cada uma das **m** equações em (2). Por exemplo, $x_1 = 3, x_2 = 4$ é uma solução das equações.

Para o sistema linear mostrado acima, em (2) estaremos interessados nos seguintes pontos básicos.



Há essencialmente três métodos de resolução de tais dificuldades:

Método de substituição

Método da eliminação de variáveis

Método matricial

Podemos dividir em arranjos o sistema de equações mostrado nas equações anteriores (2); os membros dos arranjos são elementos.

Observe que o arranjo dividido em alguns componentes, pode ser escrito por meio das seguintes matrizes:

 Clique nos botões para ver as informações.

Matrizes de coeficientes



Observe o arranjo escrito por meio das **matrizes de coeficientes**:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Para montar essa matriz, colocamos todos os coeficientes das equações que estão nos sistemas. Por exemplo, na equação 1, colocamos como a_{11}, a_{12}, \dots , na primeira linha; na equação 2, colocamos os coeficientes na segunda linha e assim sucessivamente.

Matriz dos x_i



Observe a **matriz dos x_i** :

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

Para montarmos essa matriz, teremos que colocar todas as variáveis na coluna.

Matrizes dos termos constantes



Dando continuidade aos argumentos do sistema, teremos as **matrizes dos termos constantes**, que podemos desenvolver inserindo cada termo de cada equação em uma única matriz coluna:

$$b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_3 \end{vmatrix}$$

Para montarmos essa matriz, teremos que colocar todas as variáveis na coluna.



Se acrescentarmos à matriz A a matriz dos termos constantes b_i , teremos a **matriz aumentada**:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \dots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

Veja um exemplo prático, encontrado no livro Matemática para Economistas, na página 51. Dado o sistema de equações a seguir:

$$\begin{aligned} 6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 &= 22 \\ x_1 + 4 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 &= 12 \\ 4 \cdot x_1 - x_2 + 5 \cdot x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Cada um dos três arranjos constitui uma matriz:

Matriz dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Matriz dos x_i

$$x_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Matriz dos termos constantes

$$d = \begin{bmatrix} 22 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Um ganho importante que teremos com a análise matricial é que ela nos auxilia a resolver os sistemas lineares.

Uma forma de resolver os sistemas lineares é o método simples de eliminação Gauss-Jordan¹ :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 23 \\ x_2 - 5x_3 &= -6 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Se fizermos o produto da terceira equação por (x5) e somarmos a segunda equação, teremos:

$$\begin{aligned}x_2 - 5x_3 &= -6 \\5x_3 &= 10\end{aligned}$$

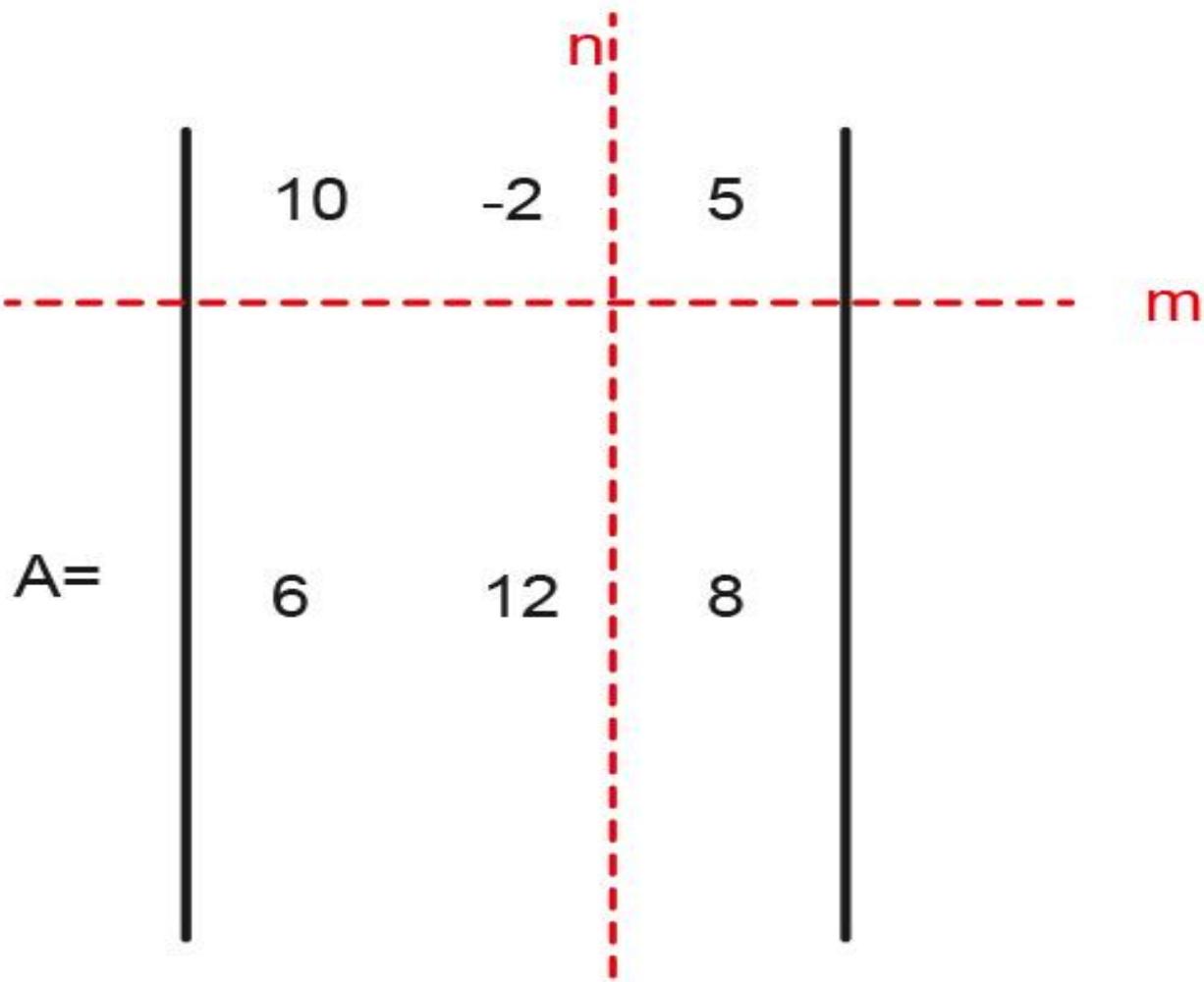
Vamos achar $x_2 = 4$ e assim iremos resolvendo as equações, sempre eliminando uma equação de cada vez.

Porém, isso foi só para verificar como podemos resolver os sistemas. Antes de aprendermos todos esses métodos de soluções e resoluções de sistemas, que serão bem úteis para solucionar problemas econômicos, precisamos aprender alguns conceitos matriciais.

Representação e operação com matrizes

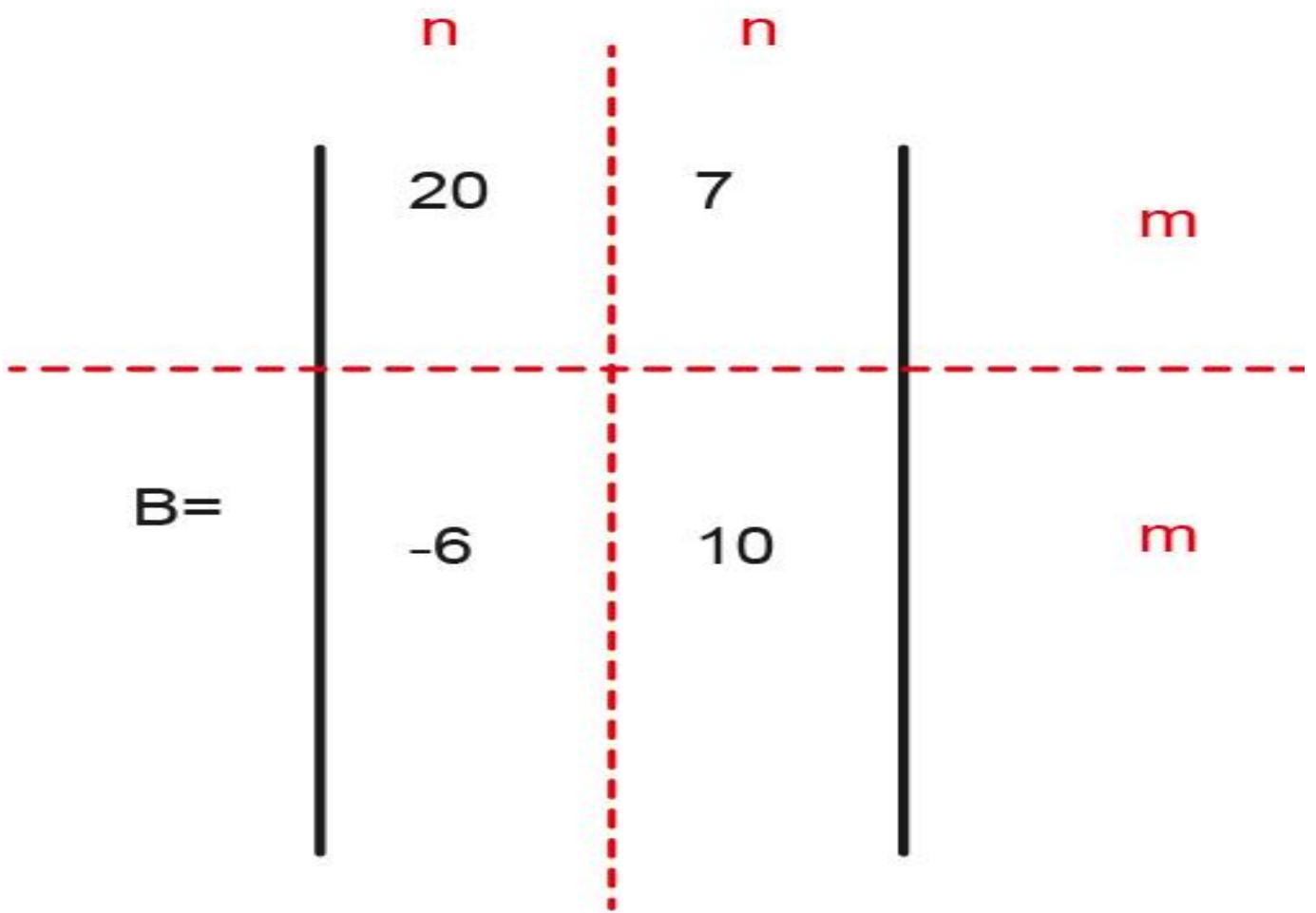
Para começarmos, é preciso relembrar os conceitos de matrizes.

As **matrizes** $m \times n$ são arranjos de m, n valores dispostos em m linhas, que estão aparelhadas na parte horizontal, e de n colunas, que estão dispostas na parte vertical:



Podemos dizer que essa é uma matriz em que m é 2, pois existem duas linhas e n é 3, já que há 3 colunas; sendo assim, é uma matriz 2×3 .

Agora, observe outra matriz:



Podemos dizer que m é 2, pois existem duas linhas e n é 2, pois existem duas colunas; sendo assim é uma matriz 2 x 2.

Veja que, no próximo exemplo, temos mais linhas e colunas:

$$C = \begin{vmatrix} 0,7 & -2 & 5 \\ 6 & 12 & 8 \\ 0,5 & 40 & 7 \\ -6 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Por último, podemos dizer que m é 4, pois existem quatro linhas e n é 3, já que há três colunas; sendo assim é uma matriz 4 x 3.

As matrizes podem ser apresentadas com:

[]

Colchetes

()

Parênteses

||

Duas barras verticais

Além disso, podem ser representadas por letras maiúsculas e os termos que estão dentro dela por letras minúsculas, como vimos em nossos exemplos de matrizes.

Uma outra forma de apresentarmos as matrizes é a forma abreviada, em índices:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$


Observe que i mostra a parte da linha e j a coluna em que o valor está, sendo que o índice i está entre 1 e m, e o índice j está entre 1 e n.

Por exemplo, na matriz D, a_{23} é o valor da segunda linha com o da terceira coluna, que é o valor 7. E $a_{3,2}$ é o valor da terceira linha com o da segunda coluna, que é o valor -2:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 12 & 8 \\ 0,5 & 40 & 7 \\ -6 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Definições de matrizes

Agora, veremos alguns casos de matrizes especiais:

 Clique nos botões para ver as informações.

Matriz linha



As primeiras são as **matrizes linha**; como podemos ver a seguir, é uma matriz que só contém uma linha. Ela será sempre da forma 1 x n. Por exemplo, a matriz E é de ordem 1x4:

$$E = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Matriz coluna



Da mesma forma, temos a **matriz coluna**, uma matriz que só contém uma coluna. Ela será sempre da forma m x 1. Por exemplo, a matriz F que é ordem 5x1:

$$F = \begin{vmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \\ 9 \end{vmatrix}$$

Matrizes quadradas



Também temos as **matrizes quadradas**, com o mesmo número de colunas e linhas. Nesse caso, falamos que a matriz é de ordem n, como é o caso das matrizes G e H, que são 2X2 ou somente 2, e 3X3 ou somente 3, respectivamente.

$$G = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} 0,7 & -2 & 5 \\ 6 & 12 & 8 \\ 0,5 & 40 & 7 \end{vmatrix}$$

Com essas definições, vejamos agora os termos das matrizes quadradas. Vamos imaginar uma matriz J, que é quadrada de ordem n, no caso do exemplo a seguir de ordem 3. Falamos que a diagonal principal das matrizes quadradas são os elementos dessa matriz, em que $i=j$. Também podemos dizer que a diagonal secundária dessas matrizes quadradas são os elementos dessa matriz, em que $i+j = n + 1$. Como o exemplo da matriz J:

$$J = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

Para descrever essa matriz teremos:

O subscrito 3 é a ordem da matriz;

A diagonal principal são os elementos -8, 0 e 6;

A diagonal secundária são os elementos 5, 0 e 5;

$a_{11} = -8$ está contido na diagonal principal, como $i = j = 1$;

$a_{31} = 5$ está contido na diagonal secundária, como $i + j = n + 1 = 3 + 1$.

Matriz nula



Agora veremos outra matriz, a **matriz nula**, em que todos os valores são zero. Ela é representada pela letra $O_{m \times n}$, como no exemplo a seguir, a matriz $O_{2 \times 3}$:

$$O = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Matriz diagonal



Matriz diagonal não deixa de ser uma matriz quadrada, mas em que somente os termos da diagonal são não nulos, ou diferentes de zero, como a matriz K de ordem 3x3:

$$K = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$



Uma matriz muito importante, que usaremos para poder inverter matrizes, é a **matriz identidade**. Ela não deixa de ser uma matriz quadrada, mas em que somente valores 1 estão na diagonal principal; os outros são zero. Ela é denominada I, como a matriz I de ordem 4 a seguir:

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Outra forma abreviada de apresentar a matriz identidade é a seguinte:

$$I_n = [a_{ij}] \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Matriz transposta



Para acharmos as **matrizes transpostas**, temos que inverter ou transpor a linha pelas colunas, chamando assim essa matriz de matriz transposta. Sua notação é sempre um T sobreescrito no nome da matriz. Por exemplo, se temos a matriz A, a sua transposta é denominada A^T , como a matriz A e a matriz A^T :

$$A = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

$$A^T = \begin{vmatrix} -8 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

Nessa matriz transposta, a primeira linha de A corresponde à primeira coluna de A^T e assim sucessivamente.

Outro detalhe importante é que, se a ordem da matriz A é $m \times n$ (3×2), como no exemplo a seguir, então a matriz transposta será $n \times m$ (2×3).

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$A^T = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

Um caso interessante é o da matriz identidade, que é igual à sua transposta $I = I^T$. A matriz transposta também pode ser representada com aspas simples, como (A') .



Uma **matriz simétrica** é quando $A = A^T$, e $A^T = A$. Quando $A = -A^T$, chamamos de **matriz antissimétrica**. Essas matrizes são muito usadas em economia, principalmente em matrizes covariância e correlação, pois são simétricas:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A^T = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Matriz oposta



Obtemos a **matriz oposta** de uma outra trocando o sinal dos elementos dessa matriz. Vejamos o caso da matriz B, a sua oposta é chamada de $-B$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$$

$$-B = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -6 & -12 \end{vmatrix}$$

Operações com matrizes

A seguir veremos como trabalhar operações com matrizes.



Adição de matrizes

A primeira operação que estudaremos é a **adição de matrizes**, que corresponde à soma de dois elementos de mesma ordem de uma matriz. Por exemplo, duas matrizes A e B de mesma ordem, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{3 \times 3}$.

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$A + B = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 21 \end{vmatrix}$$



Multiplicação por escalar

Outra operação é a **Multiplicação por escalar**, em que se multiplica cada elemento dessa matriz por um valor k, conforme a seguir:

$$kA = [ka_{ij}]_{3 \times 3}$$

$$kA = k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot A = 2^* \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$2 \cdot A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$



Multiplicação de matrizes

Já a **multiplicação de matrizes** é realizada multiplicando-se a linha da primeira matriz pela coluna da segunda, somando os valores; o resultado ficará em apenas uma posição. A ordem do produto dessas matrizes será m linhas (m da ordem da primeira matriz) por n colunas (n da ordem da segunda matriz), conforme a seguir:

$$C_{uv} = \sum_{k=1}^3 a_{uk} b_{kv} = a_{u1} b_{1v} + a_{u2} b_{2v} + a_{u3} b_{3v}$$

$$A_{3 \times 3} \times C_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{31} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + a_{13}c_{32} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{12} + a_{23}c_{31} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{32} \\ a_{31}c_{11} + a_{32}c_{12} + a_{33}c_{31} & a_{31}c_{12} + a_{32}c_{22} + a_{33}c_{32} \end{bmatrix}$$

$$A_{3 \times 3} \times C_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0+20 & 1+0-16 \\ 12+3-10 & 4-6+8 \\ 0-5-5 & 0+10+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -15 \\ 5 & 6 \\ -10 & 14 \end{bmatrix}$$

A ordem do produto da multiplicação da matriz A (3x3) com a matriz C (3x2) será 3x2, pois a matriz A tem a ordem 3x3. Seleciona-se o m=3 de A, e a matriz C é de ordem 3x2; seleciona-se a ordem n=2 da segunda matriz.

Uma outra operação muito utilizada em economia matemática é o cálculo de **determinantes de matrizes**, que só pode ser feito a partir de matrizes quadradas, aquelas que têm o mesmo número de linhas e de colunas. A notação do determinante de A é $\det(A)$.

Sejam as matrizes D de ordem 2x2, então o determinante de D, $\det(D)$ será a diferença do produto da diagonal principal pelo produto dos valores da diagonal secundária:

$$\det D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}$$

Para uma matriz de ordem 3x3 ou superior, calculamos o determinante fazendo o espelhamento da primeira e da segunda coluna (no caso de 3 X 3), multiplicando as diagonais principais e secundárias e, em seguida, fazendo a diferença entre os resultados, conforme o exemplo a seguir:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11})$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{32}a_{23}a_{11})$$

▶ 🔍 0:00 / 10:03



Vídeo

Atenção! Aqui existe uma videoaula, acesso pelo conteúdo online

Verificando o aprendizado

Atividade

1. Seja a matriz $D_{2 \times 2}$ conforme a seguir.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Qual o determinante da matriz?

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 10

2. Seja a matriz D_{2x2} conforme a seguir.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Qual o determinante da matriz?

- a) -15
- b) -66
- c) -93
- d) -40
- e) 101

MÓDULO2

⌚ Aplicar álgebra linear aos modelos econômicos de mercado e renda nacional

Álgebra matricial x álgebra escalar

A álgebra matricial pode parecer com a álgebra escalar, mas existem várias diferenças, as quais são chamadas de **idiossincrasias da álgebra matricial**.

Por exemplo, multiplicar a matriz A pela matriz B é diferente de multiplicar a matriz B pela matriz A; escrevendo de forma algébrica teremos:

$$A \times B \neq B \times A$$

Na álgebra escalar, quando fazemos uma multiplicação de dois números e o resultado é zero ($a \times b = 0$), ou o valor de a é zero ou o valor de b é zero. Na álgebra matricial isso não ocorre, como podemos verificar no exemplo a seguir. Essa é uma idiossincrasia da álgebra matricial, pois multiplicamos matrizes não nulas e obtemos uma matriz nula:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} (2 * (-2) + 4 * 1) & (2 * 4 + 4 * (-2)) \\ (1 * (-2) + 2 * 1) & (1 * 4 + 2 * (-2)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Matriz inversa

0:00 / 10:02



[Vídeo](#)

Atenção! Aqui existe uma videoaula, acesso pelo conteúdo online

A matriz inversa é um tipo de matriz quadrada com o mesmo número de linhas e colunas. Ocorre quando a multiplicação de duas matrizes resulta em uma matriz identidade de mesma ordem, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas.

Podemos escrever a matriz inversa como A^{-1} . Multiplicar a matriz A pela sua matriz inversa resulta na matriz identidade:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

Suponha a matriz A e a sua matriz inversa A^{-1} , como a seguir:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A \times A^{-1} = I$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Atenção

Algumas considerações são importantes sobre a matriz inversa:

- Nem toda matriz quadrada tem uma inversa;
- Se existir só uma matriz inversa, ela deverá ser única.

Agora veremos como a aplicação do conceito de matriz inversa é direta para os sistemas lineares.

Um sistema linear pode ser escrito pelas **matrizes de coeficientes**, a **matriz dos x_i** e **matrizes dos termos constantes**:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &= b_n \\ A \times X_i &= b_i \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right) \times \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{vmatrix}$$

Em que A é a matriz de coeficientes e, se multiplicarmos ambos os lados da equação $\mathbf{A} \times \mathbf{X}_i = \mathbf{b}_i$, pela matriz inversa, encontraremos:

$$\begin{aligned} (A^{-1}) \times A \times X_i &= (A^{-1}) \times b_i \\ \text{Como } A^{-1} \times A &= I, \text{ então:} \\ I \times X_i &= (A^{-1}) \times b_i > X_i = (A^{-1}) \times b_i \end{aligned}$$

Assim, teremos o conjunto de valores que são a solução do sistema. Se encontrarmos a matriz inversa da matriz \mathbf{A} dos coeficientes e multiplicarmos pela matriz das constantes \mathbf{b} , acharemos o resultado do sistema linear. Também saberemos que a solução será única, pois só existe uma matriz inversa.

A seguir, veja mais um exemplo.

Exemplo

 Clique no botão acima.

Suponha um sistema que tenha a matriz A como a matriz dos coeficientes e a matriz inversa A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 7 & -7 & 4 \end{vmatrix}$$

Esse sistema possui a seguinte matriz das constantes \mathbf{b} :

$$b_i = \begin{vmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{vmatrix}$$

Assim o resultado do sistema será:

$$X_i = (A^{-1}) \times b_i$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 7 & -7 & 4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -90 \\ 200 \\ 190 \end{vmatrix}$$

Ou seja, $x_1 = -90$, $x_2 = 200$ e $x_3 = 190$ é a solução do sistema.

Mas como encontrar a matriz inversa?

Existem alguns métodos, mas vamos voltar à definição de matriz inversa. Sabemos que:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

Suponha que a matriz A seja:

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Queremos encontrar a matriz inversa. Não sabemos os valores dessa matriz, mas suponha que os valores dela sejam a, b, c e d:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Então, pela definição, $A \times A^{-1} = I$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Daí, teremos os seguintes sistemas:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (4.a) + (1.c) & (4.b) + (1.d) \\ (6.a) + (2.c) & (6.b) + (2.d) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (4.a) + (1.c) &= 1 \\ (4.b) + (1.d) &= 0 \\ (6.a) + (2.c) &= 0 \\ (6.b) + (2.d) &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, encontraremos $a = 1$, $b = -0,5$, $c = -3$ e $d = 2$. ou seja, a matriz inversa será:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0,5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Outra forma de encontrarmos a matriz inversa é utilizando o conceito de determinante, $\det(A)$. Supondo que queremos inverter a matriz A, ela será definida conforme a seguir:

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Teremos que a matriz inversa A^{-1} será:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Também existe a forma de calcular a matriz inversa por escalonamento, em que colocamos a matriz A (do lado esquerdo) ao lado da matriz identidade (do lado direito), escalonando até encontrar a matriz identidade ao lado esquerdo e matriz inversa ao lado direito, conforme apresentado a seguir:

Matriz A

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Matriz identidade

Escalonaremos a matriz até encontrarmos a matriz identidade do lado esquerdo e a matriz inversa do lado **direto**:

Matriz identidade

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right]$$

Matriz inversa

A matriz inversa será a matriz do lado esquerdo.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Escalonaremos passo a passo. Vamos lá.

1º passo: multiplicar c pela linha 1 e a pela linha 2:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{c.l}_1 \text{ em } l_2} \left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array} \right]$$

2º passo: multiplicar a linha 1 por menos um e somamos a linha 2:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array} \right] \xrightarrow{-l_1 + l_3 \text{ em } l_3} \left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array} \right]$$

3º passo: dividir a linha 2 por (ad -bc):

$$\left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 \div (ad - bc)} \left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{array} \right]$$

4º passo: multiplicar -bc à linha 2 e somaremos a linha 1:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} ac & bc & c & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{array} \right] \xrightarrow{-bc l_2 + l_1 \text{ em } l_1} \left[\begin{array}{cc|cc} ac & 0 & \frac{acd}{ad - bc} & \frac{-abc}{ad - bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{array} \right]$$

5º passo: dividir a linha 1 por ac:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} ac & 0 & \frac{acd}{ad-bc} & \frac{-abc}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \div ac} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right]$$



Saiba mais

Para maiores detalhes sobre os métodos de inversão de matriz, consulte o livro *Matemática para Economistas* (página 98 até a página 104), de Chiang e Wainwright.

O modelo simples de Renda Nacional

Após aprendermos a calcular algumas matrizes, aplicaremos os nossos conhecimentos ao modelo simples de renda nacional:

Produto ou Renda

Investimento

Investimento do governo

Consumo

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = a + b \cdot Y$$

Sendo Y o Produto ou Renda, C o consumo, I_0 investimento e G_0 investimento do governo, podemos reescrever as equações passando todos os valores de Y e C para o lado esquerdo, e tudo que consideramos constante para o lado direito:

$$\begin{aligned} Y - C &= I_0 + G_0 \\ -b \cdot Y + C &= a \end{aligned}$$

Colocando em notação matricial:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} Y \\ C \end{vmatrix}$$

$$b = \begin{vmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{vmatrix}$$

Fazendo a inversa da matriz A , teremos:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

A solução do modelo é $x = A^{-1} \times b$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} Y \\ C \end{vmatrix} &= \frac{1}{1-b} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix} \\ \begin{vmatrix} Y \\ C \end{vmatrix} &= \begin{bmatrix} I_0 + G_0 + a \\ b \cdot (I_0 + G_0) + a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cadeias de Markov

As cadeias de Markov são muito utilizadas em economia para medir mudanças ao longo do tempo. Envolve uma matriz de transição de Markov, em que cada valor da matriz de transição é uma probabilidade de mudar de um estado para outro. Existe também o vetor inicial que mostra a posição inicial.

Como exemplo, podemos citar duas cidades próximas que têm uma firma em cada uma. A quantidade de empregados dessas cidades é definidas como A, os empregados da cidade A, e B empregados da cidade B, em um determinado tempo t. As probabilidades de transição de serão:

$$P_{AA}$$

Probabilidade de que um A permaneça em A.

$$P_{AB}$$

Probabilidade de que um A passe para B.

$$P_{BA}$$

Probabilidade de que um B passe para A.

$$P_{BB}$$

Probabilidade de que um B permaneça em B.

Se colocarmos a distribuição de empregados em um certo tempo t em uma matriz, teremos:

$$X_t = [A_t \ B_t]$$

E as probabilidades de transição em outra matriz:

$$M = \begin{bmatrix} P_{AA} & P_{AB} \\ P_{BA} & P_{BB} \end{bmatrix}$$

Então, a distribuição de empregados pelas localizações no próximo período (por exemplo ano) t+1 será:

$$X_t \times M = X_{t+1}$$

Assim, encontraremos a distribuição de empregados após um período; para descobrir do segundo período, teremos que fazer mais um passo, utilizando o valor de t+1 como ponto inicial.

▶ 🔍 0:00 / 10:02



Vídeo

Atenção! Aqui existe uma videoaula, acesso pelo conteúdo online

Verificando o aprendizado

Atividade

1. Em um sistema de economia de mercado, temos três variáveis. Suponha que esse sistema tenha a matriz A como a matriz dos coeficientes e possua uma matriz inversa A⁻¹ e matriz das constantes b, conforme abaixo:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 7 & -7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$b_i = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Qual será o resultado do sistema?

- a) x₁ = -18, x₂ = 106 e x₃ = 57.
- b) x₁ = -16, x₂ = 74 e x₃ = 43.
- c) x₁ = -95, x₂ = 80 e x₃ = 76.
- d) x₁ = -50, x₂ = 100 e x₃ = 5.

e) $x_1 = -89$, $x_2 = 48$ e $x_3 = 33$.

2. Considerando modelo simples de renda nacional, com Y o Produto ou Renda, C o consumo:

$$786 = C + I_0 + G_0$$

$$C = 10 + 5.Y$$

O I_0 investimento é 30 e G_0 investimento do governo é 20. Qual o valor da renda Y e do Consumo C?

- a) $Y = 50$ e $C = 40$.
- b) $Y = 250$ e $C = 40$.
- c) $Y = 60$ e $C = 260$.
- d) $Y = 150$ e $C = 200$.
- e) $Y = 200$ e $C = 300$.

CONCLUSÃO

Em um mercado que envolve mais de uma mercadoria, há sistemas com muitas variáveis de difícil resolução. A álgebra matricial é útil, pois nos proporciona um modo compacto de resolver problemas. Além de podermos testar a existência de solução, por meio de uma avaliação de um determinante, a álgebra matricial dos modelos lineares nos dá métodos de encontrar essa solução.

Método simples de eliminação Gauss-Jordan¹

O nome faz referência aos matemáticos Carl Friedrich Gauss e Wilhelm Jordan.

Referências

BOLDRIN, C; FIGUEIREDO, W. **Álgebra Linear**. São Paulo: Arbra Ltda., 1986.

CHIANG, A. C.; WAINWRIGHT, K. **Matemática para Economistas**. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

IAN, J. **Matemática para Economia e Administração**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

SANTOS, N.M. **Vetores e Matrizes**: Uma introdução à álgebra linear. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.

Próxima aula

- TEXTO

Explore mais

- Verifique os exercícios nas páginas 77, 80, 100 e 109 do livro *Matemática para Economistas*.
- Leia as páginas 49 -56 do livro *Matemática para Economistas* (CHIANG, A. C. e WAINWRIGHT, K.), e verifique alguns exemplos/exercícios que poderão auxiliar seu entendimento.