Aula 6: Funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial

Apresentação

Nesta aula apresentaremos as estruturas de dependência de modelos de séries temporais, denominadas função de autocorrelação e função de autocorrelação parcial. Em seguida, essas funções serão calculadas para cada um dos modelos teóricos de séries temporais da classe ARMA definidos nos capítulos anteriores, definindo padrões característicos de cada modelo.

Objetivos

- Examinar os conceitos de função de autocorrelação (FAC) e de função de autocorrelação parcial (FACP);
- Analisar padrões teóricos de FAC para cada modelo da classe ARMA;
- Identificar padrões teóricos de FACP para cada modelo da classe ARMA.

Função de Autocovariância

Vimos na aula 3 que um modelo (fracamente) estacionário satisfaz as seguintes propriedades:

Atenção! Aqui existe uma videoaula, acesso pelo conteúdo online

$$E\left(Y_t\right) = \mu, \ \forall \ t = 1,2,...,T \left(\text{média constante}\right) V\left(Y_t\right) = \delta^2, \ \forall \ t = 1,2,...,T \left(\text{var}\right.$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Em particular, a covariância é constante no tempo, mas varia com k. Isto significa que $Cov(Y_3,Y_2) = Cov(Y_2,Y_1)$ (ambas denotadas por $\gamma 1$) mas, por exemplo, $Cov(Y_3,Y_1) \neq Cov(Y_2,Y_1)$.

Neste caso (ou seja, se o modelo é estacionário), $\gamma_k = Cov(Y_t,Y_{t-k})$ é chamada Função de Autocovariância (FACV) de Y_t, definida para k = 0, 1, 2... (o nome possui a mesma justificativa do caso de um modelo autorregressivo: Representa basicamente a covariância da série com ela mesma, defasada). Note ainda que: $\gamma_0 = Cov(Y_t,Y_t) = V(Y_t)$, ou seja, é a variância da série.

Cada valor k para o qual definimos γ_k é chamado defasagem, ou, do inglês, *lag*. Este termo é bastante usual na literatura de séries temporais. Será frequente, portanto, nos referirmos a γ_k como função de autocovariância de *lag* k.

Separamos alguns exemplos para você.

Seja um modelo A tal que: $Cov(Y_t,Y_t\text{-}k) = (2t)^k$ e um modelo B tal que $Cov(Y_t,Y_{t-k}) = (1/2)^{k+1}$. Qual destes modelos apresenta uma função de autocovariância válida e qual o seu valor no lag 2?
Solução: O modelo B, no qual $Cov(Y_t,Y_{t-k})$ não depende de t. Para este caso, $\gamma_2 = (1/2)^3 = 0.125$.

Função de Autocorrelação

A correlação entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida da seguinte forma:

Atenção! Aqui existe uma videoaula, acesso pelo conteúdo online

$$\rho_{XY} = \mathrm{Corr}X, Y = \frac{\mathrm{Cov}X, Y}{\sqrt{VX}\sqrt{VY}}.$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Desta forma, é imediato definir a função de autocorrelação de uma série temporal da seguinte maneira:

$$\rho_k = \mathrm{Corr}Y_t, Y_{t-k} = \frac{\mathrm{Cov}Y_t, Y_{t-k}}{\sqrt{VY_t}\sqrt{VY_{t-k}}}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Como o modelo é estacionário (lembre-se de que isso é uma premissa para que a função de autocovariância - e portanto também a função de autocorrelação - seja válida), temos que $V(Y_t) = V(Y_{t-k})$, e assim:

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{\sqrt{V(Y_t)}\sqrt{V(Y_t)}} = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-k})}{V(Y_t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A FAC, assim como a FACV, também é definida para os *lags* k = 0, 1, 2..., sendo p_0= 1.

Vamos ver mais alguns exemplos?

Obtenha a função de autocorrelação de lag k para o modelo do exemplo anterior.

Solução: γ_0 = $(1/2)^{0+1}$ = $(1/2)^1$ = 1/2. Assim, ρ_k = $(1/2)^{k+1/1}$/2 = $(1/2)^k$.

Verifique que a função de autocovariância satisfaz às seguintes propriedades: $\gamma_{-k} = \gamma_k; \quad \gamma_k \leq \gamma_0$.

Solução: Pela propriedade da covariância: Cov(X,Y) = Cov(Y,X), temos que: □$_k$ = Cov(Yt,Yt$_{-k}$) = Cov(Y_{t-k},Yt) = γ_{-k}. Finalmente, considere a propriedade da correlação: | □$_k$| ≤1. Como γ_k = γ_k/ γ_0, temos que: |AAA$_k$/γ_0| £ 1, e assim: |□$_k$| □ |γ_0|, mas, como □0 é a variância: |□0| = □ e |□$_k$| □|γ_0|.

FACV e FAC para o modelo AR

Começando pelo AR(1), lembrando primeiramente a equação do modelo:

Atenção! Aqui existe uma videoaula, acesso pelo conteúdo online

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t .$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A FACV do AR(1) é:

$$Y_t = \mathrm{Cov} Y_t, Y_{t-1} = \mathrm{Cov}\left(\Phi_1 + Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-1}\right) .$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Usando a propriedade da covariância: Cov(X+Y+W,Z) = Cov(X,Z) + Cov(Y,Z) + Cov(W,Z), temos:

$$Cov\phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-1} = \phi_1 Cov Y_{t-1}, Y_{t-1} = \phi_1 V Y_{t-1} = \phi_1 \quad V\left(Y_t\right) = \phi_1 \quad \gamma_0 .$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Desta forma, temos que, para o modelo AR(1), a FACV no *lag* 1 é: γ_1=Cov(Y_t,Y_{t-1}) = ϕ_1 γ_0.

Calculando agora para o *lag* 2:

$$\begin{gathered}\gamma_2 = Cov Y_t, Y_{t-2} = \\ Cov\phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-2} \\ = \phi_1 Cov Y_{t-1}, Y_{t-2} = \phi \gamma_1 = \phi_1^2 \gamma_0 . \\ \gamma_3 = Cov Y_t, Y_{t-3} = \\ Cov\phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, Y_{t-3} \\ = \phi_1 Cov\left(Y_{t-1}, Y_{t-3}\right) = \phi_1 \gamma_2 = \phi_1^3 \gamma_0 .\end{gathered}$$

Desta forma, temos que, para o modelo AR(1), a FACV no *lag* 1 é: γ_1=Cov(Y_t,Y_{t-1}) = ϕ_1 γ_0.

Calculando agora para o *lag* 2:

E assim por diante, até chegarmos à fórmula geral:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} = \phi_1^k \gamma_0 .$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Mas $\gamma_0 = V Y_t = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$, como já vimos na aula 5, e assim a FACV do modelo AR(1) é:

$$\gamma_k = \frac{\phi_1^k}{1-\phi_1^2}\sigma^2,\ k\ =\ 0, 1, 2...$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

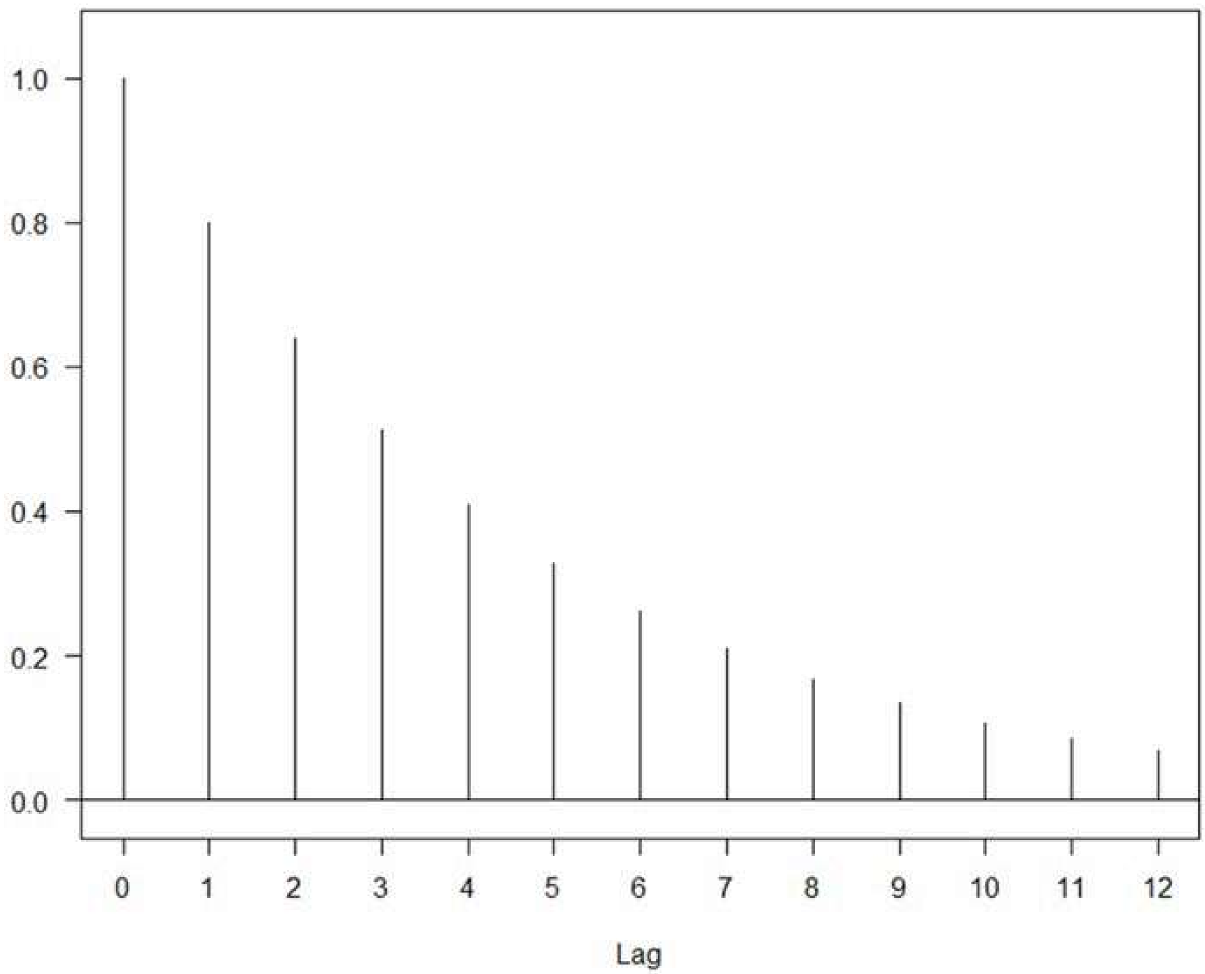
A FAC do AR(1) é:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k,\ k = 1, 2 \ldots$$

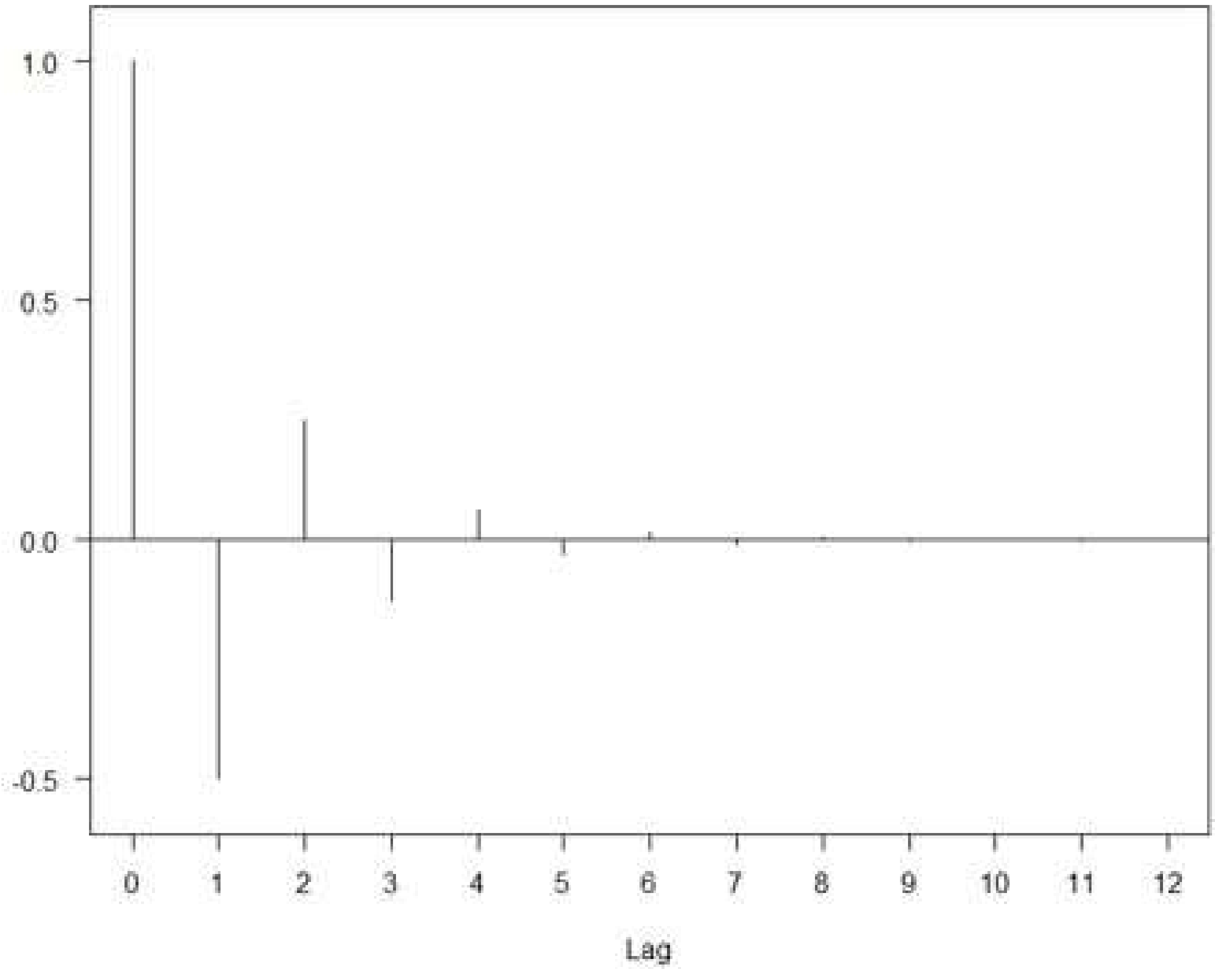
Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A FAC de um modelo AR(1) apresenta decaimento exponencial, se $\phi_1 > 0$, e é uma senoide amortecida, se $\phi_1 < 0$. Veja alguns exemplos.

A FAC teórica de um modelo AR(1) com ϕ_1^ = 0.8 é apresentada a seguir:



A FAC teórica de um modelo AR(1) com ϕ_1^= -0.5 é apresentada a seguir:



A FAC de um modelo AR(p) também apresenta este padrão.

FACV e FAC para o modelo MA

Clique no botão acima.

Começando pelo MA(1), lembrando primeiramente a equação do modelo: $Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$.

A FACV do MA(1) é:

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}\left(Y_t, Y_{t-1}\right) =$$
$$\mathrm{Cov}\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} =$$
$$-\theta_1\mathrm{Cov}\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} = -\theta_1 V\varepsilon_{t-1}$$
$$= -\theta_1 V\varepsilon_t = -\theta_1\sigma^2.$$
$$\gamma_2 = \mathrm{Cov}\left(Y_t, Y_{t-2}\right) =$$
$$\mathrm{Cov}\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3} = 0.$$
$$\gamma_3 = \mathrm{Cov}\left(Y_t, Y_{t-2}\right) =$$
$$\mathrm{Cov}\left(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-3} - \theta_1\varepsilon_{t-4}\right) = 0.$$

E assim por diante. Vê-se facilmente que $\gamma_k = 0,$, k = 2, 3..., uma vez que $\mathrm{Cov}\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}\right) = 0$ para todo $k \neq 0$.

Desta forma, a FACV do MA(1) é:

$$\gamma_k = -\theta_1\sigma^2, \quad k = 1.$$
$$= 0, k = 2, 3...$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

em que a conclusão para k = 2, 3... vem do fato de que o ruído branco é descorrelacionado.

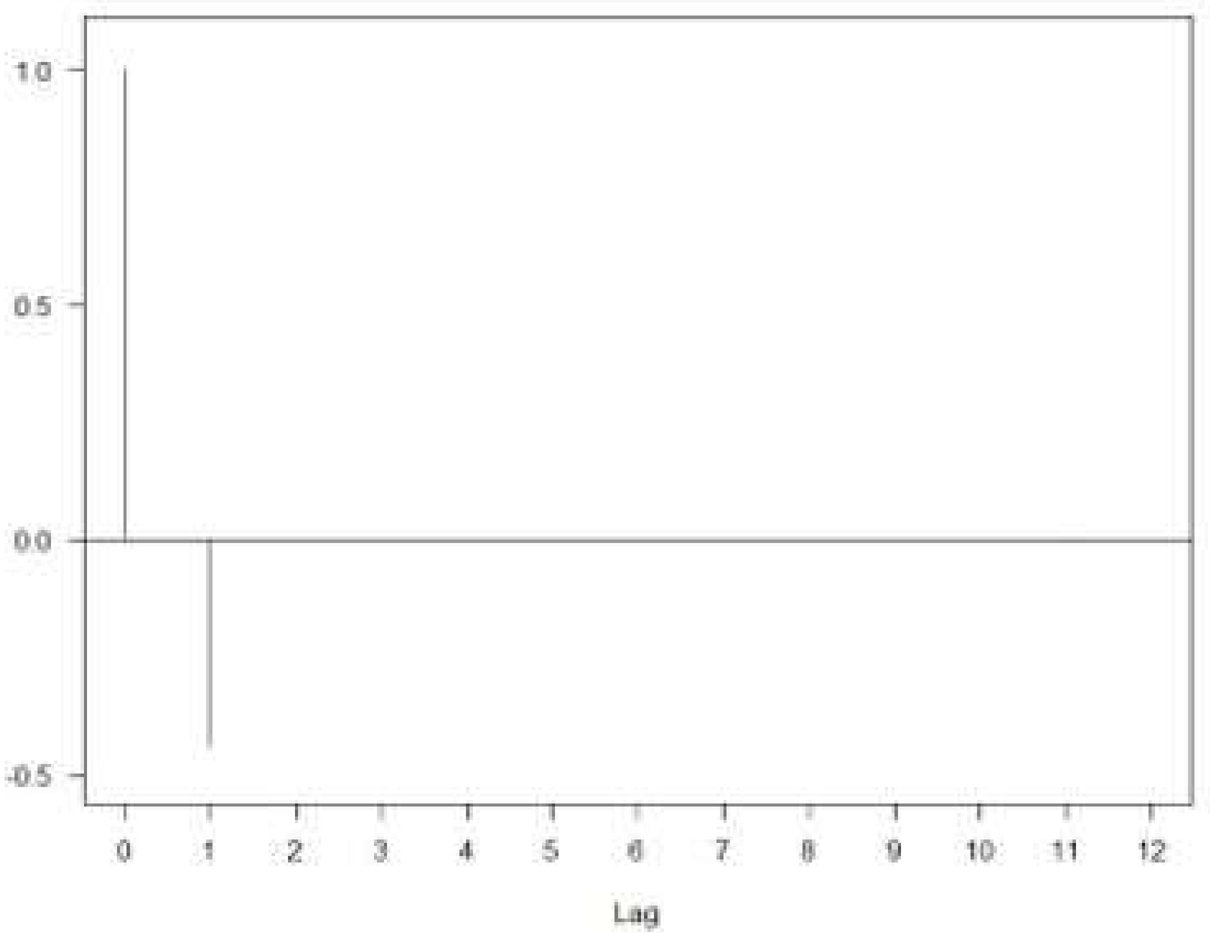
Para obter a FAC, precisamos lembrar que $\gamma_0 = VY_t = \left(1+\theta_1^2\right)\sigma^2$, como vimos na aula 5.

"Assim a FACV do modelo "o MA(1) é:

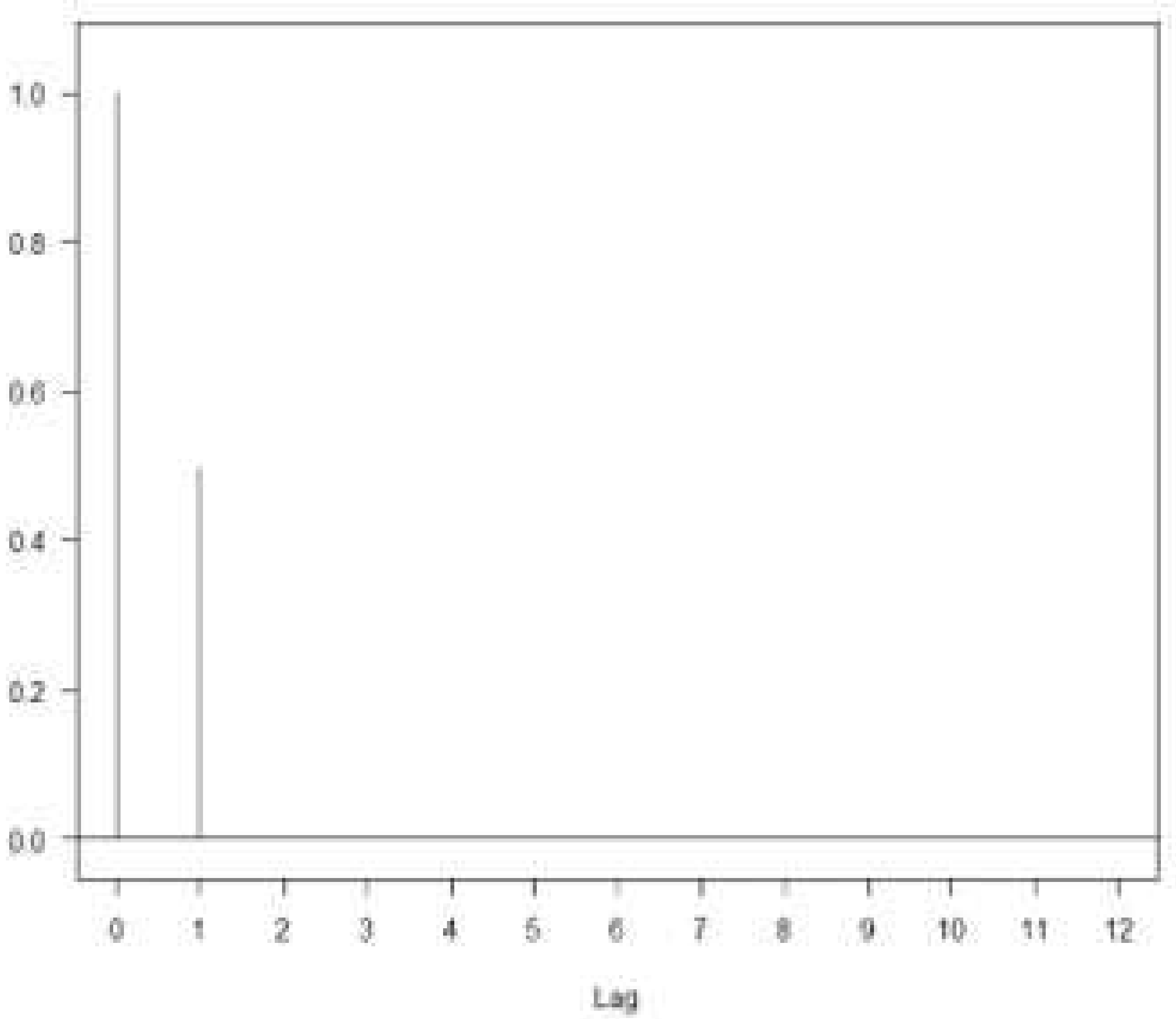
$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{-\theta_1\sigma^2}{\left(1+\theta_1^2\right)\sigma^2} = \frac{-\theta_1}{\left(1+\theta_1^2\right)}.$$
$$\rho_k = 0, \ k = 2, 3, ...$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assim, a FAC do MA(1) é finita. Dizemos que é “truncada” no lag 1. A FAC teórica de um modelo MA(1) com θ_1= 0.6 é apresentada a seguir:



A FAC teórica de um modelo MA(1) com θ_1>=-0.9 é apresentada a seguir:



Vamos agora calcular a FACV do MA(2). Lembrando a equação do modelo:

$$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}.$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A FACV é calculada a seguir. Começando pelo lag 1:

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}\left(Y_t, Y_{t-1}\right) =$$
$$\mathrm{Cov}\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \theta_2\varepsilon_{t-3} =$$
$$-\theta_1\mathrm{Cov}\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} + \theta_1\theta_2\mathrm{Cov}\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2} =$$
$$= \left(-\theta_1\theta_2 - \theta_1\right) \sigma^2 .$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

No lag 2:

$$\gamma_2 = \mathrm{Cov}\left(Y_t, Y_{t-2}\right) =$$
$$\mathrm{Cov}\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3} - \theta_2\varepsilon_{t-4} =$$
$$-\theta_2\mathrm{Cov}\left(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2}\right) = -\theta_2\sigma^2 .$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

É fácil ver que $\gamma_0 = 0$ para k =3,4...

Assim, a FACV do MA(2) é:

$$\gamma_k = \theta_1\theta_2 - 1, k = 1$$
$$= -\theta_2, \quad k = 2$$
$$= 0, k = 3, 4, . .$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Para obter a FAC, é necessário lembrar que, no caso do MA(2), temos da aula 5 que:

$$\gamma_0 = VY_t = \left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2\right)\sigma^2.$$

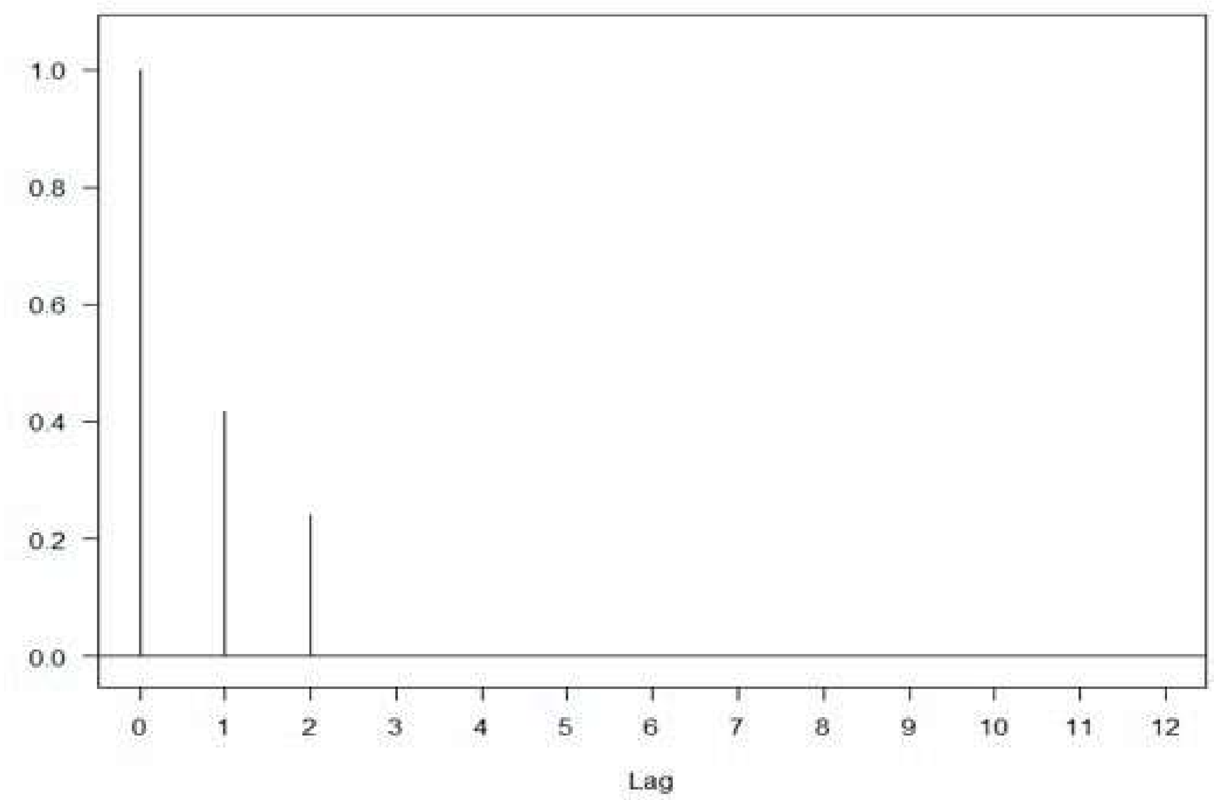
Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assim, a FAC do MA(2) é (o σ^2 no numerador e no denominador é cancelado):

$$\rho_k = \frac{\theta_1\theta_2 - 1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \quad k = 1$$
$$= \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, \quad k = 2$$
$$= 0, \quad k = 3, \quad 4, \quad \ldots$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Temos assim que a FAC do MA(2) é truncada no lag 2. A FAC teórica de um modelo MA(2) é apresentada a seguir:



Este resultado pode ser generalizado para um modelo MA(q): a FAC de um MA(q) é “truncada” no *lag* q, para qualquer q = 1, 2, 3, ...

A função de autocorrelação parcial

A Função de Autocorrelação Parcial FACP é a correlação parcial entre Y_t e Y_{t-k}, ou seja, é a correlação entre Y_t e Y_{t-k}, após ter sido descontada a influência de Y_{t-1}, Y_{t-2}, ..., Y_{t-k+1}.

Notação: ϕ_{kk}.

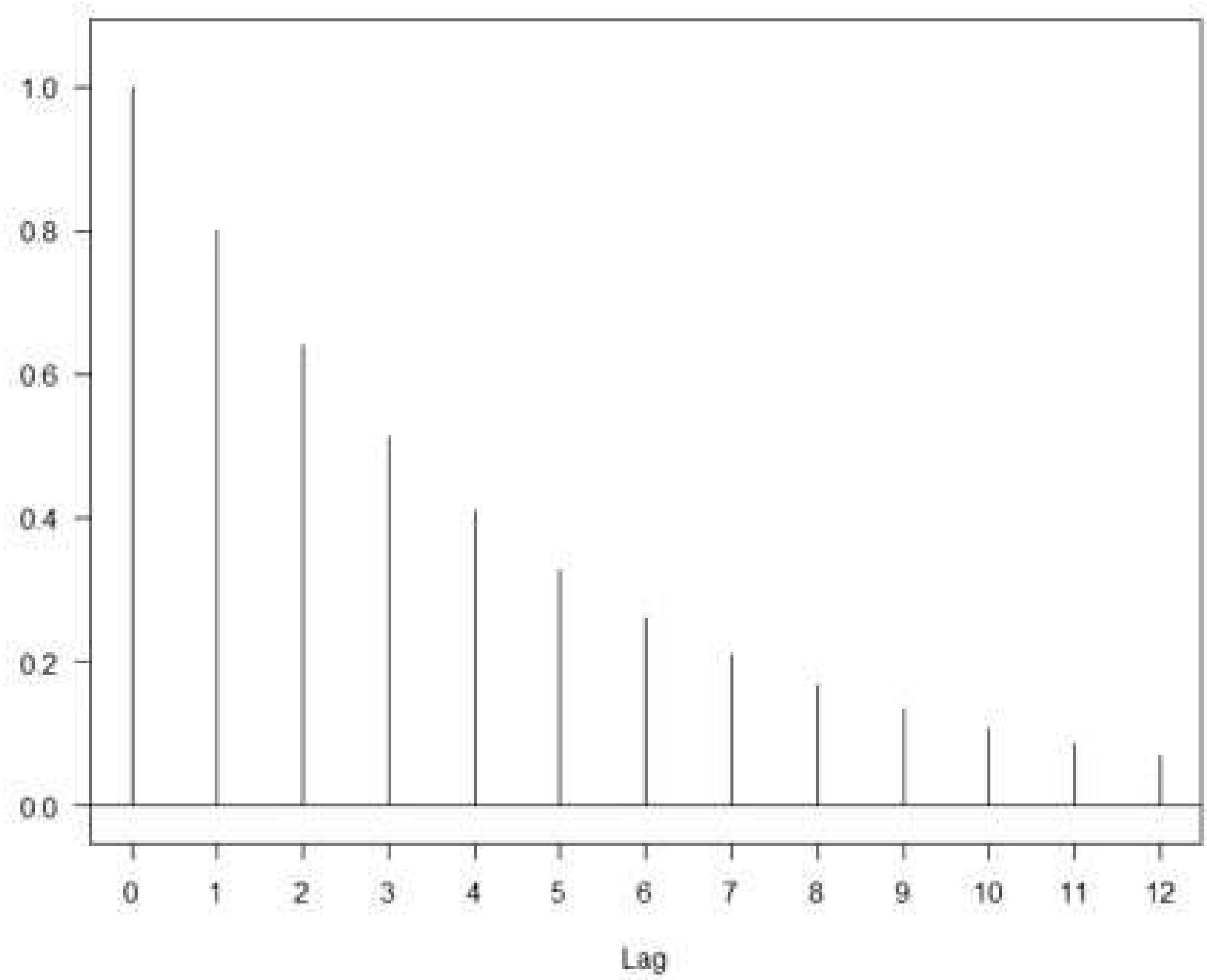
Obs_1 — por definição: □11 = □1.

Obs_2 — no modelo AR(p), $□_{pp} = \phi_p$.

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

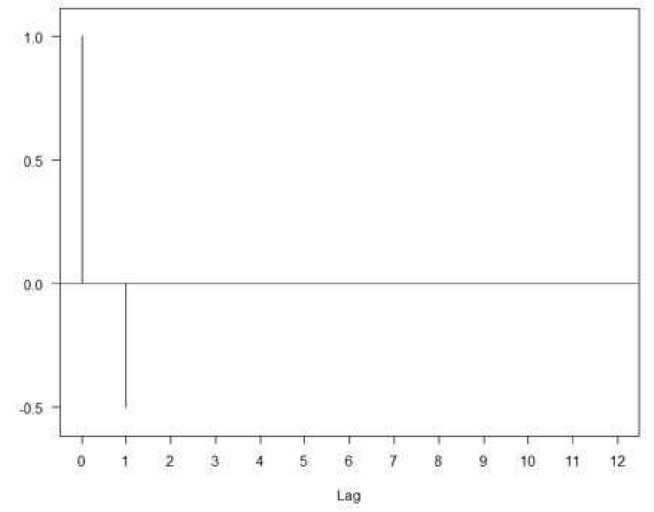
No modelo MA(q), a FACP tem comportamento igual à FAC de um modelo AR (decaimento exponencial ou senoide amortecida).

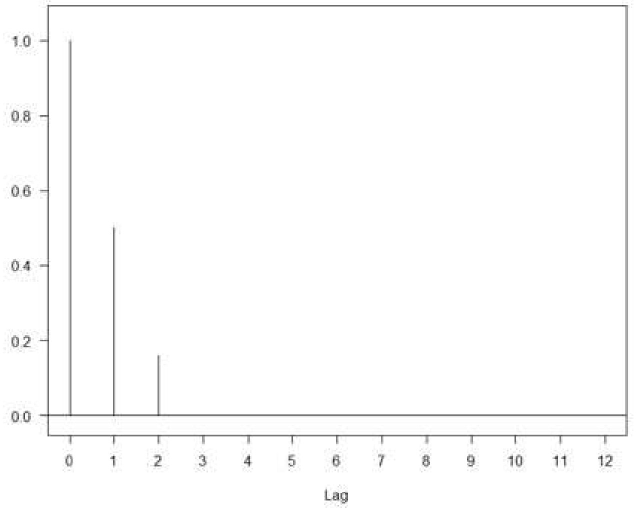
Veja no exemplo a seguir como a FACP teórica de um modelo MA(1) é apresentada:



Note que o padrão da FACP para o AR (truncamento no lag p) é análogo ao que acontecia com a FAC do MA(q), no caso, no lag q. Estes resultados serão usados para identificação, na aula 7.

A FACP teórica de um modelo AR(1) com $\phi_1 = 0.5$ é apresentada a seguir:





A FACP teórica de um modelo AR(2) é apresentada a seguir:

Pode-se notar que, neste último caso, a FACP é "truncada" no lag 2.

Nota-se ainda que, nos exemplos anteriores, a FACP é "truncada" no lag 1. A diferença é apenas no sinal da FACP no lag 1, que é positivo.

Cabe ressaltar que, no caso da FAC, porém, há diferença também na estrutura de decaimento, que seria exponencial no primeiro caso e do tipo senoide amortecida, no segundo caso.

Finalmente, se tivermos um modelo ARMA(p,q), com p e q diferentes de zero, observar-se-á uma mistura dos padrões estudados nesta aula.

O quadro a seguir resume os padrões de FAC e FACP esperados para os modelos teóricos.

Modelo	Representação	FAC	FACP
AR(1)	$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$	$\rho_k = \phi_1^k$	Truncada no lag 1
AR(2)	$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + + \varepsilon_t$	$\rho_1 = \dfrac{\phi_1}{(1-\phi_2)}$ $\rho_2 = \dfrac{\phi_1^2}{(1-\phi_2)} + \phi_2$ etc.	Truncada no lag 2
MA(1)	$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$	$\rho_1 = \dfrac{-\theta_1}{(1+\theta_1^2)}.$ $\rho_k = 0, k = 2, 3, \ldots$	Infinita, decai exponencialmente ou como uma senoide amortecida
MA(2)	$Y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$	$\rho_1 = \dfrac{\theta_1(\theta_2 - 1)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$ $\rho_2 = \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$ $\rho_k = 0, k = 3,4,\ldots.$	Infinita, decai exponencialmente ou como uma senoide amortecida

Na aula 7 veremos a aplicação destes resultados para a modelagem de uma série real, em particular, para a identificação das ordens p e q do modelo adequado para representar a série.

Atividades

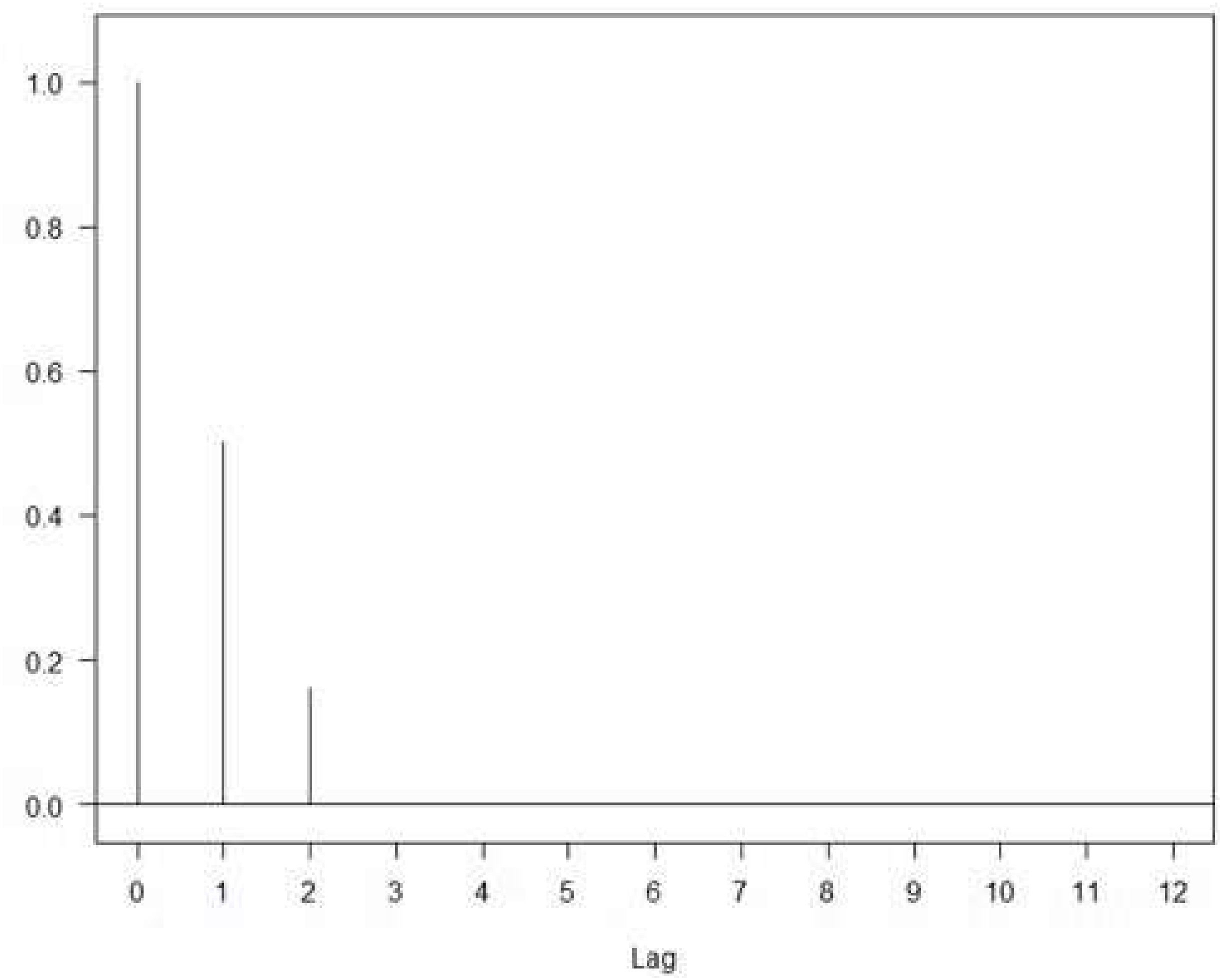
1 - Considere o modelo:

$Y_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$

O valor da FAC no *lag* 1 é:

a) 0
b) 0.2
c) 0.4
d) 0.5
e) Faltam informações para determinar.

2 - Um modelo apresenta a seguinte FACP teórica.



Sabe-se que sua FAC apresenta um decaimento exponencial. O modelo correspondente é um:

a) AR(1)
b) AR(2)
c) MA(1)
d) MA(2)
e) ARMA(1,1)

3 - A respeito dos modelos ARIMA de Box e Jenkins, assinale a afirmativa correta:

a) Seja o modelo $AR(1): Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$, estacionário. A função de autocovariância deste modelo é: $\frac{\varphi^k}{(1-\varphi)^2}\sigma^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

b) A função de autocorrelação (FAC) de um modelo AR(p) é truncada no *lag* p.

c) A função de autocorrelação parcial (FACP) de um modelo MA(q) é truncada no *lag* q.

d) O modelo $AR(2): Y_t = \phi Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$ é estacionário se, e somente se, $|\phi 1| < 1 \quad e \quad |\phi 2| < 1$, mas é inversível para quaisquer valores de $\phi_1 \quad e \quad \phi_2$.

e) Seja o modelo: $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$. Este modelo é inversível se, e somente se $\theta < 1$, e é estacionário se, e somente se, $\theta < 1$,

Notas

Título modal [1]

Lorem Ipsum é simplesmente uma simulação de texto da indústria tipográfica e de impressos. Lorem Ipsum é simplesmente uma simulação de texto da indústria tipográfica e de impressos. Lorem Ipsum é simplesmente uma simulação de texto da indústria tipográfica e de impressos.

Referências

BOX, G.E.P.; JENKINS, G.M. **Time series analysis:** Forecasting and control. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1976.

BROCKWELL, P.J.; DAVIS, R.A. **Time Series, Theory and Methods**, 2nd ed., Springer, 2009.

Próxima aula

- Procedimento de identificação do modelo adequado para uma série real.

Explore mais

- Leia o texto Análise de Séries Temporais: http://www.each.usp.br/rvicente/AnaliseDeSeriesTemporais.pdf