Indução e princípios de contagem

Prof. Carlos Eddy Esaguy Nehab

Descrição

Os principais princípios de contagem e suas aplicações em problemas básicos.

Propósito

Desenvolver a cognição em processos de contagem é essencial para desenvolver a numerácia e pré-requisito para o desenvolvimento posterior do mundo não determinístico: o estudo de probabilidades. Desse modo, assegurar que os princípios e as técnicas de contagem sejam adequadamente aprendidos é algo fundamental para o próprio progresso do pensamento matemático.

Preparação

Antes de iniciar o conteúdo, faça o download do **Solucionário**, nele você encontrará o feedback das atividades.

Objetivos

Módulo 1

Princípio da indução

Interpretar o princípio da indução como ferramenta essencial para a compreensão da construção dos números naturais.

Módulo 2

Princípio da casa dos pombos

Empregar o princípio da casa dos pombos como estratégia para a solução de problemas clássicos relacionados à contagem.

Módulo 3

Princípio da adição

Empregar o princípio da adição e o da inclusão-exclusão para o estabelecimento da contagem em problemas modelados por diagramas de Venn (diagramas de representação de conjuntos).

Módulo 4

Princípio da multiplicação

Empregar o princípio da multiplicação para a solução de problemas modeláveis por tabelas, árvores de decisão e artefatos similares.

Introdução

Confira agora os conceitos relacionados às estratégias de contagem e todo o seu detalhamento.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

1 - Princípio da indução

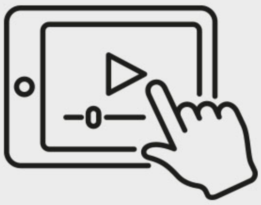
Ao final deste módulo, você será capaz de interpretar o princípio da indução como ferramenta essencial para a compreensão da construção dos números naturais.

Vamos começar!

O princípio da indução

Compreenda melhor os principais conceitos que envolvem o princípio da indução.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Princípio da indução: considerações iniciais

Introdução ao princípio da indução

Além de uma ferramenta útil para a prova de propriedades envolvendo os números naturais, o princípio da indução configura uma excelente oportunidade para se discutir, ainda que, de forma breve, como dar os primeiros passos para a formalização dos números naturais: sua construção. Sabemos que a contagem de objetos concretos é o primeiro contato de uma criança com processos de enumeração e a primeira vez que ela ouve as palavras “um”, “dois” e “três”... repetidamente! Como a criança percebe o conceito de quantidade?

Para responder a isso, outras duas perguntas surgem:

- Se, em uma folha de papel, há o desenho de um par de coelhos e de outro de cenouras, como ela percebe uma característica comum aos dois desenhos?
- Como ela associa a palavra "dois" aos dois desenhos?

Essa é uma discussão fascinante. A resposta à primeira pergunta está ligada à capacidade de a criança perceber, em algum momento, uma relação (biunívoca) entre os objetos dos dois desenhos. Ou seja, em certo instante, ela percebe que pode ligar-associar, concreta ou abstratamente, cada coelho a uma e apenas uma cenoura, e vice-versa.

Crianças possuem uma enorme capacidade de percepção.

A segunda resposta naturalmente se deve à percepção da criança de que nós (as pessoas próximas dela, como pais, avós ou irmãos mais velhos) repetimos à exaustão situações semelhantes que nós chamamos de dois. Ainda mostramos dois dedos para que ela, mais uma vez, perceba, em algum momento, a correspondência da situação exposta (ou assemelhada) com a palavra "dois"! Iniciemos então a abordagem do princípio da indução.

Números naturais

O conjunto dos números naturais

Começaremos nossa discussão tentando uma descrição do conjunto dos números naturais que representaremos por $\mathbb{N}$. Os números ditos naturais correspondem aos objetos utilizados para representar contagens, isto é, quantidades.

Desse modo, uma primeira questão procedente é se consideraremos ou não o tal do zero um número natural. Claro que isso se trata simplesmente de uma questão de escolha, pois, em nossas discussões, preferimos não o considerar um número natural.

Comentário

Imaginamos que o zero representaria a contagem inusitada de objetos de uma coleção sem objetos: o conjunto vazio. Isso é minimamente esquisito em uma abordagem inicial, você não acha? Estaríamos, afinal, contando o nada!

Assim, intuitivamente, nosso N pode ser informalmente representado, como sabemos, por $\mathrm{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$.

Descrevendo o conjunto dos naturais

Você tentou descrever o conjunto dos números naturais?

Note que a escrita de um número natural ou sua verbalização (fala) não é o que está em discussão. Poderíamos formular a mesma pergunta na China, na Rússia ou em qualquer país cujos alfabeto e língua falada fossem completamente diferentes das nossas. Ainda assim, faria sentido investigar essa questão.

> Mas o que você descreveria como essencial no conjunto dos números naturais?

Façamos um interessante exercício de abstração. Claro que, em qualquer processo de contagem, o objeto que representamos por “um” possui um significado especial.

Exemplo

Para a criança, ele pode uma única bala, um único dedo apontado ou um urso isolado em um desenho.

Soa razoável, assim, dotar o conjunto dos naturais de um objeto que designaremos pelo signo “1”. Além disso, parece-nos intuitivamente que, em um objeto do conjunto dos naturais, precisa haver nele um objeto que mereça ser chamado de **seu sucessor**: o seguinte a ele.

Ou seja, algo assim:

Dois é o nome do objeto que escolhemos para representar o objeto que sucede ao objeto **um**. Já **três** é o nome do objeto sucessor do objeto de nome **dois** - e assim por diante. Dito isso, vamos analisar três tentativas de descrever o conjunto dos números naturais.

Tentativa I

- 1 é um dos elementos de $\mathbb{N}$.
- Se n é um dos objetos de $\mathbb{N}$, seu sucessor, que designaremos por $s(n)$, também pertence a $\mathbb{N}$ (claro que intuitivamente estamos sugerindo que o sucessor de um objeto n seja n +1).

Será que essas duas condições descrevem com precisão o conjunto $\mathbb{N}$? Note que o conjunto de todos os números reais maiores ou iguais a 0,5, por exemplo, satisfaz a essas duas condições. Dessa forma, apenas essas duas condições não descrevem adequadamente o conjunto $\mathbb{N}$.

Contudo, se desejarmos criar uma situação do tipo tudo começa no 1 – ou seja, se quisermos que o 1 , em algum sentido, seja o menor elemento de $\mathbb{N}$ –, como fazê-lo? Talvez precisemos exigir que 1 não seja o sucessor de nenhum elemento de $\mathbb{N}$? Vejamos, portanto, uma segunda tentativa para descrever $\mathbb{N}$.

Tentativa II

- 1 é um dos elementos de $\mathbb{N}$.
- Se n é um dos objetos de $\mathbb{N}$, seu sucessor, que designaremos por $s(n)$, também pertence a $\mathbb{N}$.
- 1 não é sucessor de nenhum elemento de $\mathbb{N}$.

Veja que o conjunto de todos os números reais maiores ou iguais a 1 também satisfaz às três condições. Além disso, pense em um conjunto, como, por exemplo, $A = 1;2;3$, no qual assumimos que:

- 2 é o sucessor de 1.
- 3 é o sucessor de 2.
- 3 também é sucessor de 1.

Será que esse conjunto também satisfaz às três condições? Pense um pouco. Você verá que, por mais esquisito que possa parecer, ele infelizmente satisfaz. Entretanto, o que acontecerá se exigirmos que dois elementos diferentes de $\mathbb{N}$ não possam ter o mesmo sucessor, evitando aparentemente essa situação estranha? A descrição de $\mathbb{N}$ ficaria adequada? Trata-se, em suma, de uma terceira tentativa.

Tentativa III

- 1 é um dos elementos de N.
- Se n é um dos objetos de N, seu sucessor, que designaremos por $s(n)$, também pertence a N.
- 1 não é sucessor de nenhum elemento de N.
- Dois objetos distintos de N possuem sucessores diferentes (isso é equivalente a supor que a função sucessor seja injetora).

Observe que, ainda assim, o conjunto dos números reais maiores ou iguais a 1 ainda satisfaz às 4 condições! Qual condição, desse modo, poderíamos adicionar para que nossa descrição coincidisse com o que gostaríamos de chamar de conjunto dos números naturais? Parece ser algo que nos garanta que N seja, digamos, o menor conjunto a satisfazer a essas quatro condições.

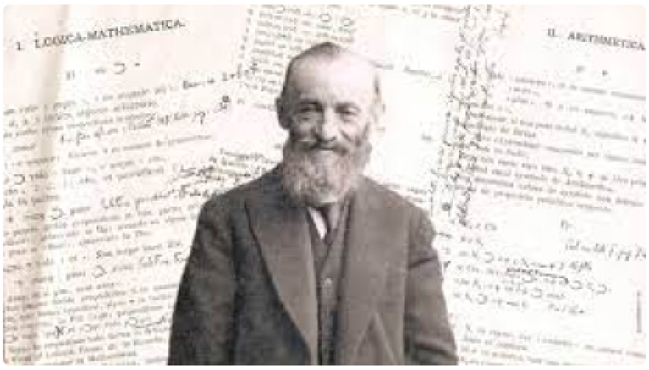
Diante das tentativas apresentadas anteriormente, chegamos aos axiomas de Peano.

Os axiomas de Peano

Conceitos importantes

Giuseppe Peano (1858-1952) foi um dos mais importantes matemáticos e se dedicou, entre outras áreas, ao desenvolvimento da teoria dos conjuntos e da lógica matemática.

Ele foi o responsável pelo desenvolvimento de uma axiomatização da aritmética. Dessa forma, eis uma das formulações dos chamados axiomas de Peano:



Matemático Giuseppe Peano.

1. 1 é um dos elementos de $\mathbb{N}$.
2. Se n é um dos elementos de $\mathbb{N}$, seu sucessor, designado por $s(n)$, também pertence a $\mathbb{N}$.
3. 1 não é sucessor de nenhum elemento de $\mathbb{N}$.
4. Dois objetos distintos de $\mathbb{N}$ possuem sucessores diferentes (isso é equivalente a supor que a função sucessor seja uma função injetora).
5. Se um subconjunto A de $\mathbb{N}$ é tal que: $1 \in A$; se, para qualquer elemento n de A, necessariamente $n+1$ (o sucessor de n) também pertence a A, então $A = \mathbb{N}$.

Podemos reescrever esses axiomas da seguinte forma:

- **Peano 1:** Há um único número natural, que designamos por 1, que não é sucessor de nenhum número do tipo.
- **Peano 2:** Qualquer elemento n de $\mathbb{N}$ possui exatamente um sucessor, que também é um elemento de $\mathbb{N}$ (intuitivamente, o sucessor de n é associado a $n+1$).
- **Peano 3:** Números naturais diferentes **não** podem ter o mesmo sucessor.
- **Peano 4:** Se um conjunto A possui o número natural 1 (o tal único natural que não é sucessor de nenhum natural) e, além disso, para qualquer elemento n de A, seu sucessor também é elemento de A, então tal conjunto A deve ser o próprio $\mathbb{N}$.

A última condição constitui, em síntese, o objeto de nosso estudo neste módulo: **o princípio da indução**.

Sobre o princípio da indução

Discussão preliminar

A ideia central da formulação mais comum do princípio de indução é extremamente simples e se baseia no axioma designado anteriormente por **Peano 4**. Suponha que um conjunto A de números naturais satisfaça às duas seguintes condições:

- 1 é um de seus elementos.
- O sucessor de qualquer elemento de A também é um elemento de A, isto é, se um sujeito k pertencer ao conjunto A, então também será verdade que o sujeito $k+1$ pertence a A.

> ### Você não acha intuitivo que a única alternativa ao malfadado conjunto A é ser igual ao próprio conjunto dos naturais?

Uma forma intuitiva de perceber tal fato é observar que, pela primeira condição, $1 \in A$, porém, se $1 \in A$, pela segunda condição, seu sucessor, que é o 2 , também pertence a A. No entanto, se $2 \in A$, então - e ainda pela segunda condição - $3 \in A$, sucedendo-se, assim, *ad infinitum*...

O esquema indicado sugere que sucessivamente teríamos o seguinte:

$$1 \in A \rightarrow 2 \in A \rightarrow 3 \in A \rightarrow 4 \in A \rightarrow \cdots$$

Rotacione a tela.

Ou seja, os elementos de A seriam exatamente os naturais. De forma mais interessante ainda, tais elementos não teriam uma contagem finita! À luz dessa discussão, uma estratégia para provar que um subconjunto dos naturais constitui o próprio conjunto dos naturais é a que se segue:

- Provar que 1 é elemento de A.
- Provar que, se um inteiro k está em A, então seu sucessor, $k+1$ também está em A.

Assim, pela primeira condição, chamada de **base da indução**, asseguraríamos que $1 \in A$. Já pela segunda condição, denominada **passo da indução** ou indução propriamente dita, sabendo que $1 \in A$, poderíamos assegurar que $2 \in A$. Por fim, dado que $2 \in A$, também poderíamos asseverar que $3 \in A$ - e assim até o fim dos tempos...

Daí decorre uma formulação útil e eficaz para provar que um conjunto constituído de números naturais venha a ser - nem mais, nem menos - o próprio conjunto dos naturais.

O princípio da indução – Formulação básica

Dada uma propriedade s(n) sobre os números naturais (o conjunto universo da discussão), temos:

Base da indução

$s(1)$ é uma proposição verdadeira, ou seja, $s(n)$ é verdadeira para $n = 1$.

Indução propriamente dita

Dado $n = k$, a veracidade da proposição $s(k)$ acarreta a veracidade de $s(k + 1)$.

Então, o conjunto-verdade da sentença $s(n)$ é N , isto é, $s(n)$ é verdadeira para qualquer n natural.

Exemplos do princípio da indução

Exemplo I

Prove que $2^n > n$ para todo n em N , ou seja, prove que o conjunto-verdade (no universo dos naturais) da sentença $2^n > n$ é igual a N .

Solução

Utilizemos o princípio da indução. Vejamos:

- Provemos que $s(1)$ é verdadeiro. Se $s(1)$ é a sentença $2^1 > 1$ e como $2^1 = 2$, claramente $s(1)$ é uma proposição verdadeira.
- Admitamos que, para um natural positivo qualquer k , $s(k)$ seja uma proposição verdadeira, ou seja, (1) $2k > k$ para um arbitrário k em N .

Se conseguirmos demonstrar, a partir de (1), que $s(k + 1)$ também constitui uma proposição verdadeira, teremos provado o item b do princípio da indução. Mas $s(k + 1)$ é a sentença $2^{(k+1)} > (k + 1)$.

Desenvolvendo o lado esquerdo desta desigualdade, temos:

(1) $2^{(k+1)} = 2^k \times 2$

Como de (1) $2^k > k$, segue-se de (2) que:

(2) $2^{(k+1)} = 2^k \times 2 > k \times 2 = k + k$;

Como $k \geq 1$, segue-se de (3) que:

(3) $2^{(k+1)} > k + k \geq k + 1$, ou seja:

(4) $2^{(k+1)} > k + 1$

Dessa maneira, pelo princípio da indução, de fato $2n > n$ para todo n natural $n \geq 1$.

Exemplo II

Prove que a soma dos n primeiros números naturais é dada por $n(n+1)/2$.

Solução

Identifiquemos a sentença $s(n)$ associada ao enunciado:

$$s(n) : 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = n(n+1)/2$$

Pelo princípio da indução, devemos provar que:

- $s(1)$ é verdadeiro; Ou seja, a soma “dos 1 primeiros inteiros positivos” é dada por $1(1+1)/2 \ldots$ como $1(1+1)/2 = 1$, segue-se que, de fato, $s(1)$ é uma proposição verdadeira.
- Sendo k um inteiro positivo arbitrário e $s(k)$ verdadeira, devemos provar que $s(k+1)$ também é verdadeira, isto é, precisamos provar que, se...

$1 + 2 + 3 + \cdots + k = k(k+1)/2$ é verdadeiro... então também é verdadeira a expressão:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k+1) = (k+1)[(k+1)+1]/2$$

Escrevendo o lado esquerdo de (2), temos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots \ldots (k+1) &= 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) \\ &= [1 + 2 + 3 + \ldots + k] + (k+1) \end{aligned}$$

De (1) em (3), vem:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = [k(k+1)/2] + (k+1)$$

Colocando $(k+1)$ em evidência, temos:

$$1+2+3+\ldots+(k+1)=(k+1)[k/2+1]=(k+1)[k+2]/2$$
$$=(k+1)[(k+1)+1]/2$$

Dessa forma, $s(k+1)$ é uma proposição verdadeira, ou seja, pelo princípio da indução, de fato, a sentença $s(n): 1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$ é verdadeira para todo n inteiro positivo. Podemos justificar essa relação geometricamente! Preste atenção na imagem a seguir.

Uma bolinha, mais duas bolinhas, mais... cinco bolinhas, por exemplo, contadas **duas** vezes, dá um retângulo com **5 linhas** de **6 bolinhas**, isto é, um total de **30 bolinhas**. Sendo assim, a soma $1+2+3+4+5$, por exemplo, vale $\frac{6\times 5}{2}=15$.

Relação do princípio da indução.

Exemplo III

No estudo do princípio da indução, é comum enfrentar propriedades ou sentenças válidas, por exemplo, para $n=1,2,\ldots,10$. Será que, em uma situação assim, é possível concluir de forma peremptória que tal propriedade deve valer para qualquer valor de n? Eis dois exemplos "clássicos" que mostram que isso não constitui um procedimento correto.

A expressão...

$$x_1=n^2+n+43$$

Rotacione a tela.

... e sempre fornece números primos quando n é um número natural?

Solução

Na verdade, não, mas esse exemplo ilustra um erro muito comum na aplicação do princípio da indução. Mesmo que verificássemos, por exemplo, que, para n de 1 a um milhão, o valor de X fornecesse valores primos, **nada** nos garantiria que isso teria de se manter. Note que o princípio da indução sugere, no passo da indução propriamente dita, que:

Se pudermos provar que, sendo primo, X, para um valor arbitrário $n = k$ natural, também terá de ser primo para $n = k + 1$, poderemos realmente pensar se as coisas realmente funcionam mesmo! Mas também seria necessário que tivéssemos a certeza de que há algum valor inicial **(de** n **)** para o qual X fosse primo: eis o passo chamado de **base da indução** (na nossa formulação esse valor é 1).

O problema, porém, é que deveríamos provar o passo da indução propriamente dito, o que, nesses dois exemplos, não seria possível. Podemos verificar (com bastante trabalho, é verdade) que X curiosamente fornece, de fato, números primos para n de **1 a 40**, mas que isso não acontece para $n = 41$. Criamos uma planilha para esquematizar as situações descritas:

	A	B	C
1	n	$X_1 = n^2+n+41$	Primo?
2	1	43	Sim
3	2	47	
4	3	53	
5	4	61	
6	5	71	
7	6	83	
8	7	97	
9	...		
10	39	1601	
11	40	1681	
12	41	1763	Não
13	42	1847	Sim
14	43	1933	Sim
15	44	2021	Não
16	45	2111	Sim
17	46	2203	Sim
18	47	2297	Sim

Representação da indução propriamente dita.

O princípio da indução – Base arbitrária

Detalhamento da base arbitrária

Considere a sentença (propriedade) sobre os naturais dada por $2^n > n^2$. É fácil perceber que essa sentença é falsa para $n = 3$, por exemplo. Entretanto, é simples perceber que ela é válida para todo natural $n \geq 5$.

> **A formulação utilizada do princípio da indução não nos seria útil nesse caso, uma vez que, de fato, a sentença não é válida para $n = 1$, mas apenas a partir de $n = 5$.**

Entretanto, é absolutamente intuitivo que podemos formular esse princípio para permitir outro ponto de partida que não seja necessariamente 1. Como consequência, o conjunto-verdade da sentença não mais seria N , e sim os naturais a partir do início escolhido. Confira em detalhes a seguir:

Base da indução

$s(n_0)$ é uma proposição verdadeira; ou seja, $s(n)$ é verdadeira para o natural $n = n_0$.

Indução propriamente dita

Dado $n = k$, a veracidade da proposição $s(k)$ acarreta a veracidade de $s(k+1)$.

Então, o conjunto-verdade da sentença $s(n)$, portanto, é o conjunto de todos os naturais maiores ou iguais a n_0 .

Exemplo

Mostre que $2^n > n^2$ para todo $n \geq 5$.

Solução

Seja $s(n)$ a sentença $2^n > n^2$. Provemos por indução que s(n) é verdadeira para todo $n \geq 5$:

(a) Devemos provar que s(5) é verdadeiro. $s(5)$ é a sentença $2^5 > 5^2$, que é claramente uma proposição verdadeira.

(b) Admitamos que, dado um k arbitrário, $k \geq 5,\ s(k)$ seja verdadeira, isto é, que (1) $2^k > k^2$, para k arbitrário ≥ 5 .

Se conseguirmos, a partir de (1), demonstrar que $s(k+1)$ também é verdadeira, teremos provado o item b do princípio da indução. Se $s(k+1)$ é a sentença $2^{(k+1)} > (k+1)^2(2)$, temos, escrevendo o lado esquerdo de $s(k+1)$:

$2^{(k+1)} = 2^k \cdot 2.$ Mas de $(1), 2^{(k+1)} = 2^k \cdot 2 > k^2 \cdot 2$

Se conseguirmos provar que (3) $k^2.2 > (k+1)^2$, quando $k \geq 5$, teremos atingido nosso objetivo. Mas isso é equivalente a provar que:

$$k^2.2 - (k+1)^2 > 0(k \geq 5)$$

$$k^2.2 - (k+1)^2 = 2.k^2 - (k^2 - 2k + 1) = (k+1)^2$$

Como claramente $(k+1)^2 > 0$ (para qualquer k, e não apenas para $k \geq 5)$, a demonstração está concluída.

Mão na massa

Questão 1

Eis um exemplo que pode ser testado para alguns valores pequenos a fim de entendermos uma possível lei de formação, tentando, a seguir, justificá-lo por algebrismo, como produtos notáveis, por exemplo, ou mesmo pelo princípio da indução. Somado a 1, o produto de 4 números naturais consecutivos é sempre:

A Divisível por 8.

B Um cubo perfeito.

C Um quadrado perfeito.

D O produto de dois números primos.

E O produto de dois números naturais também consecutivos.

Parabéns! A alternativa C está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 2

Assinale a opção cuja expressão indica o valor do enésimo número ímpar positivo.

A n

B $n + 1$

C $n - 1$

D $2n + 1$

E $2n - 1$

Parabéns! A alternativa E está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 3

Uma expressão que fornece a soma dos n primeiros números ímpares positivos é dada por:

A $2n^2 - 1$

B $3n$

C $2n + 2$

D n^2

E $n^3 - 1$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 4

Encontre uma expressão simples para a soma das n primeiras frações

$$\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, \ldots, \frac{1}{n \times (n + 1)}$$

A $\frac{n}{n + 1}$

B $\frac{n}{2n + 1}$

C $\frac{n^2}{n^2 + 1}$

D n^2

E $n^3 - 1$

Parabéns! A alternativa A está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 5

Este problema não pode ser abordado por indução. Mas por que isso ocorre? Como abordá-lo?

Resposta: calculando a soma da quantidade infinita de parcelas

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{1024} + \cdots$, na qual encontramos...

A 1

B $\frac{1}{2}$

C 2

D $\frac{3}{2}$

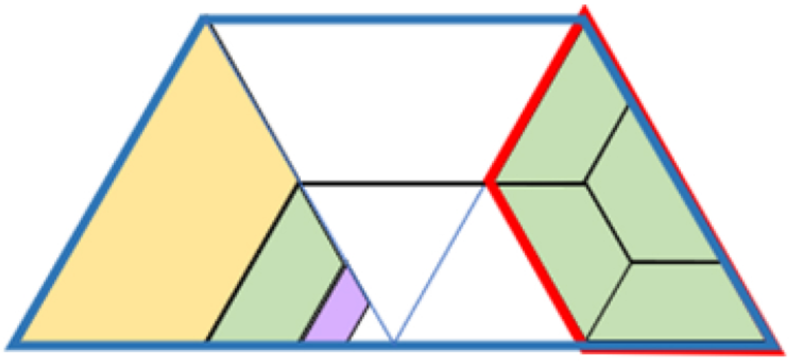
E $\frac{2}{3}$

Parabéns! A alternativa A está correta.

Veja o feedback completo no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 6

A imagem adiante sugere um trapézio formado por 3 triângulos equiláteros iguais e que pode ser dividido em 4 trapézios iguais do tipo do trapézio em amarelo (tente perceber isso observando a imagem).



Além disso, cada um dos 4 trapézios iguais ao amarelo pode ser dividido em 4 trapézios iguais aos verdes. Prosseguindo, cada trapézio do tipo verde pode ser decomposto em 4 trapézios do tipo pintado de lilás. Você é capaz de perceber qual das igualdades indicadas é justificada pela imagem?

A $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1}=1$

B $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots=\frac{1}{2}$

C $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{3}$

D $\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\cdots=\frac{1}{4}$

E $\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}+\cdots=\frac{1}{5}$

Parabéns! A alternativa C está correta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Teoria na prática

Mostre a relação clássica para o cálculo da soma dos n primeiros naturais positivos, ou seja,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Experimente para $n = 5$, por exemplo.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

A soma dos n primeiros múltiplos de 4, que são positivos, vale:

A $n(n+1)$

B $2n^2$

C $\frac{n(n+1)}{2}$

D n^3

E $2n(n+1)$

Parabéns! A alternativa E está correta.

Se a soma dos n primeiros números naturais é dada pela expressão $n(n+1)/2$ (veja exemplo anterior), então a soma desejada é o quádruplo desse valor!

Questão 2

Considere um conjunto A_0 não vazio que é constituido por dois números naturais diferentes. Suponha ainda a criação de sucessivos conjuntos $A_k, k = 1, 2, \dots$. de tal forma que cada conjunto $A_{(k+1)}$ é formado por todas as possiveis somas dos elementos de A_k somados dois a dois.

Agora analise as seguintes afirmativas:

- Independentemente de A_0, nenhum A_k pode ser igual ao conjunto dos números naturais.
- Todos os A_k possuem apenas números ímpares ou apenas números pares.
- Dado determinado conjunto A_0, é possível que todos os A_k possuam apenas números múltiplos de 19.
- Nenhum A_k pode possuir cinco elementos.

Quais afirmativas são verdadeiras?

A 1 e 3

B 1, 2 e 4

C 2 e 3

D 3 e 4

E 2, 3 e 4

Parabéns! A alternativa A está correta.

Afirmativa 1: verdadeiro. Todos os A_k são conjuntos finitos;

Afirmativa 2: falso. Possuir apenas números ímpares é obviamente impossível. Ter apenas números pares, por outro lado, seria possível se, por exemplo, A_0 fosse constituído pelos naturais 2 e 4;

Afirmativa 3: verdadeiro. Ela será, de fato, se Ao contiver 19 e 38;

Afirmativa 4: falso. Por exemplo, se $A_0 = \{1; 2\}$, então $A_2 = \{4; 5; 6; 7; 8\}$.

É divertido analisar também se algum A_k pode possuir seis elementos. Tente fazer isso!

2 - Princípio da casa dos pombos

Ao final deste módulo, você será capaz de empregar o princípio da casa dos pombos como estratégia para a solução de problemas clássicos relacionados à contagem.

Vamos começar!

Princípio da casa dos pombos

Compreenda melhor os conceitos relacionados ao princípio da casa dos pombos.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Formulação do princípio da casa dos pombos

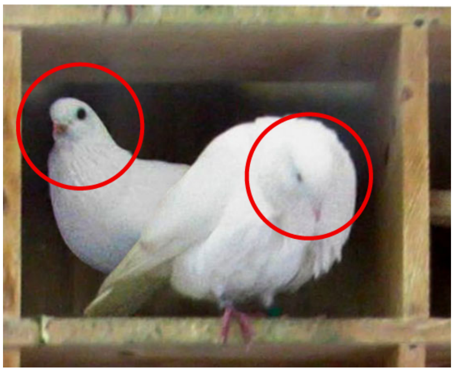
O princípio da casa dos pombos, também chamado de princípio das gavetas, foi formalizado, pela primeira vez, pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), que também dedicou especial atenção ao estudo da teoria dos números, das series, e no desenvolvimento da teoria das séries de Fourier. O princípio da casa dos pombos, entretanto, é sem dúvida, um dos enunciados mais simples e poderosos na solução de problemas de contagem, digamos, inusitados. Surpreendente, ele possibilita a solução elegante daqueles muitas vezes de difícil abordagem.

Matemático Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.

Uma das formulações mais simples do princípio da casa dos pombos pode ser expressa daseguinte forma:

> Se n pombos devem ser colocados em m casas, com $n > m$, então pelo menos uma casa deve conter mais que um pombo.

Eis uma ilustração desse princípio para $n = 10$ e $m = 9$. As imagens a seguir representam o princípio da casa dos pombos.



Exemplos do princípio da casa dos pombos

A dificuldade em um problema de contagem no qual se pretenda usar o princípio da casa dos pombos é determinar qual objeto relacionado ao problema associaremos às casas dos pombos e qual objeto vincularemos aos próprios pombos. Abordaremos a seguir alguns dos problemas clássicos cuja solução se baseia no princípio da casa dos pombos:

Problema dos cumprimentos em uma festa

Se, em uma festa com mais de uma pessoa, todas as pessoas cumprimentam com um aperto de mão exatamente as que conhecem, mostre que duas das pessoas da festa cumprimentam a mesma quantidade de pessoas.

Solução

Se há n pessoas na festa, a quantidade máxima de apertos de mão que uma pessoa pode dar é $n-1$; a quantidade mínima, zero (se não conhecer ninguém). Imaginemos agora a criação de n casas associadas às pessoas (pombos) que apertam a mão de $0, 1, 2, \ldots, n-1$ vezes.

Será que podemos garantir que duas das n pessoas da festa estão associadas à mesma quantidade de cumprimentos ou seja, à mesma casa? A resposta é sim, desde que você observe um detalhe: é impossível haver alguma pessoa que tenha cumprimentado todas as pessoas e alguma que não cumprimentou ninguém! Ou seja, na verdade, uma das duas casas – a associada a 0 (zero) cumprimentos ou a associada a n cumprimentos – deve estar vazia.

Na verdade, dispomos de $n-1$ casas (pois uma estará vazia) e de n pessoas $(n-1=m<n)$. Logo, duas pessoas estarão associadas à mesma casa, ou seja, darão a mesma quantidade de apertos de mão.

Problema dos fios de cabelo

Mostre que, em uma cidade com um milhão de habitantes, pelo menos dois habitantes possuem o mesmo número de fios de cabelo.

Solução

Uma rápida consulta na internet informa que o número de fios de cabelo de uma pessoa é por volta de 150 mil, não ultrapassando os 200 mil. Imagine 200 mil casas, numeradas de 1 a 200.000, em que as pessoas com m fios de cabelo serão colocados na m-ésima casa.

Trata-se da imediata aplicação do princípio da casa de pombos: o número de pessoas (pombos) vale $n = 1.000.000$; logo, é maior que $m = 200.000$ (número de casas). Por isso, haverá bem mais de um pombo (pessoa) na mesma casa, ou seja, com o mesmo número de fios de cabelo.

Problema de divisibilidade

Dados 8 números inteiros quaisquer, mostre que necessariamente a diferença entre dois deles deve ser divisível por 7.

Solução

Imagine os restos da divisão de cada um dos 8 números por 7. Como, na divisão por 7, os restos são necessariamente números entre 0 e 6, então existem apenas 7 restos diferentes (que serão associados a 7 casas, uma para cada valor de resto).

Por isso, dois desses 8 números (os pombos) possuem o mesmo resto quando divididos por 7, ou seja, são colocados na mesma casa. Porém, se esses dois números deixam o mesmo resto quando divididos por 7, sua diferença é divisível por 7.

Mão na massa

Questão 1

Qual será o menor número de pessoas em uma reunião para que, com certeza, duas possuam o mesmo signo?

A 10

B 11

C 12

D 13

E 14

Parabéns! A alternativa D está correta.

Como há 12 signos diferentes, associando cada casa de pombos a um signo, são necessárias pelo menos 13 pessoas (pombos) para que duas possuam o mesmo signo (estejam na mesma casa).

Questão 2

Em um saco com 50 bolas, 20 são azuis e 30 são verdes. Qual é o menor número de bolas que devemos retirar do saco para garantir a retirada de pelo menos duas bolas azuis?

A 21

B 22

C 25

D 31

E 32

Parabéns! A alternativa E está correta.

Naturalmente, é possível resolver esse problema sem usar, de forma direta, o princípio da casa dos pombos. Imaginemos duas caixas, uma azul e outra verde. Retirando uma a uma as bolas do saco, perceba em que momento você pode garantir que não há alternativa a não ser colocar duas bolas na caixa azul: certamente quando todas as bolas verdes estiverem na caixa verde! Sendo assim, é necessário retirar um mínimo de 32 bolas.

Questão 3

Qual será o menor número de pessoas em uma sala para que possamos garantir que três delas tenham nascido no mesmo mês?

A 13

B 15

C 14

D 25

E 26

Parabéns! A alternativa D está correta.

Imaginemos 12 casas representando os 12 meses do ano. Para preencher as casas com pessoas, em que momento garantimos que haverá pelo menos 3 pessoas em uma mesma casa? Naturalmente, após o momento em que cada caixa possui exatamente 2 pessoas. Com isso, a 25ª pessoa necessariamente se juntará a duas em uma mesma casa!

Questão 4

Em um baralho usual, com 52 cartas, qual é o menor número de cartas que se deve selecionar para obter pelo menos duas cartas numéricas (do 2 a 10) e com o mesmo naipe?

A 9

B 13

C 17

D 21

E 23

Parabéns! A alternativa D está correta.

Pode-se dar o azar de selecionar inicialmente apenas cartas com figuras: ás, K (rei), Q (dama) ou J (valete). Além disso, existem 16 dessas cartas - e uma de cada naipe! Necessariamente, a próxima carta será numérica e com determinado naipe. Como há apenas 4 naipes, necessariamente uma das próximas 4 cartas será numérica e do mesmo naipe que a 17ª carta selecionada. Ou seja, é preciso selecionar, no mínimo, 16+1+4=21 cartas.

Questão 5

Considere as afirmativas a seguir sobre um baralhos usual. Se selecionarmos...

I. ... 5 cartas, necessariamente duas possuirão o mesmo naipe.
II. ... 27 cartas, obteremos necessariamente uma trinca (três cartas iguais de naipes diferentes).
III. ... 15 cartas, obteremos necessariamente dois pares.
IV. ... 13 cartas, obteremos necessariamente 1 rei.

Quais afirmativas são verdadeiras?

A Apenas I.

B I, II e III.

C II e IV.

D I, II e IV.

E Apenas IV.

Parabéns! A alternativa B está correta.

Note que a única afirmativa falsa é a IV, pois há 48 cartas que não são rei. Logo, para garantir pelo menos um rei, é necessário retirar 49 cartas.

Questão 6

Determine o menor número de pontos no interior de um quadrado de lado igual a 2cm para garantir que pelo menos 2 desses pontos distem menos do que $\sqrt{2}$ entre si.

A 3

B 4

C 5

D 6

E 7

Parabéns! A alternativa C está correta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Teoria na prática

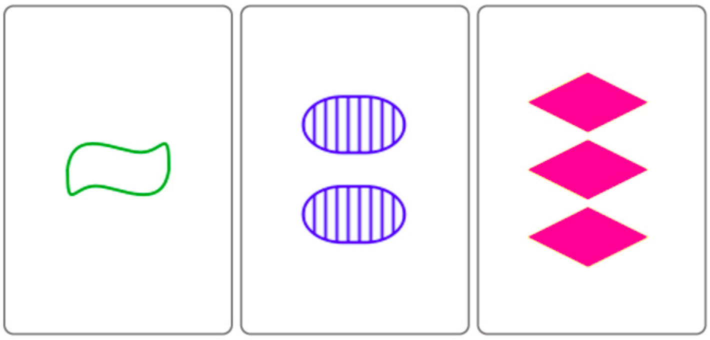
Pesquise na internet o jogo de estratégia chamado **Set**. Trata-se de um game interessantíssimo, pois ele desenvolve fortemente a cognição geométrica e a rapidez visual. Esse jogo possui 81 cartas, sendo que cada uma possui estas quatro características:

- Há 1, 2 ou 3 desenhos (símbolos) iguais desenhados nela: ovais, ondas ou losangos.
- Os símbolos desenhados em uma mesma carta possuem sempre a mesma cor (que fica entre vermelho, verde ou lilás). Além disso, a forma de pintar os símbolos de uma mesma carta pode ser de três tipos:

apenas seu contorno é pintado; além do contorno, também são pintadas hachuras; ou, por fim, há uma pintura sólida em cada símbolo.

Exemplos de cartas do jogo:

- A primeira contém uma única figura, do tipo onda, pintada de verde apenas em seu contorno.
- A segunda contém duas figuras iguais, do tipo oval, pintadas de lilás e com hachuras incluídas.
- A terceira contém três figuras iguais, do tipo losango, pintadas de vermelho e com pintura sólida.



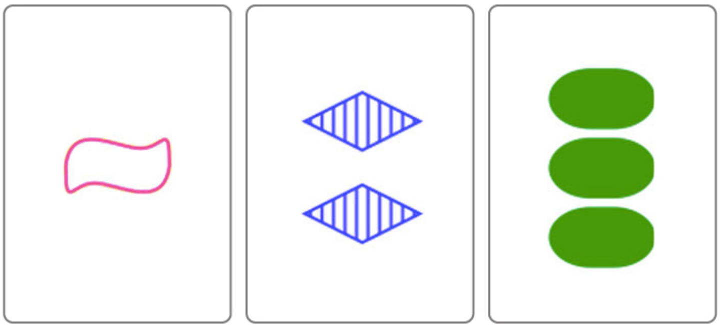
Cartas do jogo Set.

No jogo, 12 cartas são sempre abertas. O objetivo é um jogador perceber o mais rapidamente possível um conjunto de 3 cartas (das 12) chamado de “set” que satisfaça a uma das seguintes condições:

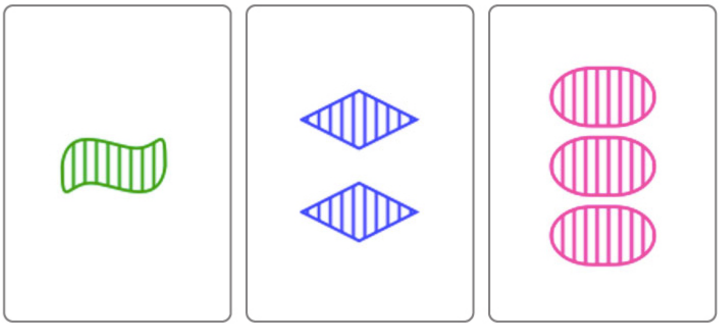
- Todas possuem a mesma quantidade de símbolos ou quantidades diferentes.
- Todas possuem o mesmo símbolo ou símbolos diferentes.
- Todas possuem a mesma cor em seus símbolos ou cores diferentes.
- Todas possuem a mesma forma de pintura de seus símbolos ou três formas diferentes.

Vejamos agora um exemplo de trios de cartas que formam um “set” válido:

- No primeiro, todas as 4 características das 3 cartas são diferentes; a quantidade de símbolos, o tipo de símbolo, a cor e a forma de pintar.
- No segundo, a forma de pintar é a mesma (hachuras), porém as demais características são diferentes.



Arranjo de cartas do jogo Set.



Varição no arranjo de cartas do jogo Set.

A pergunta é: qual é o número mínimo de cartas que deve ser mostrado simultaneamente para que haja, pelo menos, um set válido? **Dica:** se são exibidas 12 cartas como na regra, não é possível garantir um set válido.

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Em uma prova, o grau é fornecido de 0 a 10, podendo variar de meio em meio grau. Por exemplo, 4,5 e 7,0 são dois possíveis graus. No mínimo, quantos alunos devem fazer a prova para se garantir que pelo menos dois obtenham o mesmo grau?

A 19

B 20

C 21

D 22

E 23

Parabéns! A alternativa B está correta.

Basta analisar quantos são os graus possíveis. Os graus inteiros variam de 1 a 10 (havendo, portanto, 10 valores distintos); os graus intermediários, de 0,5 a 9,5 (9 valores distintos). Há, então, 19 graus possíveis. Desse modo, pelo menos 20 alunos são necessários.

Questão 2

Em qualquer grupo de n pessoas, pelo menos 5 nasceram no mesmo dia da semana. Sobre n, é possível garantir que ele:

A Deve estar inclusive entre 29 e 34.

B Deve ser necessariamente igual a 36.

C Pode ser igual a 34 ou 35.

D Pode ser maior ou igual a 28.

E Deve ser necessariamente maior ou igual a 29.

Parabéns! A alternativa E está correta.

Observe que há 7 dias da semana distintos (as casas dos pombos). Então, se em cada casa, já houver 4 pessoas (ao todo, 28 pessoas), inevitavelmente a próxima pessoa terá de completar a 5ª pessoa em uma das casas.

3 - Princípio da adição

Ao final deste módulo, você será capaz de empregar o princípio da adição e o da inclusão-exclusão para o estabelecimento da contagem em problemas modelados por diagramas de

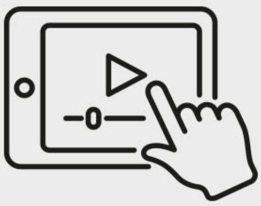
Venn (diagramas de representação de conjuntos).

Vamos começar!

Contagem nas operações de união e interseção entre conjuntos

Compreenda melhor os conceitos relacionados à contagem nas operações de união e interseção entre conjuntos.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.



Operações entre conjuntos

Relembrando operações entre conjuntos

As operações entre objetos matemáticos não constituem propriamente uma novidade: as de adição e multiplicação de números reais, assim como a adição de vetores, composta de funções, e assim por diante, são estudadas ainda no ensino médio. Uma particular discussão envolvendo conjuntos está, em geral, restrita a uma certa categoria de objetos, isto é, a um certo universo de discussão. Tal conjunto de objetos é chamado apropriadamente de **conjunto universo** (U). Nesses casos, todos os conjuntos em discussão são naturalmente subconjuntos de U.

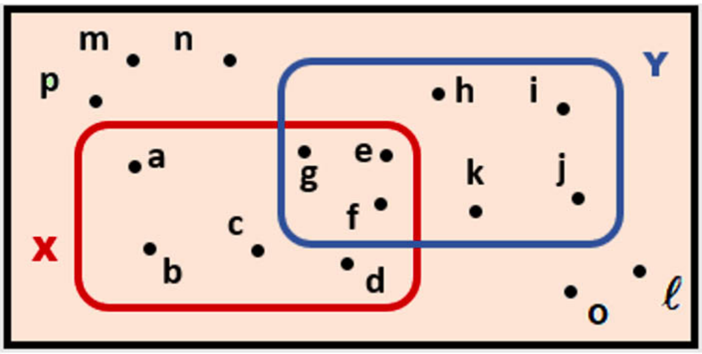
> **Quando resolvemos uma equação, estamos sempre com algum conjunto universo em mente, como o conjunto dos números naturais ou o dos números racionais.**

Nada fora do universo de discussão, portanto, tem interesse naquele momento. Assim, se você encontrar algebricamente uma raiz igual a 4 para uma equação, mas o universo da discussão for o conjunto dos números naturais, tal raiz terá de ser descartada. Não à toa, ela é chamada de **raiz estranha** ao universo.

Quando desenhamos diagramas para conjuntos, no contexto de um conjunto universo U, todos os conjuntos em discussão são naturalmente subconjuntos do universo escolhido. Observe adiante que os conjuntos X e Y são **"restritos"** ao conjunto universo U escolhido; então, os diagramas indicados (chamados de diagramas de Venn) estão contidos no diagrama de U.

- $X = \{a; b; c; d; e; f; g\}$
- $Y = \{e; f; g; h; i; j; k\}$

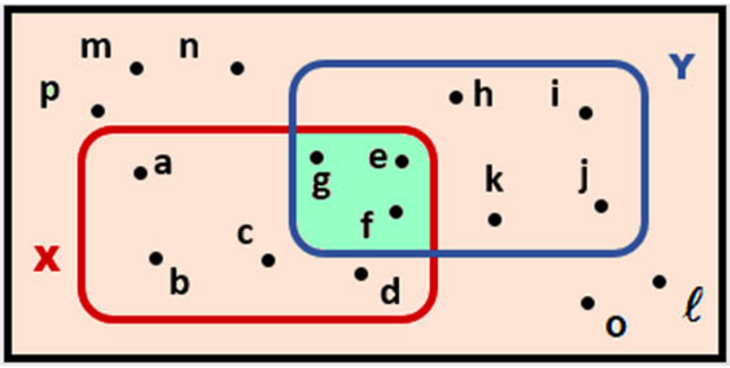
O universo U de discussão é constituído pelas letras do alfabeto de $''a''$ até $''n''$.



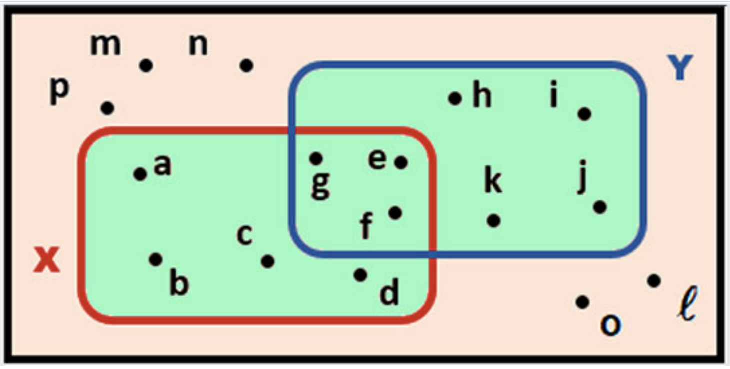
Representação do universo U.

As imagens a seguir indicam duas situações interessantes:

- A primeira sugere, em verde, os objetos que pertencem simultaneamente a X e Y. Associado a tais objetos, esse novo conjunto é chamado de conjunto interseção de X e Y. Ele é representado por $X \cap Y$.
- A segunda, entretanto, destaca em verde a totalidade dos objetos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos X ou Y, podendo eventualmente pertencer a ambos. O conjunto constituído por tais objetos é designado por união de X e Y e é representado por $X \cup Y$.

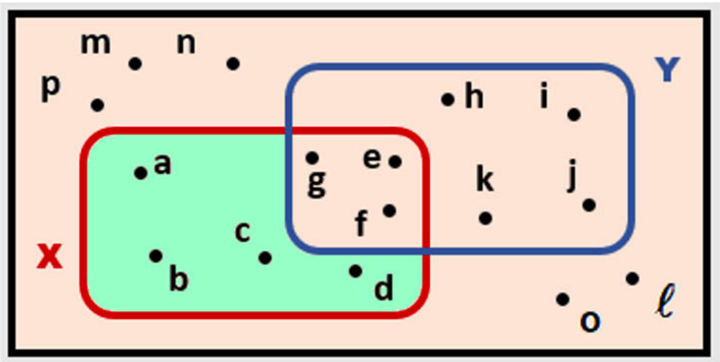


Objetos pertencentes a x e y simultaneamente.



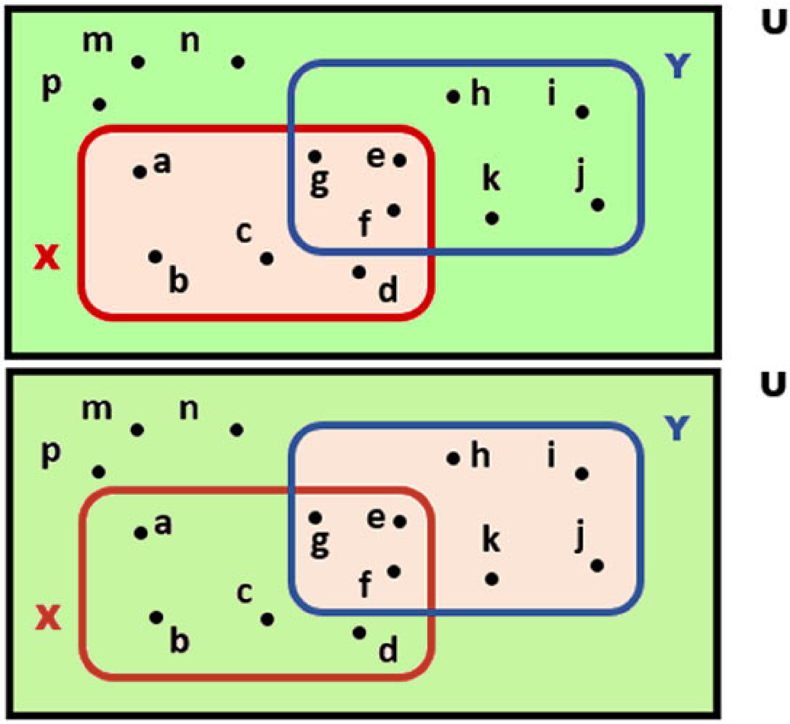
Totalidade de objetos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos.

Na imagem adiante, em **verde**, está representado o conjunto dos objetos que pertencem a X, mas que, entretanto, não pertencem a Y. Como essa situação lembra o ato de retirar (no sentido de subtrair) de um dos conjuntos os objetos do outro, tal operação é chamada de diferença entre o conjunto X e Y, sendo representada por $X-Y$.



Objetos pertencentes ao conjunto x.

Por fim, é útil referenciar os objetos que **não** estão em um dado conjunto, ou seja, os que estão fora do conjunto X, ainda que obviamente pertençam ao conjunto universo. Tal situação representa a diferença $U-X$ entre $U e X$. Dada a importância dessas situações, isto é, determinar o que falta para um conjunto completar o conjunto universo, utilizamos uma nomenclatura adicional. Por isso, dizemos que, se Z é o conjunto complementar de Z (obviamente, em relação ao conjunto universo), escrevemos simplesmente Z' (Z **linha)**. Nessas duas imagens, representam-se em verde respectivamente os conjuntos X' e Y':



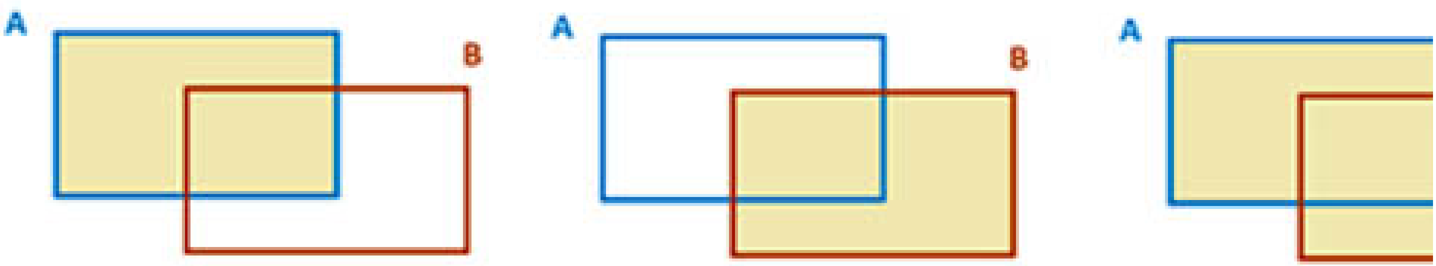
Na imagem da esquerda, objetos que não pertencem ao conjunto X. Na da direita, objetos que não pertencem ao conjunto Y.

Princípio da inclusão-exclusão

O **princípio da inclusão-exclusão** explicita, de forma simples, a quantidade de elementos da união de conjuntos em função da quantidade de elementos de todas as interseções possíveis entre os conjuntos envolvidos.

Caso de dois conjuntos

Se indicarmos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto X, as imagens:



Representação dos conjuntos A e B.

Elas explicitam respectivamente os conjuntos $A, B, A \cup B$ e $A \cap B$ sugerem que:

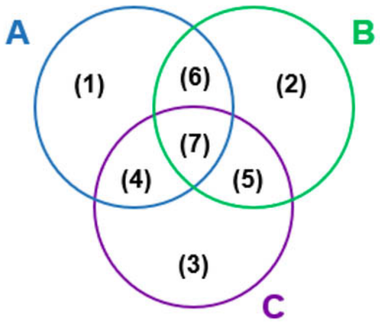
$$n(A \cup B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B), \text{ ou seja,}$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Se $A \cap B = \emptyset$, então obtemos uma versão mais simples (chamada, por vezes, de princípio da adição).

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Caso de três conjuntos

No de três conjuntos, a análise do diagrama de Venn a seguir auxilia em situações de contagem. Basta observar que esses 3 definem uma partição de, no máximo, 7 regiões disjuntas cuja união reproduz a união dos 3 conjuntos, bem como qualquer interseção entre eles. Veja:



Representação dos conjuntos A, B e C.

Onde:

Conjunto	Suas partes
A	(7), (4), (1) e (6)
B	(7), (6), (2) e (5)
C	(7), (5), (3) e (4)
A ∩ B	(7) e (6)
B ∩ C	(7) e (5)

Conjunto	Suas partes
A ∩ C	(7) e (4)
A ∩ B ∩ C	(7)

Carlos Eddy Esaguy Nehab.

Então, a partir da tabela anterior, é fácil perceber que:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) + n(A) + n(B) + n(C) \\ = - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \\ + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

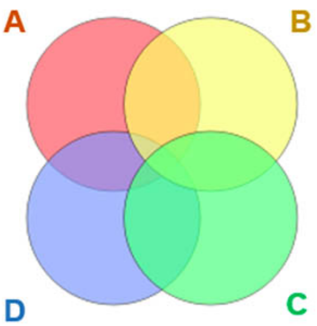
Caso geral

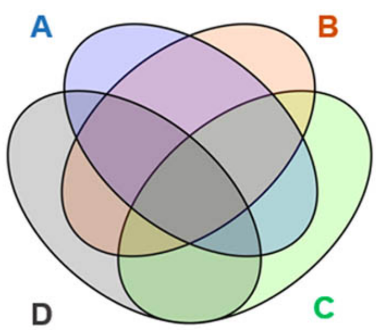
Há uma estratégia que permite generalizar o princípio de inclusão-exclusão para qualquer número de conjuntos. Vejamos, por exemplo, a situação para quatro conjuntos.

> **Será que o primeiro diagrama de Venn é suficientemente geral? Inclui todas as possibilidades de "partes" envolvidas no caso geral de quatro conjuntos?**

A resposta é **não**, porque, no caso geral de 4 conjuntos, há, na verdade, 15 "partes" disjuntas – e esse diagrama só mostra 14 regiões. Na realidade, não é possível, com círculos, criar um diagrama geral envolvendo quatro conjuntos. Mas o que o desenho da esquerda, afinal, não mostra?

Perceba que ele não mostra uma região exclusiva da interseção de B com D. Note, entretanto, que a figura da direita, criada por Venn e que usa 4 elipses, resolve a questão, exibindo, ao todo, as 15 regiões disjuntas associadas a 4 conjuntos. Numere-as!





As duas imagens anteriores exemplificam a representação de quatro conjuntos e, seguindo o raciocínio, você é capaz de perceber a relação a seguir?

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C \cup D) &= + n(A) + n(B) + n(C) + n(D) \\ &- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - \\ &\quad n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) \\ &+ n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + \\ &\quad n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) \\ &- n(A \cap B \cap C \cap D) \end{aligned}$$

Saiba mais

Há uma discussão interessante sobre possíveis construções de diagramas de Venn para um número qualquer de conjuntos em vários verbetes da Wikipédia. Isso ocorre especialmente no verbete **"diagrama de Venn"**. Verifique!

Mas... e agora? Como escrever, de forma geral, o princípio da **inclusão-exclusão** para um número arbitrário de conjuntos? Perceba que a quantidade de elementos da união de n conjuntos finitos é igual:

1. À soma das quantidades dos elementos de cada um dos conjuntos.
2. Menos as quantidades de elementos de cada uma das interseções dos conjuntos tomados dois a dois.
3. Mais a soma das quantidades de elementos de cada uma das interseções dos conjuntos tomados três a três.
4. Menos as quantidades de elementos de cada interseção dos conjuntos tomados quatro a quatro; e, assim por diante.

Observação: agora, verifique a validade dessa regra geral nos casos desenvolvidos anteriormente para 2, 3 e 4 conjuntos.

Exemplos do princípio da inclusão-exclusão

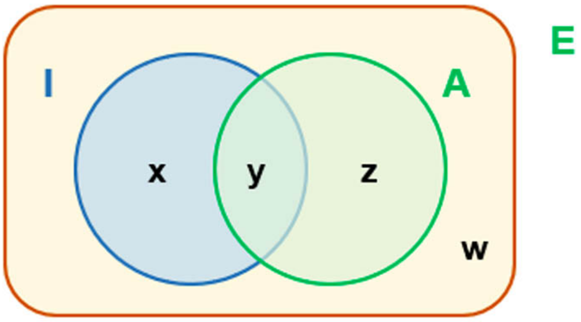
A seguir, serão expostos dois casos para reforçar os conceitos que envolvem o princípio da inclusão-exclusão e ampliar o seu entendimento.

Exemplo I

Em uma escola com 1.200 alunos, 550 praticam ioga e 700, artes marciais, enquanto 200 frequentam as duas atividades. Quantos alunos não participam de nenhuma dessas duas atividades?

Solução

Observe que, nesse caso, entra em discussão o conjunto universo. Sua discussão está restrita, ou seja, diz respeito ao conjunto dos alunos da escola. Se assumirmos que as quantidades de alunos nas regiões indicadas no diagrama são x, y, z e w, veremos, a partir do enunciado, que:



Onde:

$$y = 200$$
$$x + y = 550 \rightarrow x = 550 - 200 = 350$$
$$y + z = 700 \rightarrow z = 700 - 200 = 500$$
$$x + y + z + w = 1200 \rightarrow w = 1200 - 350 - 200 - 500 = 150$$

Ou seja, **150** alunos da escola não frequentam as aulas ioga nem as de artes marciais.

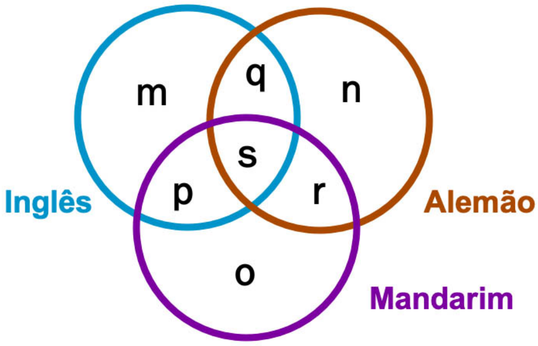
Exemplo II

Em uma escola de idiomas, 200 alunos estão matriculados em algum destes idiomas: inglês, alemão e mandarim. Desse contingente, 50 estudam inglês e alemão; 60, inglês e mandarim; 70, alemão e mandarim; e 20, os três idiomas. Qual é a quantidade dos alunos que estudam apenas 1 entre os 3 idiomas?

Solução

Chamando as quantidades de alunos de cada parte do diagrama de *m, n, o, p, q, r* e *s,* note que o enunciado informa diretamente a quantidade de elementos na interseção dos três conjuntos, ou seja, $s = 20$.

Agora, analise as diversas regiões do diagrama:



Podemos concluir que:

$$
\begin{aligned}
&s = 20 \\
&q + s = 50 \Rightarrow q = 30 \\
&p + s = 60 \Rightarrow p = 40 \\
&r + s = 70 \Rightarrow r = 50
\end{aligned}
$$

No entanto, a soma de todas as partes do diagrama (união dos três conjuntos) vale **200**. Como desejamos calcular $m + n + o$, o resultado é imediato:

$$
\begin{aligned}
m + n + o &= 200 - (p + q + r + s) \\
&= 200 - (40 + 30 + 50 + 20) \\
&= 60
\end{aligned}
$$

Mão na massa

Questão 1

Dados os conjuntos $A = \{2; 3/2; 13/5; 7/2\}$ e $B = \{x \mid x$ é real e $1 < x \leq 3\}$, os números de elementos dos conjuntos $A \cap B$ e $A - B$ valem respectivamente:

A 4 e 1

B 3 e 2

C 3 e 1

D 4 e 2

E 0 e 1

Parabéns! A alternativa A está correta.

$A \cap B$: mantendo no conjunto A apenas os elementos do conjunto B , ou seja, reais entre 1 e 3 , o número 7/2 é eliminado. Logo, $A \cap B$ possui 4 elementos.

$A - B$: eliminando de A todos os números reais de B , isto é, entre 1 e 3 , resta apenas o número 7/2.

Questão 2

Quantos números naturais menores ou iguais a um milhão são quadrados perfeitos ímpares?

A 500

B 1.000

C 5.000

D 10.000

E 1.000.000

Parabéns! A alternativa A está correta.

O objetivo deste exercício é, antes de tudo, testar sua atenção e verificar se você percebe algo simples! Como 1.000.000 é o quadrado de 1.000, os naturais cujo quadrado é inferior ou igual a um milhão obviamente são os naturais de 1 a 1.000. Como desejamos apenas os naturais ímpares, a resposta é a metade: 500.

Questão 3

Quantos números naturais entre 1 e 1.000 não são múltiplos de 6 nem de 8?

A 41

B 250

C 391

D 609

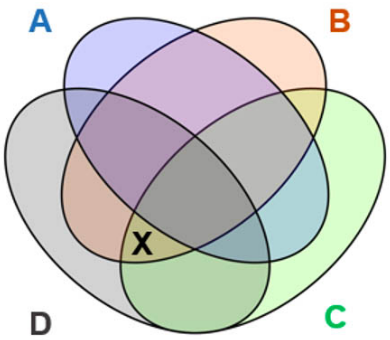
E 750

Parabéns! A alternativa E está correta.

Veja o feedback completo disponibilizado no Solucionário disponibilizado no campo Preparação.

Questão 4

Qual conjunto representa a região X no diagrama indicado?



A $(B \cap C \cap D) - A$

B $A \cap B \cap C \cap D$

C $(B \cap C) - A$

D $A - (B \cup C \cup D)$

E $A - (B \cup C \cup D)$

Parabéns! A alternativa A está correta.

É fácil perceber que a região X, em um primeiro momento, possui apenas elementos que estão ao mesmo tempo nos conjuntos B,C e D. Observado isso, é simples notar que, retirando desse conjunto os elementos de A, "sobram" exatamente os elementos do conjunto indicado por X.

Questão 5

Uma pesquisa eleitoral em uma pequena comunidade apresenta o resultado da preferência para presidente segundo a classe social. Os dados estão apresentados na tabela a seguir:

Classe social	Preferência	
	Candidato X	Candidato Y
Classe A	150	50
Classe B	170	130
Classe C	220	280

Carlos Eddy Esaguy Nehab.

Quantos pessoas pesquisadas são da classe C ou preferem o candidato X?

A 220

B 1.040

C 1.020

D 820

E 840

Parabéns! A alternativa D está correta.

Representando por X o conjunto dos pesquisados que têm preferência pelo candidato X e por C o conjunto dos pesquisados da classe C, temos o seguinte:

Pesquisados na coluna candidato X :

$$n(X) = 150 + 170 + 220 = 540$$

Pesquisados na linha classe C:

$$n(C) = 220 + 280 = 500$$

Pesquisados da classe C que preferem o candidato X :

$$n(X \cap C) = 220$$

Assim, como desejamos calcular $n(X \cup C)$, temos isto:

$$n(X \cup C) = n(X) + n(C) - n(X \cap C)$$
$$n(X \cap C) = 540 + 500 - 220 = 820$$

Questão 6

Uma academia recebe, em dado momento, 200 clientes. A quantidade de pessoas desse grupo de clientes se dirige para diferentes setores dela conforme a lista disposta a seguir:

- 90: setor de musculação.
- 80: setor de piscinas.
- 75: setor de atividades aeróbicas.
- 30: setores de musculação e de piscinas.
- 30: setores de musculação e de atividades aeróbicas.
- 25: setores de piscinas e atividades aeróbicas.

Sabemos ainda que 20 clientes se dirigiram para outros setores que não o de musculação, piscinas ou atividades aeróbicas e que 10 frequentaram os três setores. Quantos clientes se dirigem exclusivamente para a musculação?

A 20

B 40

C 50

D 100

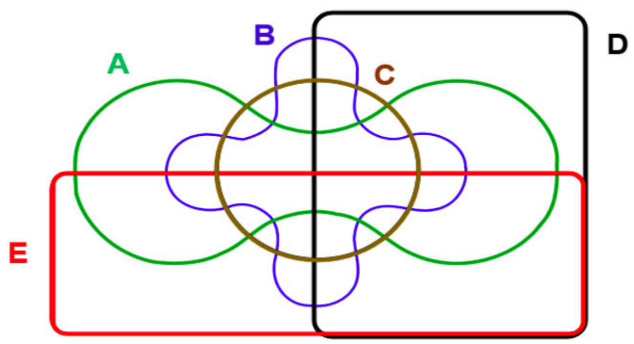
E 150

Parabéns! A alternativa B está correta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Teoria na prática

Escreva a expressão geral do princípio da inclusão-exclusão para cinco conjuntos: *A,B,C,D* e *E*. Analise o diagrama desenvolvido por Anthony Edwards, percebendo quantas são as “partes” que o compõem. Agora numere-as, mas com cuidado!



Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Em um grupo de 30 funcionários de uma empresa, 15 estudam inglês e 25, mandarim, enquanto 7 não estudam nenhum deles. Quantos funcionários estudam os dois idiomas?

A 15

B 17

C 19

D 21

E 23

Parabéns! A alternativa B está correta.

Como, dos 30 funcionários, 7 não estudam nenhum dos dois idiomas, a quantidade de alunos a estudar algum idioma é 23. Chamando de I o conjunto desses funcionários que estudam inglês e de M o daqueles que estudam mandarim, podemos escrever que:

$$n(I \cup M) = n(I) + n(M) - n(I \cap M)$$

Ou seja:

$$23 = 15 + 25 - n(I \cap M)$$
$$n(I \cap M) = 17$$

Questão 2

Dado um número natural n, representemos por $d(n)$ o conjunto dos divisores positivos de n.

Determine o maior elemento do conjunto $d(72) \cap d(90)$.

A 8

B 9

C 12

D 18

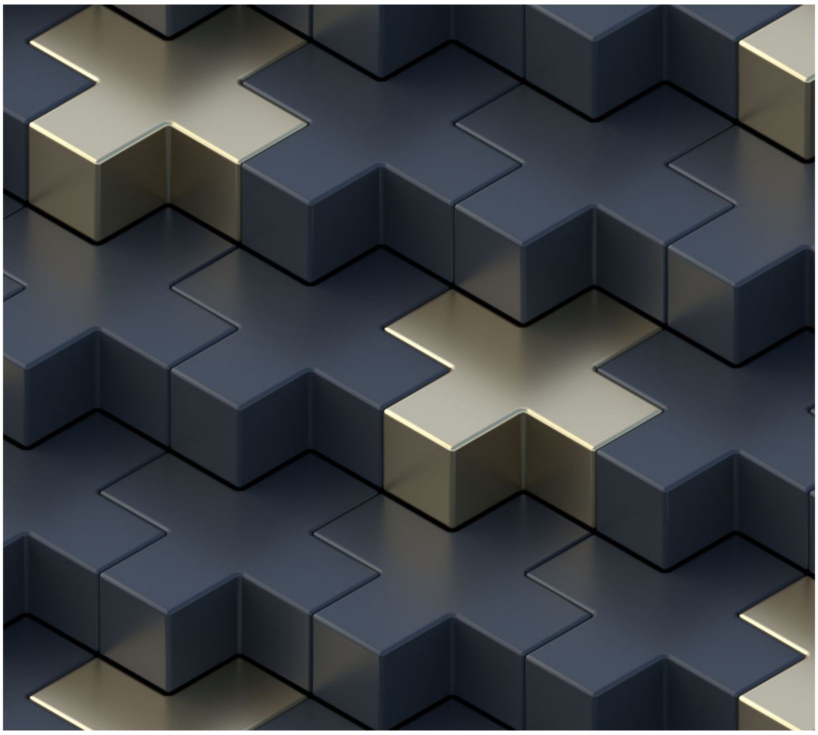
E 24

Parabéns! A alternativa D está correta.

Você reconhece quem é esse sujeito? Trata-se do maior entre os divisores comuns de 72 e 90, isto é, o máximo divisor comum (MDC):

$$d(72) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}$$
$$d(90) = \{1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 18; 30; 45; 90\}$$
$$d(72) \cap d(90) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$$

Dessa forma, o elemento procurado é 18.



4 - Princípio da multiplicação

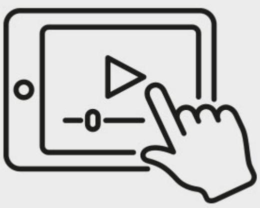
Ao final deste módulo, você será capaz de empregar o princípio da multiplicação para a solução de problemas modeláveis por tabelas, árvores de decisão e artefatos similares.

Vamos começar!

O princípio da multiplicação

Compreenda melhor os conceitos relacionados ao princípio da multiplicação.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

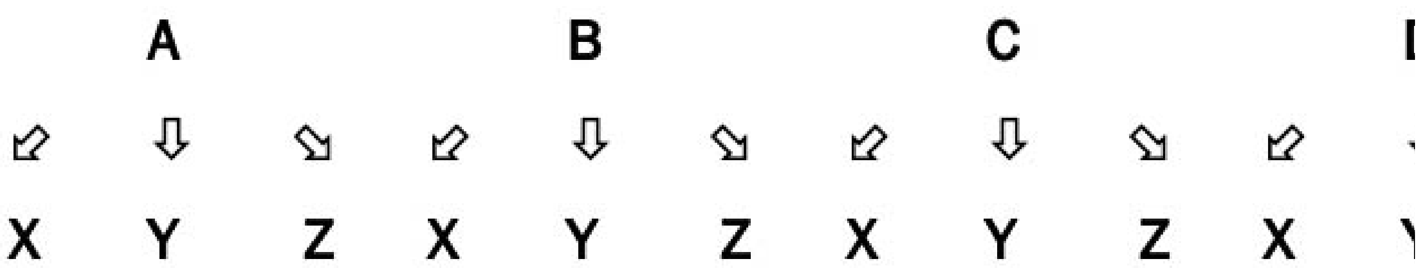


Introdução ao princípio da multiplicação

O princípio da multiplicação é uma estratégia para contar o número total de casos possíveis em situações nas quais ocorrem escolhas múltiplas, porém independentes. Essa estratégia de contagem, aliás, é utilizada desde o ensino fundamental.

Provavelmente, ainda quando criança, você já se deparou com um problema mais ou menos assim: “Um palhaço possui 4 calças e 3 camisas. Considerando exclusivamente as possíveis escolhas de uma calça e de uma camisa, de quantas formas diferentes ele pode se vestir?”. É importante perceber que a escolha de uma calça e a de uma camisa são ações independentes.

Quando você estudar probabilidade, verá que usamos a expressão **“eventos independentes”**. Assim, supondo que as 4 calças sejam A , B C e D e as camisas, X , Y e Z , o desenho mostra as possibilidades de escolhas diferentes: $4 \times 3 = 12$.



Representação do princípio da multiplicação.

Esse diagrama é usualmente chamado de **árvore de decisão**, pois explicita as possíveis escolhas e, de cabeça para baixo, parece uma árvore cujos galhos explicitam os desdobramentos das situações que podem ocorrer.

O uso do fatorial

Em problemas de contagem, produtos de inteiros consecutivos aparecem com frequência. Um conceito simples e muito útil para representar de forma compacta situações dessa natureza é o uso do operador fatorial. Se n é um número inteiro positivo, representamos por $n!$ (ponto de exclamação) o produto de 1 a n, ou seja, $n! = 1.2.3...n$.

Exemplo

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ e $6! = 1 \times 2 \times \ldots \times 6 = 720$

Note que produtos de inteiros consecutivos, como $10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14$, podem ser facilmente expressos com o uso de fatoriais:

$$10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \times 10.11.12.13.14 = \frac{14!}{9!}$$

Rotacione a tela.

Observação: por conveniência, definimos o zero fatorial como igual a 1, ou seja, $0! = 1$.

Exemplos do princípio da multiplicação

A seguir, serão expostos alguns casos para reforçar os conceitos que envolvem o princípio da multiplicação e ampliar o seu entendimento.

Exemplo I

Determine quantas senhas de 6 algarismos podemos formar utilizando algarismos de 0 a 9 nas seguintes hipóteses:

- A: podendo repetir algarismos.
- B: com os algarismos todos diferentes.

Solução

- A: nossa senha possui 6 algarismos: 1º 2º 3º 4º 5º 6º. A escolha de qualquer um deles pode ser qualquer um dos 10 algarismos (de 0 a 9)! Portanto, pelo princípio da multiplicação, a quantidade de senhas é 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 = 1.000.000. Outra solução é perceber que as senhas são, na verdade, os números de 000000 (isto é, o zero) até 999.999. Ou seja, um milhão de senhas.
- B: no caso de algarismos diferentes, escolhido o primeiro (10 possibilidades), há apenas 9 possibilidades para se escolher o segundo algarismo – e assim por diante. Princípio da multiplicação: a solução é 10 × 9 × 8 × 7 × 6 × 5 = 10! / 4! = 151.200.

Exemplo II

Determine quantos números de 4 algarismos diferentes podemos formar utilizando apenas os algarismos 0, 4, 5, 6, 7 e 8.

Solução

Nosso número possui 4 algarismos: $M \quad C \quad D \quad U$. Devemos escolher um algarismo para milhar (M); um, para a centena (C); um, para a dezena (D); e um, para unidade (U). Façamos as escolhas na ordem M, C, D e U.

- Escolha de M: como M é o algarismo de milhar, ele não pode ser 0. Dessa maneira, há **5** possibilidades: 4, 5, 6, 7 e 8.
- Escolha de C: escolhido o algarismo M e sendo os algarismos diferentes, sobram **5** algarismos para utilizar C (estando aí incluso o 0, que não foi usado para M).
- Escolha de D: como escolhemos M e C, dispomos apenas de **4** algarismos restantes para D.
- Escolha de U: finalmente, para a escolha de U, há apenas **3** algarismos disponíveis.

Como as escolhas dos algarismos é independente, o número desejado é, pelo princípio da multiplicação, igual a: $5\times 5\times 4\times 3 = 300$ números diferentes.

Exemplo III

De quantas maneiras podemos fazer filas com 5 alunos se dispomos de 12 deles?

Solução

Há 5 lugares a se preencher, do 1º ao 5º lugar da fila. Para escolher o 1º, dispomos dos 12 alunos; para o 2º lugar da fila, só há agora $12-1 = 11$ alunos. Continuando o raciocínio, é fácil perceber que o número total de filas será, pelo princípio da multiplicação, igual a: $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$ (5 parcelas de 12 a 8).

Então:

$$12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= \frac{12!}{7!} = \frac{12!}{(12-5)!}$$

Rotacione a tela.

Esse tipo de situação – em que dispomos de n objetos e queremos criar filas **(ordenações)**, usando apenas p dos objetos n objetos disponíveis – é um dos agrupamentos usuais da análise combinatória a ser aprofundado em outro momento. Agrupamentos desse tipo são chamados de arranjos simples (ou seja, sem repetição) de n objetos tomados p a p que representamos por A_p^n ou $A_{n,p}$.

Perceba que, nessas situações, a quantidade desejada pode ser expressa de **duas** maneiras:

- Produto de p números consecutivos a partir de n, incluído, e de forma decrescente.
- Quociente dos fatoriais de n e de $n-p$, ou seja, $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Refaça o exemplo para estes casos:

- 20 alunos com filas com 2 alunos.
- 10 alunos com filas de 3 alunos.
- 8 alunos com todos na fila.

Se você encontrou os valores a seguir, parabéns!

- 20 x 19 = 20!/(20 – 2)! = 20!/18! = 380 filas;
- 10 x 9 x 8 = 10!/(10 – 3)! = 10!/7! = 10.9.8 = 720 filas;
- 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 8!/(8 – 8)! = 8!/0! = 8! = 40.320 filas.

Exemplo IV

Calcule o número de anagramas das palavras **TRAPO** e **PUBLICAR**. Antes de resolvermos o exercício proposto, contudo, observemos o que se segue: se dispusermos de n objetos e colocarmos todos na fila, o número total de possíveis filas será o produto $n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$, porque podemos escolher um dos n objetos como **1º** da fila, um dos $n-1$ restantes como **2º** da fila, e assim sucessivamente, até atingirmos o **último lugar** da fila no qual só teremos **um** aluno para escolher.

> **Essa situação – em que $n = p$, isto é, em que dispomos de n objetos para ordenar todos os n objetos – configura um caso particular do tipo de agrupamento anterior chamado de arranjo (em que $p = n$). No entanto, preferimos chamá-lo de permutação de n objetos, porque pressupõe-se que desejamos ordenar todos eles!**

A notação utilizada é $P_n = n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ e, é claro, $A_n^n = P_n = n!$. Retornando ao exercício, lembremos que um anagrama de uma palavra é uma palavra que possui as mesmas letras da palavra original na mesma quantidade em que cada letra ocorre (independentemente de ela possuir significado). $PORTA$, **PRATO** e **OAPTR**, por exemplo, são anagramas da palavra **TRAPO**.

Com isso, desejamos simplesmente calcular de quantas maneiras podemos embaralhar as letras da palavra TRAPO (que são todas diferentes). Claro que isso equivale a ordenar de todas as maneiras possíveis as cinco letras (diferentes) da palavra indicada. Naturalmente, a resposta é imediata: $A_5^5 = P_5 = 5! = 1.2.3.4.5 = 120$ anagramas. No segundo caso, a palavra **PUBLICAR** também possui letras diferentes e um total de **8** letras. Sendo assim, o número de anagramas é: $A_8^8 = P_8 = 8! = | 1 \times 2 \times \ldots \times 8 = 4320$ anagramas.

Atenção!

Essa discussão enfatiza que, de fato, o agrupamento denominado permutação nada mais é que um caso particular do grupamento arranjo, em que desejamos ordenar (criar nossas filas) com todos os n objetos disponíveis, ou seja, o tamanho p das filas é igual ao próprio n.

As situações em que há letras repetidas na palavra original, por sua vez, serão tratadas em outro momento.

Mão na massa

Questão 1

Quantos anagramas há na palavra ALFREDO?

A 8!

B 8+7+6+5+4+3+2+1

C 7!

D 7+6+5+4+3+2+1

E 6!

Parabéns! A alternativa C está correta.

Como as letras da palavra ALFREDO são diferentes, basta embaralhar todas, que são 7. Logo, a resposta correta é a permutação de 7 objetos, ou seja, $P_7 = 7!$!.

Questão 2

Se as placas de carro de um país são formadas por 2 letras distintas seguidas de 4 algarismos também diferentes, quantas são as possíveis placas?

A $26^2 \times 9^4$

B $26 \times 25 \times 10^4$

C $26^2 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$

D $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$

E $26 \times 25 \times 10^3$

Parabéns! A alternativa D está correta.

A placa deve possuir seis caracteres: $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ - Para o primeiro caractere, C_1 podemos escolher qualquer uma das 26 letras do alfabeto; com o segundo caractere, já que eles devem ser diferentes, podemos escolher apenas 25 letras. De maneira análoga, os caracteres de C_3 a C_6 poderão ser preenchidos respectivamente por $10, 9, 8$ e 7 dígitos. Como essas escolhas são independentes, a opção correta, pelo princípio da multiplicação, é a letra D.

Questão 3

Utilizando os algarismos de 1 a 8, quantos números pares podemos formar de 4 algarismos distintos?

A 8! = 40.329

B 7! x 4 = 20.160

C 8 × 7 × 6 = 336

D 4 x 7 x 6 x 5 = 840

E $8^3 \times 4$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Escolhendo os algarismos das unidades (U), dezenas (D), centenas (C) e milhares (M), vemos, nessa ordem, que:

U: 4 alternativas - 2, 4, 6, ou 8;

D: 7 alternativas - 7 algarismos (exceto o já utilizado como U);

C: 6 alternativas - 6 algarismos (exceto os dois já usados);M.

M: 5 alternativas - 6 algarismos (exceto os dois já usados).

Como as escolhas dos dígitos de cada ordem são independentes, o total desejado é 4 x 7 x 6 x 5 = 840. Outra solução é calcular todos os números de 4 dígitos distintos independentemente de eles serem pares ou ímpares. Isso equivale a 8.7.6.5 = 1.680. Como há 4 algarismos pares e 4 ímpares, por simetria, a metade é de números pares.

Questão 4

Dado o conjunto $$A = {a; b; c; d; e; f; g}, quantos são os subconjuntos de A?

A 128

B 64

C 36

D 32

E 21

Parabéns! A alternativa A está correta.

Para formar os subconjuntos de A, é preciso selecionar elementos de A para compor o desejado subconjunto. Em relação ao elemento a, pode-se escolhê-lo ou não, isto é, existem duas alternativas. Então, para cada um dos 7 elementos de A, é possível escolhê-los ou não para compor o subconjunto desejado.

Desse modo, há:

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^7 = 128$ possibilidades de escolha

Se nenhum dos elementos de A para compor o subconjunto desejado não for escolhido, naturalmente se obterá o conjunto vazio; se todos forem escolhidos, o próprio conjunto A será obtido.

Questão 5

Dos 20 funcionários de uma empresa, 13 são homens e 7 são mulheres. Desejamos formar uma comissão constituída por 3 homens e 5 mulheres. Quantas comissões são possíveis?

A C_9^{20}

B $C_3^{20} \times C_5^{20}$

C $A_3^{13} \times A_5^7$

D $C_3^{13} \times C_5^7$

E $C_{13}^{20} \times C_7^{20}$

Parabéns! A alternativa D está correta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Questão 6

Em um almoço, 10 amigos são dispostos em uma mesa redonda com 10 cadeiras. De quantas maneiras diferentes eles podem sentar à mesa se 2 situações são consideradas diferentes e se pelo menos 1 pessoa não tem os mesmos amigos à sua direita e à sua esquerda? Ou seja, se girarmos a mesa e todos os amigos, essa configuração será considerada a mesma.

A $10!$

B $10! - 1$

C $9!$

D $9! - 1$

E 10^9

Parabéns! A alternativa C está correta.

Para assistir a um vídeo sobre o assunto, acesse a versão online deste conteúdo.

Teoria na prática

Os artigos em uma loja são codificados desta forma:

- três letras maiúsculas e diferentes consecutivas seguidas de um hífen;
- seis algarismos quaisquer (de 0 a 6);
- mais uma letra qualquer do alfabeto.

Exemplos: AHD-4193678-K, GEQ-093044-Q e AAA-9497-X.

Qual será o número total de produtos que podem ser codificados dessa maneira?

Mostrar solução

Falta pouco para atingir seus objetivos.

Vamos praticar alguns conceitos?

Questão 1

Usando algarismos de 0 a 9, quantas senhas com algarismos diferentes podem ser formadas com, no mínimo, 4 e, no máximo, 6 dígitos?

A 30.240

B 186.480

C $10\,(9^2 + 9^3 + 9^4)$

D 10×9×8×7×6×5

E 6!×5!×4!

Parabéns! A alternativa B está correta.

Senhas com:

- Quatro algarismos: 10 escolhas para o 1º algarismo; 9, para o 2º; 8, para o 3º; e 4, para o 4º. Logo, há 10X9X8X7 = 5.040 senhas (princípio da multiplicação);
- Cinco algarismos: De forma análoga, 10X9X8X7X6 = 30.240 senhas (princípio da multiplicação);
- Seis algarismos: 10X9X8X7X6X5 = 151.200 senhas (princípio da multiplicação).

Observe que os conjuntos das senhas de 4, 5 ou 6 algarismos são conjuntos disjuntos dois a dois. Então, pelo princípio da adição, o total de senhas é 5.040 + 30.240 + 151.200 = 186.480.

Questão 2

Dado o conjunto $A = \{1, 3, 5; 7; 9\}$, quantos são os subconjuntos de A com 3 elementos que não possuem o número 5?

A 2

B 4

C 6

D 12

E 24

Parabéns! A alternativa B está correta.

Se não podemos escolher o número 5, tudo se passa como se escolhessemos, entre os elementos 1, 3, 7 e 9, exatamente 3 deles! Desse modo, o resultado desejado equivale à quantidade de combinações de 4 elementos tomados 3 a 3.

Ou seja:

$$\frac{4!}{(4-3)!3!}=4$$

Considerações finais

Os aspectos básicos relativos à contagem, além da capacidade de dominar os campos aditivos e multiplicativos numéricos, constituem, hoje em dia, a essência da chamada numerácia. Neste conteúdo, apresentamos os princípios centrais que auxiliam nos processos de contagem – em especial, os princípios da adição e da multiplicação.

A partir desses princípios, identificamos as categorias típicas da contagem de objetos. Em seguida, enfatizamos o uso de padrões de contagem e exploramos os agrupamentos simples, notadamente os arranjos, as permutações e as combinações. É importante ressaltar ainda a importância deste texto para o eventual estudo de probabilidade.

Explore +

Confira as indicações que separamos especialmente para você!

Criado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), o portal de matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é uma fonte inestimável de consulta em que você pode rever qualquer assunto de seu interesse.

Para aprofundar principalmente o estudo dos conteúdos de contagem, sugerimos as diversas aulas disponíveis no canal do IMPA no YouTube. Em especial, as aulas do Programa de Capacitação de Professores do Ensino Médio (PAPMEM). No buscador do site, digite estas palavras: “PAPMEM” e “IMPA”.

Referências

HALMOS, P. R. **Teoria ingênua dos conjuntos.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2020.

LAGES; E. L.; CARVALHO; P. P. C. de; MORGADO, E. W.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio.** Coleção do Professor de Matemática. 10. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SANTOS, I. **Introdução à análise combinatória.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2020.

SANTOS, J. P. O; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à análise combinatória.** 4. ed. Revista e reimpressa em 2020. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

Material para download

Clique no botão abaixo para fazer o download do conteúdo completo em formato PDF.

Download material

O que você achou do conteúdo?

Relatar problema