Derivada: conceitos e propriedades operatórias

Você vai explorar o conceito de derivada e entender as propriedades operatórias.

Prof. Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira Colaboração: Prof. Gabriel Burlandy Mota De Melo | Prof. Gabriel Elmor Filho

Propósito

Propósito

O entendimento sobre as regras de obtenção da função derivada de uma função real é fundamental para o profissional que necessita dominar o cálculo das derivadas, especialmente se estiver atuando em áreas que envolvem ciências exatas, engenharia, economia, ciência da computação, estatística e muitos outros campos.

O entendimento sobre as regras de obtenção da função derivada de uma função real é fundamental para o profissional que necessita dominar o cálculo das derivadas, especialmente se estiver atuando em áreas que envolvem ciências exatas, engenharia, economia, ciência da computação, estatística e muitos outros campos.

Objetivos

Objetivos

- Aplicar a abordagem gráfica e analítica do conceito de derivada.
- Aplicar as regras de derivação para o cálculo da derivada.
- Empregar a regra da cadeia para obter a derivada da composta de funções.
- Reconhecer os conceitos de derivada para derivação implícita e derivada de ordens superiores..

- Aplicar a abordagem gráfica e analítica do conceito de derivada.
- Aplicar as regras de derivação para o cálculo da derivada.
- Empregar a regra da cadeia para obter a derivada da composta de funções.
- Reconhecer os conceitos de derivada para derivação implícita e derivada de ordens superiores..

Introdução

Introdução

O vídeo a seguir aborda o conceito de derivada de uma função real, bem como sua principal aplicação: a análise do comportamento de uma função.

O vídeo a seguir aborda o conceito de derivada de uma função real, bem como sua principal aplicação: a análise do comportamento de uma função.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Derivada: visão geométrica

Neste vídeo, você vai compreender conceitos essenciais sobre derivadas, abordando duas perspectivas fundamentais: a inclinação da reta tangente e a taxa de variação.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Abordagem gráfica da Derivada de uma Função Real

Graficamente, pode ser verificada a interpretação da derivada como uma taxa de variação instantânea ou como a inclinação da reta tangente à função em um ponto.

A derivada de uma função real em um ponto q será a taxa de variação instantânea dessa função no ponto, como também será o valor do coeficiente angular da reta tangente à função nesse ponto. Portanto, pela abordagem gráfica, podemos afirmar o seguinte:

Derivada positiva

A derivada vai ser positiva nos pontos onde a reta tangente for crescente ou quando a taxa instantânea for positiva.

Derivada negativa

A derivada vai ser negativa nos pontos onde a reta tangente for decrescente ou quando a taxa instantânea for negativa.

Derivada nula

A derivada será nula se a tangente no ponto for horizontal, representando uma taxa instantânea nula.

Se a derivada representa uma taxa de variação instantânea, então a derivada de uma função constante, isto é, $f(x) = k, k$ real, será nula em todo seu domínio.

Exemplo

Considere a função real de R em R definida por: $y = f(x) = x^2$

1. Mostre que a taxa de variação média entre os pontos de abscissa $x = 2$ e $x = 2 + h$, em que h é um número real diferente de zero, é dada por $V = h + 4$.

2. Perceba que, se imaginarmos h um número real tão pequeno quanto queiramos, a taxa média de variação se aproxima de $V = 4$, que nada mais é que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 2$. Dito de outra forma, é a taxa de variação instantânea no ponto de abscissa $x = 2$.

3. Esboce o gráfico de f ou use algum aplicativo gráfico para visualizá-lo.

Solução

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Abordagem analítica da Derivada de uma Função Real

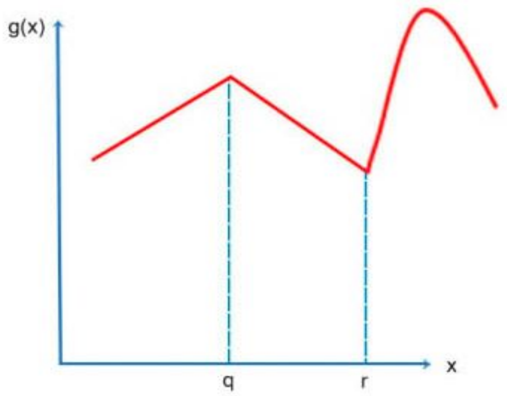
Analiticamente, transforma-se essa interpretação em uma equação que permite a determinação da derivada por meio do cálculo de um limite.

No item anterior, foi vista a definição da função derivada através de uma abordagem gráfica. A derivada de uma função em um ponto foi interpretada como a inclinação da reta tangente ou como a taxa de variação instantânea da função no ponto analisado. Agora, podemos definir a derivada analiticamente. Ressalta-se que a derivada de $f(x)$ também é uma função real, denominada de derivada de $f(x)$, como notação $f'(x)$.

Atenção: Sejam $f(x)$ uma função e um ponto q do seu domínio. A derivada da função $f(x)$, no ponto q, é definida por:

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q}$$

Se o limite acima existir e for finito, a função será derivável ou diferenciável em q e terá valor igual ao do limite. Recorde que o limite vai existir quando os dois limites laterais existirem e forem iguais.



Exemplo de função contínua, em que não existe limite no ponto "q" e no ponto “r”

Se o limite à esquerda e o limite à direita apresentarem valores diferentes, quando x tende q, não existirá a derivada de $f(x)$ em q. Isso significa que, quando x tende ao ponto q, por valores superiores ou inferiores, vai apresentar duas taxas instantâneas ou duas inclinações da reta tangente diferentes, não sendo possível portanto definir-se uma derivada. Na prática, dizemos que a função forma um bico. Veja um exemplo no gráfico. A função $g(x)$ não é derivável em $x = q$ e $x = r$.

Um ponto importante é que só pode ser calculada a derivada de uma função em um ponto do seu domínio, diferentemente com o que acontecia com o limite.

Intervalo aberto

Analisamos a derivada de uma função em um ponto, mas uma função será derivável em um intervalo aberto (a , b) se for derivável em todos os pontos interiores desse intervalo. Para os pontos extremos do domínio de uma função, não há como definir a derivada, pois não podemos montar os dois limites laterais. Assim, usamos o conceito de derivada à direita ou à esquerda, utilizando apenas um dos limites laterais.

Intervalo fechado

Para o caso de um intervalo fechado $[a, b]$, a função para ser derivável deverá atender aos seguintes requisitos: ser derivável em todo interior de (a, b) ; existir a derivada à direita para o extremo inferior a: $f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; existir a derivada à esquerda para o extremo superior b: $f'(b) = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$.

Outras notações

Além da notação apresentada, a derivada de $f(x)$ em relação a sua variável independente x pode ser representada por outras notações.

A notação usual para a função derivada de uma função f é f' ', ou seja usamos a mesma letra da função e lemos ' f linha'. Mas a interpretação da derivada como taxa de variação propicia uma notação que enfatiza o fato de a derivada ser a taxa instantânea de variação. Escrevemos $f' = \frac{df}{dx}$, em que df e dx sugerem as variações Δf e Δx da função e da variável x , quando a variação Δx é próxima a zero.

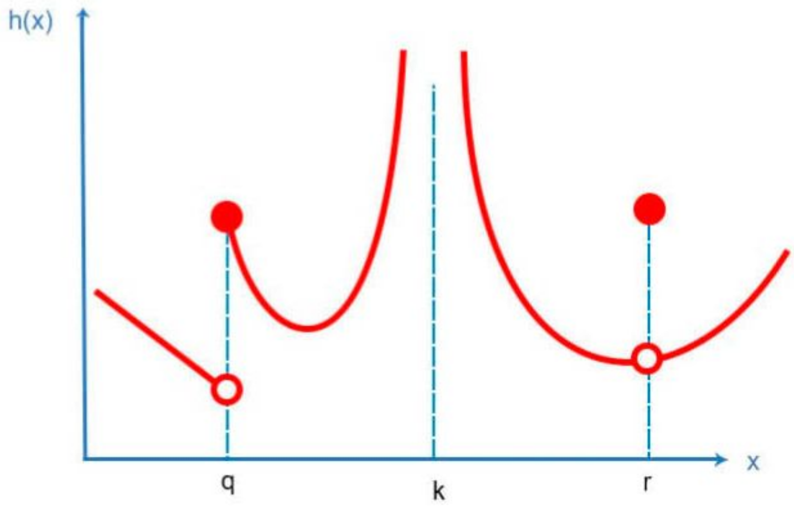
Diferenciabilidade e continuidade

Um teorema importantíssimo no cálculo diferencial é o que relaciona a diferenciabilidade de uma função com a sua continuidade.

> Teorema: se uma função $f(x)$ é derivável para $x = q$, então a função é contínua para $x = q$.

Um cuidado deve ser tomado: nada podemos afirmar sobre a volta desse teorema, isto é, se uma função for contínua em $x = q$ ela pode ou não ser derivável em $x = q$. Por exemplo, no item anterior, as funções $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas em $x = q$, porém a derivada de $f(x)$ em q existe e a derivada de $g(x)$ em q não existe.

Uma consequência direta do teorema é que se a função não for contínua em $x = q$, então a função não é derivável em $x = q$. Dizemos que ser contínua em um ponto é uma **condição necessária, mas não suficiente** para ser derivável no ponto.



Exemplo de função não derivável em dois pontos

Em outras palavras, para existir a derivada para $x = q$, além da função ser definida em $x = q$, ela deve ser obrigatoriamente contínua em $x = q$ e, mesmo assim, pode haver casos nos quais a derivada não existirá, vide item anterior" Retornando à análise gráfica", temos aqui outra possibilidade de a derivada não existir, além de formar um bico apresentado no item anterior. Caso apresente uma descontinuidade em um ponto, a derivada não existirá. Os gráficos abaixo apresentam exemplos da não existência da derivada em $x = q$, $x = k$ e $x = r$, pois a função é descontínua nestes pontos.

Demonstração do Teorema entre Diferenciabilidade e Continuidade

Teorema:

Se $f(x)$ for derivável no ponto q, então $f(x)$ será contnnu no ponto p.

Demonstração:

Adotando a hipótese do teorema que $f(x)$ é derivável em $x = q$.

Assim, $f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{x-q}$ existe

Mas, $f(x) - f(p) = \frac{f(x)-f(q)}{(x-q)}(x-q)$, para $x \neq q$

Então,

$\lim_{x \to q} f(x) - f(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{(x-q)}(x-q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{(x-q)} \lim_{x \to q}(x-q)$

Mas, $\lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{(x-q)} = f'(q)$ que é um número real e

Assim, então,

$$\lim_{x \to q} f(x) - f(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{(x-q)} \lim_{x \to q}(x-q) = f'(q) \cdot 0 = 0$$
$$\lim_{x \to q} f(x) - f(q) = 0 \to \lim_{x \to q} f(x) = f(q)$$

Provando que $f(x)$ é contínua para quando x tende a q.

Mão na massa

Questão 1

Em determinada cidade, foi modelada a variação da temperatura, medida em °C, com o tempo, medido em minutos, após a meia-noite. A função T(t) define essa dependência para t ≥ 0. Qual o significado da função derivada T’(60)?

A

T’(60) representa a taxa de variação da temperatura a 1 hora da madrugada.

B

T’(60) representa a temperatura a 1 hora da madrugada.

C

T’(60) representa a hora da madrugada quando a temperatura alcança 600°C.

D

T’(60) representa a soma das temperatura de meia-noite até 1 hora da madrugada.

E

T’(60) representa a máxima temperatura de meia-noite até 1h da madrugada.

A alternativa A está correta.

Se T(t) mede a temperatura com o tempo, a função T'(t) medirá como a temperatura irá variar com a variação do tempo em determinado horário após a meia-noite. Em outras palavras, T'(t) medirá a taxa de variação instantânea da temperatura T(°C) para um instante t(min) medido após a meia-noite. T'(60) representa a taxa de variação da temperatura a 1 hora da madrugada, isto é, 60min após a meia-noite. Vamos supor que T'(60) tenha valor de – 0,5. Então, quando estivermos no horário de 1h da madrugada, a temperatura irá decrescer 0,5°C por minuto. Logo, a alternativa é a letra A.

Questão 2

Marque a alternativa verdadeira quanto ao conceito da abordagem gráfica da função derivada da função h(x) em um ponto p do seu domínio:

A

Representa a taxa de variação média de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

B

Representa a taxa de variação instantânea de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

C

Representa a taxa de variação instantânea de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de h(x) no ponto **p.**

D

Representa a taxa de variação média de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

E

Representa a taxa de variação máxima de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

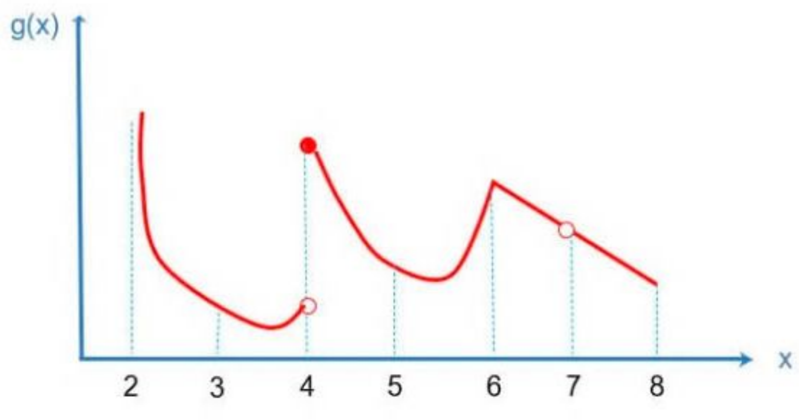
A alternativa C está correta.

Conforme definido na abordagem gráfica da derivada, esta representa a taxa de variação instantânea da função no ponto analisado. Além disso, ela permite o cálculo da inclinação da reta tangente no ponto, pois a derivada terá o valor do coeficiente angular da reta tangente.Assim, a alternativa verdadeira é a letra C.

As demais associam a derivada à taxa média e coeficiente angular da reta secante, conceito não verdadeiro.

Questão 3

Verifique o gráfico abaixo e marque a alternativa que apresenta apenas os pontos onde a função g(x) não é derivável.



A

3, 4 e 7.

B

4, 6 e 7.

C

4, 5 e 6.

D

4, 5 e 7.

E

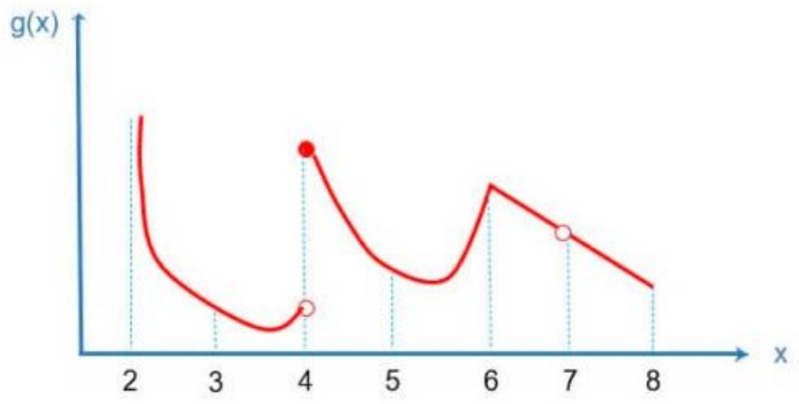
3, 5 e 7.

A alternativa B está correta.

Como pode ser verificado pelo gráfico, no ponto x=6 não existirá derivada, pois os limites laterais da taxa de variação (ou a tangente ao gráfico) quando x tende a 6 serão diferentes para aproximação por valores inferiores e superiores. Desta forma, não existirá derivada em x=6. Para os pontos x=4 e x=7, existe uma descontinuidade da função, portanto não existirá a derivada.Nos demais pontos, pertencentes ao intervalo (2 , 8), a derivada existe, sendo o caso para x=3 e x=5. Assim, a única alternativa que apresenta apenas pontos onde não existe a derivada é a letra B.

Questão 4

Verifique o gráfico a seguir e marque a alternativa que apresenta um intervalo em que a função g(x) é derivável.



A

(2 , 8)

B

(4 , 6)

C

[4 , 7)

D

[3 , 5]

E

[4 , 7]

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 5

Marque a alternativa verdadeira quanto à relação entre diferenciabilidade e continuidade.

A

Se a função não apresenta derivada em um ponto **q**, então ela é descontínua no ponto **q**.

B

Se a função é contínua em um ponto **q**, então ela é derivável no ponto **q**.

C

Se a função apresenta derivada em um ponto **q**, então ela pode ser contínua ou não no ponto **q**.

D

Se a função não for contínua em um ponto **q**, então ela não é derivável no ponto **q**.

E

Se a função for contínua em um ponto **q**, então ela apresenta um ponto de máximo local.

A alternativa D está correta.

O teorema que relaciona a diferenciabilidade e continuidade afirma que, se uma função for diferenciável em um ponto, a função é contínua neste ponto, ou, se a função for descontínua no ponto, ela não é derivável neste ponto. Assim, a alternativa correta é a da letra D.

A letra A é falsa, pois existem funções que não têm derivada no ponto, mas são contínuas nesse ponto. São as funções cujos limites laterais da derivada são diferentes (forma do gráfico em bico).

A letra B é falsa, pois existem funções que são contínuas no ponto, mas não existe derivada. São as funções cujos limites laterais da derivada são diferentes (forma do gráfico em bico).

A letra C é falsa, pois se a função for derivável no ponto, obrigatoriamente ela tem que ser contínua no ponto.

Questão 6

Seja f a função de R em R definida por <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>f</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mrow data-mjx-texclass="INNER">
<mo data-mjx-texclass="OPEN">{</mo>
<mtable columnalign="left" columnspacing="1em" rowspacing="4pt">
<mtr>
<mtd>
<mn>4</mn>
<mi>x</mi>
<mo>+</mo>
<mn>4</mn>
<mo>,</mo>
<mi>x</mi>
<mo>></mo>
<mn>1</mn>
</mtd>
</mtr>
<mtr>
<mtd>
<mn>2</mn>
<msup>
<mi>x</mi>
<mn>2</mn>
</msup>
<mo>+</mo>
<mn>2</mn>
<mo>,</mo>
<mi>x</mi>
<mo>≤</mo>
<mn>1</mn>
</mtd>
</mtr>
</mtable>
<mo data-mjx-texclass="CLOSE" fence="true" stretchy="true" symmetric="true"></mo>
</mrow>
</math>, assinale a opção correta em relação à existência da derivada de f no ponto de abscissa $x = 1$.

A

Existe porque as derivadas laterais em $x = 1$ são iguais.

B

Não existe porque a função não é contínua em $x = 1$.

C

Existe porque a função f é contínua em $x = 1$.

D

Não existe porque as derivadas laterais em $x = 1$ são diferentes.

E

A função f não é definida em $x = 1$, logo não pode existir derivada de f em $x = 1$.

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

Determinado experimento laboratorial criou uma população de bactérias. A quantidade de bactérias, em milhões, para o instante de tempo t, medido em horas, foi modelada como $B(t) = -t^2 + 4t + 6, t \geq 0.$ O experimento ocorrerá de $0 \leq t \leq 5.$

Determine:

a) Para que instantes a taxa de crescimento das bactérias será positiva.

b) Para que instantes a taxa de crescimento das bactérias será negativa.

c) Para que instantes a taxa de crescimento das bactérias será nula.

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

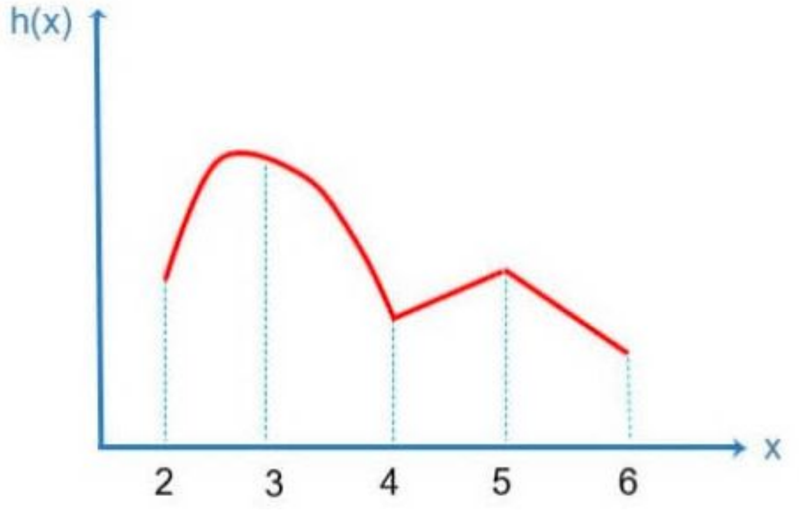
Verificando o aprendizado

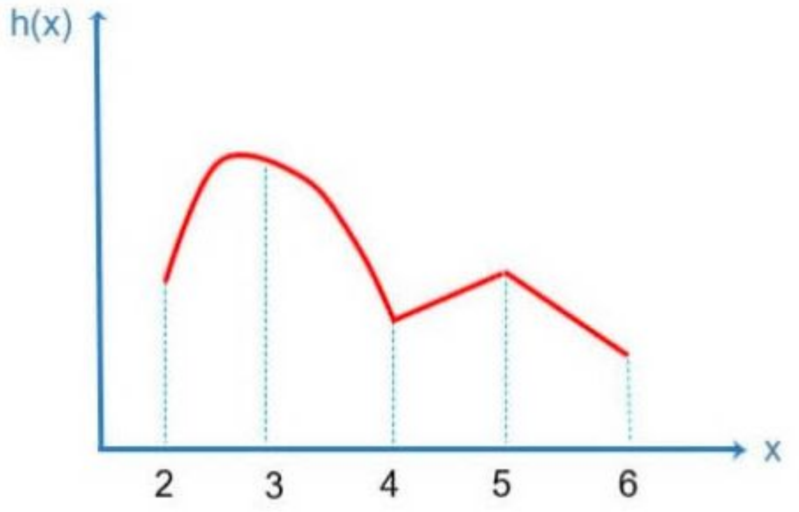
Questão 1

Questão 1

Analise o gráfico e marque a alternativa que apresenta os pontos entre (2,6) onde a derivada de h(x) não existe.

Analise o gráfico e marque a alternativa que apresenta os pontos entre (2,6) onde a derivada de h(x) não existe.





A

Apenas no $x = 4.$

B

$x = 3,$ $x = 4$ e $x = 5.$

C

Apenas $x = 5.$

D

$x = 4$ e $x = 5.$

E

$x = 2$ e $x = 6$

✓

A alternativa D está correta.

Você entendeu o conceito da abordagem analítica da derivada de uma função. A derivada, nos pontos interiores do domínio, não existirá onde os limites laterais previstos na definição forem diferentes. Isto é, a reta tangente tirada para quando se aproximar pela esquerda vai ser diferente quando se aproximar pela direita. É o que foi denominado de formar um bico. Dessa forma, não existirá derivada nos pontos $x = 4$ e $x = 5.$

A

Apenas no $x = 4.$

B

$x = 3,$ $x = 4$ e $x = 5.$

C

Apenas $x = 5.$

D

$x = 4$ e $x = 5.$

E

$x = 2$ e $x = 6$

✓

A alternativa D está correta.

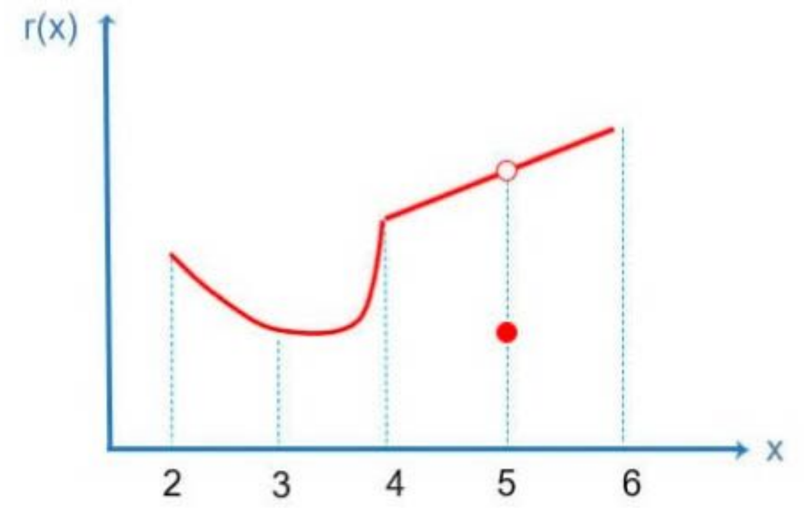
Você entendeu o conceito da abordagem analítica da derivada de uma função. A derivada, nos pontos interiores do domínio, não existirá onde os limites laterais previstos na definição forem diferentes. Isto é, a reta tangente tirada para quando se aproximar pela esquerda vai ser diferente quando se aproximar pela direita. É o que foi denominado de formar um bico. Dessa forma, não existirá derivada nos pontos $x = 4$ e $x = 5.$

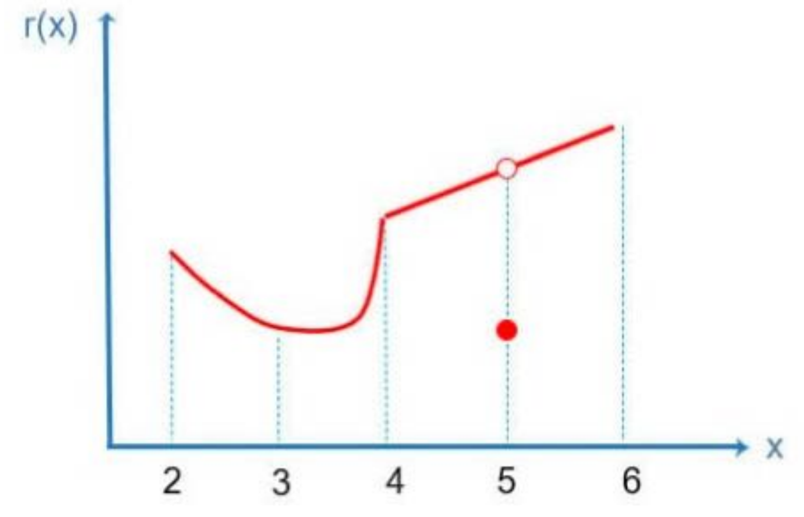
Questão 2

Questão 2

Analise o gráfico da função $r(x)$ e marque a alternativa que apresenta a afirmativa correta:

Analise o gráfico da função $r(x)$ e marque a alternativa que apresenta a afirmativa correta:





A

Não existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 4,$ pois a função é descontínua nesse ponto.

B

Não existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 5,$ pois a função é descontínua nesse ponto.

C

Existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 4,$ pois a função é contínua nesse ponto.

D

Existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 5,$ pois, apesar de a função ser descontínua nesse ponto, os limites laterais são iguais.

E

Não existe derivada de $r(x)$ no ponto $x = 3,$ pois a função é decrescente.

A alternativa B está correta.

Você entendeu o conceito da relação entre diferenciabilidade e continuidade. A continuidade da função em um ponto é condição necessária, mas não suficiente para a função ser derivável no ponto. Assim, para $x = 5,$ onde a função é descontinua, não pode existir a derivada. Nos pontos onde a função é contínua, pode não haver a derivada se os limites laterais da definição da derivada forem diferentes, que é o caso para $x = 4.$

A

Não existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 4,$ pois a função é descontínua nesse ponto.

B

Não existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 5,$ pois a função é descontínua nesse ponto.

C

Existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 4,$ pois a função é contínua nesse ponto.

D

Existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 5,$ pois, apesar de a função ser descontínua nesse ponto, os limites laterais são iguais.

E

Não existe derivada de $r(x)$ no ponto $x = 3,$ pois a função é decrescente.

A alternativa B está correta.

Você entendeu o conceito da relação entre diferenciabilidade e continuidade. A continuidade da função em um ponto é condição necessária, mas não suficiente para a função ser derivável no ponto. Assim, para $x = 5,$ onde a função é descontinua, não pode existir a derivada. Nos pontos onde a função é contínua, pode não haver a derivada se os limites laterais da definição da derivada forem diferentes, que é o caso para $x = 4.$

Derivada: visão geométrica

Neste vídeo, você vai compreender conceitos essenciais sobre derivadas, abordando duas perspectivas fundamentais: a inclinação da reta tangente e a taxa de variação.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Abordagem gráfica da Derivada de uma Função Real

Graficamente, pode ser verificada a interpretação da derivada como uma taxa de variação instantânea ou como a inclinação da reta tangente à função em um ponto.

A derivada de uma função real em um ponto q será a taxa de variação instantânea dessa função no ponto, como também será o valor do coeficiente angular da reta tangente à função nesse ponto. Portanto, pela abordagem gráfica, podemos afirmar o seguinte:

Derivada positiva

A derivada vai ser positiva nos pontos onde a reta tangente for crescente ou quando a taxa instantânea for positiva.

Derivada negativa

A derivada vai ser negativa nos pontos onde a reta tangente for decrescente ou quando a taxa instantânea for negativa.

Derivada nula

A derivada será nula se a tangente no ponto for horizontal, representando uma taxa instantânea nula.

Se a derivada representa uma taxa de variação instantânea, então a derivada de uma função constante, isto é, $f(x) = k, k$ real, será nula em todo seu domínio.

Exemplo

Considere a função real de R em R definida por: $y = f(x) = x^2$

1. Mostre que a taxa de variação média entre os pontos de abscissa $x = 2$ e $x = 2 + h$, em que h é um número real diferente de zero, é dada por $V = h + 4$.

2. Perceba que, se imaginarmos h um número real tão pequeno quanto queiramos, a taxa média de variação se aproxima de $V = 4$, que nada mais é que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 2$. Dito de outra forma, é a taxa de variação instantânea no ponto de abscissa $x = 2$.

3. Esboce o gráfico de f ou use algum aplicativo gráfico para visualizá-lo.

Solução

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Abordagem analítica da Derivada de uma Função Real

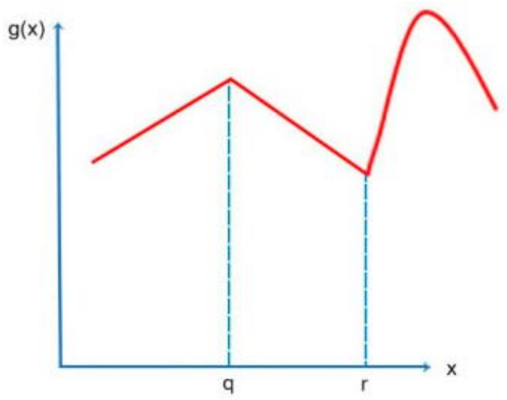
Analiticamente, transforma-se essa interpretação em uma equação que permite a determinação da derivada por meio do cálculo de um limite.

No item anterior, foi vista a definição da função derivada através de uma abordagem gráfica. A derivada de uma função em um ponto foi interpretada como a inclinação da reta tangente ou como a taxa de variação instantânea da função no ponto analisado. Agora, podemos definir a derivada analiticamente. Ressalta-se que a derivada de $f(x)$ também é uma função real, denominada de derivada de $f(x)$, como notação $f'(x)$.

Atenção: Sejam $f(x)$ uma função e um ponto q do seu domínio. A derivada da função $f(x)$, no ponto q, é definida por:

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{x-q}$$

Se o limite acima existir e for finito, a função será derivável ou diferenciável em q e terá valor igual ao do limite. Recorde que o limite vai existir quando os dois limites laterais existirem e forem iguais.



Exemplo de função contínua, em que não existe limite no ponto "q" e no ponto “r”

Se o limite à esquerda e o limite à direita apresentarem valores diferentes, quando x tende q, não existirá a derivada de $f(x)$ em q. Isso significa que, quando x tende ao ponto q, por valores superiores ou inferiores, vai apresentar duas taxas instantâneas ou duas inclinações da reta tangente diferentes, não sendo possível portanto definir-se uma derivada. Na prática, dizemos que a função forma um bico. Veja um exemplo no gráfico. A função $g(x)$ não é derivável em $x = q$ e $x = r$.

Um ponto importante é que só pode ser calculada a derivada de uma função em um ponto do seu domínio, diferentemente com o que acontecia com o limite.

Intervalo aberto

Analisamos a derivada de uma função em um ponto, mas uma função será derivável em um intervalo aberto (a , b) se for derivável em todos os pontos interiores desse intervalo. Para os pontos extremos do domínio de uma função, não há como definir a derivada, pois não podemos montar os dois limites laterais. Assim, usamos o conceito de derivada à direita ou à esquerda, utilizando apenas um dos limites laterais.

Intervalo fechado

Para o caso de um intervalo fechado $[a, b]$, a função para ser derivável deverá atender aos seguintes requisitos: ser derivável em todo interior de (a, b) ; existir a derivada à direita para o extremo inferior a: $f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; existir a derivada à esquerda para o extremo superior b: $f'(b) = \lim_{x \to b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$.

Outras notações

Além da notação apresentada, a derivada de $f(x)$ em relação a sua variável independente x pode ser representada por outras notações.

A notação usual para a função derivada de uma função f é f' ', ou seja usamos a mesma letra da função e lemos ' f linha'. Mas a interpretação da derivada como taxa de variação propicia uma notação que enfatiza o fato de a derivada ser a taxa instantânea de variação. Escrevemos $f' = \frac{df}{dx}$, em que df e dx sugerem as variações Δf e Δx da função e da variável x , quando a variação Δx é próxima a zero.

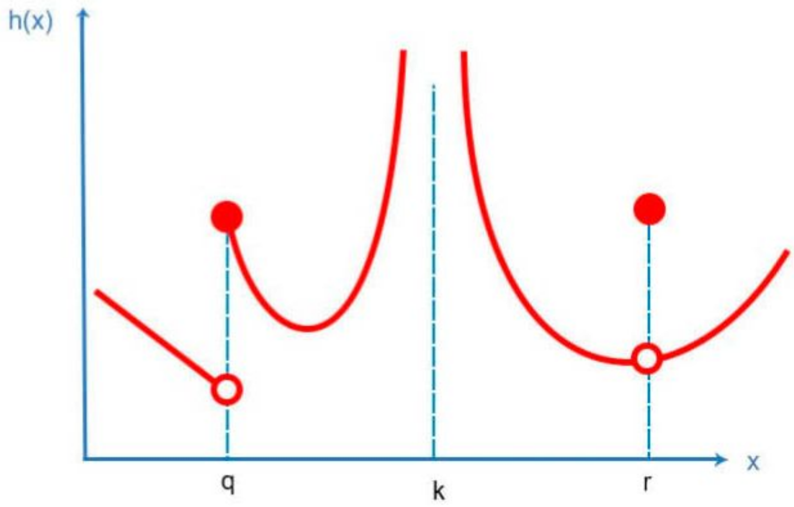
Diferenciabilidade e continuidade

Um teorema importantíssimo no cálculo diferencial é o que relaciona a diferenciabilidade de uma função com a sua continuidade.

> Teorema: se uma função $f(x)$ é derivável para $x = q$, então a função é contínua para $x = q$.

Um cuidado deve ser tomado: nada podemos afirmar sobre a volta desse teorema, isto é, se uma função for contínua em $x = q$ ela pode ou não ser derivável em $x = q$. Por exemplo, no item anterior, as funções $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas em $x = q$, porém a derivada de $f(x)$ em q existe e a derivada de $g(x)$ em q não existe.

Uma consequência direta do teorema é que se a função não for contínua em $x = q$, então a função não é derivável em $x = q$. Dizemos que ser contínua em um ponto é uma **condição necessária, mas não suficiente** para ser derivável no ponto.



Exemplo de função não derivável em dois pontos

Em outras palavras, para existir a derivada para $x = q$, além da função ser definida em $x = q$, ela deve ser obrigatoriamente contínua em $x = q$ e, mesmo assim, pode haver casos nos quais a derivada não existirá, vide item anterior" Retornando à análise gráfica", temos aqui outra possibilidade de a derivada não existir, além de formar um bico apresentado no item anterior. Caso apresente uma descontinuidade em um ponto, a derivada não existirá. Os gráficos abaixo apresentam exemplos da não existência da derivada em $x = q$, $x = k$ e $x = r$, pois a função é descontínua nestes pontos.

Demonstração do Teorema entre Diferenciabilidade e Continuidade

Teorema:

Se $f(x)$ for derivável no ponto q, então $f(x)$ será contnnu no ponto p.

Demonstração:

Adotando a hipótese do teorema que $f(x)$ é derivável em $x = q$.

Assim, $f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{x-q}$ existe

Mas, $f(x) - f(p) = \frac{f(x)-f(q)}{(x-q)}(x-q)$, para $x \neq q$

Então,

$\lim_{x \to q} f(x) - f(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{(x-q)}(x-q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{(x-q)} \lim_{x \to q}(x-q)$

Mas, $\lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{(x-q)} = f'(q)$ que é um número real e

Assim, então,

$$\lim_{x \to q} f(x) - f(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{(x-q)} \lim_{x \to q}(x-q) = f'(q) \cdot 0 = 0$$
$$\lim_{x \to q} f(x) - f(q) = 0 \rightarrow \lim_{x \to q} f(x) = f(q)$$

Provando que $f(x)$ é contínua para quando x tende a q.

Mão na massa

Questão 1

Em determinada cidade, foi modelada a variação da temperatura, medida em °C, com o tempo, medido em minutos, após a meia-noite. A função T(t) define essa dependência para $t \geq 0$. Qual o significado da função derivada T'(60)?

A

T'(60) representa a taxa de variação da temperatura a 1 hora da madrugada.

B

T'(60) representa a temperatura a 1 hora da madrugada.

C

T'(60) representa a hora da madrugada quando a temperatura alcança 600°C.

D

T'(60) representa a soma das temperatura de meia-noite até 1 hora da madrugada.

E

T'(60) representa a máxima temperatura de meia-noite até 1h da madrugada.

A alternativa A está correta.

Se T(t) mede a temperatura com o tempo, a função T'(t) medirá como a temperatura irá variar com a variação do tempo em determinado horário após a meia-noite. Em outras palavras, T'(t) medirá a taxa de variação instantânea da temperatura T(°C) para um instante t(min) medido após a meia-noite. T'(60) representa a taxa de variação da temperatura a 1 hora da madrugada, isto é, 60min após a meia-noite. Vamos supor que T'(60) tenha valor de – 0,5. Então, quando estivermos no horário de 1h da madrugada, a temperatura irá decrescer 0,5°C por minuto. Logo, a alternativa é a letra A.

Questão 2

Marque a alternativa verdadeira quanto ao conceito da abordagem gráfica da função derivada da função h(x) em um ponto p do seu domínio:

A

Representa a taxa de variação média de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

B

Representa a taxa de variação instantânea de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

C

Representa a taxa de variação instantânea de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de h(x) no ponto **p.**

D

Representa a taxa de variação média de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

E

Representa a taxa de variação máxima de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

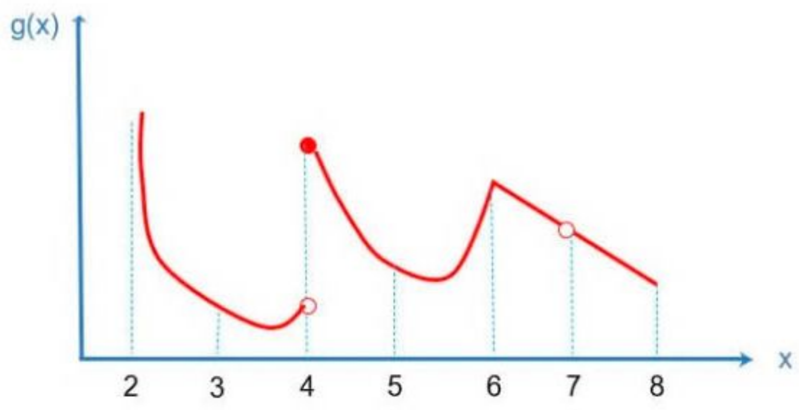
A alternativa C está correta.

Conforme definido na abordagem gráfica da derivada, esta representa a taxa de variação instantânea da função no ponto analisado. Além disso, ela permite o cálculo da inclinação da reta tangente no ponto, pois a derivada terá o valor do coeficiente angular da reta tangente.Assim, a alternativa verdadeira é a letra C.

As demais associam a derivada à taxa média e coeficiente angular da reta secante, conceito não verdadeiro.

Questão 3

Verifique o gráfico abaixo e marque a alternativa que apresenta apenas os pontos onde a função g(x) não é derivável.



A

3, 4 e 7.

B

4, 6 e 7.

C

4, 5 e 6.

D

4, 5 e 7.

E

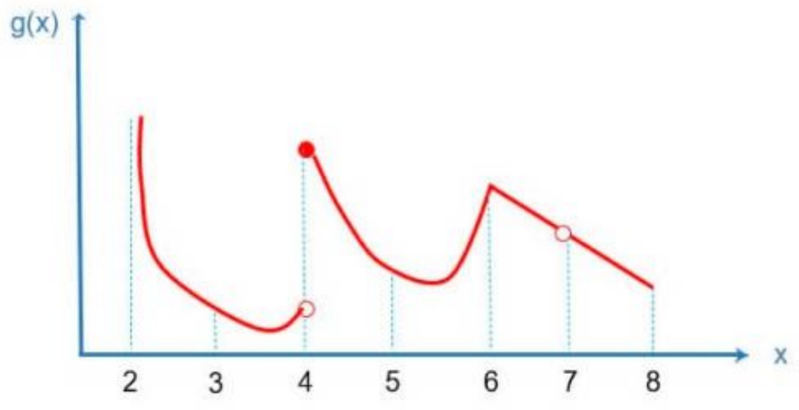
3, 5 e 7.

A alternativa B está correta.

Como pode ser verificado pelo gráfico, no ponto x=6 não existirá derivada, pois os limites laterais da taxa de variação (ou a tangente ao gráfico) quando x tende a 6 serão diferentes para aproximação por valores inferiores e superiores. Desta forma, não existirá derivada em x=6. Para os pontos x=4 e x=7, existe uma descontinuidade da função, portanto não existirá a derivada.Nos demais pontos, pertencentes ao intervalo (2 , 8), a derivada existe, sendo o caso para x=3 e x=5. Assim, a única alternativa que apresenta apenas pontos onde não existe a derivada é a letra B.

Questão 4

Verifique o gráfico a seguir e marque a alternativa que apresenta um intervalo em que a função g(x) é derivável.



A

(2 , 8)

B

(4 , 6)

C

[4 , 7)

D

[3 , 5]

E

[4 , 7]

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 5

Marque a alternativa verdadeira quanto à relação entre diferenciabilidade e continuidade.

A

Se a função não apresenta derivada em um ponto **q**, então ela é descontínua no ponto **q**.

B

Se a função é contínua em um ponto **q**, então ela é derivável no ponto **q**.

C

Se a função apresenta derivada em um ponto **q**, então ela pode ser contínua ou não no ponto **q**.

D

Se a função não for contínua em um ponto **q**, então ela não é derivável no ponto **q**.

E

Se a função for contínua em um ponto **q**, então ela apresenta um ponto de máximo local.

A alternativa D está correta.

O teorema que relaciona a diferenciabilidade e continuidade afirma que, se uma função for diferenciável em um ponto, a função é contínua neste ponto, ou, se a função for descontínua no ponto, ela não é derivável neste ponto. Assim, a alternativa correta é a da letra D.

A letra A é falsa, pois existem funções que não têm derivada no ponto, mas são contínuas nesse ponto. São as funções cujos limites laterais da derivada são diferentes (forma do gráfico em bico).

A letra B é falsa, pois existem funções que são contínuas no ponto, mas não existe derivada. São as funções cujos limites laterais da derivada são diferentes (forma do gráfico em bico).

A letra C é falsa, pois se a função for derivável no ponto, obrigatoriamente ela tem que ser contínua no ponto.

Questão 6

Seja f a função de R em R definida por <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>f</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mrow data-mjx-texclass="INNER">
<mo data-mjx-texclass="OPEN">{</mo>
<mtable columnalign="left" columnspacing="1em" rowspacing="4pt">
<mtr>
<mtd>
<mn>4</mn>
<mi>x</mi>
<mo>+</mo>
<mn>4</mn>
<mo>,</mo>
<mi>x</mi>
<mo>></mo>
<mn>1</mn>
</mtd>
</mtr>
<mtr>
<mtd>
<mn>2</mn>
<msup>
<mi>x</mi>
<mn>2</mn>
</msup>
<mo>+</mo>
<mn>2</mn>
<mo>,</mo>
<mi>x</mi>
<mo>≤</mo>
<mn>1</mn>
</mtd>
</mtr>
</mtable>
<mo data-mjx-texclass="CLOSE" fence="true" stretchy="true" symmetric="true"></mo>
</mrow>
</math>, assinale a opção correta em relação à existência da derivada de f no ponto de abscissa $x = 1$.

A

Existe porque as derivadas laterais em $x = 1$ são iguais.

B

Não existe porque a função não é contínua em $x = 1$.

C

Existe porque a função f é contínua em $x = 1$.

D

Não existe porque as derivadas laterais em $x = 1$ são diferentes.

E

A função f não é definida em $x = 1$, logo não pode existir derivada de f em $x = 1$.

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

Determinado experimento laboratorial criou uma população de bactérias. A quantidade de bactérias, em milhões, para o instante de tempo t, medido em horas, foi modelada como $B(t) = -t^2 + 4t + 6, t \geq 0.$ O experimento ocorrerá de $0 \leq t \leq 5.$

Determine:

a) Para que instantes a taxa de crescimento das bactérias será positiva.

b) Para que instantes a taxa de crescimento das bactérias será negativa.

c) Para que instantes a taxa de crescimento das bactérias será nula.

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

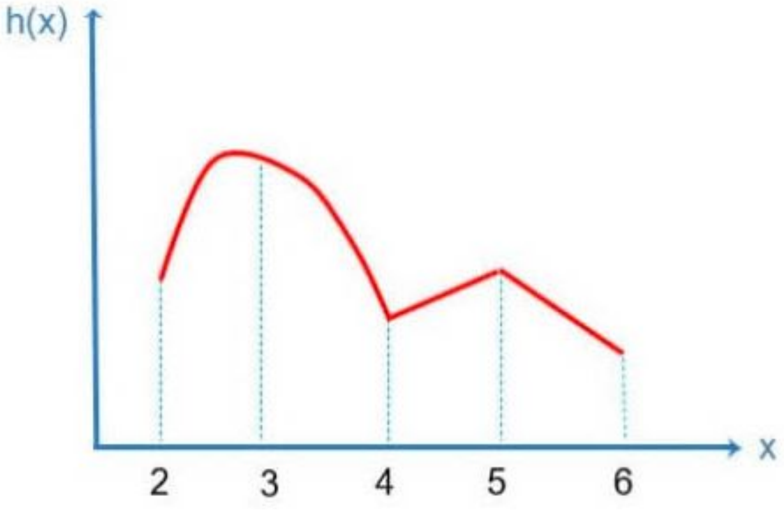
Verificando o aprendizado

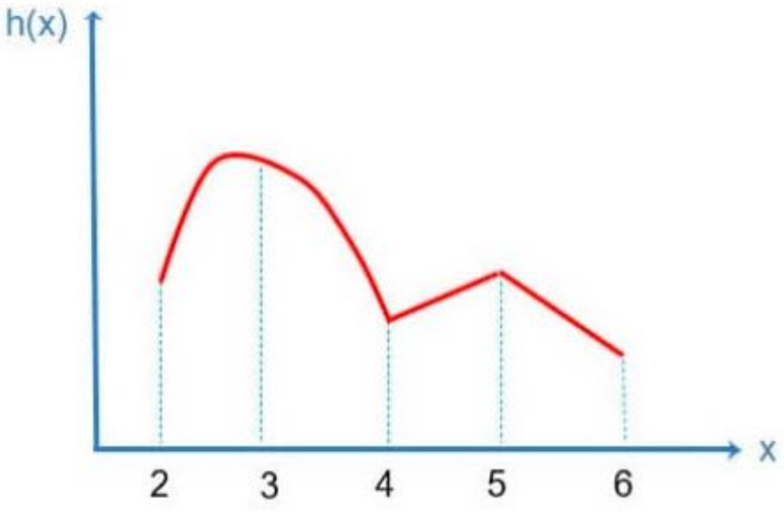
Questão 1

Questão 1

Analise o gráfico e marque a alternativa que apresenta os pontos entre (2,6) onde a derivada de h(x) não existe.

Analise o gráfico e marque a alternativa que apresenta os pontos entre (2,6) onde a derivada de h(x) não existe.





A

Apenas no $x = 4.$

B

$x = 3,$ $x = 4$ e $x = 5.$

C

Apenas $x = 5.$

D

$x = 4$ e $x = 5.$

E

$x = 2$ e $x = 6$

A alternativa D está correta.

Você entendeu o conceito da abordagem analítica da derivada de uma função. A derivada, nos pontos interiores do domínio, não existirá onde os limites laterais previstos na definição forem diferentes. Isto é, a reta tangente tirada para quando se aproximar pela esquerda vai ser diferente quando se aproximar pela direita. É o que foi denominado de formar um bico. Dessa forma, não existirá derivada nos pontos $x = 4$ e $x = 5.$

A

Apenas no $x = 4.$

B

$x = 3,$ $x = 4$ e $x = 5.$

C

Apenas $x = 5.$

D

$x = 4$ e $x = 5.$

E

$x = 2$ e $x = 6$

A alternativa D está correta.

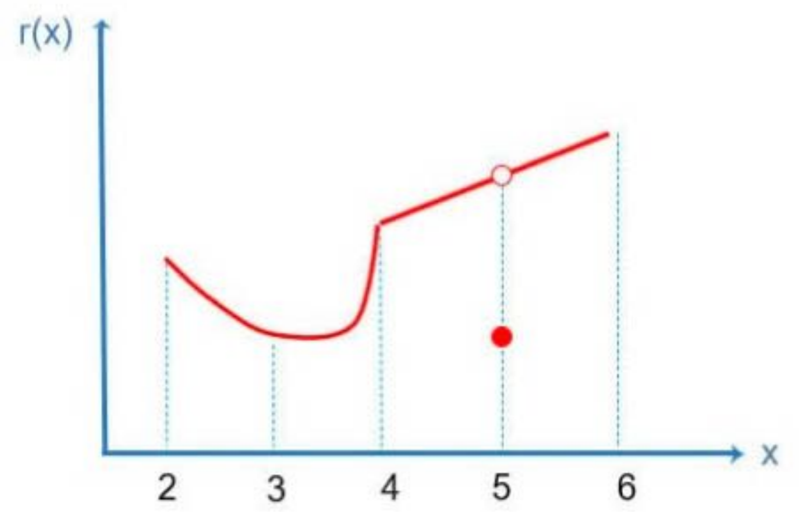
Você entendeu o conceito da abordagem analítica da derivada de uma função. A derivada, nos pontos interiores do domínio, não existirá onde os limites laterais previstos na definição forem diferentes. Isto é, a reta tangente tirada para quando se aproximar pela esquerda vai ser diferente quando se aproximar pela direita. É o que foi denominado de formar um bico. Dessa forma, não existirá derivada nos pontos $x = 4$ e $x = 5.$

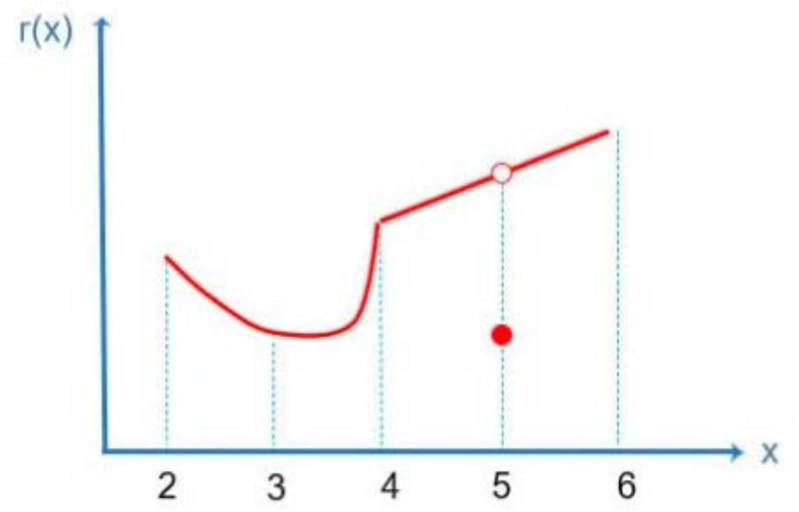
Questão 2

Questão 2

Analise o gráfico da função $r(x)$ e marque a alternativa que apresenta a afirmativa correta:

Analise o gráfico da função $r(x)$ e marque a alternativa que apresenta a afirmativa correta:





A

Não existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 4,$ pois a função é descontínua nesse ponto.

B

Não existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 5,$ pois a função é descontínua nesse ponto.

C

Existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 4,$ pois a função é contínua nesse ponto.

D

Existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 5,$ pois, apesar de a função ser descontínua nesse ponto, os limites laterais são iguais.

E

Não existe derivada de $r(x)$ no ponto $x = 3,$ pois a função é decrescente.

A alternativa B está correta.

Você entendeu o conceito da relação entre diferenciabilidade e continuidade. A continuidade da função em um ponto é condição necessária, mas não suficiente para a função ser derivável no ponto. Assim, para $x = 5,$ onde a função é descontinua, não pode existir a derivada. Nos pontos onde a função é contínua, pode não haver a derivada se os limites laterais da definição da derivada forem diferentes, que é o caso para $x = 4.$

A

Não existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 4,$ pois a função é descontínua nesse ponto.

B

Não existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 5,$ pois a função é descontínua nesse ponto.

C

Existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 4,$ pois a função é contínua nesse ponto.

D

Existirá a derivada de $r(x)$ no ponto $x = 5,$ pois, apesar de a função ser descontínua nesse ponto, os limites laterais são iguais.

E

Não existe derivada de $r(x)$ no ponto $x = 3,$ pois a função é decrescente.

A alternativa B está correta.

Você entendeu o conceito da relação entre diferenciabilidade e continuidade. A continuidade da função em um ponto é condição necessária, mas não suficiente para a função ser derivável no ponto. Assim, para $x = 5,$ onde a função é descontinua, não pode existir a derivada. Nos pontos onde a função é contínua, pode não haver a derivada se os limites laterais da definição da derivada forem diferentes, que é o caso para $x = 4.$

Calculando a derivada de funções usuais

Acompanhe neste vídeo as técnicas de derivação, essenciais para calcular a taxa de variação instantânea de uma função, e domine as regras e aplicações fundamentais desse importante conceito matemático.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Cálculo da derivada pelo limite

A determinação da derivada de uma função diretamente por meio do limite de sua definição é uma possibilidade, apesar de ser necessária uma grande habilidade no cálculo do limite.

A definição nos apresenta:

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q}$$

Seguindo a definição, para se calcular a derivada de $f(x)$ em um ponto q, inicialmente deve-se montar a taxa média da função entre o ponto genérico x e o ponto q, $\frac{f(x)-f(q)}{x-q}$. Posteriormente, deve-se calcular o valor que essa taxa vai tender para quando a variável x tender ao ponto desejado q. Se esse limite existir e for finito, a derivada existe.

Existe outra equação equivalente à primeira para se representar esta taxa de variação. Essa nova equação é originada pela substituição de $(x - q)$ por h. Assim, quando x tende q, h tenderá a zero.

Essa segunda equação é mais usada quando se deseja obter a equação genérica da derivada, isto é, uma equação que vale para todo x:

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q} = \lim_{h \to 0} \frac{f(q + h) - f(q)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Exemplo

Determine a função derivada da função $f(x) = 2x^3$ em um ponto genérico e para x=1 através da definição da derivada.

Solução: Usando a definição de derivada

Confira neste vídeo a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Regras de derivação

As primeiras regras tratam de operações matemáticas em geral. Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis e uma constante real k . Assim:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x):$ a derivada da soma é a soma da derivada.

- $(kf)'(x) = kf'(x):$ a derivada de uma função multiplicada por uma constante é a constante que multiplica a derivada.

- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x):$ regra do produto.

- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, quando $g(x) \neq 0:$ regra do quociente.

Derivada das principais funções

Após as regras gerais, podemos, por meio da definição de derivada, obter as regras de derivação para uma lista de funções. As funções principais, usadas no cálculo diferencial e integral, já tiveram suas derivadas obtidas, gerando expressões que podem ser utilizadas de forma direta. Observe!

Após as regras gerais, podemos, por meio da definição de derivada, obter as regras de derivação para uma lista de funções. As funções principais, usadas no cálculo diferencial e integral, já tiveram suas derivadas obtidas, gerando expressões que podem ser utilizadas de forma direta. Observe!

$f(x) = k, k \text{ real } \rightarrow f'(x) = 0$	$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$	$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}, xgt; 0$
$amp;; f(x) = a^x, a$ $gt; 0 \rightarrow f'(x)$ $amp;; = \ln$ $a \cdot a^x, a$ $gt; 0$	$f(x) = \log_a x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, xgt; 0$
$f(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f'(x) = \cos x$	$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x \rightarrow f'(x) = \sec^2 x$	$f(x) = \operatorname{ctg} x \rightarrow f'(x) = -\operatorname{cossec}^2 x$

$f(x) = \sec x \to f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$	$f(x) = \operatorname{cossec} x amp;; \to f'(x) \quad amp;; = -\operatorname{cossec} x \operatorname{ctg} x$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x \to f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos x \to f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x \to f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \operatorname{arcctg} x \to f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Principais derivadas
Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

$f(x) = k, k \text{ real } \to f'(x) = 0$	$f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$	$f(x) = \ln x \to f'(x) = \frac{1}{x}, x gt; 0$
$amp;; f(x) = a^x, a$ $gt; 0 \to f'(x)$ $amp;; = \ln$ $a \cdot a^x, a$ $gt; 0$	$f(x) = \log_a x \to f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, x gt; 0$
$f(x) = \operatorname{sen} x \to f'(x) = \cos x$	$f(x) = \cos x \to f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x \to f'(x) = \sec^2 x$	$f(x) = \operatorname{ctg} x \to f'(x) = -\operatorname{cossec}^2 x$
$f(x) = \sec x \to f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x$	$f(x) = \operatorname{cossec} x amp;; \to f'(x) \quad amp;; = -\operatorname{cossec} x \operatorname{ctg} x$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x \to f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos x \to f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x \to f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \operatorname{arcctg} x \to f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Principais derivadas
Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Exemplo 1

Exemplo 1

Determine a derivada da função definida por $f(x) = 4x\sqrt{x} + x^2 \cdot \operatorname{sen} x$ para $x > 0$.

Determine a derivada da função definida por $f(x) = 4x\sqrt{x} + x^2 \cdot \operatorname{sen} x$ para $x > 0$.

Solução

Note que <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <mi>f</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
</math> pode ser entendida como a soma de duas funções <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msub>
  <mi>f</mi>
  <mn>1</mn>
 </msub>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <msqrt>
  <mi>x</mi>
 </msqrt>
 <mi>e</mi>
 <mstyle scriptlevel="0">
  <mspace width="1em"></mspace>
 </mstyle>
 <msub>
  <mi>f</mi>
  <mn>2</mn>
 </msub>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <msup>
  <mi>x</mi>
  <mn>2</mn>
 </msup>
 <mo>. </mo>
 <mi>sen</mi>
 <mi>x</mi>
</math>

Vejamos:

$$f_1(x) = 4x \cdot \sqrt{x} = 4x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 4x^{3/2}$$

Como f_1 é uma constante vezes uma função, temos:

$$f_1'(x) = \left(4x^{\frac{3}{2}}\right)' = 4\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$f_1'(x) = 4\left[\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1}\right]$$
$$f_1'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x}$$

Note que f_2 é o produto de duas funções. Logo:

$$f_2'(x) = \left(x^2 \cdot \operatorname{sen} x\right)' \qquad \begin{aligned} f_2'(x) &= \left(x^2\right)' \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot (\operatorname{sen} x)' \\ f_2'(x) &= 2x^{2-1} \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot (\cos x) \\ f_2'(x) &= 2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot \cos x \end{aligned}$$

Como f é a soma de f_1 e f_2 obtemos, então:

$$f'(x) = (f_1(x) + f_2(x))'$$
$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$$
$$f'(x) = 6\sqrt{x} + \left(2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cos x\right)$$

Solução

Note que <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>f</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
</math> pode ser entendida como a soma de duas funções <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msub>
<mi>f</mi>
<mn>1</mn>
</msub>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mn>4</mn>
<mi>x</mi>
<msqrt>
<mi>x</mi>
</msqrt>
<mi>e</mi>
<mstyle scriptlevel="0">
<mspace width="1em"></mspace>
</mstyle>
<msub>
<mi>f</mi>
<mn>2</mn>
</msub>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mn>2</mn>
</msup>
<mo>. </mo>
<mi>sen</mi>
<mi>x</mi>
</math>

Vejamos:

$$f_1(x) = 4x \cdot \sqrt{x} = 4x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 4x^{3/2}$$

Como f_1 é uma constante vezes uma função, temos:

$$f_1'(x) = \left(4x^{\frac{3}{2}}\right)' = 4\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$f_1'(x) = 4\left[\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1}\right]$$
$$f_1'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x}$$

Note que f_2 é o produto de duas funções. Logo:

$$f_2'(x) = \left(x^2 \cdot \operatorname{sen} x\right)' \qquad \begin{aligned} f_2'(x) &= \left(x^2\right)' \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot (\operatorname{sen} x)' \\ f_2'(x) &= 2x^{2-1} \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot (\cos x) \\ f_2'(x) &= 2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot \cos x \end{aligned}$$

Como f é a soma de f_1 e f_2 obtemos, então:

$$f'(x) = (f_1(x) + f_2(x)'$$
$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$$
$$f'(x) = 6\sqrt{x} + \left(2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cos x\right)$$

Exemplo 2

Exemplo 2

Determine a derivada de $y = x^{4x}$.

Determine a derivada de $y = x^{4x}$.

Solução

A função <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <mi>y</mi>
 <mo>=</mo>
 <mi>f</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <msup>
   <mo stretchy="false">)</mo>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
     <mi>g</mi>
     <mo stretchy="false">(</mo>
     <mi>x</mi>
     <mo stretchy="false">)</mo>
   </mrow>
 </msup>
</math> com <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <mi>f</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">→</mo>
 <msup>
   <mi>f</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
     <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
   </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>1</mn>
</math> e <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <mi>g</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">→</mo>
 <msup>
   <mi>g</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
     <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
   </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>4.</mn>
</math>

Pela fórmula

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
 <msup>
   <mi>y</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
     <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
   </mrow>

```
 </msup>
 <mo>=</mo>
 <mrow data-mjx-texclass="INNER">
   <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
   <mn>4</mn>
   <mi>ln</mi>
   <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
   <mi>x</mi>
   <mo>+</mo>
   <mfrac>
     <mrow>
       <mn>4</mn>
       <mi>x</mi>
     </mrow>
     <mi>x</mi>
   </mfrac>
   <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
 </mrow>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>4</mn>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>1</mn>
 <mo>+</mo>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
</math>
```

Manipulando

```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mrow data-mjx-texclass="INNER">
   <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
```

```
  <mi>ln</mi>
  <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
  <msup>
   <mi>x</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
    <mn>4</mn>
    <mi>x</mi>
   </mrow>
  </msup>
  <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
 </mrow>
 <mo>=</mo>
 <msup>
  <mi>x</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mn>4</mn>
   <mi>x</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">→</mo>
 <msup>
  <mi>y</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo>=</mo>
 <mn>4</mn>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>1</mn>
 <mo>+</mo>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <msup>
  <mi>x</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mn>4</mn>
   <mi>x</mi>
  </mrow>
 </msup>
</math>
```

Solução

A função <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <mi>y</mi>
 <mo>=</mo>
 <mi>f</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <msup>
  <mo stretchy="false">)</mo>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi>g</mi>
   <mo stretchy="false">(</mo>
   <mi>x</mi>
   <mo stretchy="false">)</mo>
  </mrow>
 </msup>
</math> com <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <mi>f</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">→</mo>
 <msup>
  <mi>f</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>1</mn>
</math> e <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <mi>g</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">→</mo>
 <msup>
  <mi>g</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>4.</mn>
</math>

Pela fórmula

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
 <msup>
  <mi>y</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>

```
 </msup>
 <mo>=</mo>
 <mrow data-mjx-texclass="INNER">
  <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
  <mn>4</mn>
  <mi>ln</mi>
  <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
  <mi>x</mi>
  <mo>+</mo>
  <mfrac>
   <mrow>
    <mn>4</mn>
    <mi>x</mi>
   </mrow>
   <mi>x</mi>
  </mfrac>
  <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
 </mrow>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>4</mn>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>1</mn>
 <mo>+</mo>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
</math>
```


Manipulando


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mrow data-mjx-texclass="INNER">
  <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
```

```
    <mi>ln</mi>
    <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
    <msup>
      <mi>x</mi>
      <mrow data-mjx-texclass="ORD">
        <mn>4</mn>
        <mi>x</mi>
      </mrow>
    </msup>
    <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
  </mrow>
  <mo>=</mo>
  <msup>
    <mi>x</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mn>4</mn>
      <mi>x</mi>
    </mrow>
  </msup>
  <mo stretchy="false">→</mo>
  <msup>
    <mi>y</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
    </mrow>
  </msup>
  <mo>=</mo>
  <mn>4</mn>
  <mo stretchy="false">(</mo>
  <mn>1</mn>
  <mo>+</mo>
  <mi>ln</mi>
  <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
  <mi>x</mi>
  <mo stretchy="false">)</mo>
  <msup>
    <mi>x</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mn>4</mn>
      <mi>x</mi>
    </mrow>
  </msup>
</math>
```


Mão na massa

Questão 1

Determine a derivada da função $h(x) = 3^x + 2e^x$, para $x = 0$

A

$2 + \ln 3$

B

$\ln 3$

C

$1 + \ln 2$

D

$3 + \ln 2$

E

3

A alternativa A está correta.

Usando as regras de derivação:

$h\prime(x) = (\ln 3)3^x + 2e^x$

Assim, $h\prime(0) = 3^0 \ln 3 + 2e^0 = \ln 3 + 2$.

Assim, a alternativa correta é a letra A.

Questão 2

Determine a equação da derivada da função $h(x) = x^2 \cos(x)M$

A

$2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x$

B

$2x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x$

C

$x^2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x$

D

$2 \cos x - x \operatorname{sen} x$

E

$2 \cos x - senx$

A alternativa A está correta.

Usando a regra do produto:

$h'(x) = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x + x^2(-\operatorname{sen} x) = 2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x$

Assim, a alternativa correta é a letra A.

Questão 3

Determine a derivada da função $g(x) = (x^2 + 1) \div x^3$, com $x \neq 0$, para $x = 2$ através das regras da derivação.

A

$\frac{7}{16}$

B

$-\frac{7}{16}$

C

$\frac{5}{16}$

D

$-\frac{5}{16}$

E

0

A alternativa B está correta.

Usando as regras de derivação relacionadas às operações matemáticas, temos:

Se $g(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)h(x) - f(x)h'(x)}{h^2(x)}$, onde $h(x) = x^3$ e $f(x) = x^2 + 1$

amp;; $g'(x) = \frac{2x x^3 - (x^2+1) 3x^2}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 - 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4 - 3x^2}{x^6} = -\frac{x^2+3}{x^4}$

amp;; $g'(2) = -\frac{x^2+3}{x^4} = -\frac{2^2+3}{2^4} = -\frac{7}{16}.$

Assim, a alternativa correta é a letra B.

Questão 4

Uma grandeza física $C(t)$ é definida como a taxa de variação instantânea da grandeza $A(t)$ pela variação do tempo. Sabendo que $A(t) = 2e^t + 3 \log t, tgt; 0$, determine a equação de $C(t)$.

A

$e^t + (3 \div \ln 10)$

B

$2e^t + (3 \div t)$

C

$2e^t + 3 \div (t \times \ln 10)$

D

$e^t \ln 2 - (1 \div t \ln 10)$

E

$(t \times \ln 2) - t$

A alternativa C está correta.

Se $C(t)$ é a taxa de variação de A(t) pelo tempo, então $C(t) = A'(t)$.

Usando as regras de derivação, temos:

$A(t) = 2e^t + 3\log t$

$A'(t) = 2e^t + \frac{3}{t}$

Assim, a alternativa correta é a letra C.

Questão 5

No ponto de abscissa igual a $x = \pi$, determine o coeficiente angular da reta tangente à função:

$g(x) = 4 \cdot \ln(x) + \cos(x) \cdot \text{sen}(x)$

A

$\frac{4}{\pi}$

B

$4 + \frac{4}{\pi}$

C

$1 + \frac{1}{\pi}$

D

$1 + \frac{4}{\pi}$

E

0

A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Determine a função derivada da função $f(x) = 3\sqrt{x}$, com $x \geq 0$, para $x = 1$, através do cálculo da derivada pelo limite da sua definição.

A

$3 \div 2$

B

$1 \div 2$

C

$5 \div 2$

D

$7 \div 2$

E

0

A alternativa A está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

O valor da temperatura de um forno (T), medido em ºC, depende da tensão elétrica de alimentação (V), medida em volts. A equação $T(V) = 40\ arctg\ (V) + 100$ representa este modelo. Determine qual a taxa de variação instantânea da variação da temperatura para quando V for igual 20 V.

Chave de resposta

Se a temperatura depende da tensão de entrada através da função $T(V) = 40\,\mathrm{arctg}\,V + 100$, então a sua taxa de variação instantânea da temperatura pela tensão será dada pela derivada de $T(V)$ .Usando as regras de derivação: $T\prime(V) = 40\frac{1}{1+V^2}$

Assim:


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
 <mi>Tr</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>20</mn>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>40</mn>
 <mfrac>
  <mn>1</mn>
  <mrow>
   <mn>1</mn>
   <mo>+</mo>
   <msup>
    <mn>20</mn>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
     <mn>2</mn>
    </mrow>
   </msup>
  </mrow>
 </mfrac>
 <mo>=</mo>
 <mfrac>
  <mn>40</mn>
  <mn>401</mn>
 </mfrac>
 <msup>
  <mstyle scriptlevel="0">
   <mspace width="0.278em"></mspace>
  </mstyle>
  <mi>o</mi>
 </msup>
 <mi>C</mi>
 <mrow data-mjx-texclass="ORD">
  <mo>/</mo>
 </mrow>
 <mi>V</mi>
</math>
```


Verificando o aprendizado

Questão 1

Determine a derivada da função $f(x) = (2x^2 + 1)\sqrt{x+1}$ para $x = 0$.

A

1

B

$2 \div 3$

C

$1 \div 2$

D

-1

E

0

A alternativa C está correta.

Você entendeu as regras de derivação!

Usando as regras de derivação, temos:

Questão 1

Determine a derivada da função $f(x) = (2x^2 + 1)\sqrt{x+1}$ para $x = 0$.

A

1

B

$2 \div 3$

C

$1 \div 2$

D

-1

E

0

A alternativa C está correta.

Você entendeu as regras de derivação!

Usando as regras de derivação, temos:

Questão 2

Determine a derivada da função $f(x) = \left(x^2 \ln x\right) \div (5 + \cos x)$, no ponto $x = \pi(pi)$

A

$\frac{\pi(1+2\ln\pi)}{4}$

B

$\frac{5+\ln\pi}{\pi^2}$

C

$\frac{\pi(1-2\ln\pi)}{2}$

D

$\frac{5+\ln\pi}{\pi^2+5}$

E

$2 + \mathrm{In}\,\pi$

A alternativa A está correta.

Você entendeu as regras de derivação das principais funções!

Usando as regras de derivação:

Questão 2

Determine a derivada da função $f(x) = \left(x^2 \ln x\right) \div (5 + \cos x)$, no ponto $x = \pi(pi)$

A

$\frac{\pi(1+2\ln\pi)}{4}$

B

$\frac{5+\ln\pi}{\pi^2}$

C

$\frac{\pi(1-2\ln\pi)}{2}$

D

$\frac{5+\ln\pi}{\pi^2+5}$

E

$2+\text{In}\,\pi$

A alternativa A está correta.

Você entendeu as regras de derivação das principais funções!

Usando as regras de derivação:

Vamos começar!

Neste vídeo, você entenderá mais sobre o conceito de derivada composta de funções e também verá alguns exemplos.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Derivada da função composta

A regra que permite o cálculo da derivada de uma função composta de funções reais é denominada de regra da cadeia. Esse nome vem do conceito que iremos realizar a derivada em uma sequência multiplicativa de derivadas, sendo o elo de uma cadeia.

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ e sua composta definida por $h(x) = f(g(x)) = fog(x)$.

O teorema nos diz que se $f(x)$ e $g(x)$ forem diferenciáveis, então $h(x)$ será diferenciável e sua derivada será calculada por: $h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$.

Por exemplo, seja a função $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2$.

Definindo a função $h(x)$ como sendo a composta de $f(x)$ com $g(x), h(x) = fog(x) = f(g(x))$.

Deseja-se calcular a derivada de $h(x)$. Assim: $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Como: $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = 2x$

Logo, $h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot 2x = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}, x \neq 0$

Atenção

Para usar essa regra, foi executado o cálculo de fora para dentro, em uma cadeia de cálculos. Em outras palavras, deriva inicialmente a função que está dentro da função e depois derivamos a função

Se analisarmos a derivada como uma taxa de variação de $h(x)$ em relação a x , então a taxa dependerá da taxa de variação de $f(x)$ em relação a $g(x)$ e de $g(x)$ em relação a x , por isso a derivada da composta é o produto das derivadas individuais aplicadas cada uma em sua variável de domínio.

As mesmas regras de derivação apresentadas para as principais funções, no módulo anterior, podem ser adaptadas agora para o caso de uma função composta. Por exemplo:

Se u é uma função na variável x , então valem as seguintes propriedades, em que $u' = u'(x)$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'(x)$$

$$[\operatorname{sen}(u)]' = (\cos u) \cdot u'$$

$$[\cos(u)]' = (-\operatorname{sen} u) \cdot u'$$

$$[\operatorname{tg}(u)]' = \left(\sec^2 u\right) \cdot u'$$

$$[\sec(u)]' = (\sec u) \cdot (\operatorname{tg} u) \cdot u'$$

$$[\operatorname{Ln}(x)]' = \frac{u'}{u}$$

E assim por diante.

Repare que a última fórmula foi o exemplo executado:

$h(x) = fog(x) = \ln\left(x^2\right) = \frac{\left(x^2\right)'}{x^2} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.

Pode também ser usada a notação de Leibniz para representar a regra da cadeia. Por exemplo, para o caso da função composta $h(x) = f(g(x))$. Se denominarmos $h(x) = y(x)$, então $f(u) = y(u)$ e $g(x) = u(x)$. Para se calcular a derivada de $h(x)$, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Isto é, deriva inicialmente a função de y em relação à variável ue , posteriormente, deriva a função u em relação à variável x .

Exemplo

Determine a derivada da função , sendo e

Resposta

Usando a regra para derivada para função composta:

$$h\prime(x) = f\prime(g(x)) \cdot g\prime(x)$$
$$f\prime(x) = 5x^4 \text{ então } f\prime(g(x)) = f\prime(\operatorname{sen} x) = 5\operatorname{sen}^4 x g\prime(x) = \cos x$$
$$\text{Assim, } h\prime(x) = f\prime(g(x)) \cdot g\prime(x) = 5\operatorname{sen}^4 x \cos x$$

Se $f(x) = \left(u^5(x)\right) \rightarrow f'(x) = 5\left(u^4(x)\right) u'(x)$, como $u(x) = \cos x$ e $u\prime(x) = -\operatorname{sen} x$

Regra da cadeia

Agora que já conhecemos a regra da cadeia para função composta, vamos usá-la para achar a derivada de uma função que é composição de várias funções. Assista ao vídeo!

Agora que já conhecemos a regra da cadeia para função composta, vamos usá-la para achar a derivada de uma função que é composição de várias funções. Assista ao vídeo!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo

Deseja-se obter a taxa de variação da função em relação à variável independente s, para quando Sabe-se que: é função de e vale é função de e vale depende de e vale

Exemplo

Deseja-se obter a taxa de variação da função em relação à variável independente s, para quando Sabe-se que: é função de e vale é função de e vale depende de e vale

Resposta

Usando a notação de Leibniz:

$$\frac{dg}{ds} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{ds}$$

$$g'(x) = \frac{dg}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t, t'(y) = \frac{dt}{dy} = \sec^2 y \text{ e } y'(s) = \frac{dy}{ds} = 2^s \ln 2$$

Assim

$$g'(s) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot (2t) \cdot \left(\sec^2 y\right) \left(2^s \ln 2\right).$$

Substituindo nas equações para

$$s = 0 \rightarrow y = 2^0 - 1 = 0 \rightarrow t = 1 + tg0 = 1 \rightarrow x = 1 + 1 = 2$$

$$g'(0) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot (2.1) \cdot \left(\sec^2 0\right) \left(2^0 \ln 2\right) = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$$

Resposta

Usando a notação de Leibniz:

$\frac{dg}{ds} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{ds}$

$g'(x) = \frac{dg}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t, t'(y) = \frac{dt}{dy} = \sec^2 y \text{ e } y'(s) = \frac{dy}{ds} = 2^s \ln 2$

Assim

$g'(s) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot (2t) \cdot \left(\sec^2 y\right) \left(2^s \ln 2\right).$

Substituindo nas equações para

$$s = 0 \rightarrow y = 2^0 - 1 = 0 \rightarrow t = 1 + tg0 = 1 \rightarrow x = 1 + 1 = 2$$

$g'(0) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot (2.1) \cdot \left(\sec^2 0\right) \left(2^0 \ln 2\right) = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$

A regra da cadeia pode ser usada para calcular a derivada de uma função inversa conhecendo-se a derivada da função.

A regra da cadeia pode ser usada para calcular a derivada de uma função inversa conhecendo-se a derivada da função.

Derivada da função inversa

Derivada da função inversa

Seja $f(x)$ uma função que possua inversa. Seja $g(x)$ a função inversa de $f(x)$:

Seja $f(x)$ uma função que possua inversa. Seja $g(x)$ a função inversa de $f(x)$:

Assim, $f(g(x)) = x$ para todo x no domínio da função $g(x)$.

Assim, $f(g(x)) = x$ para todo x no domínio da função $g(x)$.

Derivando os dois lados da equação: $[f(g(x))]' = [x]' = 1$.

Derivando os dois lados da equação: $[f(g(x))]' = [x]' = 1$.

Se supormos que $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, aplicando a regra da cadeia: $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) = 1$. para todo x no domínio de $g(x)$.

Se supormos que $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, aplicando a regra da cadeia: $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) = 1$. para todo x no domínio de $g(x)$.

Assim, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

Assim, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

Costuma-se dizer que a derivada da inversa é a inversa da derivada.

Costuma-se dizer que a derivada da inversa é a inversa da derivada.

Exemplo

Determine a derivada da função através da derivada da função .

Exemplo

Determine a derivada da função através da derivada da função .

Resposta

Como <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
</math> será a inversa de f(x), então: <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msup>
<mi>g</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mfrac>
<mn>1</mn>
<mrow>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
</mrow>
</mfrac>
</math>, mas

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>cos</mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE">→</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false"></mo>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>cos</mi>

<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>arcsen</mi>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>.</mo>
</math>

Se chamarmos

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
<mi>α</mi>
<mo>=</mo>
<mi>arcsen x</mi>
<mi></mi>
<mo stretchy="false">→</mo>
<mi>sen α</mi>
<mi></mi>
<mo>=</mo>
<mi>x cos α</mi>
<mi></mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
<mi></mi>
<mo>=</mo>
<msqrt>
<mn>1</mn>
<mo>−</mo>
<msup>
<mi>sen</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mn>2</mn>
</mrow>
</msup>
<mi>α</mi>
</msqrt>
<mo>=</mo>
<msqrt>
<mn>1</mn>
<mo>−</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mn>2</mn>
</mrow>
</msup>
</msqrt>
</math>

Então, <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msup>
<mi>f'</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1"></mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>cos</mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>

<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>arcsen x</mi>
<mi></mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<msqrt>
<mn>1</mn>
<mo>−</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mn>2</mn>
</mrow>
</msup>
</msqrt>
</math> e <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msup>
<mi>g</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mfrac>
<mn>1</mn>
<mrow>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
</mrow>
</mfrac>
<mo>=</mo>
<mfrac>
<mn>1</mn>
<msqrt>
<mn>1</mn>
<mo>−</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mn>2</mn>
</mrow>
</msup>
</msqrt>
</mfrac>
<mo>.</mo>
</math>. Que é a derivada da função arcsen <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>x</mi>
<mo>.</mo>
</math>

Resposta

Como <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
</math> será a inversa de f(x), então: <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msup>
<mi>g</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mfrac>
<mn>1</mn>
<mrow>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
</mrow>
</mfrac>
</math>, mas

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>cos</mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE">→</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false"></mo>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>cos</mi>

<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>arcsen</mi>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>.</mo>
</math>

Se chamarmos

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
<mi>α</mi>
<mo>=</mo>
<mi>arcsen x</mi>
<mi></mi>
<mo stretchy="false">→</mo>
<mi>sen α</mi>
<mi></mi>
<mo>=</mo>
<mi>x cos α</mi>
<mi></mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
<mi></mi>
<mo>=</mo>
<msqrt>
<mn>1</mn>
<mo>−</mo>
<msup>
<mi>sen</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mn>2</mn>
</mrow>
</msup>
<mi>α</mi>
</msqrt>
<mo>=</mo>
<msqrt>
<mn>1</mn>
<mo>−</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mn>2</mn>
</mrow>
</msup>
</msqrt>
</math>

Então, <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msup>
<mi>f'</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1"></mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>cos</mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>

```
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>arcsen x</mi>
 <mi></mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <msqrt>
  <mn>1</mn>
  <mo>−</mo>
  <msup>
   <mi>x</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
    <mn>2</mn>
   </mrow>
  </msup>
 </msqrt>
</math> e <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msup>
  <mi>g</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mfrac>
  <mn>1</mn>
  <mrow>
   <msup>
    <mi>f</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
     <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
    </mrow>
   </msup>
   <mo stretchy="false">(</mo>
   <mi>g</mi>
   <mo stretchy="false">(</mo>
   <mi>x</mi>
   <mo stretchy="false">)</mo>
   <mo stretchy="false">)</mo>
  </mrow>
 </mfrac>
 <mo>=</mo>
 <mfrac>
  <mn>1</mn>
  <msqrt>
   <mn>1</mn>
   <mo>−</mo>
   <msup>
    <mi>x</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
     <mn>2</mn>
    </mrow>
   </msup>
  </msqrt>
 </mfrac>
 <mo>.</mo>
</math>. Que é a derivada da função arcsen <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <mi>x</mi>
 <mo>.</mo>
</math>
```

Mão na massa

Questão 1

Determine a derivada da função $h(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$ para $x = 1$.

A

0

B

1

C

2

D

3

E

4

A alternativa B está correta.

A função $h(x)$ pode ser analisada como uma composição de funções:

Se $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = x^2 + x + 1$, assim $h(x) = f(g(x)) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$.

Portanto, $hl(x) = fl(g(x)) \cdot gl(x)$

$amp; ; f'(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$ e $g\prime(x) = 2x + 1$

$mp; ; h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)}(2x + 1) = \frac{2x+1}{x^2 + x}$

Para

$x = 1 \rightarrow h\prime(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{21+1}{1^2+1+1} = \frac{3}{3} = 1.$

Assim, a alternativa correta é a letra B.

Questão 2

Determine a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ para $x = \pi^2$.

A

$\frac{1}{2\pi}$

B

$-\frac{1}{2\pi}$

C

0

D

2

E

3

A alternativa B está correta.

Para resolver a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ em $x = \pi^2$, precisamos primeiro encontrar a derivada da função em um ponto genérico $x)$ e depois avaliá-la em $x = \pi^2$.

A função é composta por duas funções: a função externa $\operatorname{sen}(u)$ e a função interna:

$u = \sqrt{x}$

Para derivar $f(x)$, aplicaremos a regra da cadeia.

A derivada <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>sen</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>u</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
</math> em relação a <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>u</mi>
</math> é <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>cos</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>u</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>.</mo>
</math>

A derivada de $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$ em relação a x é:

$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Agora, aplicamos a regra da cadeia. A derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ é:

$f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Simplificando, a derivada é:

$f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

Agora, substituímos $x = \pi^2$:

$f'\left(\pi^2\right) = \frac{\cos\left(\sqrt{\pi^2}\right)}{2\sqrt{\pi^2}}$

Sabemos que $\sqrt{\pi^2} = \pi$. Portanto, temos:

$f'\left(\pi^2\right) = \frac{\cos(\pi)}{2\pi}$

A função $\cos(\pi)$ é igual a $-1)$. Assim, a expressão se torna:

$f'\left(\pi^2\right) = \frac{-1}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi}$

Portanto, a derivada de $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ avaliada em $x = \pi^2$ é $-\frac{1}{2\pi}$

Questão 3

Determine a derivada da função $f(x) = \operatorname{arc\,cotg}\left(3x^3 + 1\right)$ para $x = 1$.

A

$8 \div 15$

B

$-8 \div 15$

C

$9 \div 17$

D

$-9 \div 17$

E

$1 \div 17$

A alternativa D está correta.

A função $h(x)$ pode ser analisada como uma composição de funções:

Se $g(x) = \operatorname{arccotg}(x) e h(x) = 3x^3 + 1, \text{assim } f(x) = g(h(x)) = \operatorname{arccotg}\left(3x^3 + 1\right)$

Portanto, $f'(x) = g\prime(h(x)) \cdot h l(x)$

$amp;; g'(h(x)) = -\frac{1}{1+(h(x))^2} \text{ e } h'(x) = 9x^2$

$np;; f'(x) = g'(h(x)) \cdot h\prime(x) = -\frac{1}{1+(h(x))^2}\left(9x^2\right) = -\frac{9x^2}{1+(3x^3+}$

Para

$x = 1 \rightarrow f'(1) = -\frac{9 \cdot 1}{1+(3 \cdot 1+1)^2} = -\frac{9}{1+16} = -\frac{9}{17}$

Assim, a alternativa correta é a letra D.

Questão 4

Determine a equação da derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{\cos\left(x^2\right)}$ em relação à variável x .

A

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mfrac>
<mrow>
<mi>x</mi>
<mi>sen</mi>
<mrow data-mjx-texclass="INNER">
<mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mn>2</mn>
</msup>
<mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
</mrow>
</mrow>
<mroot>
<mrow>
<msup>
<mi>cos</mi>
<mn>2</mn>
</msup>
<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
<mrow data-mjx-texclass="INNER">
<mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mn>2</mn>
</msup>

```
        <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
      </mrow>
    </mrow>
    <mn>3</mn>
  </mroot>
 </mfrac>
</math>
```


B


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msup>
  <mi>f</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
    <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mfrac>
  <mn>1</mn>
  <mn>3</mn>
 </mfrac>
 <mfrac>
  <mrow>
    <mi>sen</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="INNER">
      <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
      <msup>
        <mi>x</mi>
        <mn>2</mn>
      </msup>
      <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
    </mrow>
  </mrow>
  <mroot>
    <mrow>
      <msup>
        <mi>cos</mi>
        <mn>2</mn>
      </msup>
      <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
      <mrow data-mjx-texclass="INNER">
        <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
        <msup>
          <mi>x</mi>
          <mn>2</mn>
        </msup>
        <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
      </mrow>
    </mrow>
    <mn>3</mn>
  </mroot>
 </mfrac>
</math>
```


C

```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msup>
  <mi>f</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mo>−</mo>
 <mfrac>
  <mn>2</mn>
  <mn>3</mn>
 </mfrac>
 <mfrac>
  <mrow>
   <mi>x</mi>
   <mi>sen</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="INNER">
    <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
    <msup>
     <mi>x</mi>
     <mn>2</mn>
    </msup>
    <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
   </mrow>
  </mrow>
  <mroot>
   <mrow>
    <msup>
     <mi>cos</mi>
     <mn>2</mn>
    </msup>
    <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
    <mrow data-mjx-texclass="INNER">
     <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
     <msup>
      <mi>x</mi>
      <mn>2</mn>
     </msup>
     <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
    </mrow>
   </mrow>
   <mn>3</mn>
  </mroot>
 </mfrac>
</math>
```


D


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msup>
  <mi>f</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
```

```
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mfrac>
  <mn>2</mn>
  <mn>3</mn>
 </mfrac>
 <mfrac>
  <mrow>
   <mi>cos</mi>
   <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
   <mrow data-mjx-texclass="INNER">
    <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
    <msup>
     <mi>x</mi>
     <mn>2</mn>
    </msup>
    <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
   </mrow>
  </mrow>
  <mroot>
   <mrow>
    <msup>
     <mi>sen</mi>
     <mn>2</mn>
    </msup>
    <mrow data-mjx-texclass="INNER">
     <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
     <msup>
      <mi>x</mi>
      <mn>2</mn>
     </msup>
     <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
    </mrow>
   </mrow>
   <mn>3</mn>
  </mroot>
 </mfrac>
</math>
```


E


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msup>
  <mi>f</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mfrac>
  <mn>1</mn>
  <mn>3</mn>
 </mfrac>
 <mfrac>
  <mrow>
   <mi>sen</mi>
```

<mrow data-mjx-texclass="INNER">
<mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mn>2</mn>
</msup>
<mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
</mrow>
</mrow>
<msqrt>
<mi>cos</mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
<mrow data-mjx-texclass="INNER">
<mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mn>2</mn>
</msup>
<mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
</mrow>
</msqrt>
</mfrac>
</math>

A alternativa C está correta.

A função $h(x)$ pode ser analisada como uma composição de funções.

Logo,

$f(u(v(x)))$

Assim fica mais fácil através da representação de Leibniz:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}(-\operatorname{sen}(v)) \cdot 2x$$

Substituindo os valores das funções até ficarmos dependendo apenas de $2x$:

Assim, a alternativa correta é a letra C.

Questão 5

Seja a função $g(x) = 2 \operatorname{arc\,tg}(e^x)$. Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $g(x)$ no ponto $x = 0$.

A

2

B

1

C

3

D

4

E

0

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Use a regra da cadeia para determinar a derivada da função $f(x) = \operatorname{tg}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)$ para $x = 1.$

A

$-1/2 \sec^2(\ln(\sqrt{2}))$

B

$1/2 \sec^2(\ln(\sqrt{2}))$

C

$\sec(\ln(\sqrt{2}))$

D

$\sec^2(\sqrt{2})$

E

$\sec(\ln 2)$

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

A área de uma esfera é calculada por $4\pi R^2$, onde R è o raio da esfera. Se o raio da esfera varia com o tempo através da equação $R(t) = 4 \cdot \ln\left[t^2 + 1\right]$, para $t \geq 0$, determine a taxa de variação da área da efera para um instante t.

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Sejam as funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{(x^4 + 9)}$. Define-se a função $h(t) = f$ o $g(t)$. A função $h(t)$ representa a variação de posição de um foguete, medida em km, em relação à variável tempo (t), medida em minutos. Determine a velocidade instantânea do foguete para $t = 2$.

A

$\frac{1}{5}e^2 km/min$

B

$\frac{1}{5}e^2 km/min$

C

$\frac{1}{15}e^{15} km/min$

D

$\frac{16}{5}e^5 km/min$

E

$\frac{1}{5}e^5 km/min$

A alternativa D está correta.

Você entendeu o conceito da derivada da função composta!

$amp;;h'(t) = f'(g(t))g'(t)$

mas

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
 <mtable displaystyle="true" columnspacing="1em" rowspacing="3pt">
  <mtr>
   <mtd>
    <msup>
     <mi>f</mi>
     <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
     </mrow>
    </msup>
    <mo stretchy="false">(</mo>
    <mi>u</mi>
    <mo stretchy="false">)</mo>
    <mo>=</mo>
    <msup>
     <mi>e</mi>
     <mi>u</mi>
    </msup>
    <mo stretchy="false">→</mo>
    <msup>
     <mi>f</mi>
     <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
     </mrow>
    </msup>
    <mo stretchy="false">(</mo>
    <mi>g</mi>
    <mo stretchy="false">(</mo>
    <mi>t</mi>
    <mo stretchy="false">)</mo>
    <mo stretchy="false">)</mo>
    <mo>=</mo>
    <msup>
     <mi>e</mi>
     <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <msqrt>
       <msup>
        <mi>x</mi>
        <mn>4</mn>
       </msup>
       <mo>+</mo>

```
          &lt;mn&gt;9&lt;/mn&gt;
        &lt;/msqrt&gt;
      &lt;/mrow&gt;
    &lt;/msup&gt;
  &lt;/mtd&gt;
&lt;/mtr&gt;
&lt;mtr&gt;
  &lt;mtd&gt;&lt;/mtd&gt;
&lt;/mtr&gt;
&lt;mtr&gt;
  &lt;mtd&gt;
    &lt;msup&gt;
      &lt;mi&gt;g&lt;/mi&gt;
      &lt;mrow data-mjx-texclass="ORD"&gt;
        &lt;mi data-mjx-alternate="1"&gt;'&lt;/mi&gt;
      &lt;/mrow&gt;
    &lt;/msup&gt;
    &lt;mo stretchy="false"&gt;(&lt;/mo&gt;
    &lt;mi&gt;t&lt;/mi&gt;
    &lt;mo stretchy="false"&gt;)&lt;/mo&gt;
    &lt;mo&gt;=&lt;/mo&gt;
    &lt;mfrac&gt;
      &lt;mrow&gt;
        &lt;mn&gt;4&lt;/mn&gt;
        &lt;msup&gt;
          &lt;mi&gt;x&lt;/mi&gt;
          &lt;mn&gt;3&lt;/mn&gt;
        &lt;/msup&gt;
      &lt;/mrow&gt;
      &lt;mrow&gt;
        &lt;mn&gt;2&lt;/mn&gt;
        &lt;msqrt&gt;
          &lt;msup&gt;
            &lt;mi&gt;x&lt;/mi&gt;
            &lt;mn&gt;4&lt;/mn&gt;
          &lt;/msup&gt;
          &lt;mo&gt;+&lt;/mo&gt;
          &lt;mn&gt;9&lt;/mn&gt;
        &lt;/msqrt&gt;
      &lt;/mrow&gt;
    &lt;/mfrac&gt;
    &lt;mo&gt;=&lt;/mo&gt;
    &lt;mfrac&gt;
      &lt;mrow&gt;
        &lt;mn&gt;2&lt;/mn&gt;
        &lt;msup&gt;
          &lt;mi&gt;x&lt;/mi&gt;
          &lt;mn&gt;3&lt;/mn&gt;
        &lt;/msup&gt;
      &lt;/mrow&gt;
      &lt;msqrt&gt;
        &lt;msup&gt;
          &lt;mi&gt;x&lt;/mi&gt;
          &lt;mn&gt;4&lt;/mn&gt;
        &lt;/msup&gt;
        &lt;mo&gt;+&lt;/mo&gt;
        &lt;mn&gt;9&lt;/mn&gt;
      &lt;/msqrt&gt;
    &lt;/mfrac&gt;
  &lt;/mtd&gt;
```

```
  </mtr>
  <mtr>
   <mtd></mtd>
  </mtr>
  <mtr>
   <mtd>
    <msup>
     <mi>h</mi>
     <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
     </mrow>
    </msup>
    <mo stretchy="false">(</mo>
    <mi>t</mi>
    <mo stretchy="false">)</mo>
    <mo>=</mo>
    <mfrac>
     <mrow>
      <mn>2</mn>
      <msup>
       <mi>x</mi>
       <mn>3</mn>
      </msup>
     </mrow>
     <msqrt>
      <msup>
       <mi>x</mi>
       <mn>4</mn>
      </msup>
      <mo>+</mo>
      <mn>9</mn>
     </msqrt>
    </mfrac>
    <msup>
     <mi>e</mi>
     <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <msqrt>
       <msup>
        <mi>x</mi>
        <mn>4</mn>
       </msup>
       <mo>+</mo>
       <mn>9</mn>
      </msqrt>
     </mrow>
    </msup>
   </mtd>
  </mtr>
 </mtable>
</math>
```


então,

$h'(2) = \frac{2.8}{\sqrt{16+9}} e^{\sqrt{16+9}} = \frac{16}{5} e^5$

Questão 2

Use a regra da cadeia para derivar a função y em relação à variável t, sabendo que $y(x) = \operatorname{ctg} x$ e que $x(s) = s^3$ e $s(t) = t^2$:

A

$\frac{dy}{dt} = -4t^3 \sec^2 \left(t^4\right)$

B

$\frac{dy}{dt} = \csc^2 \left(t^6\right)$

C

$\frac{dy}{dt} = -6t^5 \csc^2 \left(t^6\right)$

D

$\frac{dy}{dt} = t^5 \csc^2 \left(t^6\right)$

E

$\frac{dy}{dt} = 3t^2 \cdot \sec^2 \left(t^6\right)$

A alternativa C está correta.

Você entendeu o conceito da regra da cadeia!

amp; $\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x, \frac{dx}{ds} = 3s^2$ e $\frac{ds}{dt} = 2t$

amp; $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$

amp; $\frac{dy}{dt} = -\csc^2 x \cdot 3s^2 \cdot 2t$

Substituindo para ficar apenas a variável t:

amp; $\frac{dy}{dt} = -\csc^2 \left(s^3\right) \cdot 3 \left(t^2\right)^2 \cdot 2t$

amp; $\frac{dy}{dt} = -6t^5 \csc^2 \left(t^6\right)$

Calculando a derivada de funções usuais

Acompanhe neste vídeo as técnicas de derivação, essenciais para calcular a taxa de variação instantânea de uma função, e domine as regras e aplicações fundamentais desse importante conceito matemático.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Cálculo da derivada pelo limite

A determinação da derivada de uma função diretamente por meio do limite de sua definição é uma possibilidade, apesar de ser necessária uma grande habilidade no cálculo do limite.

A definição nos apresenta:

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{x-q}$$

Seguindo a definição, para se calcular a derivada de $f(x)$ em um ponto q, inicialmente deve-se montar a taxa média da função entre o ponto genérico x e o ponto q, $\frac{f(x)-f(q)}{x-q}$. Posteriormente, deve-se calcular o valor que essa taxa vai tender para quando a variável x tender ao ponto desejado q. Se esse limite existir e for finito, a derivada existe.

Existe outra equação equivalente à primeira para se representar esta taxa de variação. Essa nova equação é originada pela substituição de $(x-q)$ por h. Assim, quando x tende q, h tenderá a zero.

Essa segunda equação é mais usada quando se deseja obter a equação genérica da derivada, isto é, uma equação que vale para todo x:

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x)-f(q)}{x-q} = \lim_{h \to 0} \frac{f(q+h)-f(q)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Exemplo

Determine a função derivada da função $f(x) = 2x^3$ em um ponto genérico e para x=1 através da definição da derivada.

Solução: Usando a definição de derivada

Confira neste vídeo a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Regras de derivação

As primeiras regras tratam de operações matemáticas em geral. Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ deriváveis e uma constante real k. Assim:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x):$ a derivada da soma é a soma da derivada.

- $(kf)'(x) = kf'(x):$ a derivada de uma função multiplicada por uma constante é a constante que multiplica a derivada.

- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x):$ regra do produto.

- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, quando $g(x) \neq 0:$ regra do quociente.

Derivada das principais funções

Após as regras gerais, podemos, por meio da definição de derivada, obter as regras de derivação para uma lista de funções. As funções principais, usadas no cálculo diferencial e integral, já tiveram suas derivadas obtidas, gerando expressões que podem ser utilizadas de forma direta. Observe!

Após as regras gerais, podemos, por meio da definição de derivada, obter as regras de derivação para uma lista de funções. As funções principais, usadas no cálculo diferencial e integral, já tiveram suas derivadas obtidas, gerando expressões que podem ser utilizadas de forma direta. Observe!

$f(x) = k, k \text{ real } \to f'(x) = 0$	$f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$	$f(x) = \ln x \to f'(x) = \frac{1}{x}, xgt; 0$
$amp; ; f(x) = a^x, a$ $gt; 0 \to f'(x)$ $amp; ; = \ln$ $a \cdot a^x, a$ $gt; 0$	$f(x) = \log_a x \to f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, xgt; 0$
$f(x) = \operatorname{sen} x \to f'(x) = \cos x$	$f(x) = \cos x \to f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x \to f'(x) = \sec^2 x$	$f(x) = \operatorname{ctg} x \to f'(x) = -\operatorname{cossec}^2 x$

$f(x)=\sec x \rightarrow f'(x)=\sec x \operatorname{tg} x$	$f(x)=\operatorname{cossec} x amp;; \rightarrow f'(x) \quad amp;;=-\operatorname{cossec} x \operatorname{ctg} x$
$f(x)=\operatorname{arcsen} x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\arccos x \rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg} x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$f(x)=\operatorname{arcctg} x \rightarrow f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$

Principais derivadas
Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

$f(x)=k, k \text{ real } \rightarrow f'(x)=0$	$f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=n x^{n-1}$
$f(x)=e^x \rightarrow f'(x)=e^x$	$f(x)=\ln x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}, x gt; 0$
$amp;; f(x)=a^x, a$ $gt; 0 \rightarrow f'(x)$ $amp;;=\ln$ $a \cdot a^x, a$ $gt; 0$	$f(x)=\log_a x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x \ln a}, x gt; 0$
$f(x)=\operatorname{sen} x \rightarrow f'(x)=\cos x$	$f(x)=\cos x \rightarrow f'(x)=-\operatorname{sen} x$
$f(x)=\operatorname{tg} x \rightarrow f'(x)=\sec^2 x$	$f(x)=\operatorname{ctg} x \rightarrow f'(x)=-\operatorname{cossec}^2 x$
$f(x)=\sec x \rightarrow f'(x)=\sec x \operatorname{tg} x$	$f(x)=\operatorname{cossec} x amp;; \rightarrow f'(x) \quad amp;;=-\operatorname{cossec} x \operatorname{ctg} x$
$f(x)=\operatorname{arcsen} x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\arccos x \rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg} x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$f(x)=\operatorname{arcctg} x \rightarrow f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$

Principais derivadas
Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Exemplo 1

Exemplo 1

Determine a derivada da função definida por $f(x)=4x\sqrt{x}+x^2 \cdot \operatorname{sen} x$ para $x>0$.

Determine a derivada da função definida por $f(x)=4x\sqrt{x}+x^2 \cdot \operatorname{sen} x$ para $x>0$.

Solução

Note que <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>f</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
</math> pode ser entendida como a soma de duas funções <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msub>
<mi>f</mi>
<mn>1</mn>
</msub>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mn>4</mn>
<mi>x</mi>
<msqrt>
<mi>x</mi>
</msqrt>
<mi>e</mi>
<mstyle scriptlevel="0">
<mspace width="1em"></mspace>
</mstyle>
<msub>
<mi>f</mi>
<mn>2</mn>
</msub>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mn>2</mn>
</msup>
<mo>. </mo>
<mi>sen</mi>
<mi>x</mi>
</math>

Vejamos:

$$f_1(x) = 4x \cdot \sqrt{x} = 4x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 4x^{3/2}$$

Como f_1 é uma constante vezes uma função, temos:

$$f_1'(x) = \left(4x^{\frac{3}{2}}\right)' = 4\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$f_1'(x) = 4\left[\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1}\right]$$
$$f_1'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x}$$

Note que f_2 é o produto de duas funções. Logo:

$$f_2'(x) = \left(x^2 \cdot \operatorname{sen} x\right)'$$
$$f_2'(x) = \left(x^2\right)' \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot (\operatorname{sen} x)'$$
$$f_2'(x) = 2x^{2-1} \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot (\cos x)$$
$$f_2'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot \cos x$$

Como f é a soma de f_1 e f_2 obtemos, então:

$$f'(x) = (f_1(x) + f_2(x)'$$
$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$$
$$f'(x) = 6\sqrt{x} + \left(2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cos x\right)$$

Solução

Note que <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>f</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
</math> pode ser entendida como a soma de duas funções <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msub>
<mi>f</mi>
<mn>1</mn>
</msub>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mn>4</mn>
<mi>x</mi>
<msqrt>
<mi>x</mi>
</msqrt>
<mi>e</mi>
<mstyle scriptlevel="0">
<mspace width="1em"></mspace>
</mstyle>
<msub>
<mi>f</mi>
<mn>2</mn>
</msub>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mn>2</mn>
</msup>
<mo>. </mo>
<mi>sen</mi>
<mi>x</mi>
</math>

Vejamos:

$$f_1(x) = 4x \cdot \sqrt{x} = 4x \cdot x^{\frac{1}{2}} = 4x^{3/2}$$

Como f_1 é uma constante vezes uma função, temos:

$$f_1'(x) = \left(4x^{\frac{3}{2}}\right)' = 4\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$f_1'(x) = 4\left[\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1}\right]$$
$$f_1'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{x}$$

Note que f_2 é o produto de duas funções. Logo:

$$f_2'(x) = \left(x^2 \cdot \operatorname{sen} x\right)' \qquad f_2'(x) = \left(x^2\right)' \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot (\operatorname{sen} x)'$$
$$f_2'(x) = 2x^{2-1} \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot (\cos x)$$
$$f_2'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cdot \cos x$$

Como f é a soma de f_1 e f_2 obtemos, então:

$$f'(x) = (f_1(x) + f_2(x)'$$
$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$$
$$f'(x) = 6\sqrt{x} + \left(2x \cdot \operatorname{sen} x + x^2 \cos x\right)$$

Exemplo 2

Exemplo 2

Determine a derivada de $y = x^{4x}$.

Determine a derivada de $y = x^{4x}$.

Solução

A função <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>y</mi>
<mo>=</mo>
<mi>f</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<msup>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
</mrow>
</msup>
</math> com <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>f</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">→</mo>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mn>1</mn>
</math> e <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mn>4</mn>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">→</mo>
<msup>
<mi>g</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mn>4.</mn>
</math>

Pela fórmula

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
<msup>
<mi>y</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>

```
 </msup>
 <mo>=</mo>
 <mrow data-mjx-texclass="INNER">
   <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
   <mn>4</mn>
   <mi>ln</mi>
   <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
   <mi>x</mi>
   <mo>+</mo>
   <mfrac>
     <mrow>
       <mn>4</mn>
       <mi>x</mi>
     </mrow>
     <mi>x</mi>
   </mfrac>
   <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
 </mrow>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>4</mn>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>1</mn>
 <mo>+</mo>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
</math>
```

Manipulando

```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mrow data-mjx-texclass="INNER">
   <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
```

```
   <mi>ln</mi>
   <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
   <msup>
    <mi>x</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
     <mn>4</mn>
     <mi>x</mi>
    </mrow>
   </msup>
   <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
  </mrow>
  <mo>=</mo>
  <msup>
   <mi>x</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
    <mn>4</mn>
    <mi>x</mi>
   </mrow>
  </msup>
  <mo stretchy="false">→</mo>
  <msup>
   <mi>y</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
    <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
   </mrow>
  </msup>
  <mo>=</mo>
  <mn>4</mn>
  <mo stretchy="false">(</mo>
  <mn>1</mn>
  <mo>+</mo>
  <mi>ln</mi>
  <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
  <mi>x</mi>
  <mo stretchy="false">)</mo>
  <msup>
   <mi>x</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
    <mn>4</mn>
    <mi>x</mi>
   </mrow>
  </msup>
 </math>
```

Solução

A função <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>y</mi>
<mo>=</mo>
<mi>f</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<msup>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
</mrow>
</msup>
</math> com <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>f</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">→</mo>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mn>1</mn>
</math> e <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mn>4</mn>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">→</mo>
<msup>
<mi>g</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mn>4.</mn>
</math>

Pela fórmula

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
<msup>
<mi>y</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>

```
 </msup>
 <mo>=</mo>
 <mrow data-mjx-texclass="INNER">
  <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
  <mn>4</mn>
  <mi>ln</mi>
  <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
  <mi>x</mi>
  <mo>+</mo>
  <mfrac>
   <mrow>
    <mn>4</mn>
    <mi>x</mi>
   </mrow>
   <mi>x</mi>
  </mfrac>
  <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
 </mrow>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>4</mn>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>1</mn>
 <mo>+</mo>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
</math>
```


Manipulando


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>4</mn>
 <mi>x</mi>
 <mi>ln</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mi>exp</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mrow data-mjx-texclass="INNER">
  <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
```

```
    <mi>ln</mi>
    <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
    <msup>
      <mi>x</mi>
      <mrow data-mjx-texclass="ORD">
        <mn>4</mn>
        <mi>x</mi>
      </mrow>
    </msup>
    <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
  </mrow>
  <mo>=</mo>
  <msup>
    <mi>x</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mn>4</mn>
      <mi>x</mi>
    </mrow>
  </msup>
  <mo stretchy="false">→</mo>
  <msup>
    <mi>y</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
    </mrow>
  </msup>
  <mo>=</mo>
  <mn>4</mn>
  <mo stretchy="false">(</mo>
  <mn>1</mn>
  <mo>+</mo>
  <mi>ln</mi>
  <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
  <mi>x</mi>
  <mo stretchy="false">)</mo>
  <msup>
    <mi>x</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mn>4</mn>
      <mi>x</mi>
    </mrow>
  </msup>
</math>
```


Mão na massa

Questão 1

Determine a derivada da função $h(x) = 3^x + 2e^x$, para $x = 0$

A

$2 + \ln 3$

B

$\ln 3$

C

$1 + \ln 2$

D

$3 + \ln 2$

E

3

A alternativa A está correta.

Usando as regras de derivação:

$h\prime(x) = (\ln 3)3^x + 2e^x$

Assim, $h\prime(0) = 3^0 \ln 3 + 2e^0 = \ln 3 + 2$.

Assim, a alternativa correta é a letra A.

Questão 2

Determine a equação da derivada da função $h(x) = x^2 \cos(x) M$

A

$2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x$

B

$2x \cos x + x^2 \operatorname{sen} x$

C

$x^2 \cos x - 2x \operatorname{sen} x$

D

$2 \cos x - x \operatorname{sen} x$

E

$2 \cos x - senx$

A alternativa A está correta.

Usando a regra do produto:

$$h'(x) = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x + x^2(-\operatorname{sen} x) = 2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x$$

Assim, a alternativa correta é a letra A.

Questão 3

Determine a derivada da função $g(x) = (x^2 + 1) \div x^3$, com $x \neq 0$, para $x = 2$ através das regras da derivação.

A

$\frac{7}{16}$

B

$-\frac{7}{16}$

C

$\frac{5}{16}$

D

$-\frac{5}{16}$

E

0

A alternativa B está correta.

Usando as regras de derivação relacionadas às operações matemáticas, temos:

Se $g(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)h(x) - f(x)h'(x)}{h^2(x)}$, onde $h(x) = x^3$ e $f(x) = x^2 + 1$

$$\text{amp;}\,; g'(x) = \frac{2x x^3 - (x^2+1)\,3x^2}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 - 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4 - 3x^2}{x^6} = -\frac{x^2+3}{x^4}$$

$$\text{amp;}\,; g'(2) = -\frac{x^2+3}{x^4} = -\frac{2^2+3}{2^4} = -\frac{7}{16}.$$

Assim, a alternativa correta é a letra B.

Questão 4

Uma grandeza física $C(t)$ é definida como a taxa de variação instantânea da grandeza $A(t)$ pela variação do tempo. Sabendo que $A(t) = 2e^t + 3 \log t, tgt; 0$, determine a equação de $C(t)$.

A

$e^t + (3 \div \ln 10)$

B

$2e^t + (3 \div t)$

C

$2e^t + 3 \div (t \times \ln 10)$

D

$e^t \ln 2 - (1 \div t \ln 10)$

E

$(t \times \ln 2) - t$

A alternativa C está correta.

Se $C(t)$ é a taxa de variação de A(t) pelo tempo, então $C(t) = A'(t)$.

Usando as regras de derivação, temos:

amp; ; $A(t) = 2e^t + 3\log t$

; $A'(t) = 2e^t + \frac{3}{t}$

Assim, a alternativa correta é a letra C.

Questão 5

No ponto de abscissa igual a $x = \pi$, determine o coeficiente angular da reta tangente à função:

$g(x) = 4 \cdot \ln(x) + \cos(x) \cdot \text{sen}(x)$

A

$\frac{4}{\pi}$

B

$4 + \frac{4}{\pi}$

C

$1 + \frac{1}{\pi}$

D

$1 + \frac{4}{\pi}$

E

0

A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Determine a função derivada da função $f(x) = 3\sqrt{x}$, com $x \geq 0$, para $x = 1$, através do cálculo da derivada pelo limite da sua definição.

A

$3 \div 2$

B

$1 \div 2$

C

$5 \div 2$

D

$7 \div 2$

E

0

A alternativa A está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

O valor da temperatura de um forno (T), medido em ºC, depende da tensão elétrica de alimentação (V), medida em volts. A equação $T(V) = 40\ arctg\ (V) + 100$ representa este modelo. Determine qual a taxa de variação instantânea da variação da temperatura para quando V for igual 20 V.

Chave de resposta

Se a temperatura depende da tensão de entrada através da função $T(V) = 40 \operatorname{arctg} V + 100$, então a sua taxa de variação instantânea da temperatura pela tensão será dada pela derivada de $T(V)$ .Usando as regras de derivação: $T\prime(V) = 40\frac{1}{1+V^2}$

Assim:


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
 <mi>Tr</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mn>20</mn>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mn>40</mn>
 <mfrac>
  <mn>1</mn>
  <mrow>
   <mn>1</mn>
   <mo>+</mo>
   <msup>
    <mn>20</mn>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
     <mn>2</mn>
    </mrow>
   </msup>
  </mrow>
 </mfrac>
 <mo>=</mo>
 <mfrac>
  <mn>40</mn>
  <mn>401</mn>
 </mfrac>
 <msup>
  <mstyle scriptlevel="0">
   <mspace width="0.278em"></mspace>
  </mstyle>
  <mi>o</mi>
 </msup>
 <mi>C</mi>
 <mrow data-mjx-texclass="ORD">
  <mo>/</mo>
 </mrow>
 <mi>V</mi>
</math>
```


Verificando o aprendizado

Questão 1

Determine a derivada da função $f(x) = (2x^2 + 1)\sqrt{x+1}$ para $x = 0$.

A

1

B

$2 \div 3$

C

$1 \div 2$

D

-1

E

0

A alternativa C está correta.

Você entendeu as regras de derivação!

Usando as regras de derivação, temos:

Questão 1

Determine a derivada da função $f(x) = (2x^2 + 1)\sqrt{x+1}$ para $x = 0$.

A

1

B

$2 \div 3$

C

$1 \div 2$

D

-1

E

0

A alternativa C está correta.

Você entendeu as regras de derivação!

Usando as regras de derivação, temos:

Questão 2

Determine a derivada da função $f(x) = \left(x^2 \ln x\right) \div (5 + \cos x)$, no ponto $x = \pi(pi)$

A

$\frac{\pi(1+2\ln\pi)}{4}$

B

$\frac{5+\ln\pi}{\pi^2}$

C

$\frac{\pi(1-2\ln\pi)}{2}$

D

$\frac{5+\ln\pi}{\pi^2+5}$

E

$2 + \text{In}\,\pi$

A alternativa A está correta.

Você entendeu as regras de derivação das principais funções!

Usando as regras de derivação:

Questão 2

Determine a derivada da função $f(x) = \left(x^2 \ln x\right) \div (5 + \cos x)$, no ponto $x = \pi(pi)$

A

$\frac{\pi(1+2\ln\pi)}{4}$

B

$\frac{5+\ln\pi}{\pi^2}$

C

$\frac{\pi(1-2\ln\pi)}{2}$

D

$\frac{5+\ln\pi}{\pi^2+5}$

E

$2 + \ln\pi$

A alternativa A está correta.

Você entendeu as regras de derivação das principais funções!

Usando as regras de derivação:

Vamos começar!

Neste vídeo, você entenderá melhor os conceitos de derivação implícita e de ordem superior, além de explorar exemplos práticos que demonstram como aplicar essas técnicas em situações complexas de cálculo diferencial.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Derivação de Ordem Superior

Como já foi visto, a derivada de uma função real também é uma função real. Dessa forma, a função derivada pode possuir, por sua vez, também uma derivada.

Como já foi visto, a derivada de uma função real também é uma função real. Dessa forma, a função derivada pode possuir, por sua vez, também uma derivada.

Derivada superior

A derivação de uma função derivada é denominada de derivação de ordem superior.

Derivada de primeira ordem

A derivada de uma função, estudada até esse ponto, é denominada de derivada de primeira ordem.

Derivada de segunda ordem

A derivada da derivada é denominada de derivada de segunda ordem, e assim, sucessivamente.

Derivada superior

A derivação de uma função derivada é denominada de derivação de ordem superior.

Derivada de primeira ordem

A derivada de uma função, estudada até esse ponto, é denominada de derivada de primeira ordem.

Derivada de segunda ordem

A derivada da derivada é denominada de derivada de segunda ordem, e assim, sucessivamente.

Representamos a derivada de ordem superior n, n inteiro positivo, por

Representamos a derivada de ordem superior n, n inteiro positivo, por

$$f^{(n)}(x) \text{ ou } D^{(n)}f(x)$$

$$f^{(n)}(x) \text{ ou } D^{(n)}f(x)$$

Utilizando a notação de Leibniz, a derivada de segunda ordem é representada por:

Utilizando a notação de Leibniz, a derivada de segunda ordem é representada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

A derivada de terceira ordem é dada por:

A derivada de terceira ordem é dada por:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

E a derivada de ordem n:

E a derivada de ordem n:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{d}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)\right)$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{d}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)\right)$$

Derivação de ordem superior

Derivação de ordem superior

Assista ao vídeo e veja a aplicação da teoria em um exemplo de cálculo de derivação de ordem superior.

Assista ao vídeo e veja a aplicação da teoria em um exemplo de cálculo de derivação de ordem superior.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Derivação implícita

Até esse ponto, você trabalhou com a derivada de uma função real que apresenta uma função explícita, isto é, a função representada por meio de uma equação que depende da sua variável independente. Por exemplo:

Até esse ponto, você trabalhou com a derivada de uma função real que apresenta uma função explícita, isto é, a função representada por meio de uma equação que depende da sua variável independente. Por exemplo:

$$f(x) = 3\cos x + 5 \text{ ou } g(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$$

$$f(x) = 3\cos x + 5 \text{ ou } g(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$$

Em todas elas, a dependência com a variável x é expressa claramente.

Em todas elas, a dependência com a variável x é expressa claramente.

Em certos problemas matemáticos, porém, não temos como obter essa equação explicita para uma função. Nesses casos, a função será representada de uma forma implícita. Por exemplo, $x^2 + y\cos x + y^2 = 3$, verifica-se que, apesar de $y = f(x)$ estar representada implicitamente pela equação, não é possível obter uma equação explícita de y em função de x.

Em certos problemas matemáticos, porém, não temos como obter essa equação explicita para uma função. Nesses casos, a função será representada de uma forma implícita. Por exemplo, $x^2 + y\cos x + y^2 = 3$, verifica-se que, apesar de $y = f(x)$ estar representada implicitamente pela equação, não é possível obter uma equação explícita de y em função de x.

Em outras palavras, a equação $F(x, y) = k$, k real, representará a função $y = f(x)$.

Em outras palavras, a equação $F(x, y) = k$, k real, representará a função $y = f(x)$.

> Como, então, obter a derivada de uma função implícita? Na verdade, para se obter a derivada de uma função, não é necessário obter a equação explícita.

> Como, então, obter a derivada de uma função implícita? Na verdade, para se obter a derivada de uma função, não é necessário obter a equação explícita.

A operação matemática da derivada pode ser aplicada diretamente na equação implícita que relaciona a função com a sua variável independente. Esse tipo de operação é denominada de derivação implícita. Pois, se uma função em ($x, y)$ é igual a uma constante real k, então sua derivada é igual a 0.

A operação matemática da derivada pode ser aplicada diretamente na equação implícita que relaciona a função com a sua variável independente. Esse tipo de operação é denominada de derivação implícita. Pois, se uma função em ($x, y)$ é igual a uma constante real k, então sua derivada é igual a 0.

$$F(x, y) = k \rightarrow \frac{d(F(x,y)}{dx} = 0.$$

$$F(x, y) = k \rightarrow \frac{d(F(x,y)}{dx} = 0.$$

O método é derivar a equação implícita termo a termo, usando a Regra da Cadeia.

O método é derivar a equação implícita termo a termo, usando a Regra da Cadeia.

Deve ser lembrado que y é função de x, assim dy/dx não é zero, e sim y'.

Deve ser lembrado que y é função de x, assim dy/dx não é zero, e sim y'.

Por exemplo, se tivermos um termo y^6, a derivação desse termo será $6yy = 6ydy/dx$.

Por exemplo, se tivermos um termo y^6, a derivação desse termo será $6yy = 6ydy/dx$.

Às vezes, teremos que usar as regras de derivação.

Às vezes, teremos que usar as regras de derivação.

Por exemplo, o termo x^2y^2, a derivação vai ter que usar a regra do produto, isto é, $2x^2 + x^2 2yy$.

Por exemplo, o termo x^2y^2, a derivação vai ter que usar a regra do produto, isto é, $2x^2 + x^2 2yy$.

Atenção

Na equação da função derivada, podem aparecer termos relacionados a além dos relacionados à variável independente

Atenção

Na equação da função derivada, podem aparecer termos relacionados a além dos relacionados à variável independente

Derivação implícita

Derivação implícita

Veja neste vídeo a aplicação prática do método de derivação implícita, explorando como utilizar essa técnica para calcular derivadas de funções que não estão explicitamente definidas em termos de x.

Veja neste vídeo a aplicação prática do método de derivação implícita, explorando como utilizar essa técnica para calcular derivadas de funções que não estão explicitamente definidas em termos de x.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Seja $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - x + 4$, determine a derivada de terceira ordem para $x = 1$

A

198

B

202

C

288

D

312

E

296

A alternativa C está correta.

Como se deseja a derivada de terceira ordem, teremos que derivar três vezes a função.

amp;: $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - x + 4 \to f'(x) = 20x^4$

amp;: $f'(x) = 20x^4 + x^3 - 1 \to f''(x) = 80x^3 + 24x^2$

$\cdot : f''(x) = 80x^3 + 24x^2 \to f^{(3)}(x) = 240x^2$,

Assim:

$$f^{(3)}(x) = 240x^2 + 48x \to f^{(3)}(1) = 240 \cdot 1 + 48 \cdot 1 = 288$$

Logo, a resposta correta é a letra C.

Questão 2

Um movimento circular acelerado tem equação da posição angular, medida em rad, em relação ao tempo dado por $\theta(t) = \pi + 2t + 10t^2$. Sabendo que a aceleração angular é derivada de segunda ordem da posição angular, em relação ao tempo, marque a alternativa que apresenta o valor da aceleração angular desse movimento, medida em rad/s^2 :

A

$-20 rad/s^2$

B

$-10rad/s^2$

C

$20rad/s^2$

D

$-5rad/s^2$

E

$5rad/s^2$

A alternativa C está correta.

Como se deseja a derivada de segunda ordem, teremos que derivar duas vezes a função:

$$\theta(t) = \pi + 2t + 10t^2 \rightarrow w(t) = \theta'(t) = 2 + 20t$$

$$w(t) = 2 + 20t \rightarrow \alpha(t) = w'(t) = \theta''(t) = 20rad/s^2$$

Logo, a resposta correta é a letra C.

Questão 3

Seja $f(x) = e^x \cos x$, determine a equação da derivada de segunda ordem de $f(x)$.

A

$2e^x \cos x$

B

$-e^x \operatorname{sen} x$

C

$-e^x \cos x$

D

$-2e^x \operatorname{sen} x$

E

$3e^x \operatorname{sen} x$

A alternativa D está correta.

Como se deseja a derivada de segunda ordem, teremos que derivar duas vezes a função.

Usando a regra do produto e as derivadas das funções $e^x e \cos x$:

$$f(x) = e^x \cos x \to f'(x) = e^x \cos x + e^x(-\operatorname{sen} x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Usando novamente a regra do produto e as derivadas das funções ex, $\cos x$ e sen x :

$$f'(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) \to f''(x) =$$
$$= e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + e^x(-\operatorname{sen} x - \cos x) = -2e^x \operatorname{sen} x$$

Logo, a resposta correta é a letra D.

Questão 4

Seja a equação y sen $x + x^2 + 2$ sen $y = 0$, para $0 \leq x \leq \pi($ pi) e $0 \leq y \leq \pi$ (pi), que relaciona implicitamente a variável y em função de x, determine o valor da derivada de y em relação a x, para o ponto $x = 0$

A

$-\pi(pi) \div 2$

B

$\pi(\text{ pi }) \div 2$

C

0

D

$\pi(pi)$

E

$\pi(pi) \div 4$

A alternativa C está correta.

Derivando termo a termo, lembrando que y é função de x :

$$(y \operatorname{sen} x)' + \left(x^2\right)' + (2 \operatorname{sen} y)' = (0)'$$
$$y(\cos x) + y' \operatorname{sen} x + 2x + 2 \cos y y' = 0$$
$$(2x + y \cos x) + y'(\operatorname{sen} x + 2 \cos y) = 0$$

Assim, achando o valor de y' em função de x e y :

$$\begin{aligned} y'(\operatorname{sen} x + 2\cos y) &= -y\cos x - 2x \\ y' &= -\frac{y\operatorname{sen} x + 2x}{\operatorname{sen} x + 2\cos y} \end{aligned}$$

Na equação original:

$$x = 0 \rightarrow y \operatorname{sen} 0 + 0^2 + 2\operatorname{sen} y = 0 \rightarrow \operatorname{sen} y = 0 \rightarrow y = 0$$

Substituindo para

$$x = 0 \text{ e } y = 0 \rightarrow y' = -\frac{0 \operatorname{sen} 0 + 2.0}{\operatorname{sen} 0 + 2\cos 0} = -\frac{0}{1} = 0$$

Logo, a resposta correta é a letra C.

Questão 5

Determine o coeficiente da reta tangente ao gráfico da função $y = g(x)$ no ponto $x = 1$ e $y = 1$, sabendo que $2x^3 + 2(y+1)^3 - 9x(y+1) = 0$

A

$1/5$

B

$4/5$

C

$3/5$

D

$7/5$

E

$4/7$

A alternativa B está correta.

Lembre-se de que o coeficiente angular da reta tangente é a derivada da função y no ponto.

Derivando a equação implícita termo a termo:

$$\left(2x^3\right)' \to 6x^2, \left(2(y+1)^3\right)' \to 6(y+1)^2 y' \in (9x(y+1))' \to 9(y+1) + 9xy'$$

Assim

$$\left(2x^3 + 2(y+1)^3 - 9x(y+1)\right)' = 0 \to 6x^2 + 6(y+1)^2 y' - 9(y+1) - 9xy' = 0$$

Manipulando matematicamente:

$$y'\left(6(y+1)^2 - 9x\right) = -6x^2 + 9(y+1) = 3\left(3(y+1) - 2x^2\right)$$

$$y' = 3\frac{3y - 2x^2 + 3}{<}/p >< p > 3\left(2(y+1)^2 - 3x\right) = \frac{3y - 2x^2 + 3}{2(y+1)^2 - 3x}$$

Assim, para $x = 1$ e $y = 1$, $y' = \frac{3-2+3}{2 \cdot 4 - 3} = \frac{4}{5}$, sendo a alternativa B a verdadeira.

Questão 6

Determine a derivada de segunda ordem de y em relação a x , sabendo que $e^y - 3xy = 2$ para quando $x = 0$.

A

$\frac{9}{2} \ln 2 + 4$

B

$\frac{9}{2} \ln\ 2 - \frac{9}{4} \ln^2(2),$

C

$\ln 2 - \ln^2 2$

D

$\frac{9}{2} \ln 8 - 4$

E

$\frac{5}{2} \ln 2$

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

Sabe-se que a velocidade é a taxa de variação da posição pelo tempo e a aceleração é a taxa de variação da velocidade pelo tempo. A posição de um carro, medida em metros, depende do instante de tempo t, medido em s, através da equação $S(t) = t^2 + 4t - 32$ com $t \geq 0$. Determine a velocidade e a aceleração para $t = 2s$.

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Seja m o valor da derivada de segunda ordem da função $h(x) = 3x \div (x + 1/x)$ para $x = 1$. Calcule $m + 2$:

A

$\frac{2}{3}$

B

$\frac{1}{2}$

C

$\frac{3}{4}$

D

$\frac{2}{5}$

E

$\frac{1}{3}$

A alternativa B está correta.

Você entendeu o conceito da derivação em ordem superior!

gt; $h(x) = \frac{3x}{x+\frac{1}{x}} = \frac{3x^2}{x^2+1} \rightarrow h'(x) = \frac{6x\left(x^2+1\right) - 3x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{6x}{\left(x^2+1\right)^2}$

amp; $h''(x) = \left(\frac{6x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)' = \frac{6\left(x^2+1\right)^2 - 6x \cdot 2 \cdot \left(x^2+1\right) \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}$

amp; $h''(x) = \frac{6\left(x^2+1\right)\left[\left(x^2+1\right) - 4x^2\right]}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{6\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$

Assim:

$h''(1) = \frac{6(1-3.1)}{(1+1)^3} = -\frac{3}{2} = m$

Portanto, $2 + h''(1) = \frac{1}{2}$

Questão 2

A relação entre y e x é dada pela equação $yx^2 + \cos y = 1$. Determine a equação que representa a derivada de y em relação a x :

A

$2xy \div \left(\operatorname{sen} y - x^2\right)$

B

$xy \div \left(\operatorname{sen} y + x^2\right)$

C

$4xy \div \left(\cos y - x^2\right)$

D

$xy \div \left(\operatorname{sen} y - 2x^2\right)$

E

$xy \div \left(\operatorname{sen} y - x^2\right)$

A alternativa A está correta.

Você entendeu o conceito da derivação implícita!

Derivando termo a termo:

amp;; $(yx^2)' = y'x^2 + 2xy,$

amp;; $(\cos y)' = -\operatorname{sen} y$

Assim,

$$x^2 + 2xy - \operatorname{sen} y y' = 0 \to y'\left(x^2 - \operatorname{sen} y\right) + 2xy$$

$$= 0 \to y' = \frac{-2xy}{x^2 - \operatorname{sen} y} = \frac{2xy}{\operatorname{sen} y - x^2}$$

Vamos começar!

Neste vídeo, você entenderá mais sobre o conceito de derivada composta de funções e também verá alguns exemplos.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Derivada da função composta

A regra que permite o cálculo da derivada de uma função composta de funções reais é denominada de regra da cadeia. Esse nome vem do conceito que iremos realizar a derivada em uma sequência multiplicativa de derivadas, sendo o elo de uma cadeia.

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ e sua composta definida por $h(x) = f(g(x)) = fog(x)$.

O teorema nos diz que se $f(x)$ e $g(x)$ forem diferenciáveis, então $h(x)$ será diferenciável e sua derivada será calculada por: $h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$.

Por exemplo, seja a função $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2$.

Definindo a função $h(x)$ como sendo a composta de $f(x)$ com $g(x), h(x) = fog(x) = f(g(x))$.

Deseja-se calcular a derivada de $h(x)$. Assim: $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Como: $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = 2x$

Logo, $h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot 2x = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}, x \neq 0$

Atenção

Para usar essa regra, foi executado o cálculo de fora para dentro, em uma cadeia de cálculos. Em outras palavras, deriva inicialmente a função que está dentro da função e depois derivamos a função

Se analisarmos a derivada como uma taxa de variação de $h(x)$ em relação a x , então a taxa dependerá da taxa de variação de $f(x)$ em relação a $g(x)$ e de $g(x)$ em relação a x , por isso a derivada da composta é o produto das derivadas individuais aplicadas cada uma em sua variável de domínio.

As mesmas regras de derivação apresentadas para as principais funções, no módulo anterior, podem ser adaptadas agora para o caso de uma função composta. Por exemplo:

Se u é uma função na variável x , então valem as seguintes propriedades, em que $u' = u'(x)$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'(x)$$

$$[\operatorname{sen}(u)]' = (\cos u) \cdot u'$$

$$[\cos(u)]' = (-\operatorname{sen} u) \cdot u'$$

$$[\operatorname{tg}(u)]' = \left(\sec^2 u\right) \cdot u'$$

$$[\sec(u)]' = (\sec u) \cdot (\operatorname{tg} u) \cdot u'$$

$$[\operatorname{Ln}(x)]' = \frac{u'}{u}$$

E assim por diante.

Repare que a última fórmula foi o exemplo executado:

$h(x) = fog(x) = \ln\left(x^2\right) = \frac{\left(x^2\right)'}{x^2} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.

Pode também ser usada a notação de Leibniz para representar a regra da cadeia. Por exemplo, para o caso da função composta $h(x) = f(g(x))$. Se denominarmos $h(x) = y(x)$, então $f(u) = y(u)$ e $g(x) = u(x)$. Para se calcular a derivada de $h(x)$, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Isto é, deriva inicialmente a função de y em relação à variável $u e$, posteriormente, deriva a função u em relação à variável x .

Exemplo

Determine a derivada da função , sendo e

Resposta

Usando a regra para derivada para função composta:

$$h\prime(x) = f\prime(g(x)) \cdot g\prime(x)$$
$$f\prime(x) = 5x^4 \text{ então } f\prime(g(x)) = f\prime(\operatorname{sen} x) = 5\operatorname{sen}^4 x g\prime(x) = \cos x$$
$$\text{Assim, } h\prime(x) = f\prime(g(x)) \cdot g\prime(x) = 5\operatorname{sen}^4 x \cos x$$

Se $f(x) = \left(u^5(x)\right) \rightarrow f'(x) = 5\left(u^4(x)\right) u'(x)$, como $u(x) = \cos x$ e $u\prime(x) = -\operatorname{sen} x$

Regra da cadeia

Agora que já conhecemos a regra da cadeia para função composta, vamos usá-la para achar a derivada de uma função que é composição de várias funções. Assista ao vídeo!

Agora que já conhecemos a regra da cadeia para função composta, vamos usá-la para achar a derivada de uma função que é composição de várias funções. Assista ao vídeo!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo

Deseja-se obter a taxa de variação da função em relação à variável independente s, para quando Sabe-se que: é função de e vale é função de e vale depende de e vale

Exemplo

Deseja-se obter a taxa de variação da função em relação à variável independente s, para quando Sabe-se que: é função de e vale é função de e vale depende de e vale

Resposta

Usando a notação de Leibniz:

$$\frac{dg}{ds} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{ds}$$

$$g'(x) = \frac{dg}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t, t'(y) = \frac{dt}{dy} = \sec^2 y \text{ e } y'(s) = \frac{dy}{ds} = 2^s \ln 2$$

Assim

$$g'(s) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot (2t) \cdot \left(\sec^2 y\right) \left(2^s \ln 2\right).$$

Substituindo nas equações para

$$s = 0 \rightarrow y = 2^0 - 1 = 0 \rightarrow t = 1 + tg0 = 1 \rightarrow x = 1 + 1 = 2$$

$$g'(0) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot (2.1) \cdot \left(\sec^2 0\right) \left(2^0 \ln 2\right) = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$$

Resposta

Usando a notação de Leibniz:

$\frac{dg}{ds} = \frac{dg}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} \cdot \frac{dy}{ds}$

$g'(x) = \frac{dg}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t, t'(y) = \frac{dt}{dy} = \sec^2 y$ e $y'(s) = \frac{dy}{ds} = 2^s \ln 2$

Assim

$g'(s) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot (2t) \cdot \left(\sec^2 y\right) \left(2^s \ln 2\right).$

Substituindo nas equações para

$s = 0 \rightarrow y = 2^0 - 1 = 0 \rightarrow t = 1 + tg0 = 1 \rightarrow x = 1 + 1 = 2$

$g'(0) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot (2.1) \cdot \left(\sec^2 0\right) \left(2^0 \ln 2\right) = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}$

A regra da cadeia pode ser usada para calcular a derivada de uma função inversa conhecendo-se a derivada da função.

A regra da cadeia pode ser usada para calcular a derivada de uma função inversa conhecendo-se a derivada da função.

Derivada da função inversa

Derivada da função inversa

Seja $f(x)$ uma função que possua inversa. Seja $g(x)$ a função inversa de $f(x)$:

Seja $f(x)$ uma função que possua inversa. Seja $g(x)$ a função inversa de $f(x)$:

Assim, $f(g(x)) = x$ para todo x no domínio da função $g(x)$.

Assim, $f(g(x)) = x$ para todo x no domínio da função $g(x)$.

Derivando os dois lados da equação: $[f(g(x))]' = [x]' = 1$.

Derivando os dois lados da equação: $[f(g(x))]' = [x]' = 1$.

Se supormos que $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, aplicando a regra da cadeia: $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) = 1$. para todo x no domínio de $g(x)$.

Se supormos que $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, aplicando a regra da cadeia: $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) = 1$. para todo x no domínio de $g(x)$.

Assim, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

Assim, $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

Costuma-se dizer que a derivada da inversa é a inversa da derivada.

Costuma-se dizer que a derivada da inversa é a inversa da derivada.

Exemplo

Determine a derivada da função através da derivada da função .

Exemplo

Determine a derivada da função através da derivada da função .

Resposta

Como <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
</math> será a inversa de f(x), então: <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msup>
<mi>g</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mfrac>
<mn>1</mn>
<mrow>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
</mrow>
</mfrac>
</math>, mas

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>cos</mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE">→</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false"></mo>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>cos</mi>

```
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>arcsen</mi>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>.</mo>
</math>
```


Se chamarmos


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
 <mi>α</mi>
 <mo>=</mo>
 <mi>arcsen x</mi>
 <mi></mi>
 <mo stretchy="false">→</mo>
 <mi>sen α</mi>
 <mi></mi>
 <mo>=</mo>
 <mi>x cos α</mi>
 <mi></mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
 <mi></mi>
 <mo>=</mo>
 <msqrt>
  <mn>1</mn>
  <mo>−</mo>
  <msup>
   <mi>sen</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
    <mn>2</mn>
   </mrow>
  </msup>
  <mi>α</mi>
 </msqrt>
 <mo>=</mo>
 <msqrt>
  <mn>1</mn>
  <mo>−</mo>
  <msup>
   <mi>x</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
    <mn>2</mn>
   </mrow>
  </msup>
 </msqrt>
</math>
```


Então,


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msup>
  <mi>f'</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1"></mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>g</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mi>cos</mi>
 <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
```

```
  <mo stretchy="false">(</mo>
  <mi>arcsen x</mi>
  <mi></mi>
  <mo stretchy="false">)</mo>
  <mo>=</mo>
  <msqrt>
    <mn>1</mn>
    <mo>−</mo>
    <msup>
      <mi>x</mi>
      <mrow data-mjx-texclass="ORD">
        <mn>2</mn>
      </mrow>
    </msup>
  </msqrt>
</math> e <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
  <msup>
    <mi>g</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
    </mrow>
  </msup>
  <mo stretchy="false">(</mo>
  <mi>x</mi>
  <mo stretchy="false">)</mo>
  <mo>=</mo>
  <mfrac>
    <mn>1</mn>
    <mrow>
      <msup>
        <mi>f</mi>
        <mrow data-mjx-texclass="ORD">
          <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
        </mrow>
      </msup>
      <mo stretchy="false">(</mo>
      <mi>g</mi>
      <mo stretchy="false">(</mo>
      <mi>x</mi>
      <mo stretchy="false">)</mo>
      <mo stretchy="false">)</mo>
    </mrow>
  </mfrac>
  <mo>=</mo>
  <mfrac>
    <mn>1</mn>
    <msqrt>
      <mn>1</mn>
      <mo>−</mo>
      <msup>
        <mi>x</mi>
        <mrow data-mjx-texclass="ORD">
          <mn>2</mn>
        </mrow>
      </msup>
    </msqrt>
  </mfrac>
  <mo>.</mo>
</math>. Que é a derivada da função arcsen <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
  <mi>x</mi>
  <mo>.</mo>
</math>
```

Resposta

Como <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
</math> será a inversa de f(x), então: <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msup>
<mi>g</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mfrac>
<mn>1</mn>
<mrow>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
</mrow>
</mfrac>
</math>, mas

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>cos</mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE">→</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false"></mo>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>cos</mi>

<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>arcsen</mi>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>.</mo>
</math>

Se chamarmos

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
<mi>α</mi>
<mo>=</mo>
<mi>arcsen x</mi>
<mi></mi>
<mo stretchy="false">→</mo>
<mi>sen α</mi>
<mi></mi>
<mo>=</mo>
<mi>x cos α</mi>
<mi></mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
<mi></mi>
<mo>=</mo>
<msqrt>
<mn>1</mn>
<mo>−</mo>
<msup>
<mi>sen</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mn>2</mn>
</mrow>
</msup>
<mi>α</mi>
</msqrt>
<mo>=</mo>
<msqrt>
<mn>1</mn>
<mo>−</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mn>2</mn>
</mrow>
</msup>
</msqrt>
</math>

Então, <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msup>
<mi>f'</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1"></mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mi>cos</mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>

<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>arcsen x</mi>
<mi></mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<msqrt>
<mn>1</mn>
<mo>−</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mn>2</mn>
</mrow>
</msup>
</msqrt>
</math> e <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<msup>
<mi>g</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo>=</mo>
<mfrac>
<mn>1</mn>
<mrow>
<msup>
<mi>f</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
</mrow>
</msup>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>g</mi>
<mo stretchy="false">(</mo>
<mi>x</mi>
<mo stretchy="false">)</mo>
<mo stretchy="false">)</mo>
</mrow>
</mfrac>
<mo>=</mo>
<mfrac>
<mn>1</mn>
<msqrt>
<mn>1</mn>
<mo>−</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mrow data-mjx-texclass="ORD">
<mn>2</mn>
</mrow>
</msup>
</msqrt>
</mfrac>
<mo>.</mo>
</math>. Que é a derivada da função arcsen <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
<mi>x</mi>
<mo>.</mo>
</math>

Mão na massa

Questão 1

Determine a derivada da função $h(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$ para $x = 1$.

A

0

B

1

C

2

D

3

E

4

A alternativa B está correta.

A função $h(x)$ pode ser analisada como uma composição de funções:

Se $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = x^2 + x + 1$, assim $h(x) = f(g(x)) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$.

Portanto, $hl(x) = fl(g(x)) \cdot gl(x)$

$amp;; f'(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$ e $g\prime(x) = 2x + 1$

$amp;; h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)}(2x+1) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

Para

$x = 1 \rightarrow h\prime(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{21+1}{1^2+1+1} = \frac{3}{3} = 1.$

Assim, a alternativa correta é a letra B.

Questão 2

Determine a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ para $x = \pi^2$.

A

$\frac{1}{2\pi}$

B

$-\frac{1}{2\pi}$

C

0

D

2

E

3

A alternativa B está correta.

Para resolver a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ em $x = \pi^2$, precisamos primeiro encontrar a derivada da função em um ponto genérico $x)$ e depois avaliá-la em $x = \pi^2$.

A função é composta por duas funções: a função externa $\operatorname{sen}(u)$ e a função interna:

$u = \sqrt{x}$

Para derivar $f(x)$, aplicaremos a regra da cadeia.

A derivada <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <mi>sen</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>u</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
</math> em relação a <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <mi>u</mi>
</math> é <math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <mi>cos</mi>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>u</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>.</mo>
</math>

A derivada de $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$ em relação a x é:

$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Agora, aplicamos a regra da cadeia. A derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$ é:

$f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Simplificando, a derivada é:

$f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

Agora, substituímos $x = \pi^2$:

$f'\left(\pi^2\right) = \frac{\cos\left(\sqrt{\pi^2}\right)}{2\sqrt{\pi^2}}$

Sabemos que $\sqrt{\pi^2} = \pi$. Portanto, temos:

$f'\left(\pi^2\right) = \frac{\cos(\pi)}{2\pi}$

A função $\cos(\pi)$ é igual a $-1)$. Assim, a expressão se torna:

$f'\left(\pi^2\right) = \frac{-1}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi}$

Portanto, a derivada de $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ avaliada em $x = \pi^2$ é $-\frac{1}{2\pi}$

Questão 3

Determine a derivada da função $f(x) = \operatorname{arc\,cotg}\left(3x^3 + 1\right)$ para $x = 1$.

A

$8 \div 15$

B

$-8 \div 15$

C

$9 \div 17$

D

$-9 \div 17$

E

$1 \div 17$

A alternativa D está correta.

A função $h(x)$ pode ser analisada como uma composição de funções:

Se $g(x) = \operatorname{arccotg}(x) e h(x) = 3x^3 + 1, \text{assim } f(x) = g(h(x)) = \operatorname{arccotg}\left(3x^3 + 1\right)$

Portanto, $f'(x) = g\prime(h(x)) \cdot hl(x)$

$amp;; g'(h(x)) = -\frac{1}{1+(h(x))^2} \text{ e } h'(x) = 9x^2$

$mp;; f'(x) = g'(h(x)) \cdot h\prime(x) = -\frac{1}{1+(h(x))^2}\left(9x^2\right) = -\frac{9x^2}{1+(3x^3+}$

Para

$x = 1 \rightarrow f'(1) = -\frac{9 \cdot 1}{1+(3 \cdot 1+1)^2} = -\frac{9}{1+16} = -\frac{9}{17}$

Assim, a alternativa correta é a letra D.

Questão 4

Determine a equação da derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{\cos\left(x^2\right)}$ em relação à variável x .

A


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msup>
   <mi>f</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="ORD">
     <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
   </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mfrac>
   <mrow>
     <mi>x</mi>
     <mi>sen</mi>
     <mrow data-mjx-texclass="INNER">
       <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
       <msup>
         <mi>x</mi>
         <mn>2</mn>
       </msup>
       <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
     </mrow>
   </mrow>
   <mroot>
     <mrow>
       <msup>
         <mi>cos</mi>
         <mn>2</mn>
       </msup>
       <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
       <mrow data-mjx-texclass="INNER">
         <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
         <msup>
           <mi>x</mi>
           <mn>2</mn>
         </msup>
```

```
        <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
      </mrow>
    </mrow>
    <mn>3</mn>
  </mroot>
 </mfrac>
</math>
```


B


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msup>
  <mi>f</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
    <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mfrac>
  <mn>1</mn>
  <mn>3</mn>
 </mfrac>
 <mfrac>
  <mrow>
    <mi>sen</mi>
    <mrow data-mjx-texclass="INNER">
      <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
      <msup>
        <mi>x</mi>
        <mn>2</mn>
      </msup>
      <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
    </mrow>
  </mrow>
  <mroot>
    <mrow>
      <msup>
        <mi>cos</mi>
        <mn>2</mn>
      </msup>
      <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
      <mrow data-mjx-texclass="INNER">
        <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
        <msup>
          <mi>x</mi>
          <mn>2</mn>
        </msup>
        <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
      </mrow>
    </mrow>
    <mn>3</mn>
  </mroot>
 </mfrac>
</math>
```


C

```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msup>
  <mi>f</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mo>−</mo>
 <mfrac>
  <mn>2</mn>
  <mn>3</mn>
 </mfrac>
 <mfrac>
  <mrow>
   <mi>x</mi>
   <mi>sen</mi>
   <mrow data-mjx-texclass="INNER">
    <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
    <msup>
     <mi>x</mi>
     <mn>2</mn>
    </msup>
    <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
   </mrow>
  </mrow>
  <mroot>
   <mrow>
    <msup>
     <mi>cos</mi>
     <mn>2</mn>
    </msup>
    <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
    <mrow data-mjx-texclass="INNER">
     <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
     <msup>
      <mi>x</mi>
      <mn>2</mn>
     </msup>
     <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
    </mrow>
   </mrow>
   <mn>3</mn>
  </mroot>
 </mfrac>
</math>
```


D


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msup>
  <mi>f</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
```

```
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mfrac>
  <mn>2</mn>
  <mn>3</mn>
 </mfrac>
 <mfrac>
  <mrow>
   <mi>cos</mi>
   <mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
   <mrow data-mjx-texclass="INNER">
    <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
    <msup>
     <mi>x</mi>
     <mn>2</mn>
    </msup>
    <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
   </mrow>
  </mrow>
  <mroot>
   <mrow>
    <msup>
     <mi>sen</mi>
     <mn>2</mn>
    </msup>
    <mrow data-mjx-texclass="INNER">
     <mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
     <msup>
      <mi>x</mi>
      <mn>2</mn>
     </msup>
     <mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
    </mrow>
   </mrow>
   <mn>3</mn>
  </mroot>
 </mfrac>
</math>
```


E


```
<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML">
 <msup>
  <mi>f</mi>
  <mrow data-mjx-texclass="ORD">
   <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
  </mrow>
 </msup>
 <mo stretchy="false">(</mo>
 <mi>x</mi>
 <mo stretchy="false">)</mo>
 <mo>=</mo>
 <mfrac>
  <mn>1</mn>
  <mn>3</mn>
 </mfrac>
 <mfrac>
  <mrow>
   <mi>sen</mi>
```

<mrow data-mjx-texclass="INNER">
<mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mn>2</mn>
</msup>
<mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
</mrow>
</mrow>
<msqrt>
<mi>cos</mi>
<mo data-mjx-texclass="NONE"></mo>
<mrow data-mjx-texclass="INNER">
<mo data-mjx-texclass="OPEN">(</mo>
<msup>
<mi>x</mi>
<mn>2</mn>
</msup>
<mo data-mjx-texclass="CLOSE">)</mo>
</mrow>
</msqrt>
</mfrac>
</math>

A alternativa C está correta.

A função $h(x)$ pode ser analisada como uma composição de funções.

Logo,

$f(u(v(x)))$

Assim fica mais fácil através da representação de Leibniz:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}(-\operatorname{sen}(v)) \cdot 2x$$

Substituindo os valores das funções até ficarmos dependendo apenas de $2x$:

Assim, a alternativa correta é a letra C.

Questão 5

Seja a função $g(x) = 2 \operatorname{arc\,tg}(e^x)$. Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $g(x)$ no ponto $x = 0$.

A

2

B

1

C

3

D

4

E

0

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Use a regra da cadeia para determinar a derivada da função $f(x) = \operatorname{tg}\left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)$ para $x = 1.$

A

$-1/2\sec^2(\ln(\sqrt{2}))$

B

$1/2\sec^2(\ln(\sqrt{2}))$

C

$\sec(\ln(\sqrt{2}))$

D

$\sec^2(\sqrt{2})$

E

$\sec(\ln 2)$

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

A área de uma esfera é calculada por $4\pi R^2$, onde R è o raio da esfera. Se o raio da esfera varia com o tempo através da equação $R(t) = 4 \cdot \ln\left[t^2+1\right]$, para $t \geq 0$, determine a taxa de variação da área da efera para um instante t.

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Sejam as funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{(x^4+9)}$. Define-se a função $h(t) = f$ o $g(t)$. A função $h(t)$ representa a variação de posição de um foguete, medida em km, em relação à variável tempo (t), medida em minutos. Determine a velocidade instantânea do foguete para $t = 2$.

A

$\frac{1}{5}e^2 km/min$

B

$\frac{1}{5}e^2 km/min$

C

$\frac{1}{15}e^{15} km/min$

D

$\frac{16}{5}e^5 km/min$

E

$\frac{1}{5}e^5 km/min$

A alternativa D está correta.

Você entendeu o conceito da derivada da função composta!

$amp;;h'(t) = f'(g(t))g'(t)$

mas

<math xmlns="http://www.w3.org/1998/Math/MathML" display="block">
 <mtable displaystyle="true" columnspacing="1em" rowspacing="3pt">
  <mtr>
   <mtd>
    <msup>
     <mi>f</mi>
     <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
     </mrow>
    </msup>
    <mo stretchy="false">(</mo>
    <mi>u</mi>
    <mo stretchy="false">)</mo>
    <mo>=</mo>
    <msup>
     <mi>e</mi>
     <mi>u</mi>
    </msup>
    <mo stretchy="false">→</mo>
    <msup>
     <mi>f</mi>
     <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
     </mrow>
    </msup>
    <mo stretchy="false">(</mo>
    <mi>g</mi>
    <mo stretchy="false">(</mo>
    <mi>t</mi>
    <mo stretchy="false">)</mo>
    <mo stretchy="false">)</mo>
    <mo>=</mo>
    <msup>
     <mi>e</mi>
     <mrow data-mjx-texclass="ORD">
      <msqrt>
       <msup>
        <mi>x</mi>
        <mn>4</mn>
       </msup>
       <mo>+</mo>

```
          <mn>9</mn>
        </msqrt>
      </mrow>
    </msup>
  </mtd>
</mtr>
<mtr>
  <mtd></mtd>
</mtr>
<mtr>
  <mtd>
    <msup>
      <mi>g</mi>
      <mrow data-mjx-texclass="ORD">
        <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
      </mrow>
    </msup>
    <mo stretchy="false">(</mo>
    <mi>t</mi>
    <mo stretchy="false">)</mo>
    <mo>=</mo>
    <mfrac>
      <mrow>
        <mn>4</mn>
        <msup>
          <mi>x</mi>
          <mn>3</mn>
        </msup>
      </mrow>
      <mrow>
        <mn>2</mn>
        <msqrt>
          <msup>
            <mi>x</mi>
            <mn>4</mn>
          </msup>
          <mo>+</mo>
          <mn>9</mn>
        </msqrt>
      </mrow>
    </mfrac>
    <mo>=</mo>
    <mfrac>
      <mrow>
        <mn>2</mn>
        <msup>
          <mi>x</mi>
          <mn>3</mn>
        </msup>
      </mrow>
      <msqrt>
        <msup>
          <mi>x</mi>
          <mn>4</mn>
        </msup>
        <mo>+</mo>
        <mn>9</mn>
      </msqrt>
    </mfrac>
  </mtd>
```

```
  </mtr>
  <mtr>
    <mtd></mtd>
  </mtr>
  <mtr>
    <mtd>
      <msup>
        <mi>h</mi>
        <mrow data-mjx-texclass="ORD">
          <mi data-mjx-alternate="1">'</mi>
        </mrow>
      </msup>
      <mo stretchy="false">(</mo>
      <mi>t</mi>
      <mo stretchy="false">)</mo>
      <mo>=</mo>
      <mfrac>
        <mrow>
          <mn>2</mn>
          <msup>
            <mi>x</mi>
            <mn>3</mn>
          </msup>
        </mrow>
        <msqrt>
          <msup>
            <mi>x</mi>
            <mn>4</mn>
          </msup>
          <mo>+</mo>
          <mn>9</mn>
        </msqrt>
      </mfrac>
      <msup>
        <mi>e</mi>
        <mrow data-mjx-texclass="ORD">
          <msqrt>
            <msup>
              <mi>x</mi>
              <mn>4</mn>
            </msup>
            <mo>+</mo>
            <mn>9</mn>
          </msqrt>
        </mrow>
      </msup>
    </mtd>
  </mtr>
 </mtable>
</math>
```


então,

$h'(2) = \frac{2.8}{\sqrt{16+9}} e^{\sqrt{16+9}} = \frac{16}{5} e^5$

Questão 2

Use a regra da cadeia para derivar a função y em relação à variável t, sabendo que $y(x) = \operatorname{ctg} x$ e que $x(s) = s^3$ e $s(t) = t^2$:

A

$\frac{dy}{dt} = -4t^3 \sec^2(t^4)$

B

$\frac{dy}{dt} = \csc^2(t^6)$

C

$\frac{dy}{dt} = -6t^5 \csc^2(t^6)$

D

$\frac{dy}{dt} = t^5 \csc^2(t^6)$

E

$\frac{dy}{dt} = 3t^2 \cdot \sec^2(t^6)$

A alternativa C está correta.

Você entendeu o conceito da regra da cadeia!

amp;; $\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$, $\frac{dx}{ds} = 3s^2$ e $\frac{ds}{dt} = 2t$

amp;; $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$

amp;; $\frac{dy}{dt} = -\csc^2 x \cdot 3s^2 \cdot 2t$

Substituindo para ficar apenas a variável t:

amp;; $\frac{dy}{dt} = -\csc^2(s^3) \cdot 3(t^2)^2 \cdot 2t$

amp;; $\frac{dy}{dt} = -6t^5 \csc^2(t^6)$

Vamos começar!

Neste vídeo, você entenderá melhor os conceitos de derivação implícita e de ordem superior, além de explorar exemplos práticos que demonstram como aplicar essas técnicas em situações complexas de cálculo diferencial.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Derivação de Ordem Superior

Como já foi visto, a derivada de uma função real também é uma função real. Dessa forma, a função derivada pode possuir, por sua vez, também uma derivada.

Como já foi visto, a derivada de uma função real também é uma função real. Dessa forma, a função derivada pode possuir, por sua vez, também uma derivada.

Derivada superior

A derivação de uma função derivada é denominada de derivação de ordem superior.

Derivada de primeira ordem

A derivada de uma função, estudada até esse ponto, é denominada de derivada de primeira ordem.

Derivada de segunda ordem

A derivada da derivada é denominada de derivada de segunda ordem, e assim, sucessivamente.

Derivada superior

A derivação de uma função derivada é denominada de derivação de ordem superior.

Derivada de primeira ordem

A derivada de uma função, estudada até esse ponto, é denominada de derivada de primeira ordem.

Derivada de segunda ordem

A derivada da derivada é denominada de derivada de segunda ordem, e assim, sucessivamente.

Representamos a derivada de ordem superior n, n inteiro positivo, por

Representamos a derivada de ordem superior n, n inteiro positivo, por

$$f^{(n)}(x) \text{ ou } D^{(n)}f(x)$$

$$f^{(n)}(x) \text{ ou } D^{(n)}f(x)$$

Utilizando a notação de Leibniz, a derivada de segunda ordem é representada por:

Utilizando a notação de Leibniz, a derivada de segunda ordem é representada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

A derivada de terceira ordem é dada por:

A derivada de terceira ordem é dada por:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)$$

E a derivada de ordem n:

E a derivada de ordem n:

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{d}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)\right)$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{d}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)\right)$$

Derivação de ordem superior

Derivação de ordem superior

Assista ao vídeo e veja a aplicação da teoria em um exemplo de cálculo de derivação de ordem superior.

Assista ao vídeo e veja a aplicação da teoria em um exemplo de cálculo de derivação de ordem superior.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Derivação implícita

Até esse ponto, você trabalhou com a derivada de uma função real que apresenta uma função explícita, isto é, a função representada por meio de uma equação que depende da sua variável independente. Por exemplo:

Até esse ponto, você trabalhou com a derivada de uma função real que apresenta uma função explícita, isto é, a função representada por meio de uma equação que depende da sua variável independente. Por exemplo:

$$f(x) = 3\cos x + 5 \text{ ou } g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$$

$$f(x) = 3\cos x + 5 \text{ ou } g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$$

Em todas elas, a dependência com a variável x é expressa claramente.

Em todas elas, a dependência com a variável x é expressa claramente.

Em certos problemas matemáticos, porém, não temos como obter essa equação explicita para uma função. Nesses casos, a função será representada de uma forma implícita. Por exemplo, $x^2 + y\cos x + y^2 = 3$, verifica-se que, apesar de $y = f(x)$ estar representada implicitamente pela equação, não é possível obter uma equação explícita de y em função de x.

Em certos problemas matemáticos, porém, não temos como obter essa equação explicita para uma função. Nesses casos, a função será representada de uma forma implícita. Por exemplo, $x^2 + y\cos x + y^2 = 3$, verifica-se que, apesar de $y = f(x)$ estar representada implicitamente pela equação, não é possível obter uma equação explícita de y em função de x.

Em outras palavras, a equação $F(x, y) = k$, k real, representará a função $y = f(x)$.

Em outras palavras, a equação $F(x, y) = k$, k real, representará a função $y = f(x)$.

> Como, então, obter a derivada de uma função implícita? Na verdade, para se obter a derivada de uma função, não é necessário obter a equação explícita.

> Como, então, obter a derivada de uma função implícita? Na verdade, para se obter a derivada de uma função, não é necessário obter a equação explícita.

A operação matemática da derivada pode ser aplicada diretamente na equação implícita que relaciona a função com a sua variável independente. Esse tipo de operação é denominada de derivação implícita. Pois, se uma função em ($x, y)$ é igual a uma constante real k, então sua derivada é igual a 0.

A operação matemática da derivada pode ser aplicada diretamente na equação implícita que relaciona a função com a sua variável independente. Esse tipo de operação é denominada de derivação implícita. Pois, se uma função em ($x, y)$ é igual a uma constante real k, então sua derivada é igual a 0.

$$F(x, y) = k \rightarrow \frac{d(F(x,y))}{dx} = 0.$$

$$F(x, y) = k \rightarrow \frac{d(F(x,y))}{dx} = 0.$$

O método é derivar a equação implícita termo a termo, usando a Regra da Cadeia.

O método é derivar a equação implícita termo a termo, usando a Regra da Cadeia.

Deve ser lembrado que y é função de x, assim dy/dx não é zero, e sim y'.

Deve ser lembrado que y é função de x , assim dy/dx não é zero, e sim y' .

Por exemplo, se tivermos um termo y^6 , a derivação desse termo será $6yy = 6ydy/dx$.

Por exemplo, se tivermos um termo y^6 , a derivação desse termo será $6yy = 6ydy/dx$.

Às vezes, teremos que usar as regras de derivação.

Às vezes, teremos que usar as regras de derivação.

Por exemplo, o termo x^2y^2 , a derivação vai ter que usar a regra do produto, isto é, $2x^2 + x^2 2yy$.

Por exemplo, o termo x^2y^2 , a derivação vai ter que usar a regra do produto, isto é, $2x^2 + x^2 2yy$.

Atenção

Na equação da função derivada, podem aparecer termos relacionados a além dos relacionados à variável independente

Atenção

Na equação da função derivada, podem aparecer termos relacionados a além dos relacionados à variável independente

Derivação implícita

Derivação implícita

Veja neste vídeo a aplicação prática do método de derivação implícita, explorando como utilizar essa técnica para calcular derivadas de funções que não estão explicitamente definidas em termos de x.

Veja neste vídeo a aplicação prática do método de derivação implícita, explorando como utilizar essa técnica para calcular derivadas de funções que não estão explicitamente definidas em termos de x.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Seja $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - x + 4$, determine a derivada de terceira ordem para $x = 1$

A

198

B

202

C

288

D

312

E

296

A alternativa C está correta.

Como se deseja a derivada de terceira ordem, teremos que derivar três vezes a função.

amp;; $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - x + 4 \rightarrow f'(x) = 20x^4$

amp;; $f'(x) = 20x^4 + x^3 - 1 \rightarrow f''(x) = 80x^3 + 24x^2$

; $f''(x) = 80x^3 + 24x^2 \rightarrow f^{(3)}(x) = 240x^2$

Assim:

$$f^{(3)}(x) = 240x^2 + 48x \rightarrow f^{(3)}(1) = 240 \cdot 1 + 48 \cdot 1 = 288$$

Logo, a resposta correta é a letra C.

Questão 2

Um movimento circular acelerado tem equação da posição angular, medida em rad, em relação ao tempo dado por $\theta(t) = \pi + 2t + 10t^2$. Sabendo que a aceleração angular é derivada de segunda ordem da posição angular, em relação ao tempo, marque a alternativa que apresenta o valor da aceleração angular desse movimento, medida em rad/s^2:

A

$-20rad/s^2$

B

$-10rad/s^2$

C

$20rad/s^2$

D

$-5rad/s^2$

E

$5rad/s^2$

A alternativa C está correta.

Como se deseja a derivada de segunda ordem, teremos que derivar duas vezes a função:

$$\theta(t) = \pi + 2t + 10t^2 \rightarrow w(t) = \theta'(t) = 2 + 20t$$

$$w(t) = 2 + 20t \rightarrow \alpha(t) = w'(t) = \theta''(t) = 20rad/s^2$$

Logo, a resposta correta é a letra C.

Questão 3

Seja $f(x) = e^x \cos x$, determine a equação da derivada de segunda ordem de $f(x)$.

A

$2e^x \cos x$

B

$-e^x \operatorname{sen} x$

C

$-e^x \cos x$

D

$-2e^x \operatorname{sen} x$

E

$3e^x \operatorname{sen} x$

A alternativa D está correta.

Como se deseja a derivada de segunda ordem, teremos que derivar duas vezes a função.

Usando a regra do produto e as derivadas das funções $e^x e \cos x$:

$$f(x) = e^x \cos x \rightarrow f'(x) = e^x \cos x + e^x(-\operatorname{sen} x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Usando novamente a regra do produto e as derivadas das funções ex, $\cos x$ e sen x :

$$f'(x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) \rightarrow f''(x) =$$
$$= e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + e^x(-\operatorname{sen} x - \cos x) = -2e^x \operatorname{sen} x$$

Logo, a resposta correta é a letra D.

Questão 4

Seja a equação y sen $x + x^2 + 2$ sen $y = 0$, para $0 \leq x \leq \pi($ pi) e $0 \leq y \leq \pi$ (pi), que relaciona implicitamente a variável y em função de x, determine o valor da derivada de y em relação a x, para o ponto $x = 0$

A

$-\pi(pi) \div 2$

B

$\pi(\text{ pi }) \div 2$

C

0

D

$\pi(pi)$

E

$\pi(pi) \div 4$

A alternativa C está correta.

Derivando termo a termo, lembrando que y é função de x :

$$(y \operatorname{sen} x)' + \left(x^2\right)' + (2 \operatorname{sen} y)' = (0)'$$
$$y(\cos x) + y' \operatorname{sen} x + 2x + 2 \cos y y' = 0$$
$$(2x + y \cos x) + y'(\operatorname{sen} x + 2 \cos y) = 0$$

Assim, achando o valor de y' em função de x e y :

$$
\begin{aligned}
y'(\operatorname{sen} x + 2\cos y) &= -y\cos x - 2x \\
y' &= -\frac{y\operatorname{sen} x + 2x}{\operatorname{sen} x + 2\cos y}
\end{aligned}
$$

Na equação original:

$$x = 0 \rightarrow y \operatorname{sen} 0 + 0^2 + 2 \operatorname{sen} y = 0 \rightarrow \operatorname{sen} y = 0 \rightarrow y = 0$$

Substituindo para

$$x = 0 \text{ e } y = 0 \rightarrow y' = -\frac{0 \operatorname{sen} 0 + 2.0}{\operatorname{sen} 0 + 2\cos 0} = -\frac{0}{1} = 0$$

Logo, a resposta correta é a letra C.

Questão 5

Determine o coeficiente da reta tangente ao gráfico da função $y = g(x)$ no ponto $x = 1$ e $y = 1$, sabendo que $2x^3 + 2(y+1)^3 - 9x(y+1) = 0$

A

$1/5$

B

$4/5$

C

$3/5$

D

$7/5$

E

$4/7$

A alternativa B está correta.

Lembre-se de que o coeficiente angular da reta tangente é a derivada da função y no ponto.

Derivando a equação implícita termo a termo:

$$\left(2x^3\right)' \rightarrow 6x^2, \left(2(y+1)^3\right)' \rightarrow 6(y+1)^2 y' \in (9x(y+1))' \rightarrow 9(y+1) + 9xy'$$

Assim

$$\left(2x^3 + 2(y+1)^3 - 9x(y+1)\right)' = 0 \rightarrow 6x^2 + 6(y+1)^2 y' - 9(y+1) - 9xy' = 0$$

Manipulando matematicamente:

$$y'\left(6(y+1)^2 - 9x\right) = -6x^2 + 9(y+1) = 3\left(3(y+1) - 2x^2\right)$$

$$y' = 3\frac{3y - 2x^2 + 3}{<}/p >< p > 3\left(2(y+1)^2 - 3x\right) = \frac{3y - 2x^2 + 3}{2(y+1)^2 - 3x}$$

Assim, para $x = 1$ e $y = 1$, $y' = \frac{3-2+3}{2 \cdot 4 - 3} = \frac{4}{5}$, sendo a alternativa B a verdadeira.

Questão 6

Determine a derivada de segunda ordem de y em relação a x , sabendo que $e^y - 3xy = 2$ para quando $x = 0$.

A

$\frac{9}{2} \ln 2 + 4$

B

$\frac{9}{2} \ln\ 2 - \frac{9}{4} \ln^2(2),$

C

$\ln 2 - \ln^2 2$

D

$\frac{9}{2} \ln 8 - 4$

E

$\frac{5}{2} \ln 2$

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

Sabe-se que a velocidade é a taxa de variação da posição pelo tempo e a aceleração é a taxa de variação da velocidade pelo tempo. A posição de um carro, medida em metros, depende do instante de tempo t, medido em s, através da equação $S(t) = t^2 + 4t - 32$ com $t \geq 0$. Determine a velocidade e a aceleração para $t = 2s$.

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Seja m o valor da derivada de segunda ordem da função $h(x) = 3x \div (x + 1/x)$ para $x = 1$. Calcule $m + 2$:

A

$\frac{2}{3}$

B

$\frac{1}{2}$

C

$\frac{3}{4}$

D

$\frac{2}{5}$

E

$\frac{1}{3}$

A alternativa B está correta.

Você entendeu o conceito da derivação em ordem superior!

$$h(x) = \frac{3x}{x+\frac{1}{x}} = \frac{3x^2}{x^2+1} \rightarrow h'(x) = \frac{6x\left(x^2+1\right) - 3x^2 \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{6x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$h''(x) = \left(\frac{6x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)' = \frac{6\left(x^2+1\right)^2 - 6x \cdot 2 \cdot \left(x^2+1\right) \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$h''(x) = \frac{6\left(x^2+1\right)\left[\left(x^2+1\right) - 4x^2\right]}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{6\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Assim:

$h''(1) = \frac{6(1-3.1)}{(1+1)^3} = -\frac{3}{2} = m$

Portanto, $2 + h''(1) = \frac{1}{2}$

Questão 2

A relação entre y e x é dada pela equação $yx^2 + \cos y = 1$. Determine a equação que representa a derivada de y em relação a x :

A

$2xy \div \left(\operatorname{sen} y - x^2\right)$

B

$xy \div \left(\operatorname{sen} y + x^2\right)$

C

$4xy \div \left(\cos y - x^2\right)$

D

$xy \div \left(\operatorname{sen} y - 2x^2\right)$

E

$xy \div \left(\operatorname{sen} y - x^2\right)$

A alternativa A está correta.

Você entendeu o conceito da derivação implícita!

Derivando termo a termo:

amp;; $(yx^2)' = y'x^2 + 2xy$

amp;; $(\cos y)' = -\operatorname{sen} y$

Assim,

$$x^2 + 2xy - \operatorname{sen} y y' = 0 \to y'\left(x^2 - \operatorname{sen} y\right) + 2xy$$

$$= 0 \to y' = \frac{-2xy}{x^2 - \operatorname{sen} y} = \frac{2xy}{\operatorname{sen} y - x^2}$$

Considerações finais

Ao longo deste conteúdo, foi possível definir e aplicar o conceito da derivada de uma função real. Definimos a derivação através de uma abordagem gráfica e de uma abordagem analítica, associando o conceito ao de taxa de variação instantânea e ao coeficiente angular da reta tangente à função.

A definição da derivada foi utilizada para se obter diversas regras de derivação que facilitam o cálculo da derivada. Uma lista de derivadas das principais funções foi disponibilizada.

Posteriormente, o conceito da derivada foi aplicado na regra da cadeia, na derivação de funções compostas, na derivação de ordem superior e finalmente na derivação implícita.

Explore +

Para saber mais sobre os assuntos tratados neste tema, pesquise na internet.

- O curso de unidade: Derivadas – Definições e Regras Básicas e Regra da Cadeia, no site da Khan Academy.

Referências

HALLET H. *et al*. **Cálculo**: a uma e a várias variáveis. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo com aplicações**. 6. ed. São Paulo: LTC, 2003.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008.