Matrizes e determinantes

Aplicação dos conceitos de matrizes e determinantes na Álgebra Linear.

Prof. Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Propósito

Definir matrizes e determinantes e aplicar seus conceitos nos problemas da Álgebra Linear.

Objetivos

- Aplicar a definição e representação de matrizes.
- Aplicar as operações básicas das matrizes.
- Calcular determinantes de uma matriz.
- Aplicar o conceito de matrizes inversas.

Definição e representação de matrizes

Em várias aplicações da nossa vida prática, utilizamos uma forma de organizar e apresentar os dados empregando linhas e colunas. Esta forma retangular é denominada de matriz, a qual tem grande importância e aplicação na Álgebra Linear, além de ser muito utilizada nos meios computacionais, permitindo a resolução de sistemas e transformações lineares complexas.

Apesar de ter um caráter organizacional, a matriz também é um objeto matemático de grande relevância. Sua importância aumentou atualmente com o avanço da era computacional, sendo um elemento muito empregado pelos computadores, que têm grande habilidade de trabalhar com linhas e colunas.

Vamos agora definir formalmente uma matriz

Sejam m e n dois inteiros positivos e $M_{m,n}$ o conjunto de todos os pares ordenados (i, j), tais que $l \leq i \leq m, l \leq j \leq n$. Define-se M como uma matriz, $m \times n(m$ por $n)$, com elementos a_{ij} que pertencem a um conjunto específico.

Assim, a matriz M, mxn, será uma tabela com m .*n* elementos, disposta em m linhas e n colunas.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Neste caso, tenha a seguinte atenção:

⚠

Atenção

Matriz é um agrupamento (conjunto) de elementos ordenados em uma forma retangular com linhas e colunas. Dizernos que éo elemento (entrada ou termo) da matriz Mina posição . Outra forma de representar o elemento da matriz que se encontra na linha e colunajé

Além da representação apresentada, uma matriz M, mxn, pode ser representada de uma forma mais compacta como:

$$M = [a_{ai}]_{m \times n} \text{ com } i, j, m \text{ e } n \text{ inteiros positivos e } l \leq i \leq m \text{ e } l \leq j \leq n$$

Os elementos serão localizados pelos valores de i e j, que serão denominados de ordem. Por exemplo: o elemento que se encontra na coluna de ordem 2 e linha de ordem 3 da matriz N vale 45 .

> Os elementos das matrizes podem ser oriundos de qualquer conjunto de dados quantitativo ou qualitativo. No caso dos quantitativos, podem ser números reais ou complexos. Para o caso da Álgebra Linear, abordada neste tema, os elementos serão números reais.

A simbologia adotada utiliza letras maiúsculas para se denotar uma matriz e letras minúsculas para os elementos de uma matriz. Por exemplo:

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$$

O tamanho da matriz é definido pelo número de linhas (m) e de colunas (n) que ela possui.

A i-ésima linha da matriz M , ou linha de ordem i , será $[a_{i1} 1 a_{i2} \ldots a_{in}]$, com n elementos. A j-ésima coluna da matriz M , ou coluna de ordem j , será a seguinte, com m elementos:

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Uma sala de aula tem 5 alunos com número de matriculas $1, 2, 3, 4$ e 5 , que cursam três matérias, Matemática (M) , Português (P) e Ciências (C) . A tabela abaixo apresenta a média dos alunos em cada matéria.

Matéria\Aluno	1	3	4	2	5
M	7,2	8,1	5,6	9,1	5,3
C	8,9	7,1	5,1	9,0	7,4
P	8,3	7,5	6,4	8,9	6,6

Organize os dados em uma matriz, denominada de N , em que cada coluna representa a média de uma matéria, na ordem, Matemática, Português e Ciências, e cada linha, seguindo a ordem da matricula, representa o aluno; responda:

a) Qual é o tamanho da matriz?
b) Qual é a linha de ordem 3?
c) Qualéa coluna de ordem 2 ?
d) Que elemento se encontra na quarta linha e segunda coluna?
e) Qual é o elemento $n_{1,3}$?

Atenção

Atenção, pois a matriz pedida é diferente da ordem da tabela apresentada.

Solução:

Coletando os dados na tabela se tem:

$$N = \begin{bmatrix} 7,2 & 8,3 & 8,9 \\ 9,1 & 8,9 & 9,0 \\ 8,1 & 7,5 & 7,1 \\ 5,6 & 6,4 & 5,1 \\ 5,3 & 6,6 & 7,4 \end{bmatrix}$$

A) A matriz N terá tamanho de 5×3 , isto é, 5 linhas e 3 colunas.

B) Sua linha de ordem 3 será $[8,17,57,1]$, que corresponde à nota do aluno de matrícula $n°3$.

C) Sua coluna de ordem 2, cujos elementos correspondem às médias obtidas em português pelos cinco alunos, será $\begin{vmatrix} 8,3 \\ 8,9 \\ 7,5 \\ 6,4 \\ 6,6 \end{vmatrix}$

D) 0 elemento que se encontra na quarta linha e segunda coluna é o 6,4 , que corresponde à nota obtida em português pelo aluno de matrícula $n°4$.

E) Por fim, o elemento $n_{1\times3}$ corresponde ao elemento da primeira linha e terceira coluna, que tem o valor 8,9, correspondendo à nota em Ciências do aluno de número de matrícula 1 .

As **matrizes** cujas entradas são números reais serão objetos de um espaço vetorial. Assim, pode-se definir um espaço vetorial cujos elementos são matrizes *m x n* com elementos (entradas) reais. Logo, será um conjunto, não vazio, fechado para adição e multiplicação por um real e atenderá a todas as propriedades de espaço vetoriais, já estudadas.

Matrizes

Em outras palavras, são uma classe de objetos matemáticos que apresentam propriedades algébricas.

Classificação de matrizes

Dependendo do seu tamanho e/ou valores de seus elementos, as matrizes podem receber algumas denominações. Serão descritas as principais e será dado um exemplo de cada.

Matriz (ou vetor) linha

Quando $m = 1$, diz-se que a matriz será uma matriz (ou vetor) linha.

$$< br > L = \left[< br > 3 \quad amp;4 \quad amp;5 \quad amp;8 < br > \right], \text{com } L_{1\times4} < br >$$

Matriz ou vetor coluna

Quando $n = 1$, diz-se que a matriz será uma matriz (ou vetor) coluna.

$$< br > C = \begin{bmatrix} < br > 38 \\ < br > 41 \\ < br > 67 < br > \end{bmatrix}, \text{com } C_{3\times1} < br >$$

Matriz quadrada

Quando $m = n$, diz-se que a matriz é uma matriz quadrada.

$$< br > N = \begin{bmatrix} < br > 1 & amp;4 & amp;6 \\ < br > 0 & amp;2 & amp;-1 \\ < br > -2 & amp;3 & amp;4 < br > \end{bmatrix}, \text{com } N_3 \text{ ou } N_{3\times3} < br >$$

Saiba mais

Para o caso da matriz quadrada de ordem n, os elementos do tipo a1 1, a2 2, ...,an n formam a diagonal principal da matriz. Os elementos a1n, a2(n-1), ...,an 1 formam a diagonal secundária da matriz. Repare que os elementos da diagonal secundária têm i + j = n + 1. A soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada é denominada de traço da matriz.

Matriz nula

Matriz nula será aquela na qual todos elementos são iguais a zero.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{com } O_{3\times2}$$

Matriz oposta

Matriz oposta será a matriz obtida pela multiplicação de todos os termos de uma matriz por (-1).

Matriz diagonal

Matriz diagonal será a matriz quadrada na qual todos os elementos, fora da diagonal principal, são nulos.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{com } D_3 \text{ ou } D_{3\times3}$$

Matriz identidade

Matriz identidade é uma matriz diagonal, com todos os termos da diagonal principal iguais a um. Assim, será uma matriz quadrada na qual todos os elementos da diagonal principal são iguais a um e os demais elementos zero.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ com } I_3 \text{ ou } I_{3\times3}$$

Matriz triangular superior

Matriz triangular superior é a matriz quadrada na qual todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, para todo i > j se tem ai j = 0.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ triangular superior de ordem 4 ou } 4\times4$$

Matriz triangular inferior

Matriz triangular inferior é a matriz quadrada na qual todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ triangular inferior de ordem 4 ou } 4 \times 4$$

Matriz simétrica

Matriz simétrica é uma matriz quadrada com elementos $a_{ij} = a_{ji}$, isto é, os termos situados simetricamente em relação à matriz principal são iguais.

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \text{com } S_3 \text{ ou } S_{3\times3}$$

Matriz antissimétrica

Matriz antissimétrica é uma matriz quadrada com elementos $a_{ij} = -a_{ji}$, assim, todos os termos simétricos em relação à matriz principal são números reais simétricos entre si, e os elementos da diagonal principal serão nulos.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & -8 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \text{ com } S_3 \text{ ou } S_{3\times3}$$

Igualdade entre matrizes

Uma primeira operação definida para matrizes é a igualdade entre elas. Duas matrizes serão iguais se tiverem todos os seus elementos iguais.

$$M_{mxn} = N_{m\times n} \leftrightarrow m_{ij} = n_{ij} \forall i, j \text{ tal que } l \leq i \leq m \text{ e } l \leq j \leq n$$

Assim, obrigatoriamente, duas matrizes iguais terão o mesmo tamanho.

Exemplo:

Determine o valor de $a + b$, sabendo que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

é igual à matriz

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ b & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução:

Pela definição de igualdades entre matrizes de $M = N$, todos os elementos na mesma posição devem ser iguais. Assim, comparando as duas matrizes $a = 2$ e $b = 3$.

Portanto, $a + b = 2 + 3 = 5$

Teoria na prática

Um pesquisador coletou alguns dados referentes à temperatura média diária de quatro cidades durante uma semana.

Cidade/Dia da Semana	Seg	Qua	Dom	Ter	Sab	Sex	Qui
Diamantina	*18,9*	*18,9*	*19,0*	*19,1*	*19,2*	*19,3*	*19,3*
Amarantes	*23,1*	*23,5*	*24,0*	*23,8*	*23,8*	*23,6*	*23,4*
Cuíca	*18,1*	*17,9*	*17,8*	*17,7*	*17,8*	*18,0*	*18,2*
Bom Pastor	*32,3*	*32,1*	*32,0*	*31,9*	*32,0*	*32,2*	*32,3*

Tabela: Temperatura média diária.
Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Obs.: Temperaturas medidas em graus Celsius.

Organize os dados em uma matriz, denominada de *T*, em que cada coluna representa as temperaturas médias diárias de uma cidade, pela ordem alfabética das cidades, e cada linha, seguindo a ordem do dia da semana, iniciando no domingo:

a) Qual é o tamanho da matriz?

b) Qual é a linha de ordem 4?

c) Qual é a coluna de ordem 3?

d) Que elemento se encontra na quarta linha e segunda coluna?

e) Qual é o elemento t_2, 4?

Definição e representação de matrizes: Teoria na prática

Neste vídeo, conheça mais sobre definição e representação de matrizes.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Qual o tamanho da Matriz $B=\begin{bmatrix} 1 & amp;4 & amp;1 & amp;7 & amp;5 \\ 0 & amp;3 & amp;3 & amp;1 & amp;9 \\ 2 & amp;4 & amp;1 & amp;1 & amp;0 \end{bmatrix}$?

A 5 × 3

B 3 × 5

C 15 × 1

D 1 × 15

A alternativa B está correta.

O tamanho da matriz é dado pelo número de linhas (3) e o número de colunas (5).

Questão 2

Marque uma alternativa que apresenta uma matriz identidade de ordem 3.

A $\begin{bmatrix} 1 & amp;1 & amp;1 \\ 1 & amp;1 & amp;1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 1 & amp;1 \\ 1 & amp;1 \\ 1 & amp;1 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & amp;0 & amp;0 \\ 0 & amp;1 & amp;0 \\ 0 & amp;0 & amp;1 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & amp;1 & amp;1 \\ 1 & amp;1 & amp;1 \\ 1 & amp;1 & amp;1 \end{bmatrix}$

A alternativa C está correta.

Uma matriz identidade de ordem 3 é uma matriz quadrada 3 × 3 na qual os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais nulos.

Questão 3

Marque a alternativa que não apresenta uma característica da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & amp;-2 & amp;3 \\ 2 & amp;1 & amp;0 \\ -3 & amp;0 & amp;1 \end{bmatrix}:$$

A É uma matriz quadrada.

B Os elementos de sua diagonal principal são todos iguais a *1*.

C O elemento $c_{2,\,1}$ vale *2*.

D É uma matriz antissimétrica.

A alternativa D está correta.

A matriz é quadrada, pois o número de linha (3) é igual ao número de colunas (3).

Os elementos da diagonal principal são os elementos ci, i, com i = 1, 2, 3, assim são todos iguais a 1.

O elemento c2, 1 é o elemento da segunda linha e primeira coluna, sendo 2.

A matriz não é antissimétrica. Apesar dos elementos simétricos em relação à diagonal principal terem mesmo módulo e sinal contrário, para ser antissimétrica, a diagonal principal deve ter todos os elementos nulos.

Questão 4

Marque a alternativa que apresenta uma matriz que tem as seguintes características: quadrada, triangular inferior e traço igual a 7.

A $\begin{bmatrix} 3 & amp;0 & amp;0 \\ 1 & amp;4 & amp;0 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 3 & amp;0 & amp;0 \\ 1 & amp;5 & amp;0 \\ 0 & amp;3 & amp;-1 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 3 & amp;1 & amp;2 \\ 0 & amp;5 & amp;1 \\ 0 & amp;0 & amp;-1 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 7 & amp;0 \\ 0 & amp;7 \\ 7 & amp;0 \end{bmatrix}$

A alternativa B está correta.

Veja a solução no vídeo, a seguir.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 5

Determinada matriz é triangular superior de ordem 3. Sabe-se que os elementos da matriz seguem as seguinte regras $\left\{ \begin{array}{c} m_{ij} = i + j, \text{ se } i = j \\ m_{ij} = i + 2j, \text{ se } j \\ gt;i \end{array} \right.$

Determine o valor da soma $m_{1,3} + m_{2,2} + m_{3,1}$:

A 11

B 9

C 21

D 13

A alternativa A está correta.

Se a matriz é triangular superior de ordem 3, então tem tamanho 3×3 e todos os elementos abaixo da diagonal principal, isto é, $j lt; i$, são nulos.

Pela regra dos elementos

$$< br > m_{1,3} = 1 + 2.3 = 7, m_{2,2} = 2 + 2 = 4 e m_{3,1} = 0 < br >$$

Assim,

$$< br > m_{1,3} + m_{2,2} + m_{3,1} = 7 + 4 + 0 = 11 < br >$$

Questão 6

Determinada matriz B é uma matriz oposta à matriz A. Sabe-se que a matriz A é uma matriz simétrica de ordem 3. Alguns elementos de A são definidos por

$$< br > \begin{cases} < br > a_{ij} = 2i - j, \text{ para } i = j \\ < br > a_{ij} = j - 2i + 2, \text{ para } i \\ gt; j < br > \end{cases} < br >$$

Determine o valor do traço da matriz B mais o elemento $b_{1,3}$.

A 4

B −3

C −4

D 3

A alternativa B está correta.

Veja a solução no vídeo, a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Marque a alternativa que apresenta uma matriz que tenha um tamanho $3x2$ e cujos elementos são

$$m_{ij} = i + 2j$$

A $\begin{bmatrix} 3 & amp;4 & amp;5 \\ 5 & amp;6 & amp;7 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 3 & amp;5 & amp;7 \\ 4 & amp;6 & amp;8 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 3 & amp;5 \\ 4 & amp;6 \\ 5 & amp;7 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 3 & amp;4 \\ 5 & amp;6 \\ 7 & amp;8 \end{bmatrix}$

A alternativa C está correta.

Você entendeu o conceito da definição e representação de matrizes.

Se observarmos o tamanho da matriz pedida de $3x2$, as únicas opções possíveis seriam a letra C ou D.

As matrizes da letra A e B são matrizes de tamanho $2x3$.

Calculando os elementos: i é a ordem da linha e j a ordem da coluna, assim:

$$amp; a_{11} = 1 + 2 \times 1 = 3 a_{12} = 1 + 2 \times 2 = 5$$
$$amp; a_{21} = 2 + 2 \times 1 = 4 a_{22} = 2 + 2 \times 2 = 6$$
$$amp; a_{31} = 3 + 2 \times 1 = 5 a_{32} = 3 + 2 \times 2 = 7$$

Portanto, a opção correta só pode ser a letra C.

Questão 2

Uma matriz A é simétrica de ordem 3 , com elementos da diagonal principal igual a 1 $e a_{12} = a_{13} = 3$ e $a_{23} = 4$. A matriz B é igual à matriz A .

Determine a soma $b_{32} + b_{33} + b_{12}$, em que b_{ij} é o elemento da matriz B localizado na linha i e na coluna j .

A 7

B 8

C 9

D 10

A alternativa B está correta.

Pelo enunciado, temos $\begin{bmatrix} 1 & amp;3 & amp;3 \\ - & amp;1 & amp;4 \\ - & amp;1 & \end{bmatrix}$
Como A é simétrica, ela apresenta os elementos $a_{ij} = a_{ji}$.

Assim $\begin{bmatrix} 1 & amp;3 & amp;3 \\ 3 & amp;1 & amp;4 \\ 4 & amp;4 & amp;1 \end{bmatrix}$

Como $B = A$, assim $b_{ij} = a_{ij}$.

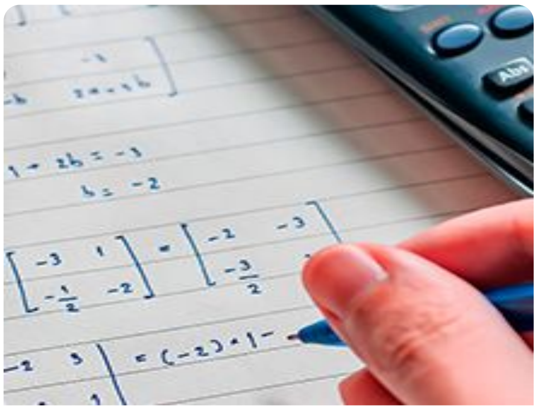
Portanto,

$b_{32} = a_{32} = 4, b_{33} = a_{33} = 1$ e $b_{12} = a_{12} = 3$.

Assim,

$b_{32} + b_{33} + b_{12} = 4 + 1 = 3 = 8$

Adição, subtração e multiplicação de matrizes



A matriz m x n será objeto de um espaço vetorial matricial que conterá todas as matrizes de tamanho m x n. Desta forma, como em qualquer espaço vetorial, a operação da adição e multiplicação por real será definida e fechada no referido espaço.

Neste módulo, apresentaremos estas operações, assim como a operação da transposição e a operação da multiplicação de matrizes, ressaltando que esta última, para ser definida, requer que as matrizes tenham certas características.

Vimos que duas matrizes serão iguais **somente** se tiverem o mesmo tamanho e se todos os seus elementos (termos ou entradas) forem iguais.

Como as matrizes *m x n* serão um objeto de um espaço vetorial matricial *m x n*, assim este espaço apresentará a operação da adição e da multiplicação por um número real, além de ser fechado para as tais. Vamos, agora, definir estas duas operações.

Multiplicação por um número real

Seja a matriz *M* de tamanho *m x n* e um número real ***k***. A multiplicação da matriz *M* pelo número real ***k*** terá como resultado uma matriz de mesmo tamanho que *M*, na qual cada elemento será obtido pela multiplicação do elemento da matriz *M* pelo número ***k***.

Exemplo:

Seja a matriz

$N = 3M \text{ com } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz N :

Solução:

Usando a definição da operação por um número real, a matriz N também será uma matriz 2×3 e seus elementos serão:

$$N = 3 \times M \rightarrow N = 3 \times \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 3 \times 1 & 3 \times 0 & 3 \times -1 \\ 3 \times 2 & 3 \times 1 & 3 \times 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

Adição de matrizes

Se as matrizes *M* e *N* tiverem o mesmo tamanho, então a adição (soma) entre as matrizes *M* e *N*, simbolizada por *M + N*, terá como resultado uma matriz de mesmo tamanho com termos obtidos pela soma dos termos correspondentes em cada matriz.

Assim, a adição de matrizes será uma operação comutativa, isto é, *M + N = N + M*. Além disso, *M + 0 = 0 + M = M*, em que *0* é a matriz nula.

Subtração de matrizes

Se for desejada a subtração entre duas matrizes *M* e *N*, simbolizada por *M − N*, a operação será obtida pela multiplicação da matriz *N* por (*−1*) e depois somada à matriz *M*.

Assim, cada termo da matriz obtido pela subtração será a subtração do termo correspondente da matriz *M* pelo termo correspondente da matriz *N*.

Comentário

Só é definida adição e subtração de duas matrizes se elas tiverem o mesmo tamanho, e o resultado será uma matriz de mesmo tamanho das que fazem parte da operação.

Exemplo:

Seja a Matriz

$$M = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{array}\right] \text{ e } N = \left[\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right]$$

Obtenha $M + N, M - N$ e $N - M$.

Solução:

Etapa 1

$$P = M + N = \left[\begin{array}{cc} 1+3 & amp; 2+1 \\ 3+(-1) & amp; -1+0 \\ 0+1 & amp; 4+2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 4 & amp; 3 \\ 2 & amp; -1 \\ 1 & amp; 6 \end{array}\right]$$

Etapa 2

$$Q = M - N = \begin{bmatrix} 1-3 & amp; 2-1 \\ 3-(-1) & amp; -1-0 \\ 0-1 & amp; 4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & amp; 1 \\ 4 & amp; -1 \\ -1 & amp; 2 \end{bmatrix}$$

Etapa 3

$$R = N - M = \begin{bmatrix} 3-1 & amp; 1-2 \\ -1-3 & amp; 0-(-1) \\ 1-0 & amp; 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & amp; -1 \\ -4 & amp; 1 \\ 1 & amp; -2 \end{bmatrix}$$

Observe que as três matrizes têm o mesmo tamanho da matriz *M* e *N*.

Além disso, a matriz $Q = (-1) \times R = -R$, como era o esperado, pois

$$Q = M - N = (-1) \times (N - M) = (-1)R.$$

A próxima operação a ser definida será a multiplicação entre matrizes. É óbvio que poderia ser determinada uma operação usando o mesmo critério de multiplicar termo a termo correspondente, como foi o caso da adição de matrizes, porém este tipo de operação não teria muita utilidade nos problemas que envolvem matrizes.

Desta forma, a operação de multiplicação de matrizes é definida de uma forma um pouco diferente, com grande aplicação no cálculo de sistemas lineares de equações.

Multiplicação de matrizes

Seja uma matriz *M* de tamanho *m x p* e uma matriz *N* de tamanho *p x n*. O produto entre as matrizes *M* e *N*, simbolizado por *P = M N*, será uma matriz de tamanho *m x n*, com o elemento da linha de ordem ***i*** e coluna ***j*** obtido pela regra abaixo.

$$p_{ij} = m_{i1} \times n_{1j} + m_{i2} \times n_{2j} + \ldots + m_{ip} \times n_{pj}$$

Vamos explicar esta regra de montagem de outra forma. Para calcular o elemento da matriz produto que se encontra na linha de ordem ***i*** e coluna de ordem ***j***:

Etapa 1

Separa-se a linha *i* da primeira matriz ($m_{i\,x}$, com *x* variando de *1* até ***p***).

Etapa 2

Separa-se a coluna *j* da segunda matriz ($n_{x\,j}$, com *x* variando de *1* até ***p***).

Etapa 3

Depois, multiplica-se elemento a elemento, isto é, $m_{i\,x} \times n_{x\,j}$ para o mesmo valor de ***x***.

Etapa 4

O elemento $p_{i\,j}$ será obtido pela soma destes produtos.

Uma observação: só existe produto de matrizes nas quais o número de colunas da primeira matriz (p) é igual ao número de linhas da segunda matriz(p).

$$P_{m\,x\,n} = M_{m\,x\,\boxed{p}}\; N_{\boxed{p}\,x\,n}$$

Exemplo:

Determine a multiplicação das matrizes.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução:

Observe que a matriz *M* é do tamanho *2 × 3* e a matriz *N* de tamanho *3 × 2*, assim é possível se executar o produto *P = M N*, e a matriz *P* terá um tamanho *2 × 2*.

Calculando os termos da matriz *P*:

Linha 1, coluna 1

Para se obter o termo da primeira linha $(i = 1)$ e primeira coluna $(j = 1)$

$$< br > p_{1,1} = 1 \times 2 + 0 \times 1 + 2 \times 2 = 2 + 0 + 4 = 6 < br >$$

Linha 1, coluna 2

Para se obter o termo da primeira linha $(i = l)$ e segunda coluna $(j = 2)$.

Separa-se a linha da matriz $M \left[\begin{array}{lll} 1 & amp;0 & amp;2 \end{array}\right.$] e a coluna da matriz $N \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right]$,
e executa-se o produto termo a termo assim:

$$< br > p_{1,2} = 1 \times 3 + 0 \times 0 + 2 \times (-1) = 3 + 0 - 2 = 1 < br >$$

Linha 2, coluna 1

Para se obter o termo da segunda $(i = 2)$ e primeira coluna $(j = 1)$.

Separa-se a linha da matriz $M \left[\begin{array}{lll} 2 & amp;2 & amp;-1 \end{array} \right]$] e a coluna da matriz $N \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right]$,
e executa-se o produto termo a termo. Então:

$$< br > p_{2,1} = 2 \times 2 + 2 \times 1 + (-1) \times 2 = 4 + 2 - 2 = 4 < br >$$

Linha 2, coluna 2

Para se obter o termo da segunda linha $(i = 2)$ e segunda coluna $(j = 2)$.

Separa-se a linha da matriz $M \left[\begin{array}{lll} 2 & amp;2 & amp;-1 \end{array} \right]$ e a coluna da matriz $N \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right]$,
e executa-se o produto termo a termo. Logo:

$$< br > p_{2,2} = 2 \times 3 + 2 \times 0 + (-1) \times (-1) = 6 + 0 + 1 = 7 < br >$$

Assim, $\left\{ \begin{array}{ll} 6 & amp;1 \\ 4 & amp;7 \end{array} \right\}$.

Repare no exemplo que também seria possível calcular a multiplicação de *N* por *M* (*NM*), pois o número de colunas de *N* vale *2* e o número de linhas de *M* vale *2*. A diferença é que o resultado daria uma matriz *3 × 3*.

Além disso, pela definição da operação da multiplicação de matrizes, podemos obter as seguintes propriedades:

- *MN ≠ NM*;
- *MI = M*, em que *I* é uma matriz identidade que tem o número de linhas igual ao número de colunas da matriz *M*.
- *M(NP) = (MN)P*
- *M(N + P) = MN + MP*
- *0×M = M×0 = 0*

A última operação apresentada neste módulo será a transposição de uma matriz.

Transposição de uma matriz (cálculo matriz transposta)

Seja uma matriz *M* de tamanho *m x n*, obtém-se a matriz transposta de *M*, com simbologia M^T, trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas e as colunas pelas linhas da matriz.

Desta forma, a matriz transposta de M (M^T) terá ordem $n \times m$.

Exemplo:

Seja a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \text{ determine a matriz transposta de } M.$$

Solução:

Assim, modificando-se ordenadamente as linhas pelas colunas e as colunas pelas linhas se obtém:

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Uma matriz que é igual à sua matriz transposta $(M = M^T)$ será uma matriz simétrica.

Uma propriedade importante envolve a multiplicação de matrizes e a matriz transposta.

$< br > (M \times N)^T = N^T \times M^T < br >$

Exemplo:

Sejam

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obtenha a transposta do produto de M por N.

Solução:

Resposta 1

Um caminho seria se obter o produto $P = MN$ e depois se retirar a transposta.

Assim:

$$< br > \begin{bmatrix} < br > 1 \times 1 + 1 \times 0 & amp; 1 \times 2 + 1 \times 1 & amp; 1 \times 1 + 1 \times 2 \\ < br > 0 \times 1 + (-1) \times 0 & amp; 0 \times 2 + (-1) \times 1 & amp; 0 \times 1 + (-1) \times 2 \\ < br > 2 \times 1 + 3 \times 0 & amp; 2 \times 2 + 3 \times 1 & amp; 2 \times 1 + 3 \times 2 < br > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < br > 1 & amp; 3 & amp; 3 \\ < br > 0 & amp; -1 & amp; -2 \\ < br > 2 & amp; 7 & amp; 8 < br > \end{bmatrix} < br >$$

Desta forma,

$$< br > P^T = \begin{bmatrix} < br > 1 & amp; 0 & amp; 2 \\ < br > 3 & amp; -1 & amp; 7 \\ < br > 3 & amp; -2 & amp; 8 < br > \end{bmatrix} < br >$$

Resposta 2

A outra forma seria obter inicialmente as matrizes transposta e posteriormente executar a multiplicação:

$$< br > M^T = \begin{bmatrix} < br > 1 & amp; 0 & amp; 2 \\ < br > 1 & amp; -1 & amp; 3 < br > \end{bmatrix} \text{ e } M^T = \begin{bmatrix} < br > 1 & amp; 0 \\ < br > 2 & amp; 1 \\ < br > 1 & amp; 2 < br > \end{bmatrix} < br >$$

Assim,

$$< br > P^T = N^T \times M^T \begin{bmatrix} < br > 1 \times 1 + 0 \times 1 & amp; 1 \times 0 + 0 \times (-1) & amp; 1 \times 2 + 0 \times 2 \\ < br > 2 \times 1 + 1 \times 1 & amp; 2 \times 0 + 1 \times (-1) & amp; 2 \times 2 + 1 \times 3 \\ < br > 1 \times 1 + 2 \times 1 & amp; 1 \times 0 + 2 \times (-1) & amp; 1 \times 2 + 2 \times 3 < br > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < br > 1 & amp; 0 & amp; 2 \\ < br > 3 & amp; -1 & amp; 7 \\ < br > 3 & amp; -2 & amp; 8 < br > \end{bmatrix} < br >$$

Existem outras propriedades da matriz transposta:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$, com k real
- $\left(A^T\right)^T = A$

Se A é matriz simétrica, então $A^T = A$.

Teoria na prática

Em uma escola, existem *3* disciplinas. Em cada disciplina, os alunos realizam *2* provas. A média dos alunos é obtida, em cada disciplina, pela soma das duas provas e dividindo-se o resultado por *2*. Use as operações de matrizes para calcular a matriz *M* das médias dos alunos através das duas tabelas de notas de prova. Na coluna, devem ser colocados os alunos por ordem alfabética, e nas linhas as disciplinas, também em ordem alfabética.

Prova 1

Aluno/Disciplinas	Matemática	Álgebra	Trigonometria
João	*8,9*	*9,1*	*7,8*
Amélia	*6,5*	*6,9*	*7,1*

Teresa	*7,8*	*8,1*	*6,5*
Pedro	*5,5*	*6,8*	*7,1*

Tabela: Prova 1.
Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Prova 2

Aluno/Disciplinas	Matemática	Álgebra	Trigonometria
João	*7,7*	*8,1*	*9,0*
Amélia	*5,5*	*3,5*	*8,9*
Teresa	*5,6*	*7,1*	*8,1*
Pedro	*7,1*	*7,0*	*7,3*

Tabela: Prova 2.
Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Solução:

Montando as matrizes através dos dados obtidos nas tabelas:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 6,9 & 9,1 & 6,8 & 8,1 \\ 6,5 & 8,9 & 5,5 & 7,8 \\ 7,1 & 7,8 & 7,1 & 6,5 \end{bmatrix} e\ P_2 = \begin{bmatrix} 3,5 & 28,1 & 7,0 & 7,1 \\ 5,5 & 7,7 & 7,1 & 5,6 \\ 8,9 & 9,0 & 7,3 & 8,1 \end{bmatrix}$$

$$M = 1/2 \times (P_1 + P_2) = 1/2 \times \begin{bmatrix} 10,4 & 17,2 & 13,8 & 15,2 \\ 12,0 & 16,6 & 12,6 & 13,4 \\ 16,0 & 16,8 & 14,4 & 14,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,2 & 8,6 & 6,9 & 7,6 \\ 6,0 & 8,3 & 6,3 & 6,7 \\ 8,0 & 8,4 & 7,2 & 7,3 \end{bmatrix}$$

Mão na massa

Questão 1

Sabe-se que a Matriz *P*, de tamanho *3 × 4*, é igual a *MN*. Se a matriz *M* tem tamanho *p x q*, e a matriz *N* tem tamanho *2 x w*, com *p*, *q* e *w* números inteiros diferentes de zero. Marque a alternativa que apresenta o valor de *p + q + w*.

A 7

B 8

C 9

D 10

A alternativa C está correta.

Como $P = MN$ e P tem tamanho 3×4, então, obrigatoriamente, $p = 3$ e $t = 4$.

Além disso, $2 = w$.

Portanto, $p + q + w = 3 + 4 + 2 = 9$.

Questão 2

Sabe-se que a matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & amp;0 & amp;-1 \\ 4 & amp;3 & amp;2 \end{bmatrix}$.

Marque a alternativa que apresenta a matriz E, que é a matriz oposta da transposta da matriz D.

A $\begin{bmatrix} -1 & amp;0 & amp;1 \\ -4 & amp;-3 & amp;-2 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 1 & amp;0 & amp;-1 \\ 4 & amp;3 & amp;2 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 1 & amp;-4 \\ 0 & amp;-3 \\ 1 & amp;-2 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} -4 & amp;-1 \\ -3 & amp;0 \\ -2 & amp;1 \end{bmatrix}$

A alternativa C está correta.

$$D=\begin{bmatrix} 1 & amp; 0 & amp; -1 \\ 4 & amp; 3 & amp; 2 \end{bmatrix} \rightarrow D^T=\begin{bmatrix} 1 & amp; 4 \\ 0 & amp; 3 \\ -1 & amp; 2 \end{bmatrix}$$

Assim

$$E=-D=\begin{bmatrix} 1 & amp; -4 \\ 0 & amp; -3 \\ 1 & amp; -2 \end{bmatrix}$$

Questão 3

Sabe-se que

$$< br > R = M \times 0 + (AIB)^T - \left(AB - (BA)^T\right)^T < br >$$

em que 0 é a matriz nula e I a matriz identidade. Todas as matrizes são quadradas de ordem 3.

Assinale a opção correta.

A $B^T A^T$

B AB

C $A^T B^T$

D BA

A alternativa D está correta.

Veja a solução no vídeo, a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 4

Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & amp;-1 & amp;0 \\ 3 & amp;2 & amp;1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & amp;2 & amp;-1 \\ 1 & amp;0 & amp;1 \end{bmatrix} e$ $C=\begin{bmatrix} 2 & amp;3 \\ 4 & amp;0 \\ 2 & amp;1 \end{bmatrix}$.

Determine a matriz D, tal que $D=2A-B+3C^T$.

A $\begin{bmatrix} 7 & amp;9 & amp;9 \\ 11 & amp;4 & amp;5 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 6 & amp;8 & amp;7 \\ 14 & amp;4 & amp;4 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 9 & amp;1 & amp;7 \\ 17 & amp;-4 & amp;3 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 8 & amp;8 & amp;9 \\ 11 & amp;4 & amp;-4 \end{bmatrix}$

A alternativa B está correta.

Veja a solução no vídeo, a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 5

Determine a matriz $Q=AB$, sabendo que

$A=\begin{bmatrix} 1 & amp;-1 & amp;2 \\ 3 & amp;1 & amp;1 \\ 0 & amp;1 & amp;0 \end{bmatrix} e$

$B=\begin{bmatrix} 0 & amp;-1 & amp;0 \\ 1 & amp;1 & amp;-1 \\ 1 & amp;2 & amp;0 \end{bmatrix}$

A $\begin{bmatrix} -3 & amp;-1 & amp;-1 \\ 4 & amp;-1 & amp;3 \\ 7 & amp;1 & amp;4 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 1 & amp;2 & amp;1 \\ 2 & amp;0 & amp;-1 \\ 1 & amp;1 & amp;-1 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 0 & amp;1 & amp;1 \\ -2 & amp;1 & amp;3 \\ -1 & amp;1 & amp;2 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & amp;-2 & amp;2 \\ 4 & amp;2 & amp;0 \\ 1 & amp;3 & amp;0 \end{bmatrix}$

A alternativa B está correta.

Veja a solução no vídeo, a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

A matriz $M = \begin{bmatrix} a & amp;0 \\ 0 & amp;b+1 \end{bmatrix}$ é tal que $M^2 - IM = 0$.

Sabendo que M não é uma matriz nula, determine a alternativa que possui o intervalo para todos os possíveis valores da soma de $a + b$

A $-1 < a + b \leq 1$

B $-2 < a + b \leq 0$

C $0 < a + b \leq 1$

D $1 < a + b \leq 2$

A alternativa A está correta.

Se

$$\text{Se } M = \begin{bmatrix} a & amp;0 \\ 0 & amp;b+1 \end{bmatrix} \rightarrow M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} a^2 & amp;0 \\ 0 & amp;(b+1)^2 \end{bmatrix} = IM = M = \begin{bmatrix} a & amp;0 \\ 0 & amp;b+1 \end{bmatrix}$$

Assim $a^2 = a \rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} e(b+1)^2 \rightarrow \begin{cases} b+1=0 \rightarrow b=-1 \\ b+1-1 \rightarrow b=0 \end{cases}$

Assim, as possíveis matrizes M são com $(a = 0$ e $b = 0), (a = 1$ e $b = 0)$ e $(a = 1$ e $b = -1)$

Portanto, $a+b=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$

Verificando o aprendizado

Questão 1

Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & amp;2 & amp;3\\3 & amp;2 & amp;1\\4 & amp;1 & amp;0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & amp;-1 & amp;2\\2 & amp;1 & amp;3\\1 & amp;3 & amp;4\end{bmatrix}$. Determine a matriz $C=2A+I+B^T$, em que I é a matriz identidade de ordem 3 .

A $C=\begin{bmatrix}3 & amp;3 & amp;8\\8 & amp;6 & amp;5\\9 & amp;7 & amp;5\end{bmatrix}$

B $C=\begin{bmatrix}3 & amp;4 & amp;8\\-8 & amp;6 & amp;6\\9 & amp;7 & amp;6\end{bmatrix}$

C $C=\begin{bmatrix}3 & amp;6 & amp;7\\5 & amp;6 & amp;5\\10 & amp;5 & amp;5\end{bmatrix}$

D $C=\begin{bmatrix}1 & amp;2 & amp;4\\0 & amp;6 & amp;5\\3 & amp;7 & amp;6\end{bmatrix}$

A alternativa C está correta.

Justificativa:

Questão 2

Determine o valor de $M \times N$, sabendo que

$M=\begin{bmatrix}1 & amp;-1 & amp;2\\0 & amp;3 & amp;1\end{bmatrix} e$

$N=\begin{bmatrix}1 & amp;2\\3 & amp;1\\0 & amp;3 < br >\end{bmatrix}$

A $\begin{bmatrix}-2 & amp;6\\9 & amp;6\end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix}1 & amp;8\\2 & amp;7\end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 2 & amp; -6 \\ -9 & amp; 6 \end{bmatrix}$

D Impossível executar o produto de *M* com *N*.

A alternativa A está correta.

Justificativa:

Seja $P = MN$. Como M tem tamanho $2x3$ e N tem tamanho $3x2$, então P terá tamanho $2x2$.

$$< br > P = \begin{bmatrix} < br > 1 \times 1 + (-1) \times 3 + 2 \times 0 & amp; 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 2 \times 3 \\ < br > 0 \times 1 + 3 \times 3 + 1 \times 0 & amp; 0 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 3 < br > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < br > -2 & amp; 6 \\ < br > 9 & amp; 6 < br > \end{bmatrix} < br >$$

Determinantes de uma matriz

Uma operação matemática que envolve todos os elementos de uma matriz quadrada é o **determinante** de uma matriz. Assim, toda matriz quadrada terá um número que representa o seu determinante e terá grandes aplicações na Álgebra Linear e Geometria Analítica.

O determinante de uma matriz será um número real. A simbologia adotada para um determinante de uma matriz A é substituir os [ ] pelas | |. **Cuidado, não confunda esta simbologia com módulo. O determinante de uma matriz pode ser positivo, zero ou negativo.**

> Existem regras práticas para se obter determinantes de uma matriz quadrada de ordem ***n < 4***. Existem também regras gerais que permitem calcular o determinante para uma matriz quadrada de qualquer ordem ***n***.

Neste módulo, estudaremos a regra obtida pelo Teorema de Laplace, porém a regra de Chió pode ser estudada através das nossas referências.

⚠

Atenção

As regras gerais englobam os três casos práticos que serão vistos para n < 4, porém, a forma mais prática apresentada facilita o cálculo do determinante.

Regra Prática n < 4

Iniciaremos a definição de um determinante por uma matriz quadrada de ordem *1*.

Seja uma matriz quadrada *A*, isto é, *1 × 1*, o determinante da matriz será o valor do seu único termo, assim $det(A) = a_{1\,1}$.

$$A = [p] \rightarrow \det(A) = p$$

Para uma matriz quadrada A de ordem *2*, isto é, *2 × 2*, o determinante será definido pelo produto dos termos da diagonal principal menos o produto dos termos da diagonal secundária. Assim, seja:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemplo:

Calcule o determinante das matrizes.

$$A_{l\times 1} = [-2] \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solução:

Como *A* tem ordem *1 × 1, det(A) =* $a_{1\,1}$ *= −2.*

Como *B* tem ordem:

$$2 \times 2, \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times (-2) - (-1) \times 3 = -2 - (-3) = -2 + 3 = 1$$

Para uma matriz quadrada *A* de ordem *3*, isto é, *3 × 3*, o determinante da matriz será definido por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \to \det(A) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a \times e \times i + c \times d \times h + b \times f \times g - a \times f \times h - b \times d \times i - c \times e \times g$$

Podemos obter estes seis termos de uma forma mais prática, denominada de regra de Sarrus, fazendo o seguinte:

- Repita as duas primeiras colunas após a terceira coluna.

- Faça a multiplicação das seis diagonais “completas”, isto é, que tenham *3* termos (existem três diagonais para a direita, direção da diagonal principal, e três diagonais para a esquerda, direção da diagonal secundária).

- Multiplique o resultado do produto das diagonais da esquerda por (*−1*).

- O determinante será a soma dos seis termos.

Atenção

O valor obtido pela regra de Sarrus é igual ao valor da definição do determinante.

Exemplo:

Calcule o determinante da matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução:

Deseja-se calcular:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Vejamos as etapas:

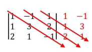
Etapa 1

Usando a regra de Sarrus:

$$\left| \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

Etapa 2

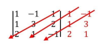
Repare que se tem 3 diagonais para a direita.



Os termos serão $1 \times 3 \times (-1) = -3$, $(-1) \times 2 \times 2 = -4$ e $1 \times 1 \times 1 = 1$

Etapa 3

Repare também que se tem 3 diagonais para a esquerda.



Os termos serão estes três termos 1×3×2 = 6 , 1×2×1 = 2 e (−1)×1×(−1)= 1
que devem ser multiplicados por (−1), assim ficarão, (−6), (−2) e (−1).

Etapa 4

Desta forma, o determinante será a soma dos seis termos

$$det(C) = -3 - 4 + 1 - 6 - 2 - 1 = -15$$

Teorema de Laplace

O Teorema de Laplace consiste em escolher uma das filas (linha ou coluna) da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores. Então, necessitamos definir o que é um menor complementar e um cofator de um elemento de uma matriz.

Saiba mais

Menores complementares: denomina-se menor complementar (ou apenas menor) de um elemento mi, j de uma matriz M quadrada de ordem n, o determinante da matriz obtida pela exclusão da linha i e da coluna j da matriz M, isto é, exclui-se a linha e coluna correspondente ao elemento mi, j. A simbologia adotada será MCi, j.

Exemplo:

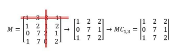
Determine as menores complementares para os elementos m1,3 e m2,1, sendo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução:

Etapa 1

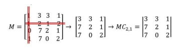
Pela definição, a obtenção do MC1, 3 será feita pela exclusão da linha de ordem 1 e a coluna de ordem 3 da matriz M.



Usando a regra de Sarrus MC1,3 = 1×7×2 + 2×0×7 + 1×2×1 − 2×7×1 − 2×2×0 − 1×1×7 = 14 + 2 − 14 − 7 = −5.

Etapa 2

Pela definição, a obtenção do MC2,1 será feita pela exclusão da linha de ordem 2 e a coluna de ordem 1 da matriz M.



Pela regra de Sarrus MC2, 1 = 3×2×2 + 1×7×0 + 7×3×1 − 1×2×7 − 2×3×7 − 3×1×0 = 12 + 21 − 14 − 42 = − 23.

Repare que o menor complementar será o determinante de uma matriz de ordem n−1, sendo n a ordem da matriz original.

Agora, entenda o que é cofator.

Saiba mais

Cofator: denomina-se de cofator de um elemento mi j de uma matriz M quadrada de ordem n o número Ci, j tal que: Ci, j = (−1)i+j Mi, j

Exemplo:

Determine os cofatores para os elementos $m_{1,\,3}$ e $m_{2,\,1}$, sendo

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução:

Pela definição $C_{1,\,3} = (-1)^{1+3}\, M_{1,\,3}$; O valor de $M_{1,3}$ foi obtido no exemplo anterior e vale -5.

Portanto, $C_{1,\,3} = 1\times(-5) = -5$

Pela definição $C_{2,1} = (-1)^{2+1}\, M_{2,1}$; O valor de $M_{2,1}$ foi obtido no exemplo anterior e vale -23.

Portanto, $C_{2,1} = (-1)\times(-23) = 23$

O Teorema de Laplace diz que o determinante de uma matriz M quadrada, de ordem n, pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelo respectivo cofator.

Assim, o determinante pode ser calculado por dois caminhos:

Fixando determinada coluna j_0 ($1 \leq j_0 \leq n$) da matriz M:

$$\det (M_n = \sum_{i=1}^{n} m_{ij0} C_{i,j0}$$

ou

Fixando determinada linha i_0 ($1 \leq i_0 \leq n$) da matriz M:

$$\det (M_n = \sum_{i=1}^{n} m_{i0j} C_{i0,j}$$

Exemplo:

Calcule o determinante da matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Etapa 1

Devemos escolher uma fila que tenha o maior número de zeros, pois isto diminuirá o número de cálculos realizados. Assim, podemos escolher a segunda linha ou a terceira coluna. Escolhendo a terceira coluna.

$$\det (M_n) = \sum_{i=1}^{n} m_{i3} C_{i,3}$$

Como $m_{2\times3} = m_{4\times3} = 0$, o somatório recai em apenas dois termos.

Etapa 2

Obtendo $C_{1,3}$

$$M = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{4} \\ 0 & 3 & \cancel{0} & 2 \\ 2 & 2 & \cancel{-1} & 2 \\ 4 & 1 & \cancel{0} & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow MC_{1,3} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Pela regra de Sarrus:

$$MC_{1,3} = 0 \times 2 \times 3 + 2 \times 2 \times 1 + 3 \times 2 \times 4 - 2 \times 2 \times 4 - 0 \times 2 \times 1 - 3 \times 3 \times 2 = -6$$

Portanto,

$$C_{1,3} = (-1)^{1+3} M_{1,3} = 1 \times (-6) = -6$$

Etapa 3

Obtendo $C_{3,3}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow MC_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Pela regra de Sarrus:

$$MC_{3,3} = 1 \times 3 \times 3 + 4 \times 0 \times 1 + 4 \times 2 \times 2 - 4 \times 3 \times 4 - 3 \times 2 \times 0 - 1 \times 2 \times 1 = -25$$

Portanto,

$$C_{3,3} = (-1)^{3+3} M_{3,3} = 1 \times (-25) = -25$$

Etapa 4

Assim:

$$\det\Big(M_3 = \sum_{i=1}^{4} m_{i3} C_{i,3} = 1 \times C_{1,3} + 0 \times C_{2,3} - 1 \times C_{3,3} + 0 \times C_{4,3} = 1 \times (-6) + (-1) \times (-25) = 19$$

Como exercício, repita este exemplo utilizando a segunda linha e obtenha o mesmo resultado.

Atenção

O Teorema de Laplace consiste em se calcular determinantes com uma ordem menor do que o original. No exemplo, calculamos um determinante de ordem 4 reduzindo para cálculo de determinantes de ordem 3. Como sabemos, a regra prática para determinantes com ordem n < 4, conseguimos obter.

Se o determinante desejado fosse, por exemplo, de ordem *5*, os menores complementares seriam de ordem *4*. Desta forma, teríamos que aplicar o Teorema de Laplace para cada menor complementar necessário, aumentando-se muito a quantidade de cálculos.

Raciocínio análogo seria feito para qualquer determinante de ordem $n \geq 5$.

Propriedades dos determinantes de uma matriz

O determinante atende a algumas propriedades que serão aqui listadas. As demonstrações destas propriedades podem ser vistas em qualquer uma das referências no fim deste tema.

Nestas propriedades, considera-se fila como uma linha ou uma coluna:

- Quando todos os termos de uma fila da matriz quadrada forem nulos, então o determinante da matriz é nulo.

- Se duas filas paralelas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

- Se os elementos de uma fila são combinações lineares de duas outras filas paralelas, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução:

Observe que a segunda linha (L_2) pode ser obtida pela combinação linear da primeira linha (L_1) e a terceira linha (L_3).

$$L_2 = 3L_1 - 2L_3$$

Veja:

$$\begin{gathered} a_{2,1} = 3a_{1,1} - 2a_{3,1} = 3 \times 1 - 2 \times 2 = -1 \\ a_{2,2} = 3a_{1,2} - 2a_{3,2} = 3 \times 2 - 2 \times 1 = 4 \\ a_{2,3} = 3a_{1,3} - 2a_{3,3} = 3 \times (-1) - 2 \times (-2) = 1 \end{gathered}$$

Assim, *det(A) = 0.*

Como exercício complementar, use a regra de Sarrus e verifique que este determinante é nulo.

Continuando com as propriedades:

- Multiplicando todos os elementos de uma fila por um número real o determinante fica multiplicado por este número.
- $det\,(kA) = k^n\,det(A)$, *n* é a ordem da matriz *A.*
- Se alterarmos a posição de duas filas paralelas, o determinante muda de sinal.
- Para as matrizes triangulares superiores e triangulares inferiores, o determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo:

Calcule o determinante da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução:

Como *B* é uma matriz triangular superior:

$$\det(B) = 1 \times 4 \times (-2) = -8$$

Como exercício complementar, use a regra de Sarrus e verifique que este determinante vale *−8*.

Continuando com as propriedades:

- *det (A) = det(A^T).*

- *det (AB) = det(A). det(B).*

Atenção

Cuidado: det (A + B) ≠ det (A) + det(B).

Teoria na prática

Um dos passos utilizados no método de Cramer para resolução de um sistema linear é verificar o determinante da matriz composta pelos coeficientes que multiplicam as variáveis do sistema. Se este determinante for diferente de zero, o sistema será possível e determinado. Seja o sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x - y + 3z = 3 \\ x + y + z = 4 \\ x + 2y - z = 7 \end{array}\right.$$

que possui a matriz dos coeficientes dada por:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Verifique se este sistema é possível e determinado.

Solução:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Determine o valor de k real, sabendo que o determinante da matriz $M=\begin{bmatrix} k & amp; 2 \\ -1 & amp; (k+3) \end{bmatrix}$ vale 6 . Sabe-se, também, que o traço da matriz M é positivo.

A - 4

B 1

C - 1

D 4

A alternativa B está correta.

$$< br > M=\begin{vmatrix} < br > k & amp; 2 \\ < br > -1 & amp; (k+3) < br > \end{vmatrix}=k \times (k+3)-(2) \times (-1)=k^2+3k+2=6 < br >$$

Então, $k^2+3k-4=0 \rightarrow k=\frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2-4 \times 1 \times (-4)}}{2}=\frac{-3 \pm 5}{2}=\begin{cases} k=-4 \\ k=1 \end{cases}$

Como o traço é positivo: $k+(k+3) gt; 0 \rightarrow 2k gt; -3k gt; -3/2$

Assim, a única resposta possível é $k=1$.

Questão 2

Sejam as matrizes A, B e C , todas quadradas de ordem 4. A matriz A tem todos os elementos iguais a 1 e a matriz $B=2C$.

Sabendo que $\operatorname{det}(C)=3$, determine, respectivamente, o determinante de A e de B.

A 0 e 6

B 1 e 48

C 0 e 48

D 1 e 6

A alternativa C está correta.

Como A tem todos os elementos iguais, usando a propriedade do determinante, se duas filas paralelas são proporcionais, neste caso, iguais, o determinante é nulo.

Assim, $\operatorname{det}(A)=0$.

Como $B=2C$, então $\operatorname{det}(B)=2^n \times \operatorname{det}(C)$, em que n é a ordem das matrizes.

Assim,

\operatorname{det}(B)=2^4 \times \operatorname{det}(C)=2^4 \times 3=48

Questão 3

Seja uma matriz quadrada *M* com *3* linhas e *3* colunas, cujo determinante vale *5*. Realiza-se algumas operações na matriz *M*, uma após a outra: multiplica-se todos os elementos da segunda linha por *2*, multiplica-se todos os elementos da terceira coluna por *4* e, por fim, acha-se a transposta da matriz.

Calcule o determinante da matriz obtida após as três operações.

A 2560

B 1280

C 120

D 40

A alternativa D está correta.

Ao multiplicar todos elementos da segunda linha de *M* por *2*, seu determinante fica multiplicado por *2*.

Ao multiplicar todos os elementos da terceira coluna da nova matriz por *4*, seu determinante fica multiplicado por *4*.

O determinante da transposta tem o mesmo valor do determinante da matriz.

Assim, o determinante da mesma matriz será *2×4×det(M) = 2×4×5 = 40*.

Questão 4

A matriz $P = MN^T$. Determine o valor do determinante da matriz N, sabendo que o determinante de P vale 9 e a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & amp;2 & amp;1 \\ 2 & amp;-1 & amp;0 \\ 0 & amp;1 & amp;1 \end{bmatrix}$.

A −3

B 3

C 6

D −6

A alternativa A está correta.

Calculado o determinante da matriz M : $\begin{vmatrix} 1 & amp;2 & amp;1 \\ 2 & amp;-1 & amp;0 \\ 0 & amp;1 & amp;1 \end{vmatrix}$ pela regra de Sarrus,

$$< br > \det(M) = 1 \times (-1) \times 1 + 1 \times 2 \times 1 + 0 \times 2 \times 0 - 1 \times (-1) \times 0 - 1 \times 0 \times 1 - 1 \times 2 \times 2 = -3 < br >$$

Se $P = M \times N^T \rightarrow \det(P) = \det(M) \times \det\left(N^T\right) = \det(M) \times \det\left(N^T\right)$

Mas $\det\det\left(N^T\right) = \det\det(N)$, então $\det \det(P) = \det \det(M) \times \det \det(N) \rightarrow 9 = -3 \times \det(N) \rightarrow \det \quad (N) = -3$

Questão 5

A matriz A é triangular superior de ordem 3. Sabe-se que o determinante de A vale -4 , o traço vale 3 e o elemento da primeira linha e primeira coluna vale 2.

Determine, respectivamente, o valor de $a_{2,2}$ e $a_{3,3}$ sabendo que $a_{3,3} gt; a_{2,2}$

A 2 e -1

B -1 e 2

C 2 e 2

D 1 e -2

A alternativa B está correta.

Veja a solução no vídeo, a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Seja a matriz $\begin{vmatrix} 4 & amp;0 & amp;-1 & amp;5 \\ 2 & amp;0 & amp;2 & amp;3 \\ 2 & amp;0 & amp;8 & amp;5 \\ 0 & amp;k & amp;4 & amp;1 \end{vmatrix}$ cujo determinante vale 24.

Determine o valor de k .

A 1

B 2

C 3

D 4

A alternativa C está correta.

Veja a solução no vídeo, a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Calcule o determinante da soma da matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & amp;2 \\ -2 & amp;-1 \end{bmatrix}$

com a matriz

$$
 B=\begin{bmatrix}
 2 & amp;0 \\
 1 & amp;1
 \end{bmatrix}.
$$

A 5

B 3

C 2

D 1

A alternativa C está correta.

Justificativa:

Seja $C = A + B \rightarrow C = \begin{bmatrix} 1+2 & amp; 2+0 \\ -2+1 & amp; -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & amp; 2 \\ -1 & amp; 0 \end{bmatrix}$

Assim, $\det(C) = 3 \times 0 - 2 \times (-1) = 2$

Verifique que como $C = A + B$.

Repare que $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Questão 2

Calcule o valor de k sabendo que o determinante de $P = \begin{bmatrix} 1 & amp; 2 & amp; 2 \\ 0 & amp; k^2 & amp; 1 \\ 1 & amp; 1 & amp; 1 \end{bmatrix}$ vale -8 .

A Apenas 3

B ±1

C Apenas 1

D ±3

A alternativa D está correta.

Usando a regra de Sarrus

$$< br > \det(P) = 1 \times k^2 \times 1 + 2 \times 0 \times 1 + 1 \times 2 \times 1 - 2 \times k^2 \times 1 - 1 \times 2 \times 0 - 1 \times 1 \times 1 = < br >$$
$$< br > k^2 + 2 - 2k^2 - 1 = -8 < br >$$

Assim,

$$< br > k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3. < br >$$

Matriz inversa

A matriz inversa tem uma aplicação direta na resolução de sistemas lineares. Toda matriz que tem um determinante diferente de zero terá uma matriz inversa, isto é, terá uma matriz inversa relacionada a ela.

Na Aritmética, definimos um número como inverso de outro quando o produto dos dois é igual à unidade. Assim, o inverso do número k real vale $^1/_k$.

No espaço vetorial das matrizes quadradas, define-se matriz inversa de uma matriz *M*, de ordem *n*, de uma forma análoga.

Seja uma matriz quadrada *M*, de ordem ***n***, define-se a sua matriz inversa *N*, com mesmo tamanho de *M*, a matriz tal que $MN = NM = I_n$, em que *I* é a matriz identidade de mesma ordem ***n***.

Simbolicamente, a função inversa é representada por M^{-1}.

Não são todas as matrizes quadradas *M* que apresentam matrizes inversas. Se existe a inversa de *M*, diz-se que *M* é **invertível** ou **não singular**. Se não existir a matriz inversa, diz-se que *M* **não é invertível** ou **singular**.

Atenção

Se N = M−1, então M = N−1.

A determinação da matriz inversa requer a solução de um sistema. Quanto maior a ordem da matriz quadrada, maior o número de variáveis envolvidas no sistema. O número de variáveis será dado por n^2, em que ***n*** é a ordem da matriz.

Se o sistema for impossível, diz-se que a matriz não apresenta inversa.

Pode ser provado que uma matriz que tem determinante diferente de zero é invertível, da mesma forma, se o determinante da matriz for nulo, ela é não invertível.

Exemplo:

Determine a matriz inversa da matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

Assim, pretende-se achar a matriz $N = \begin{bmatrix} a & amp; b \\ c & amp; d \end{bmatrix}$. Tal que $MN = I = \begin{bmatrix} 1 & amp; 0 \\ 0 & amp; 1 \end{bmatrix}$.

Etapa 1

Logo, $\begin{bmatrix} 1 & amp; 3 \\ 2 & amp; 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & amp; b \\ c & amp; d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & amp; 0 \\ 0 & amp; 1 \end{bmatrix}$

Realizando o produto das matrizes $MN = \begin{bmatrix} 1 \times a + 3 \times c & amp; 1 \times b + 3 \times d \\ 2 \times a + 1 \times c & amp; 2 \times b + 1 \times d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & amp; 0 \\ 0 & amp; 1 \end{bmatrix}$

Etapa 2

Obtém-se o sistema:

$$< br > \begin{cases} < br > a + 3c = 1 \\ < br > b + 3d = 0 \\ < br > 2a + c = 0 \\ < br > 2b + d = 1 < br > \end{cases} \rightarrow b = -3d \text{ e } c = -2a \rightarrow \begin{cases} < br > a + 3 \times (-2a) = 1 \rightarrow a - 6a = 1 \rightarrow a = -1/5 \\ < br > 2 \times (-3d) + d = 1 \rightarrow -5d = 1 \rightarrow d = -1/5 < br > \end{cases} < br >$$

Assim, $b = -3d = -3 \times (-1/5) = 3/5$ e $c = -2a = -2 \times (-1/5) = 2/5$

Etapa 3

Portanto, $N = M^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & amp; 3/5 \\ 2/5 & amp; -1/5 \end{bmatrix}$.

Para matriz quadrada de ordem 2, existe uma forma prática baseada na solução do sistema:

$$< br > \text{ Se } M = \begin{bmatrix} < br > a & amp; b \\ < br > c & amp; d < br > \end{bmatrix} \rightarrow M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \times \begin{bmatrix} < br > d & amp; -b \\ < br > -c & amp; a < br > \end{bmatrix} < br >$$

Uma matriz será denominada de **ortogonal** se sua inversa for igual à sua matriz transposta.

$$M^1 = M^T$$

Propriedades da matriz inversa

A matriz inversa atende a algumas propriedades que serão aqui listadas. As demonstrações destas propriedades podem ser vistas em qualquer uma das referências no fim deste tema. As propriedades valem desde que M e N sejam invertíveis.

$\det(M^{-1}) = 1 \div \det(M)$ $(MN)^{-1} = N^{-1} \times M^{-1}$ $(MN)^{-1} = M$ $(kM)^{-1} = 1/_k M^{-1}$, com k real diferente de zero. $(MT)^{-1} = (M^{-1})^T$

Teoria na prática

O método da matriz inversa é um método a partir do qual se obtém a resolução de um sistema linear através da obtenção da matriz inversa da matriz dos coeficientes da equação.

$< br >$ Assim, seja o sistema, $\left\{ \begin{array}{c} < br > 2x - y = 4 \\ < br > x + y = 1 < br > \end{array} \right.$ este terá uma matriz de coeficientes dada por $\left[\begin{array}{cc} < br > 2 & amp; -1 \\ < br > 1 & amp; 1 < br > \end{array} \right]$. $< br >$

Determine a matriz inversa desta matriz de coeficiente para permitir a utilização do referido método.

Solução:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Sabe-se que a matriz *B* é a inversa da transposta da matriz *A*. Se o determinante da matriz *A* vale ½, calcule o determinante de *B*.

A 2

B 4

C 0,5

D 0,25

A alternativa A está correta.

Justificativa:

$< br > B = \left(A^T\right)^{-1} \rightarrow \det(B) = \overset{1}{\det}\ A^T = \frac{1}{\det(\det A)} = 2 < br >$

Questão 2

Sabe-se que a matriz *B = 2A*, matrizes quadradas de ordem *2*. Se a matriz *A* tem determinante igual a *8*, qual o determinante da matriz inversa de *B*?

A 32

B $^1/_{32}$

C 16

D $^1/_{16}$

A alternativa B está correta.

Justificativa:

Como $B = 2A \rightarrow B^{-1} = 1/2 \times A^{-1} \rightarrow \det\left(B^{-1}\right) =$

$< br > (1/2)^n \times \det\left(A^{-1}\right) = (1/2)^2 \times < br >$

$< br > \frac{1}{\det A} = \frac{1}{32} < br >$

Questão 3

Calcule a matriz inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & amp;1 \\ 1 & amp;-2 \end{bmatrix}$

A $\begin{bmatrix} 2 & amp;1 \\ -1 & amp;1 \end{bmatrix}$

B $\begin{bmatrix} 2 & amp;0 \\ -2 & amp;1 \end{bmatrix}$

C $\begin{bmatrix} 2 & amp;1 \\ 1 & amp;0 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & amp;1 \\ 1 & amp;2 \end{bmatrix}$

A alternativa C está correta.

Justificativa:

Se $N = M^1$ então

$$M \times N = I = \begin{bmatrix} 1 & amp; 0 \\ 0 & amp; 1 \end{bmatrix}$$

Assim

$$M \times N = \begin{bmatrix} 0 & amp; 1 \\ 1 & amp; -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & amp; b \\ c & amp; d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & amp; d \\ a-2c & amp; b-2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & amp; 0 \\ 0 & amp; 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, tem-se o sistema

$$\begin{cases} c = 1 \\ a - 2c = 0 \\ d = 0 \\ b - 2d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2c = 2 \\ b = 1 + 2d = 1 \end{cases}$$

Assim,

$$N = \begin{bmatrix} 2 & amp; 1 \\ 1 & amp; 0 \end{bmatrix}$$

Logo, a alternativa correta é letra C.

Questão 4

Seja a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & amp; 1 & amp; 2 \\ 0 & amp; -1 & amp; 0 \\ 1 & amp; 2 & amp; 3 \end{bmatrix}$. Se a matriz R é a inversa da matriz P, calcule o determinante da matriz R transposta.

A 2

B −0,5

C −1

D 1

A alternativa C está correta.

Veja a solução no vídeo, a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 5

Calcule o traço da matriz Q que é a inversa da matriz $N = \begin{bmatrix} 2 & amp;1 \\ 1 & amp;2 \end{bmatrix}$.

A $^{3}/_{4}$

B $^{7}/_{4}$

C $^{1}/_{4}$

D $^{4}/_{3}$

A alternativa D está correta.

Se $Q = N - 1$, então $N \times Q = I = \begin{bmatrix} 1 & amp;0 \\ 0 & amp;1 \end{bmatrix}$

Assim

$$N \times Q = \begin{bmatrix} 2 & amp;1 \\ 1 & amp;2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & amp;b \\ c & amp;d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a + c & amp;2b + d \\ a + 2c & amp;b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & amp;0 \\ 0 & amp;1 \end{bmatrix}$$

Portanto, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} 2a + c = 1 \\ a + 2c = 0 \\ 2b + d = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ d = -2b \end{cases}$$

Como

$2a + c = 1$ e $a = -2c \rightarrow -4c + c = 1 \rightarrow c = -1/3$

Portanto

$$a = -2c = -2 \times -1/3 = 2/3$$

Como

$$b+2d=1 \text{ e } d=-2b \rightarrow b+2(-2b)=1 \rightarrow -3b=1 \rightarrow b=-1/3 \text{ e } d=2/3$$

Assim,

$$amp; Q=\left[\begin{array}{cc} 2/3 & amp; -1/3 \\ -1/3 & amp; 2/3 \end{array}\right]=1/3 \times\left[\begin{array}{cc} 2 & amp; -1 \\ -1 & amp; 2 \end{array}\right]$$
$$amp; \text{ Traço } (Q)=2/3+2/3=4/3$$

Questão 6

Determine a matriz inversa da matriz $A=\left[\begin{array}{ccc} 1 & amp; -1 & amp; 1 \\ 1 & amp; 0 & amp; 1 \\ 0 & amp; 2 & amp; 1 \end{array}\right]$.

A $\left[\begin{array}{ccc} -2 & amp; 3 & amp; 1 \\ -1 & amp; -1 & amp; 2 \\ 2 & amp; -2 & amp; 2 \end{array}\right]$

B $\left[\begin{array}{ccc} -2 & amp; 3 & amp; -1 \\ -1 & amp; 1 & amp; 0 \\ 2 & amp; -2 & amp; 1 \end{array}\right]$

C $\left[\begin{array}{ccc} 2 & amp; 3 & amp; 1 \\ -1 & amp; 3 & amp; 1 \\ 2 & amp; -2 & amp; 1 \end{array}\right]$

D $\left[\begin{array}{ccc} 2 & amp; -3 & amp; -1 \\ 1 & amp; -1 & amp; 0 \\ 0 & amp; -2 & amp; 1 \end{array}\right]$

A alternativa B está correta.

Veja a solução no vídeo, a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Calcule a matriz inversa da matriz $M=\left[\begin{array}{cc} 1 & amp; -1 \\ 1 & amp; 2 \end{array}\right]$.

A $-1/3\left[\begin{array}{cc} 2 & amp; 1 \\ -1 & amp; 1 \end{array}\right]$

B $1/3\begin{bmatrix} 2 & amp;1 \\ -1 & amp;1 \end{bmatrix}$

C $1/\sigma\begin{bmatrix} -2 & amp;-1 \\ -1 & amp;1 \end{bmatrix}$

D $1/\sigma\begin{bmatrix} 2 & amp;1 \\ -1 & amp;1 \end{bmatrix}$

A alternativa B está correta.

Se $N = M^{-1}$, então $MN = I = \begin{bmatrix} 1 & amp;0 \\ 0 & amp;1 \end{bmatrix}$

Assim

$$MN = \begin{bmatrix} l & amp;-1 \\ l & amp;2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & amp;b \\ c & amp;d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & amp;b-d \\ a+2c & amp;b+2d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & amp;0 \\ 0 & amp;1 \end{bmatrix}$$

Portanto, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} a-c=1 \\ a+2c=0 \\ b-d=0 \\ b+2d=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-2c \\ b=d \end{cases}$$

Como $a-c=1$ e $a=-2c \rightarrow -2c-c=1 \rightarrow c=-1/3$

Portanto, $a=-2c=-2\times -1/3=2/3$

Como $b+2d=1$ e $b=d$ $b+2b=1 \rightarrow 3b=1 \rightarrow b=d=1/3$

Assim,

$$N = \begin{bmatrix} 2/3 & amp;1/-1/1/3 \\ 3 & amp;4 \end{bmatrix} = 1/3\begin{bmatrix} 2 & amp;1 \\ -1 & amp;1 \end{bmatrix}$$

Questão 2

Sabe-se que $P=(MN)^{-1}$. Estabeleça o determinante da matriz transposta de $P\left(P^{T}\right)$, sabendo que o determinante de M vale 3 e o determinante de N vale 2.

A $^1/_6$

B $^2/_3$

C 6

D 3

A alternativa A está correta.

$$
\begin{aligned}
& \text{Se } P = (MN)_{-1 \rightarrow P = N^{-1} M^{-1}} \\
& \det\left(P^T\right) = \det(P) = \det\left(N^{-1} M^{\ell minusl;}\right) = \det\left(N^{-1}\right) \times \det\left(N^{-1}\right) \\
& \text{Mas, } \det\left(N^{-1)} = \frac{1}{\det(N)} \quad e \det\left(M^{-1}\right) = \frac{1}{\det(M)}\right. \\
& \text{Assim }, \det\left(P^T\right) = \frac{1}{\det(N)} \times \frac{1}{\det(M)} = 1/2 \times 1/3 = 1/6
\end{aligned}
$$

Considerações finais

Apresentamos o conceito da matriz como um objeto matemático de um espaço vetorial que permite a organização de dados e a realização de diversas operações matemáticas de grande aplicação prática. Dito isso, temos certeza de que, a partir de agora, você saberá definir, classificar e operar uma matriz, além de utilizá-la em diversas aplicações matemáticas, como na resolução de sistemas lineares.

Explore +

Para saber mais sobre os assuntos tratados neste tema, pesquise na internet e nas referências:

- Sobre matrizes e suas aplicações.
- Regra de Chió.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações.** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. caps. 3 e 4, p. 119-180.

APOSTOL, T. M. **Cálculo**, Volume 1. 1. ed. Barcelona – Espanha: Editorial Reverte SA, 1985. cap. 12, p. 519-536.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Linear Algebra.** 2. ed. Nova Jersey: Prentice-Hall, 1971. cap. 2, p. 28-39.

SANTOS, R. J. **Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear.** 1. ed. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMJ, 2012. cap. 1, p. 1-28, e cap. 2, p.70-123.