Derivadas: aplicações

Você vai estudar as diversas aplicações do conceito de derivadas.

Prof. Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Propósito

Compreender os conceitos de derivadas, elementos essenciais na modelagem de problemas técnicos e científicos, é imprescindível para a formação de bons profissionais da ciência e da tecnologia.

Objetivos

- Aplicar o conceito de derivada na obtenção das retas tangente e normal em um ponto.
- Aplicar o conceito de derivada na obtenção das taxas de variação através de taxas relacionadas.
- Aplicar o conceito de derivada no estudo de funções e de seus pontos extremos.
- Identificar os pontos críticos e os pontos em que a derivada não existe.

Introdução

Olá! Antes de começarmos, assista ao vídeo e entenda o que é a derivada e como ela pode ser utilizada como ferramenta matemática para explicitar e modelar problemas matemáticos e científicos.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Vamos começar!

Retas tangentes e normais ao gráfico de uma função

Veja, neste vídeo, a derivada como tangente e sua relação com o coeficiente angular dessa reta. Entenda também como essa inclinação da reta pode ser analisada.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Derivada como coeficiente angular da reta tangente

Uma das interpretações gráficas para a derivada de uma função real é que esta representa a inclinação da reta tangente ao gráfico da função, em um determinado ponto. Desta forma, a aplicação da derivada de uma função real permite a obtenção da equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico, no ponto analisado.

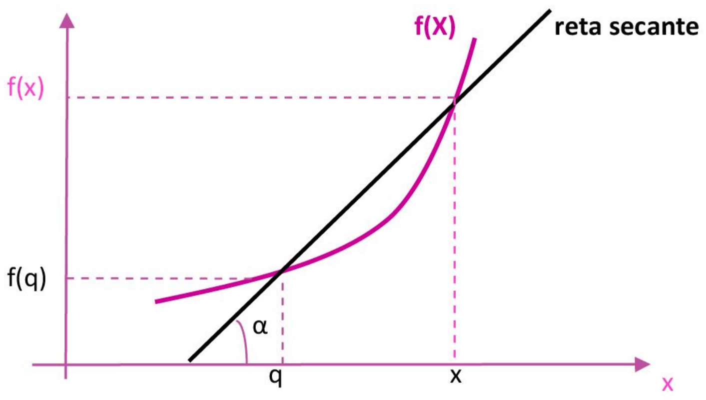
A derivada de uma função real em um ponto q do seu domínio foi definida por:

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q}$$

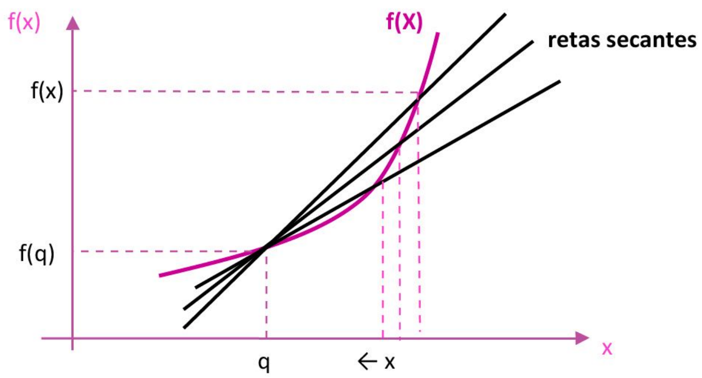
Se este limite existir e fornecer um número real, a função terá derivada no ponto **q** do seu domínio.

A utilização das diversas regras de derivação facilita a obtenção de uma equação analítica para a função derivada de f(x), simbolizada por f'(x).

Observe a imagem: o quociente utilizado no limite representa a inclinação da reta secante que liga os pontos (q, f(q)) e (x, f(x)). Esta reta faz um ângulo α com o eixo positivo **x**. A inclinação desta reta, que na Geometria Analítica é representada pelo coeficiente angular da reta (m_s), é calculada pelo valor da tangente $m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(q)}{x - q}$.



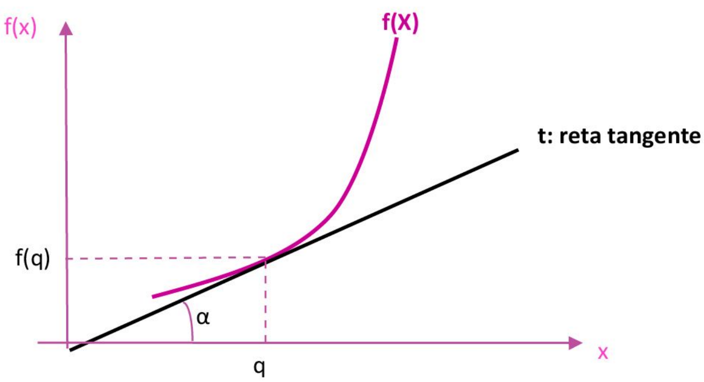
Ao aplicarmos o limite nesse quociente, o valor de **x** se aproximará cada vez mais do ponto **q**, fazendo com que a reta secante tenda cada vez mais à reta tangente ao gráfico no ponto **q**.



Desta forma, a derivada da função em um ponto pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto analisado. Isto é, a derivada vai valer a tangente do ângulo que a reta tangente forma com o eixo positivo **x**.

$$f'(q) = m_t = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to q} m_s = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q}$$

Observe na imagem a seguir o coeficiente angular da reta tangente ao ráfico da função no ponto analisado:



Equação da reta tangente ao gráfico de f(x)

A Geometria Analítica nos mostra que existem várias formas de apresentação da equação de uma reta no R^2, isto é, no plano definido pelos eixos x e y. Uma forma de apresentação da equação da reta será dada pela equação reduzida: $t : y - y_0 = m\,(x - x_0)$, m real.

> Este tipo de equação é obtido pelo coeficiente angular da reta e pelas coordenadas de um ponto que pertence à reta.

Neste item, deseja-se obter a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(q, f(q))$. Assim, este ponto de tangência, obrigatoriamente, pertence à reta.

$$t : y - y_q = m\,(x - x_q)\,,\ \text{m real}$$

Como foi analisado no item anterior, o coeficiente angular da reta tangente é igual à derivada da função no ponto $(q, f(q))$.

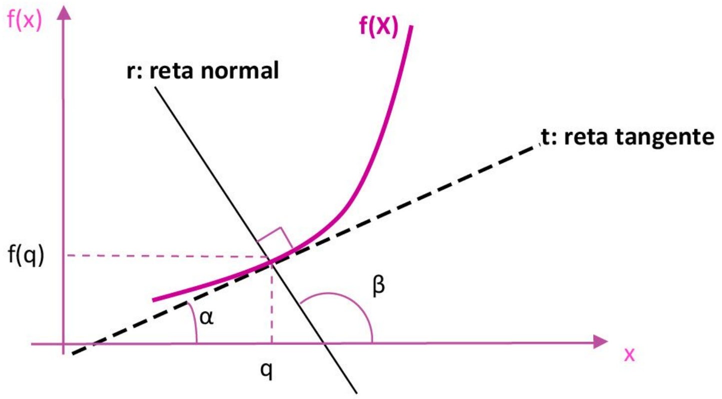
Portanto, substituindo o valor de m pela derivada, obtém-se a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(q, f(q))$: $t : y - f(q) = f'(q)(x - q)$.

> Então, se você souber o valor da função e de sua derivada no ponto q, a equação da reta tangente que passa nesse ponto poderá ser obtida.

Ressalta-se que a obtenção da reta tangente pode ser aplicada para verificar se os gráficos de duas funções são tangentes entre si em um ponto. Este conceito se baseia na afirmação de que se os gráficos são tangentes no ponto **p**, assim, eles apresentam uma tangente comum que passa neste ponto.

Equação da reta normal ao gráfico de f(x)

A reta normal ao gráfico de f(x) em um ponto **q** é a reta ortogonal (perpendicular) à reta tangente ao gráfico neste ponto.



A Geometria Analítica nos apresenta o conceito de que existe uma relação entre o coeficiente angular de duas retas ortogonais. Assim, se a reta n é ortogonal à reta t: $m_t \cdot m_n = -1$.

Então, o coeficiente angular da reta normal é dado por $m_n = -\frac{1}{m_t}$.

> Essa relação se baseia no fato que $\beta = \alpha + 90°$ e, como consequência, $\tan\beta = -\frac{1}{\tan\alpha}$.

Em relação à derivada da função no ponto **q**, o coeficiente angular da reta normal será:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(q)}$$

Assim, a equação da reta normal ao gráfico de f(x) no ponto q será definida por:

$$n : y - f(q) = \left(-\frac{1}{f'(q)}\right)(x - q)$$

Lembre-se de que o ponto $(q, f(q))$ pertence à reta normal. Desta forma, se você souber o valor da função e de sua derivada no ponto q, pode-se obter também a equação da reta normal que passa no ponto **q**.

Mão na massa

Questão 1

Obter a equação da reta tangente à função f(x) = $3x^2$ + 2x – 1 quando $x = 2.$

A

y = 15x - 11

B

y = 14x - 13

C

y = 15x + 10

D

y = 14x + 3

E

y = 14x + 11

A alternativa B está correta.

A equação da reta tangente será dada por: $y - f(q) = f'(q)(x - q)$.

Para

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 12 + 4 - 1 = 15$$

Usando as regras de derivação $f'(x) = 6x + 2$.

Assim, $f'(2) = 6 \cdot 2 + 2 = 14,$ sendo a reta tangente

$$y - 15 = 14(x - 2) \rightarrow y = 14x - 13$$

Então, a alternativa correta é a letra B.

Questão 2

Obter a equação da reta normal à função $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$ no ponto $x = 2$.

A

75x + 150y - 240 = 0

B

125x + 15y - 244 = 0

C

100x + 150y - 220 = 0

D

125x + 120y - 240 = 0

E

85x + 75y - 240 = 0

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 3

Uma reta que tem ângulo de 45º com o eixo positivo **x** é tangente à curva:

$f(x) = 2 + 5\ln\left(x^2\right)$

no ponto P. Determine as coordenadas do ponto P e a equação da reta tangente. Caso seja necessário, use na solução $\ln 100 = 4,6$.

A

(15, 14) e y = 4x + 6

B

(16, 12) e y = 3x + 12

C

(10, 25) e y = x + 15

D

(12, 24) e y = 2x + 8

E

(18, 20) e y = 2x + 12

A alternativa C está correta.

Se a reta tangente faz ângulo de 45° com eixo positivo x, então $m_t = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Assim,

$f'(p) = m_t = 1.$ Mas, $f'(x) = 5\frac{2x}{x^2} = \frac{10}{x},$ assim: $1 = f'(p) = \frac{10}{x_p} \rightarrow x_p = 10$.

Substituindo na função $y_p = f(x_p) = 2 + 5\ln(100) \approx 25$.

Portanto, o ponto P será $10, 2 + 5\ln 100) = (10, 25)$.

A equação da reta: .

$$y - f(p) = f'(p)(x - p) \rightarrow y - (25) = 1(x - 10) \rightarrow y = x + 15$$

Assim, a alternativa correta é a letra C.

Questão 4

Os gráficos das funções $f(x) = -2x^2 + 16x - 24$ e $g(x) = x^2 + bx + c$ são tangentes no ponto de abscissa igual a 3. Determine o valor de $b + c$.

A

B

3

C

2

D

1

E

5

A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 5

Seja a função $f(x) = 2x^2 + 1$. Sejam duas retas tangentes ao gráfico desta função. Uma das retas é tangente ao ponto $P(1, 3)$. A outra tangente intercepta a primeira reta no ponto de abscissa zero. Determine o ponto de tangência da segunda reta ao gráfico de $f(x)$ e sua equação.

A

(− 1,3) e 4x + y + 1 = 0

B

(− 1,3) e x + 4y + 1 = 0

C

(1, 3) e 4x + y + 1 = 0

D

(1,3)e x + 4y + 1 = 0

E

(-1,3) e x + y + 1 = 0

A alternativa A está correta.

Como $f'(x)=4x,$ a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $x=1$ tem $m=f'(1)=4\cdot 1=4$

A equação da reta será $y-3=4(x-1)\rightarrow y=4x-1$

O ponto da reta para $x=0\rightarrow y=4\cdot 0-1=-1$. Assim, ponto de interseção das duas retas $0,-1)$.

A segunda reta passa no ponto $0,-1)$ e é tangente ao gráfico de $\mathrm{f}(\mathrm{x})$.

Considerando que $\mathrm{Q}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ é o ponto de tangência.

Equação da reta:

$y-(-1)=f'(a)(x-0)\rightarrow y+1=4ax$

Mas, esta reta passa no ponto $a,b)$ que pertence a

$f(x):(a,b)=\left(a,2a^2+1\right)$

Então, substituindo na equação da reta:

$\left(2a^2+1\right)+1=4a\cdot a\rightarrow 2a^2=2\rightarrow a^2=1\rightarrow a=\pm 1$

Como a=1 é o ponto dado no enunciado, o ponto \(\mathrm{Q}(-1,3).

Reta tangente:

y+1=−4x→4x+y+1=0

Então, a alternativa correta é a letra A.

Questão 6

Para que valores de $k,$ a equação $\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=\mathrm{kx}^2,$ com k real diferente de zero, tem apenas uma solução.

A

$k=\frac{e^2}{2}$

B

$k=\frac{e^2}{4}$

C

$k=\frac{e^2}{8}$

D

$k=-\frac{e^2}{4}$

E

$k=-\frac{e^2}{16}$

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

Um fenômeno é regido pela função $f(x)=x^2e^x$. Determine os pontos onde as retas tangentes ao gráfico dessa função são horizontais. Use um aplicativo para analisar o gráfico dessa função.

Chave de resposta

Assista ao vídeo com a solução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

A reta $px + qy + 11 = 0,$ com p e q reais, é tangente ao gráfico de $g(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ no ponto de ordenada $\frac{7}{3}$ e com abscissa maior do que 1. Determine o valor de $(p + q + 11)$:

A

5

B

6

C

7

D

8

E

9

A alternativa C está correta.

Veja:

$$g(x) = \frac{7}{3} \rightarrow \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{7}{3} \rightarrow 3x^2 + 9 = 7x + 7 \rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4.3.2}}{2.3} = \frac{7 \pm 5}{6} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Assim, $x = 2,$ pois deve ser $gt; 1$. Reta tangente é do tipo:

$$y - \frac{7}{3} = g'(2)(x - 2) \quad g'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \text{ assim}, g'(2) = \frac{2^2+2.2-3}{(2+1)^2} = \frac{5}{9}$$ e a reta tangente será $y - \frac{7}{3} = \frac{5}{9}(x - 2)$ ou $5x - 9y + 11 = 0$

Desta forma, a alternativa correta é a letra $C,$ pois $p+q+r=5-9+11=7$

Questão 2

Seja a função $h(x)=3x^2+\ln x, xgt;0$. Seja r a reta normal ao gráfico de $h(x)$ no ponto com abscissa $x=1$. Determine a abscissa do ponto em que esta reta corta o eixo dos x .

A

22

B

33

C

15

D

12

E

13

A alternativa A está correta.

Como

$$h'(x)=6x+\frac{1}{x}\rightarrow h'(1)=6+1=7$$

Então

$$m_n=-\frac{1}{h'(1)}=-\frac{1}{7}$$

Para

$$x=1\rightarrow h(1)=3\cdot 1^2+\ln 1=3$$

Portanto, a reta normal terá equação:

$$y - 3 = \left(-\frac{1}{7}\right)(x - 1)$$

No ponto em que corta o eixo $\mathrm{x}, \mathrm{y} = 0,$ portanto

$$0 - 3 = \left(-\frac{1}{7}\right)(x - 1) \rightarrow x - 1 = 21 \rightarrow x = 22$$

Desta forma, a alternativa correta é a letra A.

Vamos começar!

Derivada e taxas de variação

Entenda, neste vídeo, o uso da derivada como ferramenta para cálculo de variações de funções aplicadas a um ponto, ou seja, a taxa de variação de uma função.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Taxas de variação através da derivada

Uma interpretação diz que a derivada de uma função real em um ponto representa uma taxa de variação instantânea para este valor do domínio da função. No entanto, em certos casos, não se conhece a função que relaciona diretamente as duas variáveis envolvidas no cálculo da taxa desejada.

> Logo, a taxa de variação deve ser calculada, de uma forma indireta, utilizando taxas conhecidas de outras variáveis.

Este método se baseia em definir um elo entre as duas variáveis desejadas, por meio do relacionamento de outras variáveis e, assim, através do conceito da regra da cadeia, se obter a taxa desejada. Por isso, é denominada taxa relacionada.

Seja a função f(x) que determina a relação entre a variável **y** e a variável independente t. Para se determinar a taxa média de variação de f(x) quando a variável t varia entre dois valores, utiliza-se a equação:

$$\text{Taxa Média} = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t)-f(q)}{t-q}$$

Essa taxa nos apresenta a proporção entre a variação da função em relação à variação do domínio, representado por **t**.

Atenção

A derivada de f(t) no ponto q, como já sabemos, é o limite deste quociente quando t tende ao ponto q. Assim, a derivada será o limite da taxa média quando t tende a q, que será denominada taxa de variação instantânea ou simplesmente taxa de variação.

Em outras palavras, quando **t** vai se aproximando do ponto **q**, as taxas estão sendo calculadas com períodos de variação do domínio cada vez menores. Quando **t** tender a **q**, a taxa, agora, será calculada praticamente para este instante do domínio, por isso é denominada taxa instantânea no ponto **q**.

$$f'(t) = \lim_{t \to q} \frac{f(t) - f(q)}{t - q} = \lim_{t \to q} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$$

Por exemplo, se a função $f(t)$ relaciona a posição de um objeto com o tempo, a taxa média da variação de $f(t)$ com **t** representa a velocidade média do objeto, e a derivada da função $f(t)$, em relação a t, representará a taxa de variação instantânea da posição de acordo com a variação do tempo que, na Física, denominamos velocidade instantânea ou simplesmente velocidade.

Outro exemplo: se a função $V(R)$ relaciona o volume de uma esfera com o raio, a derivada da função $V(R)$ em um ponto $R = R_0$ representa a taxa de variação do volume da esfera de acordo com a variação do raio, para o instante em que o raio assumir o valor de R_0.

> Por fim, um aspecto prático importante. Quando se pede uma taxa e não se define a que variável ela se refere, normalmente está se pedindo a taxa em relação à variável tempo.

Taxas relacionadas

Em certos problemas, precisa-se estudar a variação de **y** em relação a uma variável **t**, porém não temos esta dependência direta registrada por uma função real.

Exemplo

Por exemplo, pode haver casos em que conhecemos y em função da variável x, e a variável x em função da variável t. Assim, para calcular a taxa de variação de y em relação a t, deveremos compor a taxa de y em relação a x com a taxa de x em relação a t.Esta composição é organizada usando o conceito da regra da cadeia. Apesar do exemplo ter sido dado para apenas duas taxas, este método permite o relacionamento de diversas taxas. Essa composição entre as taxas é denominada Taxas Relacionadas.

A obtenção de uma taxa, através do método das taxas relacionadas, tem sua aplicação em nossa vida prática. Às vezes, a medição das taxas indiretas, intermediárias, são mais simples de serem obtidas do que diretamente a taxa desejada.

Um exemplo hipotético: às vezes, é mais fácil obter a variação do raio com o tempo do que obter diretamente a variação do volume com o tempo. Por isso, torna-se mais simples usar o método de taxas relacionadas para o cálculo da variação do volume pelo tempo, usando-se a variação do raio com o tempo e depois do volume pelo raio.

Atenção

Ressalta-se que, para a aplicação deste conceito, como já informado, não existe limitação de quantas variáveis podem ser usadas para se criar o relacionamento. O único ponto importante é que a cadeia de relacionamento deve estar completa.

Por exemplo, caso se deseje obter a taxa instantânea de uma variável **y** em relação a uma variável **t**, mas só se conheça o relacionamento de **y** em relação a **x**, de **x** em relação a **v**, de **v** em relação a **u** e, por fim, de **u** em relação a **t**. Assim, deve-se buscar um ou mais relacionamentos para se sair da variável **t** até se chegar à variável **y**.

Em outras palavras, conseguiremos fechar a cadeia se relacionarmos a taxa de **y** com **x**, do **x** com **v**, do **v** com **u** e de **u** com **t**. E obteremos a taxa relacionada, através da regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

É óbvio que conhecendo-se todas as funções poderia se obter uma função composta de forma a se obter uma função direta de **y** com **t** e depois aplicar diretamente a variável na função, como feito no primeiro item deste módulo. Mas, às vezes, a composição de funções pode ser mais complexa do que se calcular as derivadas individuais ou até mesmo, pode existir o caso em que não conhecemos uma função intermediária, mas apenas a taxa de variação correspondente.

Até aqui, usamos exemplos de taxa relacionada através de uma única cadeia, mas podem existir casos nos quais, ao se definir o elo, verifica-se a abertura de ramificações.

Exemplo

Por exemplo, deseja-se obter a taxa de variação de y em relação ao t, porém y depende de u e v e as duas variáveis dependem de t. Também, neste caso, usaremos a regra da cadeia para calcular a taxa desejada através das taxas relacionadas, mas é necessário se observar a relação matemática entre as variáveis e usar a regra de derivação específica. Vide alguns exemplos: a) b)

Mão na massa

Questão 1

A variável **k** depende diretamente da variável **x**, através da equação k = $2x^2 + 2x + 10$. Determine a taxa de variação de **k** em relação a **x**, para quando x = 10.

A

40

B

42

C

51

D

63

E

55

A alternativa B está correta.

Taxa de variação de $\mathbf{k}$ por +2\).

$\mathbf{x}$ é dada por $\frac{dk}{dx} = 2 \cdot 2x + 2 = 4x + 2$.

Para

$$x = 10 \rightarrow \frac{dk}{dx} = 4 \cdot 10 + 2 = 42$$

Assim, a alternativa correta é a letra B.

Questão 2

Um balão de gás de forma esférica é enchido de modo que seu raio aumente com uma taxa de 2cm/s. Determine a taxa de variação instantânea do volume do balão pelo tempo, em cm^3/s, para quando o raio atingir o valor de 10cm.

A

$800\pi \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

B

$1800\pi \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

C

$700\pi \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

D

$900\pi cm^3/s$

E

$600\pi \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

A alternativa A está correta.

Deseja-se obter a taxa $\frac{dV}{dt}$. Não se tem diretamente a relação entre V e o tempo.

Porém, o enunciado informa $\frac{dR}{dt} = 2\ \mathrm{cm/s}$

Sabe-se, porém, que, pelo balão ter a forma esférica,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rightarrow \frac{dV}{dR} = \frac{4}{3}\pi 3R^2 = 4\pi R^2$$

Portanto:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dR} \cdot \frac{dR}{dt} = 4\pi R^2 \cdot 2 = 8\pi R^2\ \mathrm{cm^3/s}$$

Para

$$R = 10\ \mathrm{cm} \rightarrow \frac{dV}{dt} = 8\pi 10^2 = 800\pi \mathrm{cm^3/s}$$

Assim, a alternativa correta é a letra A.

Questão 3

Uma determinada área A, em m^2, é medida pela equação $\mathrm{v}^2 + \mathrm{u} \cdot x$, com u, v e x medidos em metros. Sabe que as medidas v, x e u variam com o tempo e tem taxas, respectivamente de $2\ \mathrm{m/s}, -1\ \mathrm{m/s}$ e $3\ \mathrm{m/s}$. Determine a taxa de variação da área A para um instante em que $\mathrm{v} = \mathrm{u} = \mathrm{x} = 1\ \mathrm{m}$.

A

$8\frac{m^2}{s}$

B

$-6\frac{m^2}{s}$

C

$6\frac{m^2}{s}$

D

$-8\frac{m^2}{s}$

E

$9\frac{m^2}{s}$

A alternativa C está correta.

Deseja-se obter a taxa $\frac{dA}{dt}$, porém não se tem a relação direta, mas, sim, as taxas temporais das variáveis $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{x}$.

Derivando a expressão $A = v^2 + u \cdot x$ em relação à variável t se tem:

$$\frac{dA}{dt} = 2v\frac{dv}{dt} + u\frac{dx}{dt} + x\frac{du}{dt}$$

Deseja-se esta taxa para quando $\mathrm{v} = \mathrm{u} = \mathrm{x} = 1,$ substituindo estes valores e as taxas conhecidas

$$dA/dt = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = 6 \mathrm{~m}^2/\mathrm{s}$$

Assim, a alternativa correta é a letra C.

Questão 4

Uma fábrica tem uma produção que depende do preço unitário do produto no mercado. Assim, a relação entre a quantidade de itens produzidos (q), em milhões, pelo valor unitário (v), em reais, é dada pela equação $v^2 + 10q\sqrt{v} + 10 - q^2 = 0$. Qual a taxa de variação da quantidade produzida (q) em milhões pelo tempo, medido em dias, quando o preço unitário está $R\$1,00,$ sabendo que o preço do produto está aumentando a uma taxa de $R\$0,50$ por dia.

A

$\frac{37}{24}$ unidades de milhões/dia

B

$\frac{57}{24}$ unidades de milhões/dia

C

$\frac{57}{34}$ unidades de milhões/dia

D

$\frac{17}{44}$ unidades de milhões/dia

E

$\frac{27}{44}$ unidades de milhões/dia

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 5

A temperatura de um forno (T), medida em $^{\circ}\mathrm{C}$, depende da pressão em seu interior, medida em Pascal (kPa). Acontece, porém, que a pressão é regulada no forno pela tensão de alimentação de um equipamento (V), medida em Volts. Sabe-se que $T = \frac{p^2+50}{8}$ e $P = \frac{V^2}{10} -$ 10. Determine a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo, em minutos, para um instante de $V = 15\ \mathrm{V}$, sabendo que a tensão de alimentação está crescendo a uma taxa de $8^{\circ}C/\mathrm{min}$.

A

$-75^{\circ}\mathrm{C}/\mathrm{min}$

B

$-135^{\circ}\mathrm{C}/\mathrm{min}$

C

$75^{\circ}\mathrm{C}/\mathrm{min}$

D

$135^{\circ}\mathrm{C}/\mathrm{min}$

E

$95^{\circ}\mathrm{C}/\mathrm{min}$

A alternativa C está correta.

Assista ao vídeo com a solução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Em um circuito com duas resistências, R_A e R_B, ligadas em paralelo, temos que a resistência R equivalente é dada pela relação $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}$. O valor da resistência é medido em Ohms e representado pela letra Ω (lê-se ômega).

Sabe-se que o valor de R_A cresce com o tempo na base de $0,1\ \Omega/s$ e o valor da resistência R_B decresce com o tempo na base de $0,2\ \Omega/s$. Determine a taxa de variação da resistência R quando $R_A = 50\ \Omega$ e $R_B = 100\ \Omega$.

A

$\frac{1}{45}\Omega/s$

B

$\frac{2}{45}\Omega/s$

C

$\frac{1}{55}\Omega/s$

D

$\frac{2}{55}\Omega/s$

E

$\frac{3}{55}\Omega/s$

A alternativa A está correta.

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

Um carro de corrida percorre uma trajetória retilínea através de um movimento acelerado. Sua posição, marcada a partir do ponto de partida, segue uma equação dada por $\mathrm{s(t) = t^4}$, com s medido em metros e t em segundos para $0 \leq \mathrm{t} \leq 3,5\mathrm{s}$. Determine:

a) A taxa de variação média da posição do carro, em relação ao tempo, entre os instantes $\mathrm{t = 0}$ e $\mathrm{t = 1s}$;

b) A velocidade e a aceleração do carro para quando ele estiver a $81\mathrm{m}$ de sua partida.

Chave de resposta

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Um cilindro de altura 20cm tem um raio que varia com o tempo, através de uma taxa de 2cm/s. Determine a taxa de variação do volume do cilindro no instante em que o raio estiver em 10cm,

A

$80\pi \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

B

$400\pi \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

C

$800\pi \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

D

$800\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

E

$600\pi \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

A alternativa C está correta.

Sabe-se da Geometria que o volume do cilindro

$V = \pi h R^2 = 20\pi R^2\ \mathrm{cm}^3$

Deseja-se

$$V = \pi h R^2 = 20\pi R^2 \text{ cm}^3$$

Deseja-se

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dR} \cdot \frac{dR}{dt}, \text{ mas } \frac{dV}{dR} = 2.20\pi \mathrm{R} = 40\pi \mathrm{R}$$

Assim,

$$\frac{dV}{dt} = 40\pi R \cdot 2 = 80\pi R \text{ cm}^3/\text{s}$$

Para

$$\mathrm{R} = 10 \text{ cm} \rightarrow \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}} = 800\pi \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$$

Desta forma, a alternativa correta é a letra C.

Questão 2

Uma variável z está relacionada às variáveis x, y e u através da seguinte equação:

$$z = x \cdot \ln(y) + \cos u$$

Em que $\ln$ indica logaritmo neperiano.

Sabe-se que x , y e u variam em função do tempo (medido em segundos) com taxas numericamente iguais a $-2,5$ e $3.$ Determine o valor numérico da taxa de variação de z (por segundo) quando $u = \frac{\pi}{2}$, $x = 2$ e $y = e.$

A

5 unidades de z/s

B

15 unidades de z/s

C

25 unidades de z/s

D

50 unidades de z/s

E

75 unidades de z/s

A alternativa A está correta.

Como

$$z = x \operatorname{In} y + \cos u \rightarrow \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{x}\frac{1}{\mathrm{y}}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} \ln \mathrm{y} - \operatorname{sen} \mathrm{u}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}$$

Como:

$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = -2, \frac{dx}{dt} = 5e\frac{du}{dt} = 3,$ para $u = \pi/2, x = 2$ e $y = e$:

$$\frac{dz}{dt} = x\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} \ln y - \operatorname{sen} u\frac{du}{dt} =$$

$$= \frac{2e}{e} \cdot 5 + (-2) \ln \ln(e) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 3 = 10 - 2 - 3 = 5$$

Vamos começar!

Derivada e pontos extremos de uma função

Confira, neste vídeo, como utilizar a derivada para calcular pontos extremos na função. Esses pontos podem ser de máximo ou de mínimo.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Estudo do crescimento de uma função

A primeira derivada de uma função está associada à inclinação da reta tangente ao seu gráfico, assim, pode ser relacionada ao comportamento da função em relação ao seu crescimento ou decrescimento em um determinado ponto do seu domínio.

Da mesma forma, a segunda derivada da função mede a variação da primeira derivada, podendo ser relacionada com a concavidade de uma função em um ponto.

> Ao se combinar a análise de crescimento e de concavidade, pode-se obter os pontos de máximo ou mínimo local da função, denominados pontos extremos.

Inicialmente, vamos relembrar a definição de crescimento ou decrescimento de uma função:

Estritamente crescente

Uma função será classificada como estritamente crescente em um intervalo I, se:

$\forall$ set $\in I$, se $s < t \Rightarrow f(s) < f(t)$

Estritamente decrescente

Uma função será classificada como estritamente decrescente em um intervalo I, se:

$\forall s$ e $t \in I$, se $s < t \Rightarrow f(s) > f(t)$

Por outro lado:

Função Crescente

Uma função será classificada como crescente em um intervalo I, se:

$\forall$ set $\in I$, se $s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$

Função Decrescente

Uma função será classificada como decrescente em um intervalo I, se:

$\forall$ set $\in I$, se $s < t \Rightarrow f(s) \geq f(t)$

Como já visto no módulo anterior, a derivada pode ser interpretada como o coeficiente angular da reta tangente em um ponto. Assim, o sinal da derivada está diretamente relacionado ao comportamento de crescimento da função. Para se analisar este comportamento em um intervalo I, deve-se verificar o comportamento em todos os pontos de I.

Desta forma, seja f(x) uma função contínua no intervalo I, então:

- Se f'(x) > 0 para todos os pontos interiores ao intervalo I, então f(x) será estritamente crescente em I.
- Se f'(x) < 0 para todos os pontos interiores ao intervalo I, então f(x) será estritamente decrescente em I.
- Se f'(x) = 0 para todos os pontos interiores ao intervalo I, então f(x) é constante em I.

Exemplo I

Vamos determinar os intervalos em que a função $f(x) = -x^2 \ln x, \mathrm{x} > 0$, é crescente ou decrescente.

Derivando a função:

$$f'(x) = -2x \ln x - x^2 \frac{1}{x} = -2x \ln x - x = -x(2 \ln x + 1)$$

Para se verificar o comportamento da função, deve-se analisar o sinal da derivada.

Como a função somente é definida por $x > 0$, a parcela - x será sempre negativa. Logo, o sinal de $f'(x)$ será dado pelo sinal contrário à parcela $(2 \ln x + 1)$.

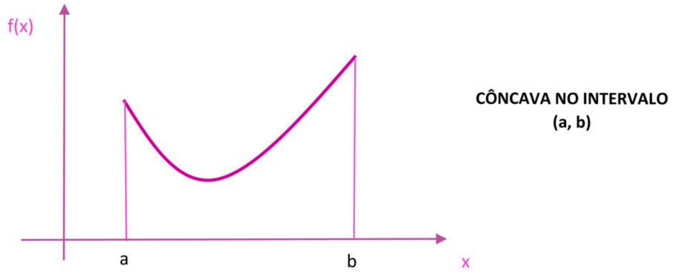
$f'(x) > 0 \rightarrow 2 \ln x + 1 < 0 \rightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \rightarrow x < e^{-\frac{1}{2}} \mathrm{f(x)}$ estritamente crescente.

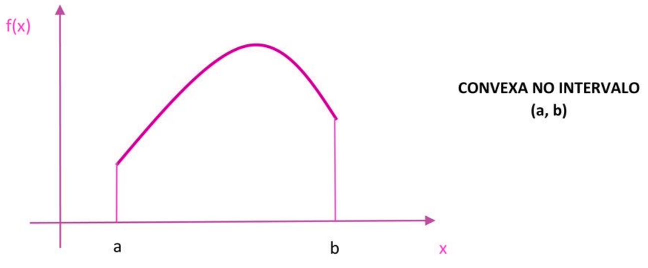
$f'(x) < 0 \rightarrow 2 \ln x + 1 > 0 \rightarrow \ln x > -\frac{1}{2} \rightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \mathrm{f(x)}$ estritamente decrescente.

Deste modo, $\mathrm{f(x)}$ será estritamente crescente para $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ e estritamente decrescente para $x > e^{-\frac{1}{2}}$

Estudo da concavidade de uma função

Uma determinada função em um intervalo I pode ter uma concavidade para cima (côncava) ou concavidade para baixo (convexa). A imagem a seguir apresenta um exemplo desses dois tipos de concavidade em um intervalo (a, b).





Uma função em um intervalo I tem concavidade para cima quando o gráfico de f(x) estiver sempre acima das tangentes a este gráfico. Uma função em um intervalo I tem concavidade para baixo quando o gráfico de f(x) estiver sempre abaixo das tangentes a este gráfico.

Se lembrarmos que a função derivada também é uma função, assim a derivada da função derivada, isto é, a derivada de segunda ordem de f(x) analisa o crescimento ou o decrescimento da primeira derivada em um determinado intervalo. Como consequência, será uma ferramenta para se analisar a concavidade de f(x).

Atenção

Vamos provar isso de uma forma intuitiva. Observe que no intervalo I, em que a função tem a "concavidade para cima", a função é decrescente no início do intervalo, atinge um ponto de mínimo, e depois é crescente na segunda parte do intervalo. De forma oposta, no intervalo I, no qual a função tem a "concavidade para baixo", a função é crescente no início do intervalo, atinge um ponto de máximo, e depois é decrescente na segunda parte do intervalo. Complementarmente, no ponto de máximo ou no ponto de mínimo, a tangente ao gráfico será horizontal e, assim, seu valor de coeficiente angular m = 0. Portanto, nestes pontos, a derivada terá valor nulo. Este detalhe será explorado com mais profundidade em um item posterior.

Juntando os dois conceitos, conclui-se que no intervalo com "concavidade para cima", a derivada é negativa no início (função decrescente), depois nula (no ponto de mínimo) e depois positiva (função crescente). Logo, a função derivada será estritamente crescente. Consequentemente, a derivada da função derivada (derivada de segunda ordem de f(x): f"(x)) será positiva.

Analogamente, no intervalo com "concavidade para baixo", a derivada é positiva no início (função crescente), depois nula (no ponto de máximo) e depois negativa (função decrescente). Portanto, a função derivada será estritamente decrescente. Consequentemente, a derivada da função derivada (derivada de segunda ordem de f(x): f"(x)) será negativa.

Resumindo

Desta forma, resumidamente, seja f(x) uma função que admite derivada de segunda ordem em um intervalo I – Teste da Concavidade: Se f"(x) > 0 para todos os pontos interiores ao intervalo I, então f(x) terá concavidade para cima em I;Se f"(x) < 0 para todos os pontos interiores ao intervalo I, então f(x) terá concavidade para baixo em I.

Ponto de inflexão

Seja um ponto p do domínio de f(x), com f(x) contínua em p. Se a função muda de nome de concavidade antes e depois de p, diz-se que p é um ponto de inflexão de f(x).

Em outras palavras, se a concavidade na vizinhança à esquerda de p é "para baixo" e na vizinhança à direita de p é "para cima", ou vice-versa, então p é ponto de inflexão da função.

Importante: a derivada da função em um ponto de inflexão pode ser nula, pode não existir ou até mesmo ser diferente de zero, mas obrigatoriamente, a função f(x) tem que ser contínua em p.

Exemplo II

Vamos analisar a concavidade e a existência de pontos de inflexão para a função:

$$f(x) = -x^2 \ln x, x > 0$$

No exemplo anterior, foi calculada a derivada da função $f'(x) = -x(2\ln x + 1)$.

A análise da concavidade é feita através da derivada de segunda ordem:

$f''(x) = (-1)(2\ln x + 1) - x\frac{2}{x} = -2\ln x - 3$

$f''(x) > 0 \rightarrow 2\ln x + 3 < 0 \rightarrow \ln x < -\frac{3}{2} \rightarrow x < e^{-\frac{3}{2}} : \mathrm{f(x)}$ concavidade para cima;

$f''(x) < 0 \rightarrow 2\ln x + 3 > 0 \rightarrow \ln x > -\frac{3}{2} \rightarrow x > e^{-\frac{3}{2}} : \mathrm{f(x)}$ concavidade para baixo. Desse modo:

A função $\mathrm{f(x)}$ terá "concavidade para cima" para $0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$ e a função $\mathrm{f(x)}$ terá "concavidade para baixo" para $x > e^{-\frac{3}{2}}$. No ponto $x = e^{-\frac{3}{2}}$, a função $\mathrm{f(x)}$ é contínua e muda de concavidade, assim, $x = e^{-\frac{3}{2}}$ é um ponto de inflexão de $\mathrm{f(x)}$.

Extremos locais ou relativos

Seja uma função $f(x)$ definida em domínio S tal que $p \in S.$

A função $f(x)$ terá um máximo relativo ou local em um ponto p de seu domínio se existir algum intervalo aberto I $\subset S$ (vizinhança de p), contendo o ponto $\mathbf{p}$, tal que:

$$f(x) \leq f(p), \forall p \in I \cap S$$

O ponto **p** será denominado ponto de máximo relativo (local) de $f(x)$ ou maximizante.

A função $f(x)$ terá um mínimo relativo ou local em um ponto $\mathbf{p}$ de seu domínio se existir algum intervalo aberto I $\subset S$ (vizinhança de p), contendo o ponto $\mathbf{p}$, tal que:

$$f(x) \geq f(p), \forall p \in \forall p \in I \cap S$$

O ponto **p** será denominado ponto de mínimo relativo (local) de f(x) ou minimizante.

Os pontos de máximo e mínimo locais são denominados **Pontos Extremos Relativos de f(x)**. Os pontos extremos podem ocorrer em pontos do domínio onde a função é contínua e derivável, contínua e não derivável ou até mesmo descontínua.

Para o caso do ponto extremo em um ponto contínuo e derivável, o teorema a seguir apresenta uma forma para obtê-los.

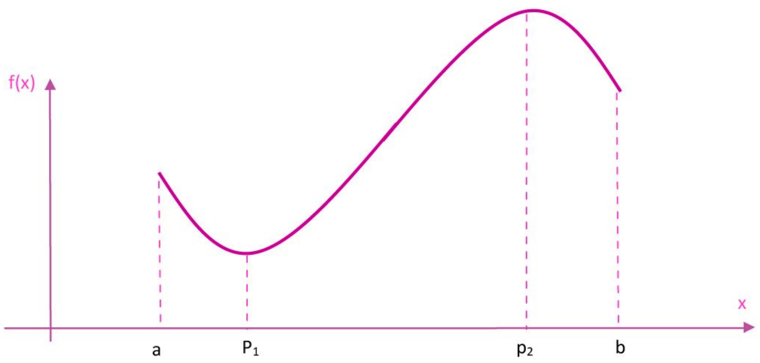
Teorema de Fermat

Seja um ponto p interior ao domínio da função $f(x)$ que é um ponto extremo de $f(x).$ Se a derivada de $f(x)$ existir no ponto $p,$ então a derivada é nula.

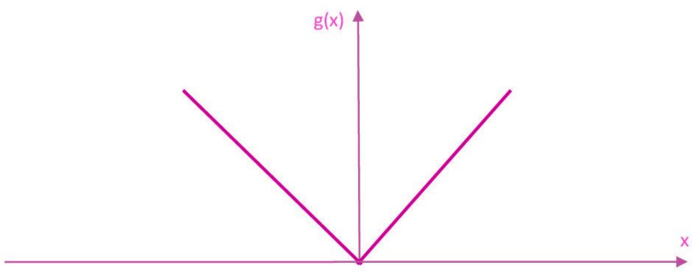
Atenção

O teorema só vale nesta direção. Em outras palavras, se o ponto é máximo ou mínimo local e a derivada existe, então, obrigatoriamente, ela será nula. Quer dizer, obrigatoriamente, que a tangente ao gráfico da função neste ponto será horizontal.

Na imagem a seguir, pode ser observado que os pontos p_1 e p_2 são pontos nos quais existem extremos locais para a função $f(x)$.



O teorema não diz que todo ponto extremo tem derivada nula, pois existem pontos que são extremos locais e não têm a derivada definida. A figura, a seguir, mostra um exemplo. O ponto para x = 0 é um ponto de mínimo local para a função g(x) = |x|, porém a derivada de g(x) não existe neste ponto.



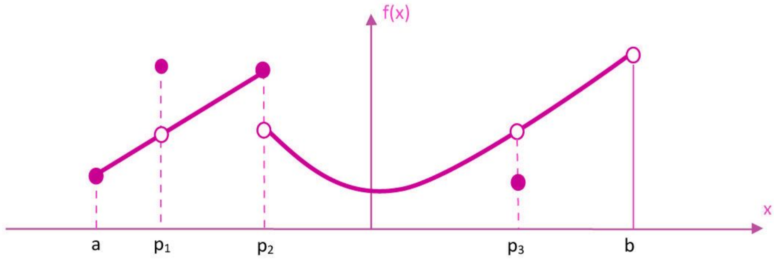
Da mesma forma, o teorema não está dizendo que todo ponto com derivada nula é ponto extremo, pois existem pontos cuja derivada é nula e não são nem máximo nem mínimo locais da função.

Aqui cabe uma afirmação importante, a derivada nula só pode acontecer em três casos (os únicos pontos possíveis para se ter uma tangente horizontal):

- Máximo local
- Mínimo local
- Ponto de inflexão

Por fim, no caso em que a função é descontínua, a análise para verificar se o ponto é ou não um ponto extremo só será possível pela análise dos valores da função. Em outras palavras, não se tem, neste caso, nenhuma ferramenta para ocorrer a verificação.

Na imagem a seguir, por exemplo, o ponto p_1 é um ponto de máximo local, pois existe uma vizinhança contendo p_1 em que todos os pontos levam a um valor de $f(x) \leq f(p_1)$. Da mesma forma, o ponto p_3 é um ponto de mínimo local, pois existe uma vizinhança contendo p_3, em que todos os pontos levam a um valor de $f(x) \geq f(p_3)$. Por fim, p_2 não é nem um ponto de mínimo local nem um ponto de máximo local.



O **Teste da Primeira Derivada**, como ferramenta importante, pode ser usado para analisar se qualquer ponto é ou não um ponto extremo para esta função. Mas cuidado, ele só pode ser usado nos pontos em que a função é contínua.

Teste da Primeira Derivada

Se a derivada de mudar de positivo para negativo em , então tem um máximo local em p. O ponto p será um maximizante para .

Por fim, cada extremidade do domínio da função sempre será um ponto extremo local dela quando for uma extremidade fechada. Na imagem anterior, a função tem ponto de mínimo local para x = a, mas não tem ponto extremo para x = b.

Exemplo III

Vamos determinar os pontos extremos locais da função $f(x) = -x^2 \ln x, x > 0$, caso existam.

Observe que a função é contínua em todo seu domínio $(x > 0)$. Sua derivada $f'(x) = -x(2\ln x + 1)$ existe para todo domínio. Desta forma, não existe descontinuidade nem pontos onde a derivada não existe.

Pelo teorema:

$f'(x) = -x(2\ln x + 1) = 0 \rightarrow x = 0$ (não faz parte do domínio) ou $x = e^{-1/2}$

Assim, o ponto $x = e^{-1/2}$ é um ponto extremo local para $f(x)$. No próximo item, aprenderemos como classificar este ponto através da derivada de segunda ordem.

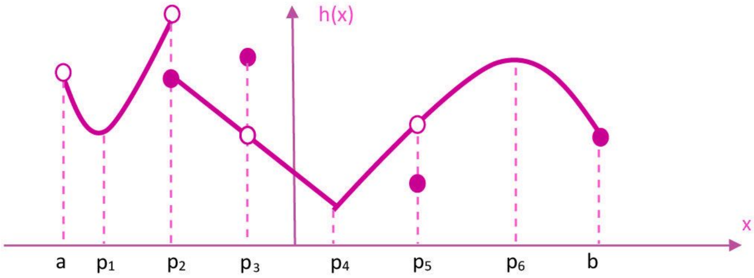
A obtenção deste ponto extremo pode ser feita também usando o segundo método:

Como $f(x)$ será estritamente crescente para $0 < x < e^{-1/2}$ e estritamente decrescente para $x > e^{-1/2}$, então, em $x = e^{-1/2}$ existe um ponto extremo e ele é um ponto de máximo local.

Mão na massa

Questão 1

Observe o gráfico de $h(x)$. Marque a alternativa que apresenta, entre os pontos representados, quais não são os pontos extremos de $h(x)$ para $x \in]a; b]$.



A

Apenas p_2

B

Apenas a e p_5

C

Apenas a e p_2

D

Apenas p_2 e p_5

E

Apenas p_1 e p_4

A alternativa C está correta.

Os pontos p_1 e p_6 são pontos extremos em que a derivada existe. Observando o gráfico, p_1 é minimizante de $h(x)$ e p_6 é maximizante.

No ponto p_4 a derivada não existe, porém é um ponto extremo, sendo minimante de $h(x)$.

Nos pontos p_2, p_3 e p_5 existe uma descontinuidade. 0 ponto p_2 não é ponto extremo, mas p_3 é um maximizante e p p_5 um minimizante de $h(x)$.

Por fim, a extremidade do domínio para $x = a,$ por estar aberto, não é ponto extremo, mas para $x = b,$ com domínio fechado, é um ponto minimizante de $h(x)$.

Assim, a alternativa correta é a letra C.

Questão 2

Sabe-se que a função $f(x) = x^2 - 2k\sqrt{x}.$ Determine o valor do parâmetro $k,$ real.

A

10

B

12

C

16

D

20

E

24

A alternativa C está correta.

A função é contínua em $x = 4$. A derivada $f'(x) = 2x - \frac{k}{\sqrt{x}}$, existe para $x = 4$.

Portanto, se $x = 4$ é um ponto extremo, em que existe derivada, obrigatoriamente $f'(4) = 0$.

$f'(2) = 2.4 - \frac{k}{\sqrt{4}} = 0 \rightarrow \frac{k}{2} = 8 \rightarrow k = 16$

Assim, a alternativa correta é a letra C.

Questão 3

Seja a função $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 9$, em qual região a função f é estritamente crescente?

A

$xlt;-4$ ou $xgt;1$

B

\(-4

C

$xgt;1$

D

$xlt;-4$

E

$xlt;0$

A alternativa A está correta.

Veja

$$f'(x) = 6x^2 + 18x - 24 = \left(x^2 + 3x - 4\right)$$

é definida em todo domínio.

$$\left(x^2 + 3x - 4\right)$$

é uma equação do segundo grau com raízes em

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$$

então

$$f'(t) < 0 \to \left(x^2 + 3x - 4\right) < 0 \to -4 < x < 1-$$

função estritamente decrescente

$$f'(t)1 \text{ -}$$

função estritamente crescente

A proveitando para estudar a concavidade

$$f''(x) = 6(2x + 3)$$

então

$$f''(x) < 0 \rightarrow 2x + 3 < 0 \rightarrow x < -\frac{3}{2}$$

- concavidade para baixo

$$f''(x) > 0 \rightarrow 2x + 3 > 0 \rightarrow x > -\frac{3}{2}$$

- concavidade para cima.

Desse modo, a alternativa correta é a letra C

Questão 4

Seja f a função definida por $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 9$, cujo domínio é o intervalo $[-5; 3]$. Marque a alternativa que apresenta, respectivamente, um maximizante, um minimizante e um ponto de inflexão de f.

A

$1, -4$ e $\frac{3}{2}$

B

$-4, 1$ e $-\frac{3}{2}$

C

$3, -5$ e $-\frac{1}{2}$

D

$0, 2$ e $\frac{1}{2}$

E

$0, 1$ e -2

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 5

Seja $g(x) = \{ \ xe^{\frac{1}{x}}, x \neq 0 \ 0, x = 0$. Marque a alternativa que apresenta o intervalo no qual $g(x)$ tem concavidade para baixo.

A

$xlt; 0$

B

$xgt; 0$

C

\(0

D

$xgt; 1$

E

$xgt; 2$

A alternativa A está correta.

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Seja

$$g(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

Determine e classifique os pontos extremos e os pontos de inflexão de $g(x)$, caso existam.

A

$x = 1$ é um maximante, e $x = 2$ é um ponto de inflexão.

B

$x = 2$ é um maximante e não tem ponto de inflexão.

C

$x = 1$ é um minimante e não tem ponto de inflexão.

D

$x = 2$ é um minimante, e $x = 1$ é um ponto de inflexão.

E

$x = 0$ é um minimante e $x = 2$ é um ponto de inflexão

A alternativa C está correta.

Assista ao vídeo com a solução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

Uma determinada ação de investimento tem seu valor modelado pela função $g(t) = 100(t-2)^2 e^{t-2}, t \geq 0$, em que t é o tempo medido em dias a partir de um determinado dia de referência e $g(t)$ o valor da ação no dia t. Um investidor deseja comprar as ações em um momento em que elas estiverem com um comportamento de crescimento de seu valor. Qual o periodo indicado para este investidor, e em que dia a função atingirá seu menor valor?

Chave de resposta

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Marque a alternativa que apresenta uma afirmativa correta relacionada a $g(x) = x^3 - 3x$ no intervalo de $(0, 1)$

A

$g(x)$ é estritamente decrescente com concavidade para cima.

B

$g(x)$ é estritamente crescente com concavidade para cima.

C

$g(x)$ é estritamente decrescente com concavidade para baixo.

D

$g(x)$ é estritamente crescente com concavidade para baixo.

E

$g(x)$ é uma função constante.

A alternativa A está correta.

Veja

$$3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g'(x) > 0 \rightarrow x1 : g(x) \text{ estritamente crescente} \\ g'(x) < 0 \rightarrow -1 < x < 1 : \quad g(x) \text{ estritamente decrescente} \end{array} \right.$$

$$g''(x) = 6x \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} g''(x) > \rightarrow x > 0 : g(x) \text{ concavidade para cima} \\ g''(x) << 0 \rightarrow x << 0 : g(x) \text{ concavidade para baixo} \end{array} \right.$$

Questão 2

Marque a alternativa que apresenta um ponto maximizante da função $h(t) = t^2 e^t$

A

-2

B

-1

C

0

D

2

E

3

A alternativa A está correta.

Veja

$$h'(t) = 2te^t + t^2e^t =$$
$$= \mathrm{te}^t(2+t) : \begin{cases} h'(t) > 0 \to t0 : h(t) \text{ estritamente crescente} \\ h'(t) < 0 \to -2 < t < 0 : h(t) \text{ estritamente decrescente} \end{cases}$$

Assim, t=−2 será um maximizante da função e t=0 um minimizante.

Portanto, a alternativa correta é a letra A.

Vamos começar!

Derivada na análise dos pontos críticos de uma função

Neste vídeo, vamos usar as derivadas para encontrar os pontos críticos de uma função, ou seja, os pontos em que a derivada se anula. Esses pontos são de extrema importância para entender como se comporta uma função matemática. Assista!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Análise dos pontos críticos

Ao se analisar o comportamento de uma função, existem pontos que devem ter uma atenção maior por serem pontos em que a derivada é nula ou não existe.

Como já estudado, esses pontos podem ser de máximo ou mínimos locais, ou até mesmo, em alguns casos, pontos de inflexão. Este módulo apresentará os testes que devem ser feitos para se classificar a natureza dos pontos críticos de uma função.

Outro ponto abordado é a resolução dos problemas de otimização, isto é, a busca dos pontos de uma função que a levam a ter o maior valor ou o menor valor dentro de seu domínio. Estes pontos serão denominados de máximo ou mínimo globais.

Seja f(x) uma função contínua em um intervalo aberto I. Um ponto **p** pertencente a I será um ponto crítico de f(x) se a f'(p) = 0 ou f'(p) não existir. Assim, os pontos críticos serão os pontos que devem ser analisados caso você esteja interessado em obter os pontos extremos de uma função.

Relembrando

Como visto no item anterior, os pontos em que a derivada é nula podem ser classificados em máximos locais, mínimos locais ou pontos de inflexão. Os pontos em que a derivada não existe podem ser um destes três casos, mas, também, não ter nenhuma classificação específica.

Para se classificar os pontos críticos em que a derivada não existe, deve ser feita uma análise do crescimento e decrescimento da função e de suas concavidades, raciocínio já realizado no módulo anterior. Para o caso de ser um ponto crítico com derivada nula, a classificação do ponto se dará pelo teste da segunda derivada.

Teste da segunda derivada

Seja p um ponto crítico de $f(x)$ com derivada nula, assim:

1. Se $f''(p) > 0$, então p é um ponto de mínimo local de $f(x)$;
2. Se $f''(p) < 0$, então p é um ponto de máximo local de $f(x)$;

3. Se $f''(p) = 0$, então nada podemos concluir.

No caso em que $f'(p) = 0$, deve ser feito um teste complementar. Continua a derivar e a verificar o valor da derivada no ponto p, até que se obtenha uma derivada de ordem n tal que $f(n)(p) \neq 0$, assim:

1. Se n for par e $f(n)(p) > 0$, então p é ponto de minimo local de $f(x)$;
2. Se n for par e $f(n)(p) < 0$, então p é ponto de máximo local de $f(x)$;
3. Se n for ímpar, então p é ponto de inflexão de $f(x)$.

Exemplo IV

Vamos determinar e classificar os pontos críticos da função $f(x) = (x-1)^2 e^x$.

$$\begin{gathered} f'(x) = 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x = \\ = (x-1)e^x(2+x-1) = (x-1)e^x(x+1) = \left(x^2-1\right) e^x \end{gathered}$$

Então, os pontos críticos são $x = 1$ e $x = -1$.

Analisando a segunda derivada: $f''(x) = 2xe^x + \left(x^2-1\right) e^x$

$f''(1) = 2e + 0 >> 0 : x = 1$ ponto de minimo local;

$f''(-1) = -2e^{-1} + 0 < 0 : x = -1$ ponto de máximo local.

Exemplo V

Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x) = 2x^5, g(x) = -x^4 e h(x) = 2x^4$.

a) $f'(x) = 10x^4 \rightarrow f'(x) = 0$ para $x = 0$

$f\prime\prime(x) = 40x^3 \rightarrow f''(0) = 0$

Portanto, nada podemos afirmar pelo teste da segunda derivada. Deve-se continuar a derivar até achar a ordem da derivada diferente de zero no ponto $x = 0$.

$; f^{(3)}(x) = 120x^2 \rightarrow f^{(3)}(0) = 0$
$; f^{(4)}(x) = 240x \rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = 240 \rightarrow f^{(5)}(0) = 240$, como a ordem da derivada é 5 , impar, $x = 0$ é ponto de inflexão.

b) $g'(x) = -4x^3 \rightarrow g'(x) = 0$ para $x = 0$

$g\prime\prime(x) = -12x^2 \rightarrow g''(0) = 0$

Logo, nada podemos afirmar pelo teste da segunda derivada. Deve-se continuar a derivar até achar a ordem da derivada diferente de zero no ponto $x = 0$.

$g^{(3)}(x) = -24x \rightarrow g^{(3)}(0) = 0$

$g^{(4)}(x) = -24 \rightarrow g^{(4)}(0) = -24 < 0$, como a ordem da derivada é 4 , par, e $g^{(4)}(0) < 0$, então $x = 0$ é um maximizante de $g(x)$

c) $h'(x) = 8x^3 \rightarrow h\prime(x) = 0$ para $x = 0$

$h\prime\prime(x) = 24x^2 \rightarrow h''(0) = 0$

Assim, nada podemos afirmar pelo teste da segunda derivada. Deve-se continuar a derivar até achar a ordem da derivada diferente de zero no ponto $x = 0$.

$h^{(3)}(x) = 48x \rightarrow h^{(3)}(0) = 0$

$h^{(4)}(x) = 48 \rightarrow h^{(4)}(0) = 48c - table0$, como a ordem da derivada é 4, par, e $h^{(4)}(0) > 0$, então $x = 0$ é um minimizante de $h(x)$.

Máximos e Mínimos globais: otimização

Em determinadas aplicações, estamos interessados em obter o valor de **x** que leva a função a atingir seu maior ou menor valor em todo o seu domínio. Estes pontos são denominados Extremos Globais ou Absolutos da função.

Os problemas que buscam valores máximos ou mínimos de uma função são denominados problemas de otimização.

Seja uma função $f(x)$ definida em um domínio $S \subset R$:

A função $f(x)$ terá um máximo absoluto ou global em um ponto p de seu domínio se

$$f(x) \leq f(p), \forall p \in S$$

A função $f(x)$ terá um mínimo absoluto ou global em um ponto p de seu domínio se:

$$f(x) \geq f(p), \forall p \in S$$

Os candidatos a serem pontos extremos globais de uma função em um domínio S serão os pontos extremos locais e as extremidades do domínio, caso existam.

1. a função $f(x) = x$, com domínio nos reais, não tem máximo e nem mínimo global;
2. a função $f(x) = x^2$, com domínio nos reais, tem minimo global no ponto $x = 0$, porém não tem máximo global;
3. a função $f(x) = x + 2$, para domínio em [0, 2], tem ponto de máximo global em $x = 2$ e ponto de mínimo global em $x = 0$

Apenas no caso de uma função contínua em domínio S fechado pode-se garantir que, obrigatoriamente, a função terá ponto de máximo e mínimo global. Funções com estas características são consideradas compactas, isto é, têm valores limitados e são definidas em um domínio fechado.

Teorema dos valores extremos ou Teorema de Weierstrass

Se f(x) for contínua em um intervalo [a,b] fechado, então f(x) assume um valor de máximo absoluto f(c) e um valor de mínimo absoluto f(d) em algum ponto c e d de [a,b].

Mão na massa

Questão 1

Classifique os pontos críticos para a função $f(x) = 36x^2 - 63x - 3x^3 - 2$.

A

$x = 7$ é maximante e $x = 1$ é ponto de inflexão de $f(x)$.

B

$x = 7$ é maximante e $x = 1$ é minimante de $f(x)$.

C

$x = 7$ é ponto de inflexão de $f(x)$ e $x = 1$ é minimante de $f(x)$.

D

$x = 7$ é minimante de f(x) e $x = 1$ é maximante de $f(x)$.

E

$x = -1$ minimante de $f(x)$ e $x = 8$ é maximante de $f(x)$

A alternativa B está correta.

Veja

$$f'(x) = 72x - 63 - 9x^2 = -9\left(x^2 - 8x + 7\right),$$

que é definida para todo domínio.

Assim, os únicos pontos criticos serão aqueles que $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -9\left(x^2 - 8x + 7\right) = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \rightarrow x =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = -9(2x - 8) = -18(x - 4) \rightarrow \{\ f''(7) = -18 \cdot 3 = -540$$

Logo, $x = 7$ é maximizante e $x = 1$ é minimizante de $f(x)$

Aproveitando o exercício, a função tem concavidade para cima para $xlt;4(f"(x)gt;0)$ e concavidade para baixo para $xgt;4\,(f''(x)lt;0)$. Portanto, $x = 4$ será um ponto de inflexão de $f(x)$.

Assim, a alternativa correta é a letra B.

Questão 2

Seja a função $f(x) = 100 - 2x - x^2.$ Verifique a existência de máximos e mínimos absolutos para $f(x).$

A

A função não tem máximo global, mas tem mínimo global em $x = 1.$

B

A função não tem nem máximo nem mínimo global.

C

A função não tem mínimo global, mas tem máximo global em $x = 1.$

D

A função tem máximo global em $x = 3$ e tem mínimo global em $x = 1.$

E

A função tem máximo global em $x = 1$ e tem mínimo global em $x = 2$

A alternativa C está correta.

$f'(x) = -2 - 2x,$ definida em todo dominio

Portanto, os únicos pontos críticos serão os pontos em que

assim $f''(1)lt;0 : x = 1$ maximizante de $f(x)$.

O dominio da função $f(x)$ é aberto, então, não se pode garantir a existência de mínimos e máximos globais. Deve ser verificado o comportamento da função nas extremidades do domínio.

Veja que, quando x tende $a\infty,$ a função vai tender $a - x^2,$ portanto vai tender $a - \infty$.

Da mesma forma, quando x tende $a - \infty,$ a função vai tender $a - x^2,$ portanto vai tender $a - \infty,$ também. Assim, pelo comportamento da função, ela não tem minimos globais. Não existe nenhum ponto que leva a função a ter o menor valor do domínio, pois esta função tende $a - \infty$.

Mas esta função tem um máximo global que será $x = -1,$ que leva a função a ter o seu maior valor, $f(-1) = 101$.

Logo, a alternativa correta é a letra C.

Questão 3

Classifique os pontos críticos para a função $h(x) = \frac{1}{x^2 - 16}$

A

$x = 4$ é maximante de $h(x)$

B

$x = 0$ é maximantede $h(x)$

C

$x = –4$ é minimante de $h(x),$ e $x = 4$ é maximante de $h(x)$

D

$x = 4$ é minimante de $h(x),$ e $x = 0$ é maximante de $h(x)$

E

$x = –4$ é maximante de $h(x)$

A alternativa B está correta.

Veja

$$h'(x) = \frac{-2x}{(x^2-16)^2},$$

não é definida para $x = \pm 4.$

Mas $$h'(x) = \frac{-2x}{(x^2-16)^2} = 0 \rightarrow x = 0.$$

Portanto, existem três pontos críticos: $x = 0$ e $x = \pm 4$

Em $x = \pm 4,$ a função $h(x)$ é descontínua, assim, há que se verificar a vizinhança dos pontos. Observe que a função tende para mais ou menos infinito ao se aproximar destes pontos. Portanto, estes pontos não são pontos extremos. Como informação, o que existirão nestes pontos serão assíntotas verticais da função.

A classificação de $x = 0$ pode ser feita pela segunda derivada, percebendo-se que $h''(0) lt; 0,$ ou se analisando o crescimento de $h(x)$.

$$h'(x) = \frac{-2x}{(x^2-16)^2} >\rightarrow x0$$

Assim, como $h(x)$ é crescente antes de $x = 0$ e depois decrescente, $x = 0$ é um maximizante de $h(x)$.

A alternativa correta é a letra B.

Questão 4

Uma fábrica produz um equipamento. Seja a variável p, que representa quantos equipamentos são produzidos por hora. Verificou-se que a função $p(t)=2t^3-24t^2+90t$ representa p em função de t, medidos em horas. Determine o instante em que a fábrica apresenta o maior valor e o menor valor para a variável p, respectivamente, no intervalo de $t \in [1,7]$.

A

7h e 1 h

B

3h e 7h

C

3h e 5h

D

1h e 5h

E

1 h e 3 h.

A alternativa A está correta.

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 5

Determine os pontos de inflexão, caso existam, para a função $g(x)=\frac{4x}{x^2+2}$

A

Apenas $x=\sqrt{6}$ e $x=-\sqrt{6}$ são pontos de inflexão de $g(x)$.

B

Apenas $x=0$ e $x=-\sqrt{6}$ são pontos de inflexão de $g(x)$.

C

Apenas $x=0, x=\sqrt{6}$ e $x=-\sqrt{6}$ são pontos de inflexão de $g(x)$.

D

Apenas $x = 0$ e $x = \sqrt{6}$ são pontos de inflexão de $g(x)$.

E

Não tem ponto de inflexão.

A alternativa C está correta.

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Deseja-se construir uma caixa de forma cilíndrica com volume de 2 m3. Na lateral da caixa e no fundo, utilizaremos um material que custa R$ 5,00 por metro quadrado. Na tampa superior, o material terá um custo de R$ 10,00 por metro quadrado. Qual é a dimensão da caixa que vai minimizar o custo com gasto do material para construí-la?

A

$< br > r = \sqrt[3]{\frac{4}{3\pi}} cmeh = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}} cm < br >$

B

$< br > r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} cmeh = \sqrt[3]{\frac{12}{\pi}} cm < br >$

C

$< br > r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} cm \text{ e } h = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} cm < br >$

D

$< br > r = \sqrt[3]{\frac{2}{3\pi}} cm \text{ e } h = \sqrt[3]{\frac{18}{\pi}} cm < br >$

E

$< br > r = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} cm \text{ e } h = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} cm < br >$

A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

O consumo de energia (C , em Wh) de um determinado equipamento, depende da velocidade de rotação de seu eixo principal (v , em rpm). O modelo, que relaciona as duas variáveis, é $C = 4v^2 - 160v + 2000$. O equipamento pode trabalhar com velocidade de eixo entre $[10, 25]$. Determine qual a velocidade que permite o menor consumo do equipamento.

Chave de resposta

Assista ao vídeo com a solução desta questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Marque a alternativa que apresenta uma afirmativa correta relacionada aos pontos críticos de

$f(x) = \{ \; x^2 + 4x + 8, x \in [-4, 0] \; \frac{16}{x}, x \in (0, 4]$

A

Apresenta apenas um ponto crítico em $x = -2,$ com um ponto de mínimo local em $x = -2.$

B

Apresenta apenas um ponto crítico em $x = -2,$ com um ponto de máximo local em $x = -2.$

C

Apresenta pontos críticos em $x =$ 0 e $x = -2,$ com um ponto de mínimo local em $x = -2.$

D

Apresenta pontos críticos em $x =$ 0 e $x = -2,$ com um ponto de mínimo local em $x = -2$ e um ponto de inflexão em $x = 0.$

E

Apresenta apenas um ponto crítico em $x = 0,$ com um ponto de mínimo local em $x = 0.$

A alternativa C está correta.

A função $f(x)$ é descontínua em $x = 0$, assim não vai existir derivada de $f(x)$ neste ponto.

Portanto, $x = 0$ é um ponto crítico. Veja que $f(0) = 8$ e $f(0+)$ não existe.

Analisando a vizinhança de $x = 0$, observe que antes do zero a função tende a 8 e depois tende ao infinito, logo, neste ponto, a função não tem mínimo local, nem máximo local nem ponto de inflexão.

Para $x \in [-4, 0), f\prime(x) = 2x + 4 \rightarrow f'(x) = 0$ para $x = -2$ -ponto críico de $f(x)$

Como

$f''(x) = 2gt; 0 \rightarrow x = -2$ é minimizante de $f(x)$

Para $x \in (0, 4], f'(x) = -\frac{16}{x^2} \rightarrow \nexists x$

tal que $f'(x) = 0$

Alternativa correta, portanto, letra C.

Questão 2

Determine o ponto do domínio de $f(x) = 2x + 2\cos x, \text{com}\, x \in [0, \pi],$ em que a função terá um máximo global.

A

0

B

$\pi/4$

C

$\pi/2$

D

π

E

$\pi/3$

A alternativa D está correta.

A função $f(x)$ é contínua em todo domínio e sua derivada $f'(x) = 2 - 2$ sen x , também.

Assim, os candidatos a pontos extremos serão $f'(x) = 0 \rightarrow 2\,\text{sen}\, x = 2 \rightarrow x = \pi/2$

Mas, $f''(x) = -2\cos x$ e $f''(\pi/2) = 0$, não podendo concluir nada sobre este ponto.

Mas, $f^{(3)}(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x$ e $f^{(3)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$. Como a ordem da derivada é ímpar, $x = \frac{\pi}{2}$ é um ponto de inflexão. Como o domínio é fechado, os únicos pontos para máximo e mínimo global serão as extremidades do domínio. Como $f'(x) = 2 - 2\,\mathrm{sen}\,x gt; 0$ para $x \in [0, \pi]$, então $f(x)$ é estritamente crescente e, assim, o ponto de mínimo global será em $x = 0$ e o ponto de máximo global será em $x = \pi$.

Assim, a alternativa correta é a letra D.

Considerações finais

Ao longo do conteúdo, estudamos o conceito da derivada em diversas aplicações.

Inicialmente, foi aplicado o conceito da derivada como coeficiente angular e foram definidas as equações das retas tangentes e normais ao gráfico de uma função.

Depois, foi utilizado o conceito da derivada como taxa instantânea e obtivemos taxas relacionadas, com a utilização da regra da cadeia.

Por fim, aplicou-se a derivada no estudo das funções quanto a crescimento, concavidade e obtenção de pontos extremos locais e globais e o ponto de inflexão.

Com esse estudo, você terá a capacidade de aplicar a derivação em suas diversas circunstâncias.

Explore +

Sugerimos que você leia o livro **Fundamentos de cálculo**, do professor Antônio Caminha Muniz Neto (2022), publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

Referências

GUIDORIZZI, H. L. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: LTC, 2013.

HALLET H. *et al*. **Cálculo** - a uma e a várias variáveis. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008.