Equações dinâmicas de sistemas lineares

Métodos matemáticos para reconhecimento e classificação e solução de equações diferenciais. Modelos matemáticos de sistemas necessários ao desenvolvimento das equações de espaço de estados, fundamentais para a representação de sistemas lineares e invariantes no tempo por meio de funções de transferência.

Prof. Raphael de Souza dos Santos

Propósito

Compreender os conceitos matemáticos utilizados no desenvolvimento das equações diferenciais de sistemas lineares para representações de sistemas elétricos e mecânicos no espaço de estados.

Preparação

Antes de iniciar este conteúdo, tenha em mãos papel, caneta e uma calculadora ou use a de seu smartphone/ computador.

Objetivos

- Descrever os conceitos matemáticos necessários ao desenvolvimento das equações diferenciais lineares.
- Formular as representações em espaço de estados de sistemas lineares e invariantes no tempo, bem como as equações de estado utilizadas na elaboração do sistema das equações.
- Identificar estabilidade no espaço de estados e a representação em diagrama em blocos.

Introdução

A importância da representação de sistemas em equações diferenciais

Neste vídeo, conheça mais sobre **A importância da representação de sistemas em equações diferenciais.**

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Orientações sobre unidades de medida

Em nosso material, unidades de medida e números são escritos juntos (ex.: 25 km) por questões de tecnologia e didáticas. No entanto, o Inmetro estabelece que deve existir um espaço entre o número e a unidade (ex.: 25 km). Logo, os relatórios técnicos e demais materiais escritos por você devem seguir o padrão internacional de separação dos números e das unidades.

Derivadas

Introdução

Neste vídeo, conheça mais sobre **Variáveis dependentes e variáveis independentes**

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

A função derivada – também chamada de derivada de uma função – é definida matematicamente como a inclinação de uma reta tangente que passa por uma curva, como pode ser visto na imagem a seguir:

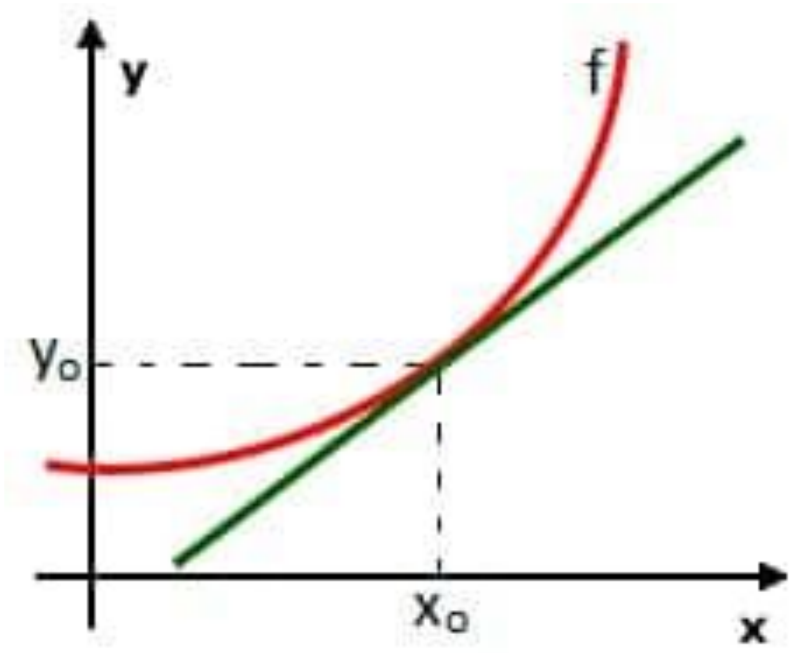


Gráfico: Derivada de uma função.

A derivada da função f representa a taxa de variação instantânea de y em relação a x. Do ponto de vista geométrico, a derivada da função em um ponto x_0 se refere à inclinação da reta tangente ao gráfico f no ponto ($x_0, f(x_0)$), plotada em verde na imagem.

Dessa forma, observando a função $y = f(x)$, a derivada será dada por:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Atenção

Vale destacar que y é função de x, ou seja, depende de x.

Derivada de uma função

A derivada de uma função pode ser calculada de diferentes maneiras: por meio dos limites da função ou pelas regras de derivação.

Derivada pelos limites da função

A derivada consiste na inclinação da reta tangente à uma função, ou seja, corresponde à taxa de variação da mesma (função). Sendo assim, a formulação da derivada pode ser escrita como:

Atenção

Desse modo, $f\prime(x)$ é a derivada da função $f(x)$. Então, diz-se que $f(x)$ é derivável no ponto p.

Derivada pelas regras de derivação

As regras de derivação são aplicáveis em funções deriváveis. Com isso, seja a um número real qualquer, valem as propriedades:

se $f(x) = a$, então $f'(x) = 0$; se $f(x) = ax$, então $f'(x) = a$; se $f(x) = x^a$, então $f'(x) = a.x^{a-1}$; $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ $[a.f(x)]' = a.f'(x)$, sendo a uma constante;

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Exemplo

Determine a derivada da função:

Chave de resposta

Observando as regras das derivadas citadas, pode-se aplicar a propriedade iii, obtendo:

$$< br > \begin{array}{l} < br > amp; f(x) = x^3, \text{ então } f'(x) = 3.x^{3-1} \\ < br > amp; f'(x) = 3 \cdot x^2 < br > \end{array} < br >$$

Limite de uma função

Essencialmente, o limite de uma função estabelece a relação entre o domínio e a imagem da mesma. O limite estuda o comportamento da função à medida que o seu domínio varia, aproximando-se de determinado valor. Por exemplo, observe a função a seguir:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Quando o valor de ***x* tende a zero** (domínio tende a zero), a **imagem da função tende ao infinito**.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Por outro lado, a **função tende a zero** quando o valor do domínio (valor de x) tende ao infinito.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Integral de uma função

A integral é uma função inversa à derivação, assim como a adição à subtração e a multiplicação à divisão. Por esse motivo, a integral é chamada de antiderivação ou integral indefinida.

Dada uma função $g(x)$, qualquer $f'(x)$ tal que $f'(x) = g(x)$ é chamada integral indefinida ou antiderivada de $f(x)$.

Exemplo

Se , então:

Propriedades das integrais indefinidas

As propriedades das integrais indefinidas são imediatas:

- A integral da soma é a soma das integrais;
- A integral da diferença é a diferença das integrais;
- Uma constante que multiplique uma integral pode ser retirada dointegrando: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, onde k é uma constante;
- A derivada da integral de uma função é a própria função.

Variáveis dependentes e variáveis independentes

Uma função do tipo $y = f(x)$ deixa subentendido que y é uma função da variável x . Por sua vez, é possível imaginar que o valor de x possa variar livremente e de maneira independente, enquanto o valor de y depende do valor de x . Por esse motivo, a variável y é chamada de variável dependente, e a variável x é chamada de variável independente. Isso é aplicável a conceitos diversos.

Por exemplo, imagine-se em um rodízio de pizzas. Suponha que a cobrança do rodízio seja feita da seguinte forma: o valor da comida seja constante (R$ 50,00) e as bebidas possuam um valor de R$ 4,00 por cada unidade consumida.

Nesse caso, o preço final a ser cobrado poderia ser calculado do seguinte modo:

valor final $=$ valor da comida + valor total das bebidas valor final $= 50,00 + n \cdot 4,00$

Onde **n** é o número total de bebidas consumidas.

> **Quando uma função é dependente de apenas 1 variável independente, ela é chamada de função a uma variável. No entanto, outros exemplos de funções podem existir.**

Suponha a escrita da função $z = f(x, y)$. Nesse exemplo fica subentendido que z é dependente de x e de y . Já as variáveis x e y são independentes. Logo, é possível concluir que a função f depende das variáveis x e y . Por ser dependente de duas variáveis independentes, esta é denominada função a **duas variáveis.**

Por fim, destaca-se que uma função pode ser dependente de múltiplas variáveis independentes, sendo chamada de **função a várias variáveis**. Porém, a solução desta pode ser trabalhosa, demandando o uso de técnicas matemáticas complexas.

Ordem das derivadas

Também é possível realizar a derivada de uma mesma função múltiplas vezes em relação a uma mesma variável independente. Quanto maior o número de derivações, maior será o grau da mesma.

Suponha a função:

$$y = f(x)$$

Essa função ilustra a relação entre a variável dependente y e a variável independente x. Se for desejado calcular a derivada dessa função, teremos necessariamente:

$$\frac{df'(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

Ou seja, $\frac{dy}{dx}$ é a derivada da variável dependente y em relação à variável independente x. Como $f'(x)$ é uma função de x derivada apenas uma vez, é denominada derivada de primeira ordem de:

$$f(x)$$

ou derivada de grau 1 de

$$f(x)$$

ou, ainda, derivada primeira de

$$f(x)$$

Como a função

$$f(x)$$

é uma função de x , é possível derivar novamente $f'(x)$ em x e obter a derivada de segunda ordem da função

$$f(x)$$

obtendo $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$, como demonstrado acima.

Atenção

É possível observar que a derivada de segunda ordem também é uma função de . Derivando novamente a função em , será obtida a derivada de ordem 3 da função ou derivada de terceira ordem.

Derivadas parciais

As derivadas de uma função podem ser realizadas em relação a uma ou mais variáveis independentes. Por exemplo, suponha uma função com três variáveis independentes:

$$d = f(x, y, z)$$

É possível derivar essa função em relação a cada uma das suas variáveis, como vemos a seguir:

$$\frac{\partial d}{\partial x}, \frac{\partial d}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial d}{\partial z}$$

> **Essas derivadas são denominadas derivadas parciais de primeira ordem da função d. Estas recebem o nome de parciais por não envolverem, individualmente, a derivada de todas as variáveis independentes da função.**

É possível derivar mais uma vez a função **d** e obter as derivadas parciais de segunda ordem, como mostra o exemplo a seguir:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 d}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial^2 d}{\partial y \partial x}$$

É interessante observar que as derivadas parciais de ordem dois podem ser obtidas a partir de duas derivações de uma mesma variável:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial y^2}$$

Estas, também podem ser obtidas a partir da realização de duas derivadas de uma mesma função em razão de variáveis independentes distintas:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial x \partial y}$$

De maneira similar, são produzidas as derivadas de ordem superior da função.

Equações diferenciais

Até o momento, foram discutidas as derivadas de funções (variáveis dependentes) em relação a uma ou mais variáveis independentes. Entretanto, quando essas derivadas fazem parte de equações matemáticas, a resolução das questões demanda uma abordagem distinta, e estas, recebem o nome de **equações diferenciais**.

> **As equações diferenciais são aquelas que possuem, entre seus elementos, derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.**

Por exemplo, uma função do tipo:

$$y = f(x)$$

Pode ser derivada na forma:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$$

A função e sua derivada podem ser inseridas em uma mesma equação, produzindo, por exemplo:

$$y' + y = 0$$

Nesse exemplo, a equação diferencial envolve uma única variável independente. De maneira similar, é possível produzir diversos tipos de equações diferenciais, tais como:

- Equações com mais de uma variável dependente e uma única variável independente.
- Equações com uma única variável dependente e mais de uma variável independente.
- Equações com múltiplas variáveis dependentes e múltiplas variáveis independentes.

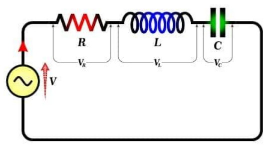
Aplicações de equações diferenciais

As equações diferenciais possuem diversas aplicações e em inúmeras áreas, como em Física, Química e Engenharia. Por exemplo:

Movimento de corpos em queda livre:
$< br > \frac{d^2 s}{dt^2} = -g < br >$

Sistema massa-mola:
$< br > m\frac{d^2 x}{dt^2} = -kx < br >$

Circuitos elétricos com elementos em série:
$< br > \frac{d^2 q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt^2} + \frac{1}{C}q = E(t) < br >$



Classificação das equações diferenciais

As equações diferenciais podem ser classificadas como segue apresentado:

Classificação de acordo com o número de variáveis independentes

As equações diferenciais podem envolver uma ou mais variáveis dependentes, assim, estas podem ser subdivididas com relação à quantidade de variáveis independentes que apresentam. Vejamos:

a) Equações diferenciais ordinárias – Envolvem uma ou mais variáveis dependentes e **apenas uma variável independente**. Por exemplo:

$$< br > y' + y = 0 < br >$$

b) Equações diferenciais parciais – Envolvem uma ou mais variáveis dependentes e **duas ou mais variáveis independentes**. Por exemplo:

$$< br > \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} = x + y < br >$$

Classificação de acordo com a derivada de maior ordem contida na equação

A ordem da equação diferencial é determinada pela ordem da derivada de maior ordem da equação. Sendo assim, de maneira similar às derivadas, as equações diferenciais podem ser classificadas por ordem.

Por exemplo:

$$< br > y' + y = 0 \text{ - equação diferencial de ordem } 1 < br >$$

$$< br > \frac{\partial^2 d}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial x^2} = x + y \text{ - equação diferencial de ordem } 2 < br >$$

Classificação de acordo com a linearidade

Como a derivada pode ser vista como um operador $Dy = y$ e considerando as propriedades das derivadas, pode-se afirmar que:

$$< br > D^2y = D(Dy) = y'' \text{ é linear em } y < br >$$

$$< br > Ty = (y')^2 \text{ é não linear em } y < br >$$

Vale destacar que, em uma equação diferencial linear:

• A única potência permitida para a variável dependente e suas derivadas é 1;
• Os coeficientes da variável dependente e suas derivadas só podem ser funções das variáveis independentes.

Solução de uma equação diferencial

Para resolver uma equação diferencial, uma ferramenta bastante útil é o **Teorema do Valor Inicial**. Suponha o seguinte exemplo:

$$y' = 3x^2 + 2x + 3$$

Utilizando a função integral, é possível determinar que:

$y = x^3 + x^2 + 3x$ é uma possível solução dessa equação diferencial.

De maneira similar:

$y = x^3 + x^2 + 3x + 8$ também é uma possível solução dessa equação diferencial.

Portanto, é possível generalizar a solução para:

$$y = x^3 + x^2 + 3x + C$$

Onde **C** é uma constante, denominada **constante de integração**.

> **Se ao menos um valor dessa função for conhecido, é possível determinar o valor da constante C.**

Desse modo, suponha que:

$$y' = 3x^2 + 2x + 3$$
$$y(0) = 20$$

Nesse caso, ao encontrarmos a solução geral, dada por:

$$y = x^3 + x^2 + 3x + C$$

É possível determinar o valor da constante C substituindo:

$$
\begin{gathered}
y=x^3+x^2+3x+C \\
20=0^3+0^2+3.0+C \\
C=20
\end{gathered}
$$

Portanto:

$$
y=x^3+x^2+3x+20 \text{ é a solução da equação}
$$

Vem que eu te explico

Equações diferenciais

No vídeo a seguir, o professor vai dar mais explicações sobre o tópico **Equações diferenciais.**

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Variáveis dependentes e variáveis independentes

No vídeo a seguir, o professor vai dar mais explicações sobre o tópico **Variáveis dependentes e variáveis independentes.**

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Conhecendo os conceitos das equações diferenciais e aplicando o Teorema do Valor Inicial, encontre a solução para a seguinte equação:

$$

 \begin{gathered}
 \frac{dy}{dx}=x^2+1 \\
 y(0)=3
 \end{gathered}
$$

A

$
 y=\frac{x^3}{3}+x+3
$

B

$
 y=\frac{x^3}{3}+x
$

C

$< br > y = \frac{x^3}{3} + 3 < br >$

D

$< br > y = x + 3 < br >$

E

$< br > y = 3 < br >$

A alternativa A está correta.

$< br > \frac{dy}{dx} = x^2 + 1 < br >$

$< br > \int \frac{dy}{dx} dx = \int \left(x^2 + 1\right) dx < br >$

$< br > y = \frac{x^{2+1}}{2+1} + 1.\frac{x^{0+1}}{0+1} + C < br >$

$< br > y = \frac{x^3}{3} + 1.\frac{x^1}{1} + C < br >$

$< br > y = \frac{x^3}{3} + x + C < br >$

Como:

$< br > y(0) = 3 < br >$

Então:

$< br > y = \frac{x^3}{3} + x + C < br >$

$< br > 3 = \frac{0^3}{3} + 0 + C < br >$

$< br > C = 3 < br >$

Portanto, a solução desejada é:

$< br > y = \frac{x^3}{3} + x + 3 < br >$

Questão 2

Considerando a classificação das equações diferenciais quanto à ordem da derivada de maior grau, é possível dizer que a equação diferencial a seguir é de:

$$< br > y''' - v'' = w''' + v' + w' < br >$$

A

primeira ordem.

B

segunda ordem.

C

ordem única.

D

quarta ordem.

E

terceira ordem.

A alternativa E está correta.

Como a ordem da equação diferencial é definida pela sua derivada de maior grau e as derivadas y''' e w''' apresentam a maior ordem da equação (3), essa equação diferencial possui a mesma ordem dessas duas derivadas: terceira ordem.

Introdução ao espaço de estados

Neste vídeo, conheça mais sobre **Para que serve a representação no espaço de estados.**.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

A representação de sistemas físicos por meio de modelos matemáticos é uma ferramenta de grande importância. De maneira geral, a representação no espaço de estados consiste em um modelo matemático de um sistema físico formado por um conjunto de variáveis de entrada, de saída e de estado. Estas, estão relacionadas entre si por equações diferenciais de primeira ordem.

Considere como exemplo um interruptor de luz. Este, pode estar ligado ou desligado, ou seja, pode assumir dois valores discretos distintos. Considerando a posição do interruptor como sendo uma variável e sabendo o estado da mesma, é possível então conhecer o estado futuro do sistema, ou seja, se a luz estará acesa ou apagada.

Modelagem matemática de sistemas

A modelagem matemática de um sistema é útil para a análise e desenvolvimento dos sistemas de controle. Essa modelagem pode ser feita, de maneira simplificada, de duas formas:

Análise no domínio da frequência

Realizada por meio da transformada de Laplace do sistema.

A análise no domínio da frequência apresenta vantagens e desvantagens. A maior vantagem da é a facilidade de obtenção da resposta transitória e da resposta em regime do sistema quando submetido a um estímulo (sinal de entrada).

Como desvantagem pode-se apresentar a sua aplicabilidade, tendo em vista que esse tipo de análise só pode ser aplicado a sistemas lineares, invariantes no tempo. Em alguns casos, sistemas que apresentem comportamento similar ao especificado também podem ser analisados no domínio da frequência.

Análise no domínio do tempo

Utilizada para a descrição do sistema no espaço de estados.

Por outro lado, a representação no espaço de estados – também denominada **abordagem no domínio do tempo** – fornece uma maneira simplificada de modelar e analisar sistemas multivariáveis (sistemas que possuem múltiplas entradas e múltiplas saídas).

Essa modelagem é conhecida como **modelagem moderna** e fornece um método unificado de análise e projeto de sistemas físicos. A modelagem moderna consiste, basicamente, na determinação de equações diferenciais que descrevem o comportamento do sistema (a dinâmica do sistema).

Vetores de estado e matrizes que compõem o sistema

Uma maneira simplificada de lidar com a quantidade de entradas, saídas e de variáveis de estado que o sistema pode apresentar é por meio da utilização de vetores e matrizes.

As variáveis de entrada e de saída são representadas pelos vetores e são denominadas **vetor de entrada** e **vetor de resposta**, respectivamente. Entretanto, vale destacar que essa representação na forma matricial só é possível, para sistemas dinâmicos, quando estes são lineares e invariantes no tempo.

Saiba mais

Considerando um sistema com múltiplas entradas e saídas, caso não se utilizasse a teoria do espaço de estados, seria necessário escrever as Transformadas de Laplace que descrevessem o comportamento de todo o sistema.

De modo simplificado, o espaço de estados retrata uma representação espacial cujos eixos são as variáveis do estado (representação do sistema). Assim, o estado do sistema em qualquer instante pode ser representado como um vetor dentro desse espaço.

Variáveis do estado

As variáveis do estado representam a menor quantidade de variáveis do sistema capazes de representá-lo em qualquer momento. No geral, estas estão relacionadas à quantidade de componentes diferenciais (derivadas) desse sistema.

Estrutura de um sistema no espaço de estados

A representação de um sistema no espaço de estados é escrita por meio do seguinte sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1) \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) \qquad (2)$$

Onde:

- $x(t)$ é o vetor das variáveis de estado;
- $y(t)$ são as saídas do sistema;
- $\dot{x}(t)$ é o vetor da derivada das variáveis de estado;
- $u(t)$ é (são) a(s) entrada(s) do sistema;
- A é a matriz de estado;
- B é a matriz de entrada;
- C é a matriz de saída;
- D é a matriz de alimentação direta.

Exemplos de representação no espaço de estados

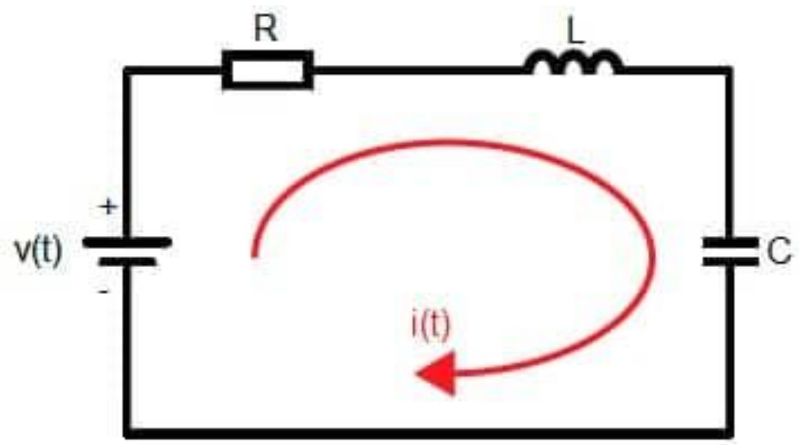
A representação no espaço de estados e as equações de estado são fundamentais para a representação por meio de um modelo matemático dos sistemas físicos.

Circuitos elétricos

Considere o circuito elétrico na imagem a seguir, adote:

$$V_c(t)$$

a tensão em cima do capacitor:



Circuito elétrico.

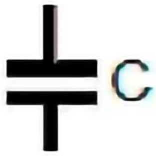
A Lei de Kirchhoff das tensões pode ser aplicada ao circuito e permite escrever a seguinte equação, que define o somatório das tensões ao longo do circuito:

$$v(t) = R.i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_c(t) \qquad (3)$$

Também é possível definir a equação da corrente que permite determinar a corrente elétrica do circuito:

$$i(t) = C\frac{\partial v_c(t)}{dt} \qquad (4)$$

Essa equação da corrente é obtida da tabela a seguir, que mostra as equações de tensão e de corrente para resistores, indutores e capacitores em função do tempo.



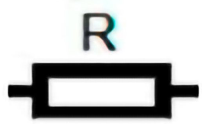
Capacitor

Tensão

$< br > v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau < br >$

Corrente

$< br > i(t) = C\frac{\partial v_c(t)}{dt} < br >$



Resistor

Tensão

$< br > v(t) = R.i(t) < br >$

Corrente

$< br > i(t) = \frac{v(t)}{R} < br >$

Indutor

Tensão

$< br > v(t) = L\frac{di(t)}{dt} < br >$

Corrente

$< br > i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau < br >$

Modificando a Equação (3), pode-se isolar a corrente elétrica, produzindo a Equação (5):

$$\frac{\partial di(t)}{\partial t} = -\frac{R}{L}\cdot i(t) - \frac{v_c(t)}{L} + \frac{v(t)}{L} \qquad (5)$$

Manipulando a Equação (4), pode-se isolar a tensão, obtendo a Equação (6):

$$\frac{\partial v_c(t)}{\partial t} = \frac{i(t)}{C} \qquad (6)$$

A partir das equações diferenciais (5) e (6), é possível obter a derivada do vetor de estado:

$$\dot{x}(t) = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial di(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} \end{array} \right] \qquad (7)$$

A integral da derivada do vetor de estado fornece o vetor de estado:

$$x(t) = \left[\begin{array}{c} i(t) \\ v_c(t) \end{array} \right] \qquad (8)$$

Observando o sistema de equações do espaço de estados formado pelas Equações (1) e (2), pode-se escrever:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\partial di(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} \end{array} \right] = A \left[\begin{array}{c} i(t) \\ v_c(t) \end{array} \right] + Bu(t) \qquad (9) \quad y(t) = C \left[\begin{array}{c} i(t) \\ v_c(t) \end{array} \right] + Du(t) \qquad (10)$$

Como $u(t)$ representa o vetor ou sinal de entrada, pode-se substituí-lo pela tensão da fonte de alimentação $(v(t))$:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\partial di(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} \end{array} \right] = A \left[\begin{array}{c} i(t) \\ v_c(t) \end{array} \right] + Bv(t) \qquad (11) \quad y(t) = C \left[\begin{array}{c} i(t) \\ v_c(t) \end{array} \right] + Dv(t) \qquad (12)$$

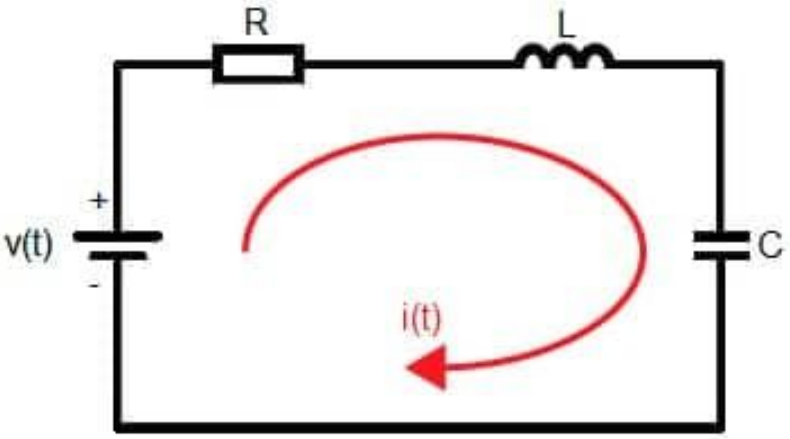
$< br >$ Comparando as Equações (5) e (6) com as Equações (11) e (12), pode-se obter as matrizes A e B. Desse modo, teremos: $< br >$

$$\frac{\partial di(t)}{\partial t} = -\frac{R}{L} \cdot i(t) - \frac{v_c(t)}{L} + \frac{v(t)}{L} \quad \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} = \frac{i(t)}{C} \quad \left[\begin{array}{c} \frac{\partial di(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} \end{array} \right] = A \left[\begin{array}{c} i(t) \\ v_c(t) \end{array} \right] + Bv(t)$$
$$A = \left[\begin{array}{cc} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{array} \right] \text{ e } B = \left[\begin{array}{c} 1/L \\ 0 \end{array} \right]$$

Se a saída desejada do sistema for a tensão do capacitor, as matrizes C e D são obtidas como:

$$y(t) = v_c(t) \quad y(t) = C\begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + Dv(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + [0]v(t)$$

Com isso, as equações de espaço de estados do circuito da imagem “Circuito Elétrico” são:



Circuito elétrico.

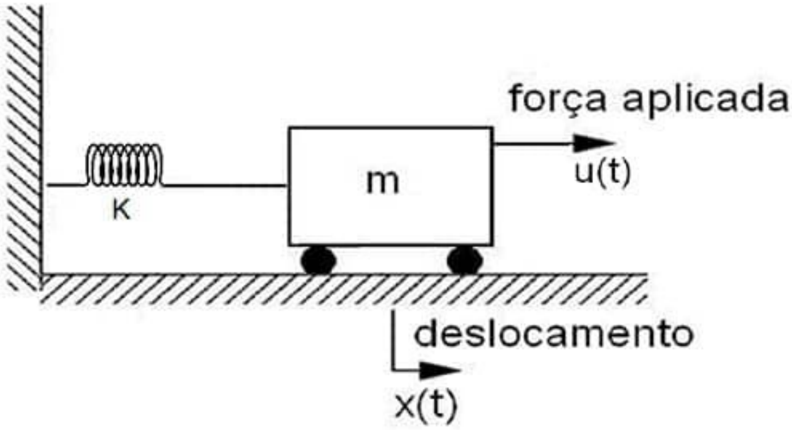
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \, \mathrm{di}(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial v_c(t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$$

Saiba mais

Você sabiaEm um circuito elétrico, o número de variáveis de estado é igual ao número de elementos armazenadores de energia. Isso acontece porque cada elemento armazenador será responsável por uma diferenciação (derivada).

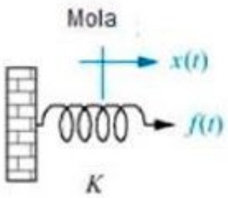
Sistema massa-mola

Considere o sistema massa-mola na imagem a seguir:



Sistema massa-mola.

As componentes de um sistema mecânico são representadas matematicamente de acordo com os modelos definidos na tabela a seguir:



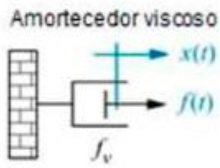
Mola

Força-velocidade

$< br > f(t) = K \int_0^t v(\tau) d\tau < br >$

Força-deslocamento

$< br > f(t) = Kx(t) < br >$



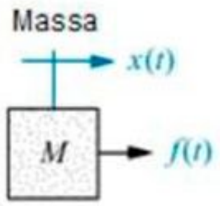
Amortecedor vis cos o

Força-velocidade

$< br > f(t) = f_v v(t) < br >$

Força-deslocamento

$< br > f(t) = f_v \frac{dx(t)}{dt} < br >$



Massa

Força-velocidade

$< br > f(t) = M\frac{dv(t)}{dt} < br >$

Força-deslocamento

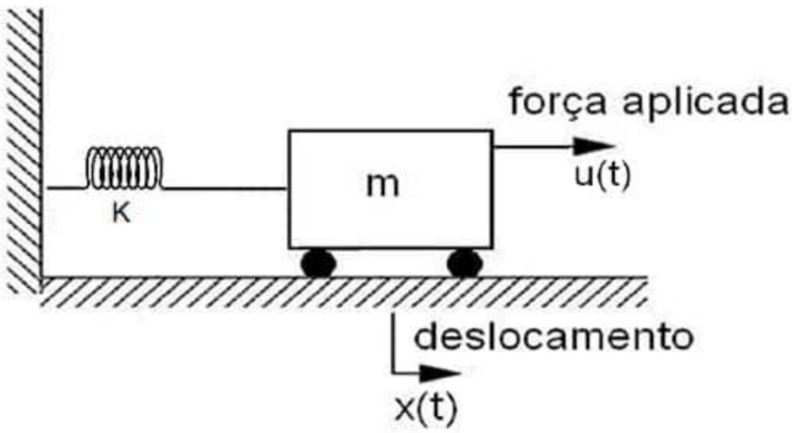
$< br > f(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt} < br >$

A dinâmica do sistema pode ser descrita pela segunda Lei de Newton, que define:

$$F(t) = m \cdot a(t)$$

Onde F é a força em Newton (N), m é a massa dada em kg e a é a aceleração dada em m/s^2 .

Sendo assim, o somatório das forças sobre um corpo é igual à massa desse corpo multiplicada por sua aceleração. Dessa forma, observando a imagem 'Sistema massa-mola', pode-se escrever a Equação 13:



Sistema massa-mola

$$\begin{aligned} \text{Forca aplicada } - \text{ forca da mola } - \text{ forca atrito } &= ma(t) \qquad (13) \\ u(t) - ky(t) - \mu v(t) = ma(t) \end{aligned}$$

Essa equação descreve o comportamento do sistema quando uma força com intensidade $u(t)$ é aplicada sobre um carrinho de massa m, promovendo uma aceleração $a(t)$.

⚠

Atenção

É possível perceber que duas forças resistem ao deslocamento do carrinho: o atrito das rodas contra o chão e a força da mola .

Nesse caso, é interessante apresentar a equação definida pelo sistema na forma de uma equação diferencial. Para isso, basta escrever:

- A aceleração $(a(t))$ pode ser definida como a derivada de segunda ordem da posição $(y(t))$, como na Equação 14:

$$a(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \qquad (14)$$

- A velocidade $(v(t))$ pode ser definida como a derivada de primeira ordem da posição $(y(t))$, conforme a Equação 15:

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} \qquad (15)$$

Desse modo, a equação diferencial do sistema pode ser escrita como a Equação 16:

$$u(t) - ky(t) - \mu\frac{dy(t)}{dt} = m\frac{d^2y(t)}{dt^2} \qquad (16)$$

Reescrevendo a equação, tem-se a Equação 17:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mu\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t) \qquad (17)$$

Atenção

Por meio dessa equação diferencial, é possível definir que o sistema de equações de estado apresentará 2 variáveis de estado. É possível fazer essa afirmação observando que a maior derivada da equação diferencial possui ordem 2.

As variáveis de estado desse sistema podem ser definidas como a sua posição no instante $t(y(t))$ e sua velocidade no instante $t\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)$. Com isso, teremos:

$$x(t) = \left[\begin{array}{c} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{array}\right] \qquad (18)$$

Esse vetor de estado pode ser interpretado da seguinte maneira. Suponha o seguinte vetor de estado da Equação 18:

$$x(t) = \left[\begin{array}{c} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{array}\right]$$

No instante $t = 1s$, o vetor assumirá os valores:

$$x(1) = \left[\begin{array}{c} y(1) \\ \frac{dy(1)}{dt} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array}\right]$$

Esse vetor significa que, no instante 1 segundo $(t = 1s)$, o carro estará passando pelo ponto $y = 0m$ com uma velocidade igual a $3m/s$.

A derivada de primeira ordem do vetor de estado da Equação 18 em relação ao tempo é dada por:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = \left[\begin{array}{c} \dot{y}(t) \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{array}\right] \qquad (19)$$

Observando-se a Equação 19, pode-se redefinir a Equação de Estado 17 da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mu\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t) \qquad (20)\\
\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{k}{m}y(t) = \frac{u(t)}{m}\\
\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{\mu}{m}\frac{dy(t)}{dt} - \frac{k}{m}y(t) - \frac{u(t)}{m}
\end{aligned}
$$

Com isso, é possível definir o sistema de Equações de Espaço de Estados do seguinte modo:

$$
\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} + Bu(t) \qquad (21) \quad y(t) = C \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} + Du(t) \qquad (22)
$$

A matriz **A** é definida por observação direta e pela Equação 20 da seguinte forma:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{bmatrix}
$$

A matriz **B** é definida por observação direta e pela Equação 20 da seguinte maneira:

$$
B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}
$$

As matrizes **C** e **D** são definidas por observação direta:

$$
y(t) = C \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} + Du(t) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = [0]
$$

Desse modo, o sistema de Equações de Estado pode ser escrito como:

$$
\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \\ -\frac{k}{m} & -\frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} v(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix}
$$

Vem que eu te explico

Análise no domínio da frequência

No vídeo a seguir, o professor vai dar mais explicações sobre o tópico: **Análise no domínio da frequência.**

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Análise no domínio do tempo

No vídeo a seguir, o professor vai dar mais explicações sobre o tópico: **Análise no domínio do tempo.**

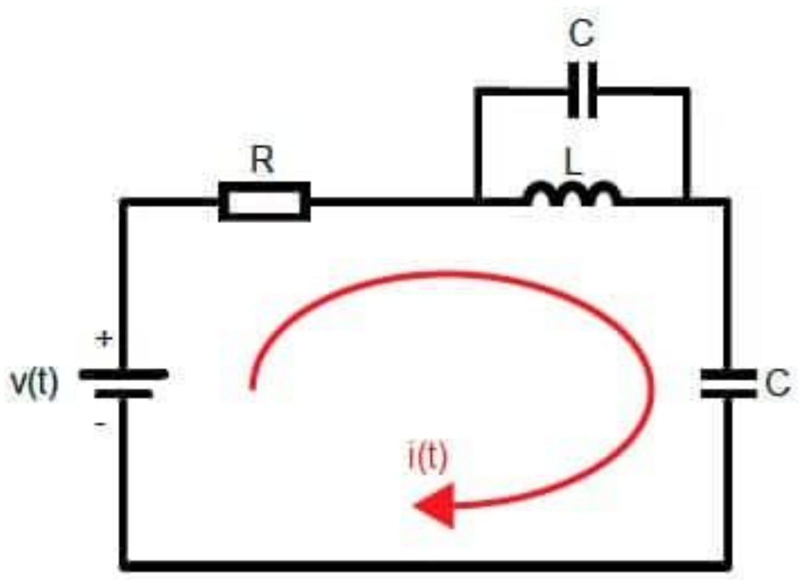
Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Considerando o circuito da imagem a seguir, é possível afirmar que o número de variáveis de estado desse circuito será igual a:



A

1.

B

4.

C

2.

D

3.

E

Nenhuma variável.

A alternativa D está correta.

Como cada elemento armazenador de energia do circuito é responsável por uma derivação e, consequentemente, por uma variável de estado, o número de elementos armazenadores será igual ao número de variáveis de estado do circuito. O circuito da imagem apresenta 1 fonte, 1 resistor, 1 indutor e 2 capacitores. Apenas os indutores e os capacitores são armazenadores de energia. Sendo assim, esse sistema apresentará 3 variáveis de estado.

Questão 2

Considere o sistema mecânico desenvolvido no exemplo do sistema massa-mola. Supondo os parâmetros a seguir, pode-se afirmar que a matriz A é igual a:

$$< br > m = 1; \mu = 5 e k = 4 < br >$$

A

$$< br > \begin{matrix} < br > 0 & amp; 1 \\ < br > 4 & amp; 5 < br > \end{matrix} \Bigg] < br >$$

B

$$< br > \ < br > \begin{bmatrix} < br > 0 & amp; 1 \\ < br > -4 & amp; -5 < br > \end{bmatrix} < br > \ < br >$$

C

$$< br > \ < br > \begin{bmatrix} \begin{matrix} < br > -4 \\ < br > -4 < br > \end{matrix} & amp; & \begin{matrix} < br > -5 \\ < br > -5 < br > \end{matrix} \end{bmatrix} < br > \ < br >$$

D

$$< br > \ < br > \begin{bmatrix} \begin{matrix} < br > -4 \\ < br > 0 < br > \end{matrix} & amp; & \begin{matrix} < br > -5 \\ < br > 0 < br > \end{matrix} \end{bmatrix} < br > \ < br >$$

E

$$< br > \ < br > \begin{bmatrix} < br > -4 & amp; 1 \\ < br > 0 & amp; -5 < br > \end{bmatrix} < br > \ < br >$$

A alternativa B está correta.

Observando a matriz **A** do exemplo do sistema massa-mola, é possível escrever a matriz de sistema como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & amp; 1 \\ -\frac{k}{m} & amp; -\frac{\mu}{m} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores citados, pode-se obter a matriz:

$$< br > A = \begin{bmatrix} < br > 0 & amp; 1 \\ < br > -4 & amp; -5 < br > \end{bmatrix} < br >$$

Diagrama em blocos

Introdução

Neste vídeo, conheça mais sobre **O que representa a estabilidade no espaço de estados.**

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Um diagrama em blocos é a representação de um sistema em blocos ou fluxograma. Este é elaborado a partir das equações que descrevem a dinâmica do sistema, com o objetivo de modelar as funções desempenhadas por cada parte que compõe o sistema e pelo fluxo de sinais.

Os diagramas em blocos indicam as relações existentes entre os componentes do sistema, nos quais as variáveis do processo são relacionadas umas com as outras. A partir deste, é possível estabelecer a relação entre a entrada e a saída dos blocos que o compõem, que é definida como ganho do bloco. Quando esta envolve a entrada e a saída do sistema como um todo, tem-se o ganho do sistema.

Uma representação em diagrama em blocos do sistema definido pelas equações de estado pode ser vista na imagem a seguir:

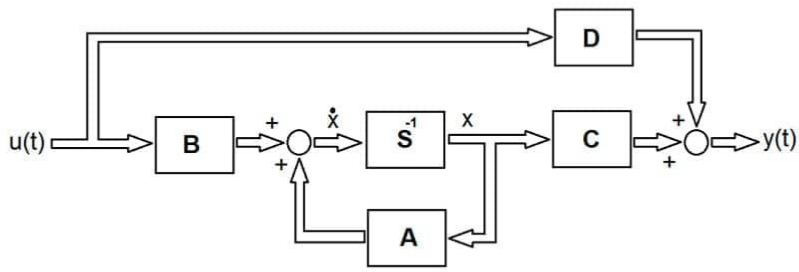
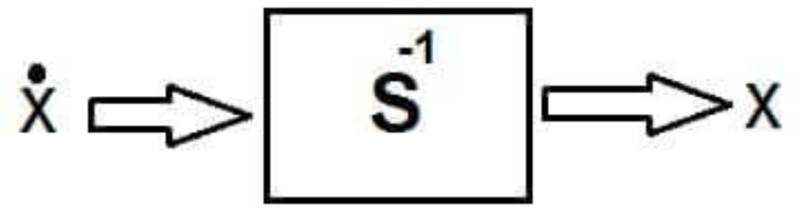


Diagrama em blocos elaborado a partir das equações de estado.

A entrada $u(t)$ faz referência ao estímulo de entrada no sistema. Esse sinal é colocado na entrada do bloco **B**, fazendo com que a saída desse bloco provoque uma modificação na entrada do sistema. Por esse motivo, o bloco recebe a denominação de **matriz de entrada.**

A saída do bloco **B** representa o vetor da derivada das variáveis de estado **(** $\dot{x}$ **)** que é colocado na entrada do bloco s^{-1}.

Vale destacar que o operador s^{-1} representa a integral do sinal que entra no bloco, como pode ser visto na imagem a seguir:



Operador integral.

A saída do bloco s^{-1} representa o vetor das variáveis de estado. Esse vetor é colocado na entrada dos blocos **A e B.**

O bloco **A** estabelece a conexão entre o vetor das variáveis de estado e a saída da matriz de entrada **B** (vetor da derivada das variáveis de estado). Como esse bloco estipula um fluxo de retorno no diagrama em blocos, essa linha de retorno é denominada de **realimentação**, sendo realizada pela matriz de estado **A**.

O vetor das variáveis de estado também é inserido na entrada da matriz de saída **C** e, consequentemente, disponibilizado na saída do diagrama em blocos $(y(t))$ **.**

> Vale destacar que também existe uma ligação direta entre a entrada $u(t)$ e a saída $y(t)$ e, por esse motivo, é denominada matriz de alimentação direta (D). Essa ligação direta nem sempre está presente nos sistemas físicos, sendo definida, nesses casos, como uma matriz nula.

Ganho em malha fechada

Um sistema pode ser do tipo **malha aberta** ou **malha fechada**, dependendo se a matriz A é nula ou não. Os sistemas em malha aberta são aqueles que não apresentam realimentação (matriz A nula), ou seja, não apresentam ligação entre o vetor das variáveis de estado e o vetor derivada das variáveis de estado.

O ganho em um sistema de malha aberta é representado pelo sistema sem realimentação, podendo, para a imagem 'Diagrama em blocos elaborado a partir das equações de estado', ser definido por:

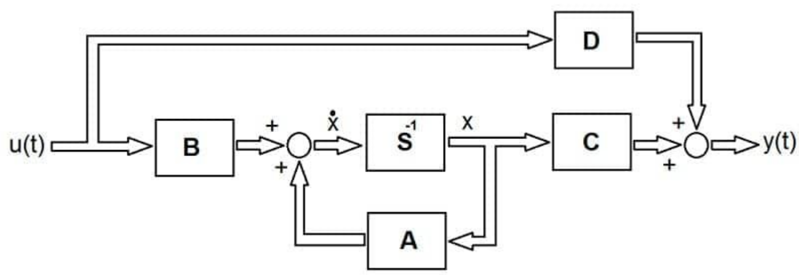


Diagrama em blocos elaborado a partir das equações de estado

$$G_{\text{aberto}}(s) = C \cdot s^{-1} \cdot B + D \qquad (23)$$

Algumas plantas são instáveis em malha aberta. No entanto, utilizando a realimentação, pode-se estabilizar esses sistemas.

O ganho em malha fechada da imagem 'Diagrama em blocos elaborado a partir das equações de estado', que representa o ganho do sistema, pode ser obtido pela definição do ganho em sistemas com realimentação:

$$G_{\text{fechado}}(s) = \frac{G_{\text{aberto}}(s)}{1 - G_{\text{laço de realimentação}}(s)} \qquad (24)$$

Sendo assim:

$$G(s) = \frac{C \cdot s^{-1} \cdot B}{1 - A \cdot s^{-1}} + D \qquad (25) \quad G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Onde I é a matriz identidade.

A equação definida pelo ganho é denominada **Função de Transferência**. Essa função é a relação por quociente entre a saída e a entrada do sistema. No domínio da frequência, é definida por meio da Transformada de Laplace com condições iniciais nulas, conforme a Equação 26:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \qquad (26)$$

As raízes das equações do numerador $(Y(s))$ e do denominador $(U(s))$ são denominadas **zeros** e **polos**, respectivamente. Os zeros são os valores para os quais a função de transferência é anulada. Já os polos são os valores para os quais a função de transferência é infinita, tendo em vista que o denominador assume um valor nulo.

Os polos e zeros podem ser números dos conjuntos dos reais ou dos complexos e, por esse motivo, são representados no plano complexo S. De maneira geral, eles são descritos por:

$$s = \sigma + j\omega \qquad (27)$$

Onde σ é a parte real do polo ou zero, e $j\omega$ é a parte complexa do polo ou zero.

Estabilidade absoluta

Para plantas estáveis em malha aberta, pode-se utilizar a realimentação para atingir um melhor desempenho em regime transitório e em regime permanente. Analisando sistemas realimentados, pode-se dizer se eles são estáveis ou não. Esse tipo de caracterização estável/não estável é denominado **estabilidade absoluta**.

Do ponto de vista prático, sistemas instáveis não apresentam utilidade. Nesse sentido, o projeto de sistemas de controle deve resultar em sistemas estáveis em malha fechada.

Dado um sistema estável em malha fechada, é possível caracterizar adicionalmente o seu grau de estabilidade, e isso é referido como **estabilidade relativa**.

Por exemplo, pode-se determinar os zeros e polos da função de transferência a seguir:

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2-3s+4}$$

Para isso, resolvem-se os polinômios, ou seja, encontram-se as raízes dos polinômios igualando-os a zero:

$$s - 1 = 0$$

$s = 1 - -$ é um zero da função de transferência

$$s^2 - 3s + 4 = 0$$

$s_1 = 1,5 - 1,3228i$ são os polos da função de transferência

$$s_2 = 1,5 + 1,3228i$$

Os polos e zeros da função de transferência podem ser representados em um plano complexo denominado **diagrama de polos e zeros**, como pode ser visto na imagem a seguir:

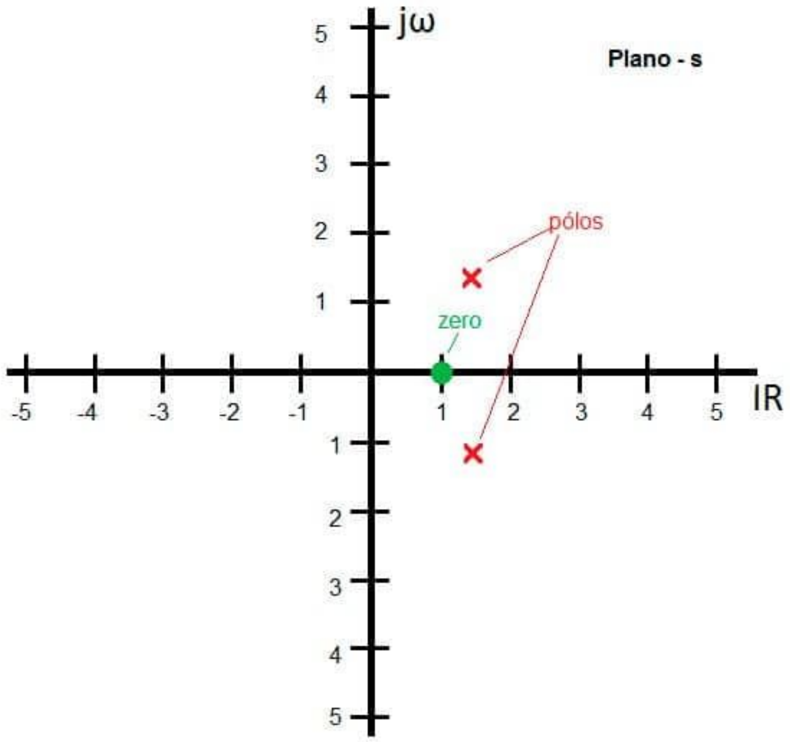


Diagrama de polos e zeros.

Estabilidade de um sistema

Assegurar a estabilidade em um sistema é uma questão fundamental em qualquer projeto de sistema de controle. A estabilidade relativa de um sistema relaciona-se com as raízes da equação característica da função de transferência do sistema.

Os sistemas podem ser definidos como:

SISO (single-input x single-output)

Representam sistemas que possuem uma entrada e produzem apenas uma saída.

SIMO (single-input x multiple-output)

Representam sistemas que possuem uma entrada e produzem múltiplas saídas.

MISO (multiple-input x single-output)

Representam sistemas que possuem múltiplas entradas e produzem apenas uma saída.

MIMO (multiple-input x multiple-output)

Representam sistemas que possuem múltiplas entradas e produzem múltiplas saídas.

Um sistema estável deve apresentar uma saída y(t) limitada quando uma entrada u(t) limitada for aplicada. De maneira simplificada, a estabilidade de um sistema representa que, se uma entrada qualquer limitada em amplitude for aplicada ao sistema, ela resultará em uma saída também limitada em amplitude.

Saiba mais

Quanto à estabilidade, os sistemas podem ou não ser do tipo BIBO (bound-input x bound-output, ou seja, entrada limitada e saída limitada). Um sistema é dito BIBO estável se, para toda entrada limitada aplicada, existe uma saída limitada correspondente. Essa estabilidade somente é definida para resposta ao estado zero e é aplicável somente se o sistema está inicialmente relaxado.

Estabilidade no espaço de estados

Seja um sistema linear com equações de espaço de estados definidas como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

E considerando a situação inicial:

$$x_0 = x(0)$$

Essa estabilidade relativa pode ser calculada por meio da equação do ganho. Dessa forma, a partir da equação do ganho:

$$G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

A determinação dos autovalores da matriz **A** é obtida pela equação:

$$\det(sI - A) = 0$$

Para que o sistema seja considerado **estável**, as raízes do sistema (determinadas a partir dos autovalores do sistema ou dos polos do sistema) devem possuir parte real negativa. Em outras palavras, para que o sistema seja considerado estável, os polos devem possuir a parte real negativa, de modo a estarem no semiplano esquerdo do plano-s.

Isso ocorre uma vez que polos no semiplano esquerdo resultam em respostas decrescentes com as perturbações produzidas sobre o sistema.

Por outro lado, o sistema é dito instável se possuir raízes no semiplano direito do plano complexo. Também cabe destacar que o sistema é dito criticamente estável caso possua 1 par de polos complexo conjugados sobre o eixo imaginário.

Nesse sentido, um sistema SISO com função de transferência própria $(G(s))$ é BIBO estável se, e somente se, todos os polos de $G(s)$ possuírem parte real negativa e, por conseguinte, pertencerem ao semiplano complexo esquerdo. Por exemplo, se a matriz A for igual a:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & s & 0 \\ 0 & s & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} \quad (sI - A) = \begin{bmatrix} s & -3 & -1 \\ 2 & s-8 & -1 \\ 10 & 5 & s+2 \end{bmatrix}$$
$$\det(sI - A) = s^3 - 6s^2 - 7s - 52$$

Se todas as raízes desse polinômio apresentarem parte real negativa, o sistema será instável. Caso alguma das raízes tenha parte real positiva, o sistema será instável.

Resolvendo-se esse polinômio, pode-se obter as raízes:

$$s_1 = 7,7642$$
$$s_2 = -0,8821 + 2,4330i$$
$$s_3 = -0,8821 - 2,4330i$$

Observando essas raízes, é possível notar que uma das raízes se localiza no semiplano direito do plano complexo ($s_1 = 7,7642$), já que possui parte real positiva. Sendo assim, esse sistema é instável.

Saiba mais

Para um sistema com resposta à entrada nula e condição inicial não nula , o sistema é assintoticamente estável se os polos de A possuírem parte real negativa.

De maneira simplificada, a estabilidade relativa de um sistema pode ser medida pelo afastamento de suas raízes do eixo imaginário, isto é, quanto mais afastadas do eixo, mais estável relativamente é o sistema realimentado, em comparação com outras configurações realimentadas cujas raízes estão mais próximas do eixo imaginário. Considerando que, em todos os casos, as raízes estão no semiplano esquerdo do plano complexo.

Exemplo

Considere um sistema com duas raízes e pertencentes a dois sistemas distintos. Caso , o sistema 1 é mais estável do que o sistema 2.

Método da estabilidade de Routh-Hurwitz

Em geral, a estabilidade de um sistema pode ser analisada pelas raízes do polinômio característico de sua função de transferência.

> **Para polinômios de 1, 2 até 3 graus, o cálculo das raízes é relativamente simples. Entretanto, conforme o grau do polinômio aumenta, a aplicação desse método se torna complicada, na medida em que a própria determinação das raízes por métodos analíticos se torna mais complexa e difícil.**

Por esse motivo, um método denominado Routh-Hurwitz surgiu como uma ferramenta bastante importante na determinação da estabilidade de sistemas.

Considere a seguinte equação característica de um sistema:

$$\Delta(s) = q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \qquad (28)$$

Reescrevendo-se a Equação 28 em função de suas raízes, tem-se:

$$a_n (s - r_1)(s - r_2) \ldots (s - r_n) = 0$$

Ao analisar se todas as raízes do polinômio estão no semiplano esquerdo, pode-se verificar a estabilidade do sistema. No entanto, em se tratando de um polinômio de grau n, essa determinação das raízes pode ser relativamente complexa.

No critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, a determinação das raízes do polinômio não é necessária para a realização da análise de estabilidade dos sistemas dinâmicos. Enquanto a estabilidade relativa de um sistema é definida pela parte real de cada raiz ou pelo par de raízes do denominador da função de transferência, o critério de Routh indica precisamente a estabilidade absoluta de um sistema.

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz é uma metodologia fundamental para analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos lineares. Considere novamente a Equação 28. Escrevendo-a de forma tabular, tem-se a Tabela de Routh:

$< br > s^n < br >$	$< br > a_n < br >$	$< br > a_{n-2} < br >$	$< br > a_{n-4} < br >$
$< br > s^{n-1} < br >$	$< br > a_{n-1} < br >$	$< br > a_{n-3} < br >$	$< br > a_{n-5} < br >$
$< br > s^{n-2} < br >$	$< br > b_{n-1} < br >$	$< br > b_{n-3} < br >$	$< br > b_{n-5} < br >$
$< br > s^{n-3} < br >$	$< br > c_{n-1} < br >$	$< br > c_{n-3} < br >$	$< br > c_{n-5} < br >$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$< br > s^0 < br >$	$< br > h_{n-1} < br >$		

Tabela de Routh da Equação 28.
Elaborada por: Raphael de Souza dos Santos.

Onde:

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{(a_{n-1})} = \frac{-1}{(a_{n-1})} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad b_{n-3} = \frac{-1}{(a_{n-1})} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{(b_{n-1})} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

Desse modo, o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz estabelece que o número de raízes do polinômio com parte real positiva (o que levaria à instabilidade) é igual ao número de trocas de sinais da primeira coluna da Tabela de Routh.

Tome como referência o mesmo polinômio do exemplo anterior:

$$s^3 - 6s^2 - 7s - 52 = 0$$

Montando-se a Tabela de Routh, obtém-se:

$< br > s^3 < br >$	1	-7
$< br > s^2 < br >$	-6	-52
$< br > s^1 < br >$	$< br > -47/3 < br >$	0

$ s^{0} $	-52	

$$b_{n-1}=\frac{(-6)(-7)-1(-52)}{(-6)}=\frac{42+52}{(-6)}=\frac{94}{(-6)}=-\frac{47}{3} \quad c_{n-1}=\frac{\left(-^{47}/3\right)(-52)-(-6)(0)}{\left(-^{47}/3\right)}=-52$$

Atenção

É possível observar, na Tabela de Routh do exemplo, que há apenas 1 mudança de sinal (da 1 linha para a 2) na coluna de referência ou coluna pivô. Sendo assim, pelo critério de Routh-Hurwitz, esse sistema apresenta apenas 1 polo com parte real positiva, confirmando o resultado obtido no exemplo anterior.

Estabilidade relativa

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz pode ser estendido para permitir a avaliação da estabilidade relativa em diversos sistemas dinâmicos. Para isso, basta considerar que esse sistema permite a mudança de alguma(s) variável(eis). Tal mudança corresponderia a uma mudança na posição do eixo imaginário.

Por exemplo, suponha polinômio a seguir:

$$\Delta(s)=s^{4}+14s^{3}+71s^{2}+154s+120$$

Suponha uma alteração do eixo por meio do deslocamento de $s=s'-1$. Essa alteração levará a uma muda no polinômio característico para:

$$\Delta\left(s'\right)=s'^{4}+10s'^{3}+35s'^{2}+50s'+24$$

A organização da Tabela de Routh desse polinômio levará a:

$ s'^{4} $	1	35	24
$ s'^{3} $	10	50	
$ s'^{2} $	30	24	
$ s'^{1} $	42		

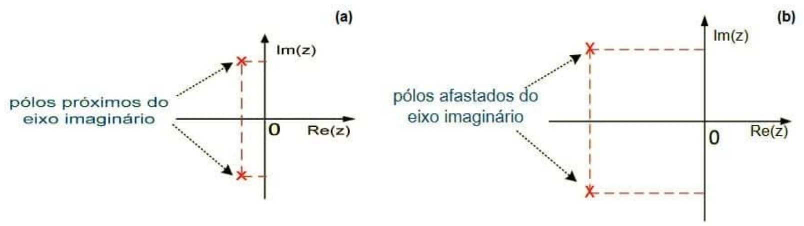
$< br > s'^0 < br >$	24		

É possível observar que não há mudanças de sinais, ou seja, esse polinômio também não apresenta raízes com parte real positiva, de forma que continua sendo estável.

No entanto, as raízes do polinômio original são: $s_1 = -5; s_2 = -4; s_3 = -3$ e $s_4 = -2$.

Já as raízes do polinômio deslocado são: $s_1 = -4; s_2 = -3; s_3 = -2$ e $s_4 = -1$. Dessa maneira, é possível perceber que houve uma aproximação das raízes do eixo imaginário.

Na prática, não é desejável que os polos estejam perto do eixo imaginário jω. Quanto mais próximo do eixo imaginário, maior o número de oscilações que o sistema poderá apresentar, ou seja, mais lenta será sua estabilização, como pode ser visto na imagem a seguir:



Estabilidade relativa: (a) polos próximos ao eixo j \(\omega e\) (b) polos afastados do eixo j \(\omega\).

Desse modo, é possível produzir uma margem de segurança para o sistema. Por exemplo, caso fosse promovido um deslocamento $s = s' + 1$, as raízes seriam: $s_1 = -6; s_2 = -5; s_3 = -4$ e $s_4 = -3$, afastando-se ainda mais do eixo imaginário.

Vem que eu te explico

Estabilidade de um sistema

No vídeo a seguir, o professor vai dar mais explicações sobre o tópico **Estabilidade de um sistema.**

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Estabilidade relativa

No vídeo a seguir, o professor vai dar mais explicações sobre o tópico **Estabilidade relativa**

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Um sistema de ordem 2 possui uma função de transferência definida pela equação do ganho descrita a seguir. Observando essa equação, é possível definir que esse sistema é

$$< br > G(s) = \frac{4}{s^2-2s+4} < br >$$

A

estável, pois possui raízes no semiplano esquerdo.

B

instável, pois possui raízes no semiplano esquerdo.

C

estável, pois possui raízes no semiplano direito.

D

instável, pois possui raízes no semiplano direito.

E

estável, pois possui raízes somente reais.

A alternativa D está correta.

Considerando a equação do ganho:

$$< br > G(s) = \frac{4}{s^2-2s+4} < br >$$

A análise da estabilidade do sistema é realizada por meio do estudo dos polos desse sistema, ou seja, das raízes do denominador. Sendo assim, igualando-se o polinômio característico a zero, obtém-se:

$$< br > s^2 - 2s + 4 = 0 < br >$$

O desenvolvimento dessa equação do segundo grau permite determinar que as raízes são:

$$< br > s_1 = 1 + 1,732i < br >$$

$$< br > s_2 = 1 - 1,732i < br >$$

Dessa forma, é possível observar que as duas raízes possuem parte real positiva, sendo **localizadas no semiplano direito**. Esse posicionamento das raízes mostra que o sistema é instável.

Questão 2

Considere o polinômio característico que descreve o comportamento do sistema descrito a seguir. É possível perceber que sua complexidade dificulta a determinação das suas raízes. Sendo assim, utilizando-se outro critério de estabilidade, como Routh-Hurwitz, é possível afirmar que

$$< br > q(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 < br >$$

A

o sistema é estável, pois apresenta apenas raízes com partes reais positivas.

B

o sistema é instável, pois a coluna de referência apresenta mudança de sinal.

C

o sistema é instável, pois apresenta apenas raízes com partes reais negativas.

D

o sistema é instável, pois a coluna de referência não apresenta mudança de sinal.

E

o sistema é estável, pois a coluna de referência apresenta mudança de sinal.

A alternativa B está correta.

Por meio do polinômio característico, é possível montar a Tabela de Routh, como pode ser visto a seguir

$< br > s^4 < br >$	1	3	5
$< br > s^3 < br >$	2	4	0
$< br > s^2 < br >$	1	5	
$< br > s^1 < br >$	-6		
$< br > s^0 < br >$	5		

Na coluna pivô da tabela, é possível observar, pelas duas mudanças de sinal (da linha s^2 para a linha s^1 e, novamente, da linha s^1 para a linha s^0), que o sistema apresenta dois polos no semiplano direito. Por essa razão, o sistema instável.

A mesma conclusão poderia ser obtida a partir da determinação das raízes do polinômio:

$$< br > s_1 = 0,2878 + 1,4161i < br >$$

$$< br > s_2 = 0,2878 - 1,4161i < br >$$

$$< br > s_3 = -1,2878 + 0,85791 < br >$$

$$< br > s_4 = -1,2878 - 0,8579i < br >$$

Considerações finais

Neste conteúdo, foram estudados os conceitos de equação diferencial e a maneira como um sistema físico pode ser representado matematicamente. Tal representação permite o melhor entendimento das características do sistema bem como a elaboração de um sistema de controle. A representação no espaço do estado do sistema e o desenvolvimento das equações de estado de um sistema mostraram que é possível não só a modelagem matemática do processo físico, mas também o estudo de sua estabilidade.

A diferenciação entre sistemas em malha aberta e fechada foi ilustrada, com o objetivo de mostrar que a realimentação do sistema pode tornar possível estabilizar um sistema inicialmente instável. A determinação da equação do ganho, a partir da representação do sistema por meio de um diagrama em blocos, deixou clara a relação entre a entrada e a saída de um sistema definida por meio dos blocos que compõem o sistema.

A importância no estudo da estabilidade de um sistema também foi discutida, com especial atenção ao estudo da estabilidade de espaço de estados, em que o posicionamento da parte real negativa dos polos define a estabilidade do sistema. Também vimos, com destaque, o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, que permite o estudo da estabilidade de um sistema sem a determinação das raízes de seu polinômio característico – essencial para polinômios com grau elevado ou mais complexos.

O estudo da estabilidade relativa também permitiu a compreensão dos efeitos que a posição dos polos, mesmo quando localizados no semiplano esquerdo, projeta no sistema quando próximos do eixo imaginário. Também foi possível ilustrar que, por meio da modificação nas variáveis de um sistema, é possível torná-lo mais estável, garantindo uma margem de segurança.

Podcast

Agora, o especialista **Raphael de Souza dos Santos** encerra o conteúdo falando sobre os principais tópicos abordados.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para ouvir o áudio.

Explore+

- Leia os livros **Engenharia de controle moderno**, de Katsuhiko Ogata, e **Engenharia de sistemas de controle**, de Norman S. Nise e Fernando Ribeiro da Silva, para saber mais sobre a estabilidade de um sistema.
- Leia o artigo **Novos testes de estabilidade para sistemas lineares**, de Maurício C. de Oliveira, disponível na internet, para conhecer outros métodos de estabilidade para sistemas lineares.

Referências

D'AZZO, J. J.; HOUPIS, C. H. **Análise e projeto de sistemas de controle lineares**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1984.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle moderno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

FRANKLIN, G.F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Sistemas de controle para engenharia**. [S.l.]. Porto Alegre: Bookman, 2013.

NISE, N. S.; SILVA, F. R. da. **Engenharia de sistemas de controle**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. [S.l.]: Pearson, 2010.