Sistemas de equações e transformações lineares

Aplicação dos conceitos de sistemas lineares e transformações lineares no plano.

Prof. Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Propósito

Definir e aplicar sistemas lineares e transformações lineares no plano.

Preparação

Antes de iniciar o conteúdo deste tema, tenha em mãos papel, caneta e uma calculadora científica ou use a calculadora de seu smartphone/computador.

Objetivos

- Classificar os sistemas de equações lineares.
- Aplicar métodos de resolução para obter a solução dos sistemas de equações lineares.
- Empregar o conceito de transformação linear no plano.
- Aplicar o conceito de autovalores e autovetores em sistemas e transformações lineares.

Introdução

O vídeo aborda a importância da matemática no nosso dia a dia. Muitas vezes nos questionamos sobre a utilidade dos conhecimentos matemáticos ensinados na escola, mas a matemática está presente em várias tecnologias que utilizamos diariamente. O palestrante reforça que, mesmo uma simples comunicação via tecnologia, envolve uma grande aplicação de matemática.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Introdução

Em diversas ocasiões, torna-se necessária a análise de um problema por meio de diversas equações. Essas equações formam um sistema que deve ser resolvido para se obter a solução do problema.

Este módulo define e classifica um sistema de equações lineares.

Definição e classificação do sistema de equações lineares

Vamos começar entendendo o que é uma equação linear.

Uma equação linear em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

Onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são números reais.

Ela utiliza as seguintes nomenclaturas:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$: variáveis ou incógnitas;
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$: coeficientes das variáveis;
- b : termo independente.

⚠

Atenção

Cuidado, na equação linear as incógnitas estão com expoentes unitários, assim as equações abaixo não são equações lineares:

Se relacionarmos mais do que uma equação linear, teremos o que chamamos de um sistema de equações lineares ou simplesmente um sistema linear.

Assim, seja um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas, ele terá uma forma:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_1x_2 + a_1x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_2x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_mx_2 + a_mx_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Onde todos os coeficientes e termos independentes são constantes reais.

A solução desse sistema é o conjunto de valores reais ordenados $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ que satisfazem simultaneamente todas as equações do sistema.

Este conjunto é denominado de **conjunto solução** ou **solução geral do sistema**.

O sistema linear pode ser representado por um produto matricial:

$$AX = B$$

A

A matriz A é denominada matriz incompleta, matriz dos coeficientes ou matriz do sistema, dada por:

$$< br > A_{m \times n} = \begin{bmatrix} < br > a_{11} & amp; a_{12} & amp; a_{13} & amp; \ldots & amp; a_{1n} \\ < br > a_{21} & amp; a_{22} & amp; a_{23} & amp; \ldots & amp; a_{2n} \\ < br > a_{m1} & amp; a_{m2} & amp; a_{m3} & amp; \ldots & amp; a_{mn} < br > \end{bmatrix} < br >$$

X

A matriz X é denominada matriz das variáveis ou incógnitas, dada por:

$$< br > X_{n \times 1} = \begin{bmatrix} < br > x_1 \\ < br > x_2 \\ < br > \cdots \\ < br > x_n < br > \end{bmatrix} < br >$$

B

E a matriz B dos termos independentes, definida por:

$$< br > B_{m \times 1} = \begin{bmatrix} < br > b_1 \\ < br > b_2 \\ < br > \ldots \\ < br > b_m < br > \end{bmatrix} < br >$$

Quando todos os termos independentes do sistema forem nulos, o sistema é dito homogêneo.

Existe também a matriz completa dos coeficientes para um sistema linear que junta a matriz A com a matriz B, assim:

$$C_{m\times(n+1)} = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_m 3x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Os sistemas lineares, de acordo com as suas soluções, podem ser classificados como:

Possível e determinado
Apresenta uma única solução.

Possível e indeterminado
Apresenta infinitas soluções.

Impossível
Não apresenta soluções.

Existem vários métodos para buscar a solução de um sistema de equações lineares.

Comentário

Para os sistemas mais simples, podemos usar os métodos da substituição e o da adição ou cancelamento. Vale lembrar que sistemas mais simples são sistemas de até três equações e três incógnitas. Em ambos os métodos trabalhamos com as equações de forma a tentar ficar apenas com uma incógnita.

Em outras palavras, podemos multiplicar as equações por números reais e realizar operações de soma ou subtração entre elas para tentarmos eliminar as variáveis e obtermos os seus valores. Os exemplos a seguir apresentam aplicação desses métodos simples.

Na solução de sistemas de duas variáveis, pode-se fazer uma analogia com as posições relativas de retas vistas na geometria analítica. Da mesma forma, para sistemas de três variáveis, a analogia será com os planos.

Observe:

Sistemas possíveis e determinados
Seriam o caso em que as retas ou planos teriam apenas um ponto em comum.

Sistemas impossíveis
Seriam o caso de as retas ou os planos não terem pontos em comum.

Sistema possível e indeterminado
Seria o caso de as retas e planos terem infinitos pontos em comum, por exemplo, uma reta ou mesmo um plano em comum.

Para sistemas maiores e mais complexos, existem métodos mais eficientes, que serão vistos posteriormente.

Exemplos

1. Analise a solução do sistema $\left\{\begin{array}{c}2x-y=4\\x+2y=7\end{array}\right.$

Solução

Ao usar o método da substituição, obtemos na primeira equação $y=2x-4$.

Substituímos, então, o valor de y na segunda equação e obtém-se, assim, uma equação apenas com a variável x :

$$x+2y=7 \rightarrow x+2\times(2x-4)=7 \rightarrow x+4x-8=7 \quad 5x=7+8=15 \rightarrow x=15/5=3$$

$$\text{Portanto, ficamos com um sistema } \left\{\begin{array}{c}2x-y=4\\x=3\end{array}\right. \quad \text{logo } y=2x-4=2\times3-4=2$$

Por isso, o sistema é possivel e determinado com a solução $(x,y)=(3,2)$.

Fazendo uma analogia, esse sistema pode ser visto como a interseção de duas retas, que, por serem concorrentes, possui apenas um ponto em comum $(3,2)$.

2. Analise a solução do sistema $\left\{\begin{array}{c}2x+y=2\\4x+2y=5\end{array}\right.$

Chave de resposta

Vamos usar o método do cancelamento. Multiplique a primeira equação por (-2) e some as duas equações.

$$\left\{\begin{array}{c}2x+y=2\\4x+2y=5\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c}2x\times(-2)+y\times(-2)=2\times(-2)\\4x+2y=5\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c}-4x-2y=-4\\4x+2y=5\end{array}\right.$$

Somando as duas equações, chegamos a $0=1$. Repare que caímos em uma contradição. Assim, não há valor de x e y que satisfaça as duas equações de forma simultânea. o sistema, portanto, é um sistema linear **impossível.**

Fazendo uma analogia, esse sistema pode ser visto como a interseção de duas retas, que por, serem paralelas, não possui ponto em comum.

$$\text{Observe que } \left\{ \begin{array}{c} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 5 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{c} 2x + y = 2 \\ 2x + y = 5/2 \end{array} \right. \text{, é impossivel atender as duas equações simultaneamente.}$$

3. Analise a solução do sistema $\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 6x_1 + 9x_2 = 3 \end{array} \right.$

Solução

Vamos usar o método do cancelamento. Multiplique a primeira equação por (-3) e some as duas equações.

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 6x_1 - 9x_2 = 3 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{c} 2 \times x_1 \times (-3) - 3x_2 \times (-3) = 1 \times (-3) \\ 6x_1 - 9x_2 = 3 \end{array} \right. \to \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 = -3 \\ 6x_1 - 9x_2 = 3 \end{cases}$$

Somando as duas equações chegamos, a $0 = 0$.

Então, ficamos com um sistema $\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$

que vai ser atendido sempre que a primeira equação for atendida.

Assim, existem infinitos valores que atendem ao sistema. O sistema, portanto, é um sistema linear possivel e indeterminado.

Qualquer ponto do tipo $(x_1, x_2) = (a^{2/3}a - 1/3)$, com a real, ou $(x_1, x_2) = (1/2 + 3/2b, b)$, com b real, é solução do sistema.

Por exemplo, $(x_1, x_2) = (1, 1/3)$ ou $(x_1, x_2) = (2, 1)$.

Repare que:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 6x_1 - 9x_2 = 3 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{c} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 6/3x_1 - 9/3x_2 = 3/3 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{c} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 1 \end{array} \right.$$
$$2x_1 - 3x_2 = 1$$

Fazendo uma analogia, esse sistema pode ser visto como a interseção de duas retas, que, por serem coincidentes, possuem infinitos pontos em comum.

Para se verificar se um conjunto de valores é solução de um sistema, basta substituir o mesmo nas equações e todas devem ser atendidas de forma simultânea.

Repare que sistemas possiveis e determinados terão apenas um conjunto de soluções possiveis.

Assim, os sistemas podem ser:

Os possíveis e determinados $\rightarrow$ única solução.

Os possíveis e indeterminados $\rightarrow$ infinitas soluções.

Os impossíveis $\rightarrow$ nenhuma solução atende a todas as equações.

Exemplo

4. Verifique se os valores de $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ e $(x, y, z) = (-1, 0, -1)$ são soluções do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

Chave de resposta

Basta substituir os valores nas equações e verificar se as atendem.

$$(x, y, z) = (1, 2, 1)$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \times 1 + 2 - 1 = 3, ok \\ x + y - z = 1 + 2 - 1 = 2, ok \\ x - 2y + z = 1 + (-2) \times 2 + 1 = -2 \end{cases}$$

Como o conjunto *(1, 2, 1)* atendeu todas as equações, ele é uma solução desse sistema.

$$(x, y, z) = (1, 0, -1)$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \times 1 + 0 - (-1) = 3, \text{ ok} \\ x + y - z = 1 + 0 - (-1) = 2, \text{ ok} \\ x - 2y + z = 1 - 2 \times 0 - 1 = 0, \text{ não atendeu} \end{cases}$$

Como o conjunto *(1, 0, −1)* não atendeu a última equação, ele não é uma solução desse sistema.

Atenção

Os sistemas lineares homogêneos, isto é, todos os termos independentes são nulos, sempre apresentam a solução trivial de todas as variáveis iguais a zero. Assim, para esse tipo de sistema, não existe o caso de sistemas impossíveis. Ou apresenta a solução trivial, sendo possível e determinado, ou apresenta infinitas soluções.

Teoria na prática

Um pai quer dividir entre seus três filhos *37* moedas de ouro. Porém, ele quer atender a seguinte regra:

- O filho mais velho deve ter o dobro de moedas do filho mais novo;
- O segundo filho deve ter um número de moedas igual ao filho mais novo mais *5*.

Resolva o sistema de equações e ajude esse pai a solucionar seu problema.

Chave de resposta

Veja!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na Massa

Questão 1

Marque a alternativa que apresenta uma equação linear para as variáveis reais x, y e z.

A

$2x - 3y^2 + z - 5 = 0$

B

$2x + 3z - 8 = 0$

C

$y + z^{-1} - 3 = 0$

D

$x + 2y - yz - 2 = 0$

A alternativa B está correta.

A alternativa A possui um termo da variável y ao quadrado, não sendo, então, uma equação linear.

A alternativa C possui um termo da variável z no denominador, isso é z^{-1}, não sendo uma equação linear.

A alternativa D possui um termo da yz, não sendo uma equação linear.

A alternativa B só possui termos das variáveis na primeira ordem, isso é, elevados a unidade, sendo, portanto, uma equação linear.

Questão 2

Verifique qual alternativa apresenta uma solução para o sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$

A

$(x, y, z) = (1, -1, -1)$

B

$(x, y, z) = (2, 2, 1)$

C

$(x, y, z) = (1, 2, 2)$

D

$(x, y, z) = (2, 1, 1)$

A alternativa C está correta.

Basta testar as alternativas diretamente no sistema e verificar qual delas satisfaz as três equações. Assim, verificamos que a alternativa a atende apenas a primeira equação. A alternativa b atende apenas as duas primeiras e a alternativa d atende apenas a terceira, não sendo nenhuma delas a solução do sistema.

Por outro lado, a alternativa c atende as três equações.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 - 2 + 2 = 1, ok \\ x + y + z = 1 + 2 + 2, ok \\ x + 2y - z = 1 + 2 \times 2 - 2 = 3, ok \end{cases}$$

Portanto, *(1, 2, 2)* é solução do sistema.

Questão 3

Verifique a alternativa que NÃO é uma solução para o sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 5 \\ x + z = 3 \end{cases}$

A

(x, y, z) = (1, 2, 3)

B

(x, y, z) = (2, 2, 1)

C

(x, y, z) = (1, 2, 2)

D

(x, y, z) = (3, 2, 0)

A alternativa A está correta.

Basta testar as alternativas diretamente no sistema e verificar qual delas satisfaz as três equações.

As alternativas B, C e D atendem as três equações, sendo solução do sistema.

A alternativa a não atende nenhuma das três equações, não sendo solução do sistema.

Questão 4

Classifique o sistema de equações lineares $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 5 \\ 3x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$

A

Impossível

B

Possível e determinado com *(x, y, z) = (2, 2, 1)*

C

Possível e determinado com *(x, y, z) = (1, 2, 2)*

D

Possível e indeterminado

A alternativa A está correta.

Veja!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 5

Classifique o sistema de equações lineares $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$

A

Impossível

B

Possível e determinado com *(x, y, z) = (2 ,2, 1)*

C

Possível e determinado com *(x, y, z) = (1 ,2, 2)*

D

Possível e indeterminado

A alternativa C está correta.

Resolvendo o sistema pela técnica da adição e cancelamento, soma-se a primeira com a segunda equação:

$$x - y + z + x + y + z = 1 + 5 \rightarrow 2x + 2z = 6 \rightarrow x + z = 3$$

Em seguida, multiplica-se a segunda equação por dois e se subtrai da terceira equação:

$$2x + 2y + 2z - (x + 2y - z) = 2 \times 5 - 3 \rightarrow x + 3z = 7$$

Assim temos $\begin{cases} x + z = 3 \\ x + 3z = 7 \end{cases} \rightarrow x = 3 - z$, então $(3 - z) + 3z = 7 \rightarrow 2z = 4 \rightarrow z = 2$

Como , sua substituição na segunda equação do sistema leva a

Portanto, o sistema é possível e determinado e tem solução única $(x, y, z) = (1, 2, 2)$.

Questão 6

Marque a alternativa verdadeira quanto ao sistema $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 5 \\ x + z = 3 \end{cases}$

A

Impossível

B

Possível e determinado com solução (x, y, z) = (0, 2, 3)

C

Possível e determinado com solução (x, y, z) = (2, 2, 1)

D

Possível e indeterminado

A alternativa D está correta.

Veja!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Marque a alternativa que apresenta um sistema de equações lineares para as variáveis reais x e y.

A

$$\left\{\begin{array}{c} 2e^x - y = 4 \\ 2x - y = 7 \end{array}\right.$$

B

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y = 4 \\ 2x - y = 7 \end{array}\right.$$

C

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y = 4 \\ 2\ln x - xy = 7 \end{array}\right.$$

D

$$\left\{\begin{array}{c} 3\ln x + y = 4 \\ 2x - xy = 7 \end{array}\right.$$

A alternativa B está correta.

A alternativa a possui um termo de exponencial da variável *x*, não sendo, portanto, uma equação linear.

A alternativa c e d possuem termo de *ln x* e um termo *xy*, não sendo uma equação linear.

A alternativa b só possui termos das variáveis na primeira ordem, isso é, elevados a unidade, sendo, assim, uma equação linear.

Questão 2

Verifique a alternativa que NÃO é uma solução para o sistema $\left\{\begin{array}{c} x - 2y + z = 4 \\ x + 2y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{array}\right.$

A

(x, y, z) = (6, 1, 1)

B

(x, y, z) = (2, 1, 4)

C

(x, y, z) = (4, 1, 2)

D

(x, y, z) = (0, 1, 6)

A alternativa A está correta.

Basta testar as alternativas diretamente no sistema e verificar qual delas satisfaz as três equações.

As alternativas B, C e D atendem as três equações, sendo solução do sistema.

A alternativa a não atende nenhuma das três equações não sendo solução do sistema.

Este sistema tem mais de uma solução, sendo possível e indeterminado.

Qualquer solução do tipo $(x, y, z) = (a, 1, 6 - a)$ ou $(x, y, z) = (6 - b, 1, b)$ é solução do sistema apresentado, com a e b reais.

Introdução

Para sistemas lineares com um número maior de variáveis, os métodos mais simples de substituição e cancelamentos não são mais eficientes, pois complicariam bastante os cálculos a serem resolvidos.

Assim, existem outros métodos de resolução que podem ser aplicados a sistemas lineares mais complexos.

Neste módulo, será estudado o método da eliminação de Gauss-Jordan e a Regra de Cramer para resolução dos sistemas lineares.

Métodos de Resolução de Sistemas Lineares

Existem métodos de simples aplicação, como o de substituição de variáveis e o de cancelamento, que permitem resoluções rápidas em sistemas lineares com duas variáveis e duas equações ou três variáveis e três equações.

Saiba mais

Quando o número de equações e variáveis cresce no sistema, a aplicação desses métodos se complica, perdendo, portanto, sua eficiência. Existem diversos métodos que podem ser encontrados na literatura de álgebra linear, vide o Explore + no fim deste tema.

Neste módulo, analisaremos dois métodos que são práticos e podem ser aplicados em qualquer sistema, até mesmo nos sistemas lineares menores: método da eliminação de Gauss-Jordan e a Regra de Cramer.

> Nestes dois métodos, será importante representar o sistema linear como um produto matricial, conforme visto no módulo anterior.

Método da eliminação de Gauss-Jordan

Este método consiste em transformar o sistema linear em um sistema linear escalonado reduzido. Inicialmente, precisamos definir o que é um sistema linear escalonado.

Seja um sistema de m equações e n variáveis, ele apresentará uma matriz completa de coeficientes C terá tamanho m x (n+1).

Este sistema será escalonado se a matriz C referente a este sistema atender as seguintes propriedades:

- Se uma linha não for de elementos todos nulos, o primeiro elemento não nulo deve ser *1*. Este elemento é denominado **pivô**.

- Para todas as linhas, o primeiro elemento não nulo deve estar à esquerda do primeiro elemento não nulo da linha seguinte.
- Se uma linha tiver apenas elementos nulos, ela deve estar abaixo de todas as demais linhas.

Observe que ao seguir essas propriedades, cada coluna que contém um pivô tem todos os demais elementos iguais a zero, abaixo do pivô.

Exemplo

São exemplos de matrizes de sistemas escalonados: ou

Um sistema será escalonado na forma reduzida por linha (ou simplesmente reduzida) se atender as propriedades do sistema escalonado e, além disso, se a coluna que tiver um pivô apresentar todos os demais elementos nulos. As duas matrizes apresentadas como exemplo são escalonadas, mas não são reduzidas por linha.

Exemplo

Exemplos de matrizes escalonadas reduzidas por linha: ou

Um sistema linear que apresenta matriz completa escalonada reduzida mostra de uma forma visível a solução do sistema.

Por exemplo:

A. O sistema que tem matriz completa $\begin{bmatrix} 1 & amp;0 & amp;0 & amp;2 \\ 0 & amp;1 & amp;0 & amp;0 \\ 0 & amp;0 & amp;1 & amp;1 \end{bmatrix}$ será $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$
Assim, o sistema será possível e determinado com solução $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.

B. O sistema que tem matriz completa $\begin{bmatrix} 1 & amp;0 & amp;0 & amp;2 \\ 0 & amp;1 & amp;2 & amp;0 \\ 0 & amp;0 & amp;0 & amp;1 \end{bmatrix}$ será $\begin{cases} x=2 \\ y+2z=0 \\ 0=1 \end{cases}$
Assim, o sistema será impossível.

C. O sistema que tem matriz completa $\begin{bmatrix} 1 & amp;0 & amp;3 & amp;2 \\ 0 & amp;1 & amp;2 & amp;2 \\ 0 & amp;0 & amp;0 & amp;0 \end{bmatrix}$ será $\begin{cases} x+3z=2 \\ y+2z=0 \\ 0=0 \end{cases}$

Assim, o sistema será possível e indeterminado. Qualquer combinação de dados do tipo $(x, y, z) = (2-3a, 2-2a, a)$, com a real, é solução do sistema.

Dessa forma, o método de eliminação de Gauss-Jordan buscará transformar todo sistema linear em um sistema escalonado reduzido, para obter, então, a sua solução.

Quando um sistema não estiver na forma escalonada, ele pode ser colocado nessa forma sendo convertido a um sistema equivalente por meio de algumas operações algébricas:

- Troca de posição de equações (linhas na matriz).
- Multiplicação de uma equação (linha) por um número real diferente de zero.
- Realizar uma combinação linear (Multiplicação por números reais e soma) de equações (linhas).

O método de Eliminação de Gauss seguirá os seguintes passos:

Passo 1
Localize a primeira coluna (mais à esquerda) que não é composta apenas de elementos nulos.

Passo 2
Permute, se for o caso, a primeira linha com outra linha, de forma que o primeiro elemento da coluna selecionada no passo anterior não seja nulo.

Passo 3
Se este primeiro elemento for diferente de 1, deve-se dividir toda linha pelo valor dele para transformá-lo em um pivô.

Passo 4
Some múltiplos da primeira linha com as demais para transformar todos os elementos da coluna do pivô como nulos.

Passo 5
Separe a primeira linha e refaça as etapas anteriores a partir da segunda linha e assim sucessivamente.

No fim desses passos, a matriz do sistema estará na sua forma escalonada.

Exemplos

1. Coloque a matriz completa referente ao sistema linear $\begin{cases} 2y - 3z = 8 \\ 2x + 4y - z = 6 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$ em sua forma escalonada.

Solução

A matriz será: $\begin{bmatrix} 0 & amp;2 & amp;-3 & amp;8 \\ 2 & amp;4 & amp;-1 & amp;6 \\ 3 & amp;1 & amp;2 & amp;5 \end{bmatrix}$

Não existe neste caso a necessidade do primeiro passo, pois a primeira coluna tem elementos diferentes de zero.

Com isso, vamos permutar a primeira pela segunda linha de forma a ter um elemento diferente de zero na primeira coluna.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Divida a primeira linha por *2* para transformar o primeiro elemento em pivô.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

A segunda linha já tem um zero no elemento abaixo do pivô, porém a terceira não tem. Assim, vamos multiplicar a primeira linha por *−3* e somar a terceira linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 8 \\ 3+(-3)\times 1 & 1+(-3)\times 2 & 2+(-3)\times 0,5 & 5+(-3)\times 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 3,5 & -4 \end{bmatrix}$$

Agora, repetiremos o procedimento para segunda linha. Vamos dividi-la toda por *2* para criar o segundo pivô.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 3,5 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5 & 3 \\ 0 & 1 & -1,5 & 4 \\ 0 & -5 & 3,5 & -4 \end{bmatrix}$$

Precisamos transformar todos os elementos da coluna abaixo deste pivô em zero. Assim, multiplicamos a segunda linha por *5* e somamos a terceira.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5 & 3 \\ 0 & 1 & -1,5 & 4 \\ 0 & -5+5\times 1 & 3,5+5\times(-1,5) & -4+5\times 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5 & 3 \\ 0 & 1 & -1,5 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 16 \end{bmatrix}$$

Para finalizar, dividiremos a terceira linha por *(−4)*, assim a matriz equivalente ficará escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5 & 3 \\ 0 & 1 & -1,5 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5 & 3 \\ 0 & 1 & -1,5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Vamos dar continuidade ao método, agora transformando uma matriz escalonada em uma matriz escalonada reduzida.

Comece pela última linha não nula. Multiplique a última linha não nula por um número e some à linha de cima para que o elemento acima do pivô seja zero. Repita até chegar à primeira linha.

Ao finalizar, faça outra vez o passo para a segunda linha de cima para baixo não nula e assim sucessivamente. No fim teremos uma matriz escalonada reduzida.

2. Transforme a matriz $\begin{bmatrix} 1 & amp;2 & amp;-0,5 & amp;3 \\ 0 & amp;1 & amp;-1,5 & amp;4 \\ 0 & amp;0 & amp;1 & amp;-4 \end{bmatrix}$ em uma matriz escalonada reduzida.

Chave de resposta

A última linha não nula é a terceira linha. Multiplique-a por *1,5* e some à segunda linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5 & 3 \\ 0 & 1 & -1,5+1\times 1,5 & 4+1\times 1,5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Multiplique agora a terceira linha por *0,5* e a some com a primeira linha.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -0,5+1\times 0,5 & 3+(-4)\times 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Esquecemos agora a última linha e passamos para a segunda de cima para baixo. Multiplique por *(−2)* e some à primeira linha.

$$< br > \begin{bmatrix} < br > 1 & amp;2+1\times -2) & amp;0 & amp;1+(-2)\times(-2) \\ < br > 0 & amp;1 & amp;0 & amp;-2 \\ < br > 0 & amp;0 & amp;1 & amp;-4 < br > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < br > 1 & amp;0 & amp;0 & amp;5 \\ < br > 0 & amp;1 & amp;0 & amp;-2 \\ < br > 0 & amp;0 & amp;1 & amp;-4 < br > \end{bmatrix} < br >$$

Assim, ficamos com uma matriz escalonada reduzida e obtemos a solução do sistema, pois, pela matriz equivalente obtida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \\ z=-4 \end{cases}$$

Veja que esta solução $(5,-2,-4)$ é solução do sistema original $\begin{cases} 2y-3z=8 \\ 2x+4y-z=6 \\ 3x+y+2z=5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\times(-2)-3\times(-4)=-4+12=8 \\ 2\times 5+4\times(-2)-(-4)=10-8+4=6 \\ 3\times 5+(-2)+2\times(-4)=15-2-8=5 \end{cases}$$

Regra de Cramer

Este método é um dos mais tradicionais para a resolução de sistemas lineares, apresentando vantagens e desvantagens em relação ao método anterior.

Vantagem

Ele resolve o sistema diretamente por um quociente de determinantes.

Desvantagem

Normalmente dá mais trabalho calcular todos os determinantes necessários do que apenas escalonar a matriz completa do sistema.

Para um número de incógnitas maior do que 3 , com certeza o método de Gauss-Jordan é menos trabalhoso do que a regra de Cramer.

Vamos nos limitar a apresentar o método. Sua demonstração pode ser encontrada nas obras listadas nas referências no fim deste tema.

Seja um sistema linear com três variáveis $(x, y$ e $z)$ e três equações.

O primeiro passo é obter o determinante da matriz incompleta do sistema, que denominaremos de (delta) Δ . Após esse cálculo, calcula-se o determinante referente a cada variável do sistema. Ele é obtido pela substituição da coluna referente à variável pelos termos independentes. Assim, teremos (delta $)\Delta_x$ para variável x, (delta $)\Delta_y$ para variável y e (delta) Δ_z para variável z .

Dessa forma, poderemos classificar o sistema linear de acordo com os valores obtidos:

1° Classificação

Se $(\text{ delta })\Delta \neq 0,0$ o sistema será possível e determinado e sua solução será dada por:

$$\begin{aligned} mp; x &= \frac{(\text{ delta })\Delta_x}{(\text{ delta })\Delta} \\ amp; , y &= \frac{(\text{ delta })\Delta_y}{(\text{ delta })\Delta} \\ mp; e_z &= \frac{(\text{ delta })\Delta_z}{(\text{ delta })\Delta} \end{aligned}$$

2° Classificação

Se $(\text{ delta })\Delta = 0\text{e}$
$(\text{ delta })\Delta_x = (\text{ delta })\Delta_y =$
$(\text{delta})\Delta_z = 0,0$ o sistema será possível e indeterminado.

3° Classificação

$\text{Se}(\text{ delta })\Delta = 0\,\text{é um}$ dos valores de $(\text{ delta })\Delta_x$ (delta) Δ_y e (delta) Δ_z for diferente de zero, o sistema será impossível.

⚠

Atenção

Outra desvantagem da regra de Cramer é que, para o caso possível e indeterminado, ele apenas classifica, mas não fornece o conjunto de soluções para o sistema.

Exemplos

3. Classifique o sistema de equações lineares $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 5 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$

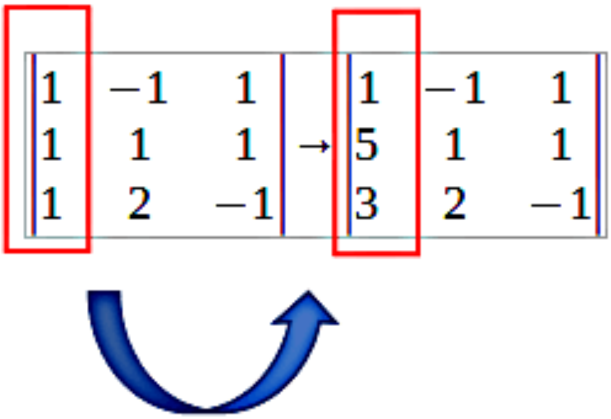
Solução

A matriz incompleta será $\begin{bmatrix} 1 & amp; -1 & amp; 1 \\ 1 & amp; 1 & amp; 1 \\ 1 & amp; 2 & amp; -1 \end{bmatrix}$, cujo determinante vale: $\begin{vmatrix} 1 & amp; -1 & amp; 1 \\ 1 & amp; 1 & amp; 1 \\ 1 & amp; 2 & amp; -1 \end{vmatrix}$

$$= 1 \times 1 \times (-1) + 1 \times 1 \times 2 \times +1 \times (-1) \times 1 - 1 \times 1 \times 2 - (-1) \times (-1) \times 1 = -4$$

Já sabemos que o sistema é possível e determinado.

Para calcular o valor da primeira variável, substitui-se a coluna correspondente aos coeficientes de x pelos termos independentes:



$$(\text{ delta })\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-1) + 1 \times 5 \times 2 \times +3 \times (-1) \times 1 - 1 \times 1 \times 3 - 1 \times 1 \times 2 - (-1) \times (-1) \times 5 = -4$$

Assim, $x = \frac{(\text{ delta })\Delta_x}{(\text{ delta })\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$

Para calcular y, substituindo a segunda coluna da matriz principal pelos termos independentes:

$$(\text{delta})\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times (-1) + 1 \times 1 \times 1 \times +1 \times 1 \times 3 - 1 \times 5 \times 1 - 1 \times 1 \times 3 - (-1) \times 1 \times 1 = -8$$

Logo, $y = \frac{(\text{ delta })\Delta_y}{(\text{ delta })\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2$

Para z, substituindo a terceira coluna da matriz principal pelos termos independentes:

$$(\text{delta})\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 3 + 1 \times 1 \times 2 \times +1 \times (-1) \times 5 - 1 \times 1 \times 1 - 3 \times (-1) \times 1 - 1 \times 5 \times 2 = -8$$

Portanto, $z = \frac{(\text{ delta })\Delta_z}{(\text{ delta })\Delta} = \frac{-8}{-4} = 2$

Dessa forma, a solução do sistema será *(x, y, z) = (1, 2, 2)*.

4. Classifique o sistema de equações lineares $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 5 \\ x + z = 3 \end{cases}$

Chave de resposta

A matriz incompleta será $\begin{bmatrix} 1 & amp;-1 & amp;1 \\ 1 & amp;1 & amp;1 \\ 1 & amp;0 & amp;1 \end{bmatrix}$, cujo determinante vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-1) + 1 \times 1 \times 0 \times +1 \times (-1) \times 1 - 1 \times 1 \times 1 - 1 \times 1 \times (-1) - 1 \times 1 \times 0 = 0$$

Assim, o sistema será **possível e indeterminado ou impossível**.

Calculando (delta) $\Delta_x, (\text{ delta })\Delta_y$ e $(\text{ delta })\Delta_z$

$$(\text{ delta })\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 5 \times 0 \times +3 \times (-1) \times 1 - 1 \times 1 \times 3 - 1 \times 1 \times 0 - 1 \times (-1) \times 5 = 0$$

$$(\text{delta})\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 1 + 1 \times 3 \times 1 \times +1 \times 1 \times 1 - 1 \times 5 \times 1 - 1 \times 1 \times 1 - 1 \times 3 \times 1 = 0$$

$$(\text{ delta })\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 3 + 1 \times 1 \times 0 \times +1 \times (-1) \times 5 - 1 \times 1 \times 1 - 1 \times 5 \times 0 - 3 \times (-1) \times 1 = 0$$

Como *(delta)*Δ *= (delta)*Δ_x *= (delta)*Δ_y *= (delta)*$\Delta_z = 0$, o sistema será **possível e indeterminado.**

5. Classifique o sistema de equações lineares $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 5 \\ 3x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$ aplicando a regra de Cramer.

Chave de resposta

A matriz incompleta será $\begin{bmatrix} 1 & amp;-1 & amp;1 \\ 1 & amp;1 & amp;1 \\ 3 & amp;-3 & amp;3 \end{bmatrix}$.

Basta perceber que a terceira linha é a primeira multiplicada por 3 , assim, pela propriedade do determinante, ele será nulo.

Portanto, o sistema será possível e indeterminado ou impossível.

$$(\text{ delta })\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 3 + 1 \times 5 \times (-3) \times +2 \times (-1) \times 1 - 1 \times 1 \times 2 - 1 \times 1 \times (-3) - 3 \times (-1) \times 5 = 2$$

Não precisamos sequer calcular os demais, pois, como já há um diferente de zero, e *(delta)Δ = 0*, o sistema será impossível.

Atenção

Quando o sistema linear é homogêneo, os valores de (delta)Δx = (delta)Δy = (delta)Δz = 0 Assim, o valor do determinante da matriz incompleta Δ determinará o tipo do sistema. Se (delta)Δ ≠ 0, o sistema será possível e determinado e o sistema só terá a solução trivial, que é x = y = z = 0. Se (delta)Δ = 0, o sistema será possível e indeterminado.

Teoria na prática

Um fazendeiro estava comentando sobre sua fazenda. Ele informou que:

- A fazenda tem *27* animais;
- Na fazenda só há três tipos de animais: porcos, galinhas e vacas;
- O número de patas de animais na fazenda vale *84*;
- O número de porcos da fazenda vale o número de vacas e galinhas *menos 5*.

O fazendeiro pediu para que você descobrisse qual a quantidade de cada animal na fazenda.

Chave de resposta

Veja!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na Massa

Questão 1

Classifique o sistema linear $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

A

Impossível

B

Possível e indeterminado

C

Possível e determinado com solução (0, 0, 0)

D

Possível e determinado com solução (0, 0, 1)

A alternativa C está correta.

Como o sistema é homogêneo, ele só pode ser possível determinado ou possível indeterminado.

$$(\text{ delta })\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2+2-1-2-1-2 = -6 \neq 0$$

Assim, o sistema é possível e determinado, tendo apenas a solução trivial *(0, 0, 0)*.

Questão 2

Determine para que valores de k real o sistema linear $\begin{cases} x-y+z=3 \\ x+ky+z=7 \\ x+ky=5 \end{cases}$ será possível e determinado.

A

$\{\forall k$ real, $k \neq 1\}$

B

$\{\forall k$ real, $k \neq 1$ e $k \neq -1\}$

C

$\{\forall k$ real, $k \neq 1$ e $k \neq 2\}$

D

$\{\forall k$ real, $k \neq -11$ e $k \neq 2\}$

A alternativa B está correta.

Para o sistema ser possível e determinado, o determinante principal deve ser diferente de zero.

$$(\text{ delta })\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix}=k^2+0-1-k+k-0=k^2-1=0 \rightarrow k^2=1 \text{ ou } k=-1$$

$$(\text{ delta })\Delta \neq 0 \rightarrow k \neq -1 \quad e\, k \neq 1$$

Questão 3

Determine para que valores de k real o sistema linear $\begin{cases} x-y+z=3 \\ x+ky+z=7 \\ x+ky=5 \end{cases}$ será possível e indeterminado.

A

$k=-1$

B

$k=-5/3$

C

$k=5/3$

D

$k=1$

A alternativa D está correta.

Cálculo de Sistemas – regra de Cramer.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 4

Determine para que valores de k real o sistema linear $\left\{\begin{array}{c} x-y+z=3 \\ x+ky+z=7 \\ x+ky=5 \end{array}\right.$ será possível e impossível.

A

$k=-1$

B

$k=-5/3$

C

$k=-2/3$

D

$k=2$

A alternativa A está correta.

Para o sistema ser impossível, o determinante principal deve ser nulo.

$$(\text{ delta })\Delta=\left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & k \end{array}\right]=k^2+0-1-k+k-0=k^2-1=0 \rightarrow k^2=1 \text{ ou } k=-1$$

Mas todos os determinantes das variáveis devem também dar zero.

Mas todos os determinantes das variáveis devem também dar zero.

$$(\text{ delta })\Delta_x=\left[\begin{array}{ccc} 3 & -1 & 1 \\ 7 & k & 1 \\ 5 & 0 & k \end{array}\right]=3k^2+0-5-5k+7k-0=3k^2+2k-1=0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, $k=\frac{-2\pm\sqrt{4-\times(-5)\times 3}}{6}=\frac{-2\pm 8}{6}=\left\{\begin{array}{c} 1 \\ -5/3 \end{array}\right.$

$$(\text{ delta })\Delta_y=\left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & k \end{array}\right]=7k;+5+3-7-3k-5=4k-4=0 \rightarrow k=1$$

$$(\text{ delta })\Delta_z = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & k & 7 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5k + 0 - 7 - 3k + 5 + 0 = 2k - 2 = 0 \rightarrow k = 11$$

Como deve ter *(delta)Δ = 0* e pelo menos um dos *(delta)*Δ_x*, (delta)*Δ_y*, (delta)*Δ_z diferente de zero, então o valor será de *k = −1.*

Questão 5

Obtenha a solução do sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = -6 \end{cases}$

A

(x, y, z) = (3, 2, 1)

B

(x, y, z) = (−1, 3, 1)

C

(x, y, z) = (1, −2, −1)

D

(x, y, z) = (3, 0, 1)

A alternativa B está correta.

A matriz completa sera: $\begin{bmatrix} 2 & amp;1 & amp;-1 & amp;0 \\ 1 & amp;1 & amp;-1 & amp;1 \\ 1 & amp;-2 & amp;1 & amp;-6 \end{bmatrix}$. Ao escalonar a matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 - 2 \times 1 & 1 - 2 \times 1 & -1 - 2 \times (-1) & 0 - 2 \times 1 \\ 1 & -2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 + 3 \times 1 & 2 + 3 \times (-1) & -7 + 3 \times 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformando agora em escalonada reduzida:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1+1 & 1+1 \\ 0 & 1 & -1+1 & 2+1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-1 & 0-0 & 2-3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dessa forma, achamos o sistema equivalente: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

O exercício também poderia ter sido feito pela regra de Cramer.

Questão 6

Obtenha a solução do sistema $\begin{cases} x + y - z + w = 2 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2z + w = 2 \\ 3y + 2z + w = 1 \end{cases}$

A

(x, y, z, w) = (3, 2, 1, 0)

B

(x, y, z, w) = (−1, 2, −1, 0)

C

(x, y, z, w) = (2, −1, 1, 2)

D

(x, y, z, w) = (3, 0, 1, 1)

A alternativa C está correta.

Parabéns! Você entendeu o conceito da Eliminação de Gauss- Jordan.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Determine o valor de k , real, para que o sistema sistema 2d $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x+ky+3z=2 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ seja possível e determinado.

A

$\{k=-16/3\}$

B

$\{\forall k$ real, $k \neq -16/3\}$

C

$\{\forall k$ real, $k \neq 16/_3\}$

D

$\{\forall k$ real, $k \neq 16/3\}$

A alternativa B está correta.

Para o sistema ser possível e determinado, o determinante da matriz incompleta deve ser diferente de zero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & k & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times k \times 1 + (-1) \times 1 \times (-2) + 1 \times 1 \times 3 - 1 \times k \times (-1) - 1 \times 1 \times 1 - 2 =$$

(delta)Δ = 3k + 16 ≠ 0 → k ≠ - 16 / 3

Questão 2

Obtenha a solução do sistema $\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x+y-3z=5 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$

A

(x, y, z) = (3, 2, 1)

B

(x, y, z) = (−3, 2, −1)

C

(x, y, z) = (3, −2, 1)

D

(x, y, z) = (3, 0, 1)

A alternativa A está correta.

A matriz completa: $\begin{vmatrix} 1 & amp;1 & amp;-1 & amp;4 \\ 2 & amp;1 & amp;-3 & amp;5 \\ 1 & amp;-2 & amp;1 & amp;0 \end{vmatrix}$. Ao escalonar a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2-2\times 1 & 1-2\times 1 & -3-2\times(-1) & 5-2\times 4 \\ 1-1 & -2-1 & 1-(-1) & 0-4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3+3\times 1 & 2+3\times 1 & -4+3\times 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformando agora em escalonada reduzida:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1+1 & 4+1 \\ 0 & 1 & 1-1 & 3-1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

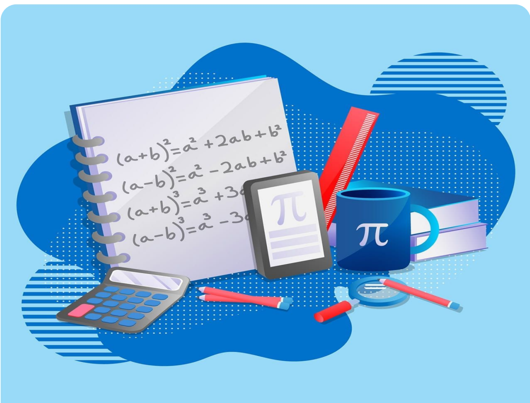
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & -0-0 & 5-2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dessa forma, achamos o sistema equivalente $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

0 exercicio também poderia ter sido feito pela regra de Cramer.

Introdução

Uma função que tem seu domínio e contradomínio em um Espaço Vetorial V e W, respectivamente, é denominada de Transformação de V em W. As transformações lineares serão uma transformação que atende as propriedades da Aditividade e da Homogeneidade.



Este módulo estudará essas transformações lineares no plano, isto é, no R^2 e suas interpretações geométricas.

Transformação Linear no Plano

Sejam V e W dois conjuntos, usaremos o símbolo $T : V \to W$ para representar uma função cuja entrada está no conjunto V e cujos valores (saídas) da função estão no conjunto W. Se v é um elemento de V, então $T(v) = w$ será a imagem de v obtida por meio da função T. V será domínio de T e W será o contradomínio de T.

Se V e W são espaços vetoriais, a função T será denominada de Transformação de V em W.

> Dentre as transformações de V em W, definimos as transformações lineares como uma transformação que possui as propriedades da aditividade e da homogeneidade.

Definição de Transformação Linear

Seja V e W dois espaços vetoriais, a transformação $T : V \to W$ será uma transformação linear se e somente se atender as seguintes propriedades:

Aditividade

Se u e v pertencem a V, então $T(u + v) = T(u) + T(v)$

Homogeneidade

Se v pertence a V e k é um real, então $T(kv) = kT(v)$

Em outras palavras, a transformação linear preserva a adição e a multiplicação por real.

Podemos combinar as duas propriedades em uma só afirmando que:

$T(au + bv) = aT(u) + bT(u)$, para qualquer a e b reais e u e $v \in V$

Uma primeira conclusão que pode ser tirada é que, se T é uma transformação linear, obrigatoriamente $T(0) = 0$, onde 0 é o elemento nulo de V . Se assim não fosse, T não conseguiria atender a propriedade da aditividade.

Quando $W = V$, a transformação linear é denominada de operador linear do espaço vetorial V .

As transformações lineares onde o espaço vetorial V é do tipo R^n e o espaço vetorial W é do tipo R^m podem ser representadas de uma forma matricial. Assim, a transformação $T(v) = w$ será uma função que associará um vetor do $R^n a$ um vetor $w = T(v)$ de R^m , podendo ser representada por $T(v) = Av$.

O vetor v terá dimensão de n e o vetor $w = T(v)$ terá dimensão de m , assim a matriz A terá tamanho mxn e será denominada de matriz canônica da transformação. A matriz A é uma matriz de elementos reais.

Exemplo

Seja T: a transformação linear tal que . Repare que a imagem de será o vetor do . Pode-se representar essa transformação linear pelas equações ou pela operação matricial onde .A matriz será a matriz canônica da transformação linear.

Transformação no Plano

Dentre as transformações lineares, este módulo estudará as transformações lineares que acontecem no plano, assim tanto o domínio da transformação como a imagem serão R^2 . Como já mencionado, analisaremos um operador linear no R^2 .

Portanto, $T : R^2 \rightarrow R^2$, onde $T(x, y) = (u, v)$ e terá uma matriz canônica de tamanho $2x2$.

Exemplo

1. Determine a imagem de $v(3, 5)$, obtida por meio da Transformação $T : R^2 \rightarrow R^2$, onde a Matriz canônica de T é dada por $\begin{bmatrix} 2 & amp;0 \\ 0 & amp;2 \end{bmatrix}$

Chave de resposta

$T(v) = A \times v = \begin{bmatrix} 2 & amp;0 \\ 0 & amp;2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & amp;2y \end{bmatrix}$

Assim, *T(3, 5) = (3×2, 2×5) = (6, 10).*

Atenção

Algumas transformações lineares no plano podem ser analisadas de uma forma geométrica. Por exemplo, a transformação linear apresentada no exemplo anterior é uma transformação de expansão. Em outras palavras, ela transforma o elemento de entrada em um elemento com comprimento duas vezes maior.

O exemplo a seguir apresenta um efeito dessa transformação.

Exemplo

2. Seja um triângulo no plano cartesiano com vértices nos pontos $A(0,0), B(1,0)$ e $C(0,1)$. Determine a área da figura formada pelo triângulo após aplicarmos o operador linear representado pela matriz canônica $\begin{bmatrix} 2 & amp;0 \\ 0 & amp;2 \end{bmatrix}$.

Solução

Ao analisarmos o triângulo original, iremos verificar que é um triângulo retângulo cuja área será $A = 1/2 \times 1 \times I = 1/2$.

Os pontos de coordenadas (x,y) podem ser analisados como extremidades de vetores que se iniciam em $(0,0)$ e terminam nesse ponto. Assim, ao aplicarmos a transformada, essas extremidades sofreram alteração.

Vamos determinar as imagens dos vértices pela transformação T .

$$T(\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0,0], T(\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [2,0], T(\overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0,2])))$$

Agora, o triângulo terá novos vértices em *(0, 0)*, *(2, 0)* e *(0, 2)*, tendo uma área dada por *½×2×2 = 2*.

> Repare que cada lado do triângulo foi dobrado, provocando um aumento de área em *4* vezes.

Portanto, é possível por meio de operadores lineares produzir transformações geométricas no plano. Podem ser citadas, por exemplo, as reflexões, as rotações, os cisalhamentos, bem como as contrações ou expansões.

O exemplo a seguir mostra uma rotação no plano gerada por uma transformação linear.

Exemplo

3. Seja $T : R^2 \to R^2$, tal que $T(u,v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{y}, \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{y}\right)$ determine a figura formada pela imagem do quadrado de vértices nos pontos $(1,1), (-1,1), (1,-1)$ e $(-1,-1)$.

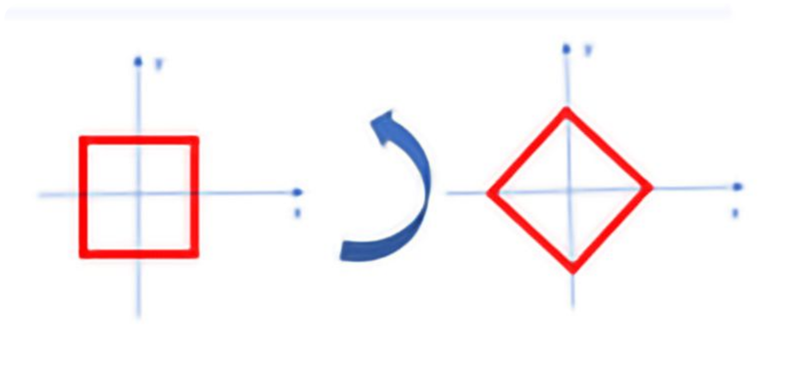
Solução

A matriz canônica será $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & amp; -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & amp; \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$. Dessa forma,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [0\sqrt{2}] \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Repare que o quadrado de lado *2* foi transformado em outro quadrado de lado *2*, porém rotacionado em relação ao eixo *x* por um ângulo de 45^o no sentido anti-horário.



Para você verificar que o lado do quadrado inclinado é do mesmo tamanho, basta fazer a distância entre dois vértices usando a fórmula da distância entre dois pontos e verificar que ainda vale *2*.

Um exemplo de aplicação da transformação de rotação seria transformar equações de figuras cônicas que fossem inclinadas em relação ao eixo x e y em equações canônicas sem termos retângulo, facilitando, assim, o cálculo dos elementos da figura geométrica.

Exemplos de transformações lineares no plano e sua propriedade geométrica

a) Rotação Anti-horária de um ângulo (theta) Θ

$$\begin{bmatrix} \cos(\Theta) & -\operatorname{sen}(\Theta) \\ \operatorname{sen}(\Theta) & \cos(\Theta) \end{bmatrix}$$

b) Rotação horária de um ângulo (theta) Θ

$$\begin{bmatrix} \cos(\Theta) & \operatorname{sen}(\Theta) \\ -\operatorname{sen}(\Theta) & \cos(\Theta) \end{bmatrix}$$

c) Reflexão em relação à origem: *(x, y) → (−x, −y)*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d) Reflexão em relação ao eixo *x*: *(x, y) → (x, −y)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e) Reflexão em relação ao eixo *y*: *(x, y) → (−x, y)*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f) Reflexão em relação à reta *x = y*: *(x, y) → (x, y)*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

g) Reflexão em relação à reta *x = −y*: *(x, y) → (−y, −x)*

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

h) Expansão ou Contração por *k* real *(k ≠ 0): (x, y) → (kx, ky)*

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Obs.: se $|k| gt; 1$: expansão e se $0 lt; |k| lt; 1$: contração

Se $|k| lt; 1$: além de contrair/expandir, o elemento será refletido em relação à origem

i) Expansão ou Contração por *k* real *(k ≠ 0)* no sentido de x: *(x, y) → (kx, y)*

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obs.: se $|k|gt;1$: expansão e se $0lt;|k|lt;1$: contração

Se $|k|lt;1$: além de contrair/expandir, o elemento será refletido em relação ao eixo y

j) Expansão ou Contração por *k* real *(k ≠ 0)* no sentido de y: *(x, y) → (x, ky)*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Obs.: se $|k|gt;1$: expansão e se $0lt;|k|lt;1$: contração

Se $|k|lt;1$: além de contrair/expandir, o elemento será refletido em relação ao eixo x

k) Cisalhamento Horizontal com *k* real *(k ≠ 0): (x, y) → (x + ky, y)*

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obs.: Se *k > 1:*, o deslocamento será no sentido do *x* e se *k < 0*, o deslocamento será no sentido negativo de *x*.

l) Cisalhamento Vertical com *k* real *(k ≠ 0): (x, y) → (x, y + kx)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

Obs.: Se *k > 1:*, o deslocamento será no sentido do *y* e se *k < 0*, o deslocamento será no sentido negativo de *y*.

Transformações Ortogonais

Pela teoria de matrizes, uma matriz será ortogonal quando a inversa da matriz é igual à sua transposta.

> Quando a matriz canônica de uma transformada linear for ortogonal, diz-se que a Transformação linear é ortogonal.

As transformações ortogonais têm uma propriedade importante, pois mantêm os comprimentos e ângulos entre os elementos transformados. Essa propriedade tem grandes aplicações, pois não distorce a figura plana que está sendo transformada.

Veja os exemplos anteriores. A matriz canônica $\begin{bmatrix} 2 & amp;0 \\ 0 & amp;2 \end{bmatrix}$ não é ortogonal e provocou, após a sua aplicação, uma alteração no tamanho da figura (triângulo), não mantendo os comprimentos. De forma contrária, a matriz $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & amp;-\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & amp;\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ é ortogonal, pois sua inversa é igual a sua transposta.

Repare que mesmo com a rotação os comprimentos, distâncias e ângulos foram mantidos.

Dica

Uma dica importante para relembramos é que o determinante de uma matriz ortogonal é igual a ±1
Assim, se a matriz tiver determinante diferente disso, não será ortogonal.

Teoria na prática

Um programador precisa criar um programa que altere uma figura plana. O programa precisa rodar uma figura de 30° no sentido horário e depois ampliá-la por 3 , na direção horizontal. Determine a matriz da transformação linear que realiza simultaneamente estas operações.

Chave de resposta

Transformação Linear no Plano

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na Massa

Questão 1

Marque a alternativa que apresenta a imagem do vetor *(3, 5)* pela transformação *T: R² → R²* tal que *T(x, y) = (y, y – x)*.

A

(5, 2)

B

(2, 5)

C

(4, 1)

D

(1, 4)

A alternativa A está correta.

$T(u)=\begin{bmatrix} 0 & amp;1 \\ -1 & amp;1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Assim,

$$T(3,5)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = [5(-3+5)] = \begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Questão 2

A imagem do vetor $(1,2)$ em relação à transformada T de matriz canônica $\begin{bmatrix} 1 & amp;k \\ -1 & amp;2 \end{bmatrix}$ vale $(3,3)$. Obtenha o valor de k real.

A

0

B

1

C

2

D

3

A alternativa B está correta.

$T(u)=\begin{bmatrix} 1 & amp;k \\ -1 & amp;2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Assim,

$$T(3,5) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1 + 2k(-1+4)] = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Logo, *1+2k = 3 → 2k = 2 → k = 1*

Questão 3

Assinale a alternativa que apresenta uma transformação linear $T : R^2 \to R^2$ ortogonal.

A

$T(x,y) = (-1/2x + \sqrt{3}/2y, \sqrt{3}/2x)$

B

$T(x,y) = (x+y, x)$

C

$T(x,y) = (1/2x - \sqrt{3}/2y, \sqrt{3}/2x + 1/2y)$

D

$T(x,y) = (2x, 3y)$

A alternativa C está correta.

As alternativas a e d apresentam matrizes canônicas com determinantes diferentes de *±1*, assim estas *TL* não são ortogonais.

Repare que a alternativa b não é uma matriz ortogonal, pois sua transposta é diferente de sua matriz inversa.

A alternativa c é a única que apresenta uma matriz canônica ortogonal, pois:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \to A^T = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \overset{1}{ab} - bc \times \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \frac{1}{(1/4)-(-3/4)} \times \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = A^T$$

Assim, $T(x,y) = (1/2x - \sqrt{3}/2y, \sqrt{3}/2x + 1/2y)$ é a única transformação ortogonal.

Questão 4

Marque a alternativa que apresenta o módulo da imagem do vetor $(1,1)$ via operador linear com matriz canônica $\begin{bmatrix} 1/2 & amp; \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & amp; 1/2 \end{bmatrix}$

A

1

B

$\sqrt{2}$

C

$\sqrt{3}$

D

2

A alternativa B está correta.

$T(u)=\begin{bmatrix} 1/2 & amp;\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & amp;1/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Assim,

$$T(1,1)=\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$T(1,1)| = \left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{-1/2} = \sqrt{2}$$

Essa é uma solução mais rápida, pois, como a matriz canônica é ortogonal e a *TL* é ortogonal, não se alteram os comprimentos. Assim, o módulo se mantém e vale $(1^2 + 1^2)^{-1/2} = \sqrt{2}$

Questão 5

Aplica-se a um retângulo de vértices $(3,2),(-3,2),(-3,-2)$ e $(3,-2)$, uma transformação linear $T: R^2 \to R^2$ tal que $T(u,v) = (1/2u + \sqrt{3}/2v, -\sqrt{3}/2u + 1/2v$. Marque a alternativa que apresenta a imagem do retângulo após a sua transformação por T.

A

Um retângulo com mesmo tamanho de lados, porém rotacionado 30^o, no sentido horário, em relação ao original.

B

Um retângulo com tamanho de lados alterado, porém rotacionado 30^o, no sentido anti-horário, em relação ao original.

C

Um retângulo com mesmo tamanho de lados, porém rotacionado 60^o, no sentido anti-horário, em relação ao original.

D

Um retângulo com tamanho de lados alterado, porém rotacionado 60^o, no sentido horário, em relação ao original.

A alternativa D está correta.

Transformação Linear no Plano

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Uma transformação linear T é aplicada a um quadrado centrado na origem, com lados paralelos ao eixo e de lado 2. Sabe-se que essa transformação linear T tem uma matriz canônica $\begin{bmatrix} 1 & amp;4 \\ 0 & amp;1 \end{bmatrix}$
Marque a alternativa que representa a imagem obtida pela aplicação de T no referido quadrado.

A

Um retângulo

B

Um quadrado

C

Um paralelogramo

D

Um triângulo

A alternativa C está correta.

Transformação Linear no Plano.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Uma transformação linear *T: R² → R²* tal que *T(x, y) = (3x − y, x + 2y)*. Determine a imagem *T(u)*, com *u* igual a *(7, 1)*.

A

(8, 12)

B

(9, 20)

C

(20, 9)

D

(12, 8)

A alternativa C está correta.

$T(u)=\left[\begin{array}{cc} 3 & amp;-1 \\ 1 & amp;2 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right]$

Assim,

$$T(7,1)=\left[\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{array}\right] \times \left[\begin{array}{c} 7 \\ 1 \end{array}\right]=[(3 \times 7)-(1 \times 1) 1 \times 7+2 \times 1]=[209]$$

Questão 2

Uma transformação linear T é aplicada a um retângulo de lados $(1,2),(1,4),(2,2)$ e $(2,4)$. Sabe-se que essa transformação linear T é de cisalhamento vertical, possuindo uma matriz canônica $\left[\begin{array}{cc} 1 & amp;0 \\ 3 & amp;1 \end{array}\right]$. Marque a alternativa que representa a imagem obtida pela aplicação de T no referido retângulo.

A

Um retângulo

B

Um quadrado

C

Um paralelogramo

D

Um triângulo

A alternativa C está correta.

$$T(v) = \begin{bmatrix} 1 & amp;0 \\ 3 & amp;1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Assim,

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } T(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix} T(C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \text{e} T(Q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Portanto, a nova figura formada será um paralelogramo.

Introdução

Este módulo apresenta o conceito de autovalor e autovetor e suas aplicações nas teorias matriciais.

O conceito de autovalores e autovetores está associado a uma transformação linear ou a uma matriz. O autovetor será o vetor que tem a propriedade de, ao ser multiplicado pela matriz, ter como resultado ele mesmo vezes um número real, que será denominado de autovalor.

Autovalor e autovetor

Seja T uma Transformação Linear, diz-se que um vetor w não nulo é um autovetor da transformação T se existir (lambda) $\lambda \in R$ tal que $T(w) = (lambda)\lambda w$

O número real (lambda) λ relacionado ao autovetor w é denominado de autovalor de T associado ao autovetor w.

Atenção

Cuidado, normalmente cada autovalor está associado a um conjunto de autovetores e não apenas a um autovetor.

Como a transformada T está associada a uma matriz canônica A, então os autovetores e autovalores também podem ser associadas a uma matriz A, tal que $Aw = (lambda)\lambda w, \text{com } w$ vetor não nulo.

Exemplo

1. Seja a transformação linear $T: \mathrm{R}^2 \rightarrow \mathrm{R}^2$ definida por $T(x, y) = (y, 9x)$, para $(x, y) \neq (0, 0)$. Determine os autovetores e autovalores associados da transformação T.

Solução

Se w é autovetor de T, então $T(w) = (lambda)\lambda w, (lambda)\lambda$ real.

$$\begin{cases} (\text{ lambda})\ \lambda x = y \\ (\text{lambda})\ \lambda y = 9x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (\text{ lambda})\ \lambda x - y = 0 \\ (\text{lambda})\ \lambda y - 9x = 0 \end{cases}$$

Como esse sistema é homogêneo, para ter uma solução além da solução trivial *(0, 0)*, o determinante incompleto do sistema deve ser nulo.

$$\begin{vmatrix} (lambda)\lambda & - \\ -9 & (lambda)\lambda \end{vmatrix} = (\text{ lambda })\lambda \times (\text{ lambda })\lambda - (-1) \times (-9) = (lambda)\lambda^2 - 9 = 0 \rightarrow = \pm 3$$

$$\text{Se } (\text{lambda})\lambda = 3 \rightarrow \begin{cases} 3x = y \\ 3y = 9x \end{cases} \rightarrow y = 3x \rightarrow w(x,y) = (a, 3a), \text{ com } a \text{ real.}$$

$$\text{Se } (lambda)\lambda = -3 \rightarrow \begin{cases} -3x = y \\ -3y = 9x \end{cases} \rightarrow y = -3x \rightarrow w(x,y) = (a, -3a), \text{ com } a \text{ real.}$$

Assim, a transformada *T* tem, por exemplo, os autovetores *w = (1, 3)* associados ao autovalor *3*, e o autovetor *w = (1, −3)* associado ao autovalor *−3*.

Polinômio Característico

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, diz-se que polinômio característico de A é um polinômio tal que $P_A((ambda)\lambda) = \det(A - (lambda)\lambda I)$, onde I é a matriz identidade de ordem n.

Exemplo

2. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & amp; 2 \\ 3 & amp; -1 \end{bmatrix}$, determine o polinômio característico da matriz A.

Solução

$$P_A((lambda)\lambda) = \det(A - (\text{ lambda })\lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - (lambda)\lambda & 2 \\ 2 & -1 - (lambda)\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1 - (lambda)\lambda) \times (-1 - (lambda)\lambda) - 2 \times 2 = -1 - (\text{ lambda })\lambda + (lambda)\lambda + (\text{ lambda })\lambda^2 - 4$$
$$P_A((lambda)\lambda) = (lambda)\lambda^2 - 5$$

O polinômio característico é importante, pois é por ele que é possível obter os autovalores de uma matriz *A*.

Um número real (lambda) λ só será autovalor da matriz A se for raiz do polinômio característico de A, isto é, $P_A((lambda)\lambda) = 0$.

A demonstração disso é simples, pois se $P_A((\text{lambda})\lambda) = 0 = \det(A - (lambda)\lambda I)$.

Assim, $(A - (lambda)\lambda I)w = 0$, para todo w não nulo, logo $Aw - (lambda)\lambda Iw = 0 \rightarrow Aw - (lambda)\lambda w = 0$

Então, $Aw = (lambda)\lambda w$, portanto w é autovetor de A.

Existem algumas aplicações dos autovalores na teoria de matrizes:

Primeira
Se $(lambda)\lambda_1, (lambda)\lambda_2, \ldots, (lambda)\lambda_n$ são autovalores da matriz A então $\det(A) = (lambda)\lambda_1 \times (lambda)\lambda_2 \times \ldots \times (lambda)\lambda_n$

Segunda
Se $(lambda)\lambda_1, (lambda)\lambda_2, \ldots, (lambda)\lambda_n$ são autovalores da matriz A então traço de $(A) = (lambda)\lambda_1 + (lambda)\lambda_2 + \ldots + (lambda)\lambda_n$

Terceira
Se a matriz A for uma matriz diagonal ou triangular (superior ou inferior), os autovalores de A são, então, os elementos de sua diagonal principal.

Quarta
Uma matriz só vai ser invertível se $(\mathrm{lambda})\lambda = 0$ não for um de seus autovalores.

Teoria na prática

Uma forma de achar a solução de um sistema linear com matriz canônica A é resolver o sistema $Ax = b$ pela solução $x = A^{-1}b$, onde b é a matriz de termos independentes. Um sistema linear tem matriz canônica dada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & amp; 0 & amp; 1 \\ 0 & amp; 1 & amp; 1 \\ 1 & amp; 1 & amp; 2 \end{bmatrix}$. Verifique se a matriz A apresenta matriz inversa por meio da análise de seus autovalores para buscar a solução do sistema.

Chave de resposta

Autovalores e Autovetores

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na Massa

Questão 1

Marque a alternativa que apresenta o polinômio característico na matriz relacionada ao sistema linear
$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4y + 3x = 7 \end{cases}$

A

2(lambda)λ + 3

B

(lambda)λ² + 8(lambda)λ + 1

C

(lambda)λ² − 6(lambda)λ + 11

D

(lambda)λ² + 6(lambda)λ + 4

A alternativa C está correta.

A matriz referente ao sistema vale $\begin{bmatrix} 2 & amp;-1 \\ 3 & amp;4 \end{bmatrix}$

Seu polinômio característico é obtido por $P_A(\lambda(lambda)) = \det(A - \&kambda;(lambda) \times I)$.

Assim,

$$P_A(\lambda(lambda)) = \begin{vmatrix} 2-\lambda(lambda) & -1 \\ 3 & 4-\lambda(lambda) \end{vmatrix} \rightarrow P_a(\lambda(lambda)) = (2-\lambda(lambda)) \times (4-\lambda(lambda)) - (-1) \times 3 = 8 - 2\lambda(lambda) - 4\lambda(lambda) + (lambda)\lambda^2 + 3.$$

Logo, P_A*(λ(lambda)) = (lambda)λ² − 6λ(lambda) + 11*

Questão 2

Seja $w(3,6,3)$ um autovetor da transformação linear com matriz canônica $\begin{bmatrix} 4 & amp;0 & amp;1 \\ 2 & amp;3 & amp;2 \\ 1 & amp;0 & amp;4 \end{bmatrix}$. Determine o seu autovalor correspondente.

A

5

B

4

C

3

D

2

A alternativa A está correta.

Se *w* e autovalor de *T*, então *T(w) = (lambda)λw*

Assim,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} w = (lambda)\lambda w \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = (lambda)\lambda \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4 \times 3 + 0 \times 6 + 1 \times 3 = 3\lambda(\text{ lambda }) \\ 2 \times 3 + 3 \times 6 + 2 \times 3 = 6\lambda(\text{ lambda }) \\ 1 \times 3 + 0 \times 6 + 4 \times 3 = 3\lambda(\text{ lambda }) \end{cases}$$

Questão 3

Uma matriz 2×2 apresenta traço igual a 4 e determinante igual a -5. Se $(\text{lambda})\lambda_1\text{e}(\text{lambda})\lambda_2$ são os autovalores desta matriz, com (lambda) $\lambda_1 gt; (lambda)\lambda_2$, determine $2(lambda)\lambda_1 - (lambda)\lambda_2$.

A

9

B

11

C

13

D

15

A alternativa B está correta.

Se a matriz é *2 × 2*, ela possui *2* autovalores. Como o traço vale *4*, a soma dos autovalores vale *4* e como o determinante vale *−5*, o produto dos autovalores vale *−5*.

$$\begin{cases} (lambda)\lambda_1 + (lambda)\lambda_2 = 4 \\ (lambda)\lambda_1 \times (lambda)\lambda_2 = -5 \end{cases} \rightarrow (lambda)\lambda_1 = -\frac{5}{(lambda)\lambda_1} = 4 \rightarrow (lambda)\lambda_1^2 - 5 = 4(\text{lambda})\lambda_I \rightarrow (\text{lambda})\lambda_I^2 - 4(\text{lambda})\lambda_I - 5 = 0$$

$$\Big(\text{ lambda) } \lambda_I = \frac{4 \pm \sqrt{}(16+20)}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

$\text{Se}(lambda)\lambda_1 = 5 \rightarrow (lambda)\lambda_2 = \frac{\frac{-5}{5}}{(lambda)\lambda_1} = \frac{-5}{5} = -1$ e $(lambda)\lambda_2 = -1 \rightarrow (lambda)\lambda_2 = \frac{-5}{(lambda)\lambda_1} = \frac{-5}{-1} = 5$

$\text{Como } (lambda)\lambda_1 gt; (lambda)\lambda_2 \rightarrow (lambda)\lambda_1 = 5\text{e}(lambda)\lambda_2 = -1$.

Assim, $2(lambda)\lambda_1 - (lambda)\lambda_2 = 10 - (-1) = 11$.

A única alternativa que tem um autovetor é a letra b.

Questão 4

Marque alternativa que apresenta um autovetor da matriz $\begin{bmatrix} 2 & amp;4 \\ 4 & amp;2 \end{bmatrix}$.

A

(3, 0)

B

(1, 2)

C

(−2, 2)

D

(0, 3)

A alternativa C está correta.

Se *w* e autovalor de *T*, então *T(w) = λ(lambda)w*.

Vamos obter os autovalores da matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda(lambda) & 4 \\ 4 & 2 - \lambda(lambda) \end{vmatrix} = (2 - \lambda(lambda)) \times (2 - \lambda(lambda)) - 16 = 0 \rightarrow 4 - 4\lambda(lambda) + (lambda)\lambda^2 - 16 = 0(lambda)\lambda^2 - 4\lambda(lambda) - 12 = 0 \rightarrow \lambda(lambda) = \frac{4 \pm \sqrt{}(16+48)}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} 6 \\ -2 \end{cases}$$

Assim, os autovalores são *6* e *−2*.

Para *λ(lambda) = 6*,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 6x \\ 4x + 2y = 6y \end{cases} \rightarrow 4x = 4y \rightarrow x = y$$

Portanto, qualquer vetor do tipo *(k, k)*, *k* real, é um autovetor associado ao autovalor 6.

Para *λ(lambda) = −2*,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = -2x \\ 4x + 2y = -2y \end{cases} \rightarrow x = -y$$

Assim, qualquer vetor do tipo *(k, −k)*, *k* real, é um autovetor associado ao autovalor *−2*.

A única alternativa que tem um autovetor é a letra c.

Questão 5

Marque alternativa que apresenta um autovetor e seu autovalor associado, respectivamente, para a transformação linear $\begin{cases} 4x - y = 9 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$

A

(1, 1) e 2

B

(4, 4) e 3

C

(2, 1) e 3

D

(1, 2) e 2

A alternativa B está correta.

Autovalores e Autovetores

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Marque a alternativa que apresenta um autovetor e seu autovalor associado, respectivamente, para a transformação linear $\left\{\begin{array}{c} x+y-2z=-2 \\ x-2y+z=1 \\ -2x+y+z=1 \end{array}\right.$

A

(2, 1, 2) e 0

B

(−2, 0, −2) e −3

C

(2, 2, 2) e 3

D

(2, 0, −2) e 3

A alternativa D está correta.

Veja!

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Seja $w(2, 2, 2)$ um autovetor da transformação linear com matriz canônica $\begin{bmatrix} -1 & amp;2 & amp;-1 \\ -1 & amp;-1 & amp;2 \\ 2 & amp;-1 & amp;-1 \end{bmatrix}$

Determine o seu autovalor correspondente.

A

3

B

2

C

1

D

0

A alternativa D está correta.

Se *w* e autovalor de *T*, então *T(w) = (lambda)λw*.

Assim,

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} w = (ambda)\lambda w \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = (lambda)\lambda \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (-1) \times 2 + 2 \times 2 + (-1) \times 2 = 2\lambda(lambda) \\ (-1) \times 2 + (-1) \times 2 + 2 \times 2 = 2\lambda(\text{ lambda}) \rightarrow (lambda)\lambda = 0 \\ 2 \times 2 + (-1) \times 2 + (-1) \times 2 = 2\lambda(\text{ lambda }) \end{cases}$$

Questão 2

Marque alternativa que apresenta um autovetor da matriz $\begin{bmatrix} 6 & amp;0 \\ 16 & amp;-2 \end{bmatrix}$

A

(3, 0)

B

(1, 2)

C

(4, 2)

D

(3, 3)

A alternativa C está correta.

Se *w* e autovalor de *T*, então *T(w) = (lambda)λw*.

Vamos obter os autovalores da matriz:

$$\begin{vmatrix} 6-(lambda)\lambda & 0 \\ 16 & -2-(lambda)\lambda \end{vmatrix} = (6-(lambda)\lambda)\times(-2-(lambda)\lambda)+0=0 \rightarrow (6-(lambda)\lambda)\times((lambda)\lambda+2)=0$$

Os autovalores são *6 e −2*.

Para *(lambda)λ = −2*,

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6x=-2x \\ 16x-2y=-2y \end{cases} \rightarrow x=0 \text{ e } \forall y$$

Assim, qualquer vetor do tipo *(0 , k)*, com *k* real, é um autovetor associado ao autovalor *−2*.

Não existe nenhuma alternativa com autovetor do tipo *(0, k)*, com *k* real.

Para *(lambda)λ = 6*,

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6 \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6x=6x \\ 16x-2y=6y \end{cases} \rightarrow 16x=8y \rightarrow 2x=y$$

Assim, qualquer vetor do tipo $(2k, k)$, com k real, é um autovetor associado ao autovalor σ.

A única alternativa que tem vetor do tipo $(2k, k)$ é a letra c.

Portanto, a resposta é o autovetor $(4, 2)$ associado ao autovalor 6, letra c.

Considerações finais

Ao longo dos quatro módulos foi apresentado o conceito de sistemas lineares e de transformações lineares.

Nos dois primeiros módulos, foi definido e classificado um sistema linear e foram apresentados métodos de resolução para um sistema.

No terceiro módulo, foi estudada a transformação linear no plano e analisada a sua visualização geométrica com diversas aplicações práticas.

Por fim, os conceitos de autovalor e autovetor de uma matriz ou de uma transformação foram analisado.

Explore+

Pesquise mais sobre sistemas lineares e transformações lineares nas obras das nossas referências.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

APOSTOL, T. M. **Cálculo**, Volume 1. 1 ed. Barcelona: Editorial Reverte SA, 1985.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Linear Algebra**. 2 ed. Nova Jersey: Prentice-Hall, 1971.