Módulo 1

Mão na massa

Questão 1

A alternativa C está correta.

Comentário:

Experimentando:

	Conta desejada	Resultado
1	$(\mathbf{1} \times 2 \times 3 \times 4) + 1$	$= 25$
2	$(\mathbf{2} \times 3 \times 4 \times 5) + 1$	$= 121$
3	$(\mathbf{3} \times 4 \times 5 \times 6) + 1$	$= 361$
4	$(\mathbf{4} \times 5 \times 6 \times 7) + 1$	$= 841$
...		

Parece que os resultados serão sempre quadrados perfeitos. Verifique. Se começarmos o produto com o valor $\mathbf{n}$, o resultado será o quadrado de quem? Ou seja, 841 é o quadrado de 29, mas qual seria a relação entre o 4 (o primeiro fator da multiplicação) e o 29?

Veremos uma solução utilizando apenas o algebrismo, mas o desafiamos a também fazer sua demonstração por indução.

Lembremos inicialmente um produto notável bem básico:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Analisemos então o produto de quatro números naturais consecutivos, começando em n:

$P = n(n+1)(n+2)(n+3)$

$P = [n(n+3] \times [(n+1)(n+2)]$

$P = [n^2 + 3n] \times [n^2 + 3n + 2]$

Agora falará a voz da experiência. As duas expressões multiplicadas diferem de duas unidades. Desse modo, podemos reescrever P da seguinte forma:

$P = \{[\mathbf{n^2 + 3n + 1}] - \mathbf{1}\} \times \{[\mathbf{n^2 + 3n + 1}] + \mathbf{1}\} = (a - b)(a + b)$

Sendo assim, podemos aplicar o produto notável mencionado:

$P = a^2 - b^2 = [\mathbf{n^2 + 3n + 1}]^{\mathbf{2}} - \mathbf{1^2}$

$P = [\mathbf{n^2 + 3n + 1}]^{\mathbf{2}} - \mathbf{1}$

Assim, somando 1 a esse produto, obtemos o quadrado de $n^2 + 3n + 1$! Ou seja, de fato, o produto de quatro números naturais consecutivos é um quadrado perfeito (na verdade, esse resultado vale para quatro números inteiros quaisquer, isto é, eles podem ser negativos, e não apenas para números naturais).

Então, olhando a tabela anterior, dá para perceber que, em cada caso, o valor obtido na última coluna é exatamente o quadrado de $n^2 + 3n + 1$?

Questão 2

A alternativa E está correta.

Comentário:

O enésimo número par positivo é claramente $2n$. Note que o primeiro número par positivo é 2; o seguinte, 4. Assim, de dois em dois, fica claro que o enésimo par positivo é o dobro da ordem desse par: o décimo número par, portanto, é 20. Como o enésimo ímpar é o número natural anterior ao enésimo par, seu valor, assim, é $2n - 1$.

Questão 3

A alternativa D está correta.

Comentário:

Podemos analisar a situação para valores pequenos de n com o objetivo de tentar inferir alguma lei de formação. A partir de uma eventual descoberta, podemos prová-la efetivamente, a título de exemplo, por meio do princípio da indução.

N	Soma desejada	Resultado
$\mathbf{1}$	1	$= 1$
$\mathbf{2}$	$1 + 3$	$= 4$
$\mathbf{3}$	$1 + 3 + 5$	$= 9$
$\mathbf{4}$	$1 + 3 + 5 + 7$	$= 16$

Parece natural desconfiar que a terceira coluna deve corresponder ao quadrado da primeira, ou seja, n^2. Mas é necessário provar que essa relação, verificada apenas para alguns valores de n, vale efetivamente em geral.

Vejamos como podemos usar o princípio da indução.

- **Passo da base da indução:** Mostrar que a expressão $s(n) = n^2$ vale para $n = 1$. Trivial, pois $1^2 = 1$.
- **Passo da indução propriamente dita:** Assumir que, para um valor arbitrário de **k** (natural), a soma $\mathbf{s(k)}$ dos $\mathbf{k}$ primeiros ímpares positivos é igual a $\mathbf{k^2}$ e, com essa premissa, provar que a soma $\mathbf{s(k+1)}$ dos $\mathbf{k+1}$ ímpares positivos vale $(\mathbf{k+1})^{\mathbf{2}}$.

Analisemos agora a soma dos k+1 ímpares positivos. Vejamos:

O ímpar positivo de ordem k vale $2k - 1$ e o ímpar positivo de ordem $k + 1$, $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$, isto é, o dobro de sua ordem menos 1. Sendo assim, a soma dos k+1 primeiros ímpares positivos vale:

$$s(k+1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k+1) \ + (2k+1)$$

$$s(k+1) = [1 + 3 + 5 + \cdots + (2k+1)] + (2k+1)$$

$s(k+1) =$ [soma dos k primeiros ímpares positivos] $+(2k+1)$

Mas a soma dos k primeiros ímpares positivos foi suposta pela premissa da hipótese da indução propriamente dita (que vale k^2). Logo:

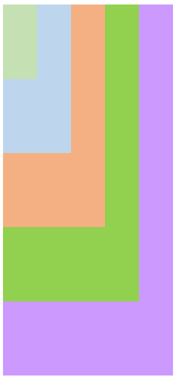
$$s(k+1) = k^2 + (2k+1)$$

Mas $k^2 + 2k + 1$ é nada mais, nada menos, que o quadrado de $k+1$. Assim:

$$s(k+1) = (k+1)^2$$

Mostramos, assim, que, se a soma dos k primeiros ímpares positivos vale o quadrado de k, então a soma dos $k+1$ vale $(k+1)^2$. Dessa forma, a demonstração por indução está completada.

Você percebe que a imagem a seguir mostra uma solução geométrica para o fato de a soma dos $\mathbf{n}$ primeiros ímpares positivos ser n^2? Observe-a atentamente:



Carlos Eddy Esaguy Nehab

Questão 4

A alternativa A está correta.

Comentário:

Tentemos inicialmente obter alguma lei de formação:

n	Soma desejada	Resultado
1	$\frac{1}{1\times 2}$	$=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$
2	$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}$	$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}$
3	$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}$	$=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=\frac{3}{3+1}$
4	$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}$	$=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}=\frac{4}{4+1}$

Parece que a soma de n parcelas da soma desejada vale $\frac{n}{n+1}$. Experimente provar essa relação por indução. Porém, mais uma vez, a experiência com algebrismos básicos pode justificar, de forma mais rápida, a expressão candidata $\frac{n}{n+1}$.

Veja:

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

...

$$\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Se somarmos as linhas anteriores, sobrarão do lado direito apenas as parcelas 1 e $-\frac{1}{n+1}$, cuja soma vale exatamente o resultado desejado, isto é, $\frac{n}{n+1}$.

Questão 5

A alternativa A está correta.

Comentário:
É importante ressaltar que o uso da indução pressupõe uma sentença (propriedade) que depende de uma variável (que seja um inteiro) que não se encaixa nesse problema. Só que não existe variável nela.

Além disso, em geral, problemas que envolvem a soma de infinitas parcelas pressupõem um mínimo de intimidade com o infinito (porém, se há mais de um, qual deles?). Outra opção é usar algum artifício – como o utilizado no estudo de progressões geométricas infinitas – e de razão menor do que 1 em módulo, ou seja, com sequências limitadas.

Nosso exercício pretende provocar você para essas questões e mostrar um artifício simples, que, mesmo precisando ser justificado com mais detalhes, constitui uma técnica usual, inclusive para obter frações associadas às famosas dízimas periódicas.

Vamos então assumir que essa soma de fato exista e que possamos escrever:

S = $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{1024} + \cdots$

Será que podemos multiplicar ambos os membros da igualdade por 2?

2S = $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{512} + \cdots$

Mais uma vez, eis a voz da experiência: que tal subtrair as duas expressões calculando $2S - S$? Será que podemos fazer isso? Anulam-se quase todas as parcelas, sobrando apenas $2S - S = 1$?

Desse modo, obteríamos $S = 1$, mas sob uma condição: que, de fato, a soma faça sentido e possa ser calculada, que foi, aliás, nossa premissa (e, que, na verdade é possível provar).

Achou esquisita a observação anterior? Então use o mesmo "raciocínio" para calcular $S = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$

Vejamos: multiplique S por 2:

$2S = 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots$

Com isso, $2S - S = 2$. Logo, S seria igual a 2, o que não faz nenhum sentido, concorda? Mas onde reside o erro desse raciocínio?

No fato de que assumimos que a soma S, nesse segundo exemplo, exista, o que não é verdade. No caso anterior, ela realmente existe e o raciocínio desenvolvido nele pode ser justificado. Só que agora isso não é possível, pois S cresce indefinidamente e não há nenhum número que essa soma represente!

Questão 6

A alternativa C está correta.

Comentário: Assista ao vídeo para conferir a resolução da questão.

Teoria na Prática

Comentário: Assista ao vídeo para conferir a resolução da questão.

Verificando o aprendizado

Questão 1

A alternativa E está correta.

Comentário:
Se a soma dos n primeiros números naturais é dada pela expressão $n(n + 1)/2$ (veja exemplo anterior), então a soma desejada é o quádruplo desse valor!

Questão 2

A alternativa A está correta.

Comentário:

- Afirmativa 1: verdadeiro. Todos os $\mathrm{A_k}$ são conjuntos finitos;
- Afirmativa 2: falso. Possuir apenas números ímpares é obviamente impossível. Ter apenas números pares, por outro lado, seria possível se, por exemplo, $\mathrm{A_0}$ fosse constituído pelos naturais 2 e 4;
- Afirmativa 3: verdadeiro. Ela será, de fato, se $\mathrm{A_0}$ contiver 19 e 38;
- Afirmativa 4: falso. Por exemplo, se $\mathrm{A_0} = \{1; 2\}$, então $\mathrm{A_2} = \{4; 5; 6; 7; 8\}$.

É divertido analisar também se algum $\mathrm{A_k}$ pode possuir seis elementos. Tente fazer isso!

Módulo 2

Mão na massa

Questão 1

Parabéns! A alternativa D está correta.

Comentário:
Como há 12 signos diferentes, associando cada casa de pombos a um signo, são necessárias pelo menos 13 pessoas (pombos) para que duas possuam o mesmo signo (estejam na mesma casa).

Questão 2

Parabéns! A alternativa **E** está correta.

Comentário:
Naturalmente, é possível resolver esse problema sem usar, de forma direta, o princípio da casa dos pombos. Imaginemos duas caixas, uma azul e outra verde. Retirando uma a uma as bolas do saco, perceba em que momento você pode garantir que não há alternativa a não ser colocar duas bolas na caixa azul: certamente quando todas as bolas verdes estiverem na caixa verde! Sendo assim, é necessário retirar um mínimo de 32 bolas.

Questão 3

A alternativa D está cor

Comentário:
Imaginemos 12 casas representando os 12 meses do ano. Para preencher as casas com pessoas, em que momento garantimos que haverá pelo menos 3 pessoas em

uma mesma casa? Naturalmente, após o momento em que cada caixa possui exatamente 2 pessoas. Com isso, a 25ª pessoa necessariamente se juntará a duas em uma mesma casa!

Questão 4

A alternativa D está correta.

Comentário:
Pode-se dar o azar de selecionar inicialmente apenas cartas com figuras: **ás**, **K** (rei), **Q** (dama) ou **J** (valete). Além disso, existem 16 dessas cartas - e uma de cada naipe! Necessariamente, a próxima carta será numérica e com determinado naipe. Como há apenas 4 naipes, necessariamente uma das próximas 4 cartas será numérica e do mesmo naipe que a 17ª carta selecionada. Ou seja, é preciso selecionar, no mínimo, $16 + 1 + 4 = 21$ cartas.

Questão 5

A alternativa B está correta.

Comentário:
Note que a única afirmativa falsa é a IV, pois há 48 cartas que não são rei. Logo, para garantir pelo menos um rei, é necessário retirar 49 cartas.

Questão 6

A alternativa C está correta.

Comentário: Assista ao vídeo para conferir a resolução da questão.

Teoria na Prática

Comentário: Assista ao vídeo para conferir a resolução da questão.

Verificando o aprendizado

Questão 1

A alternativa B está correta.

Comentário:
Basta analisar quantos são os graus possíveis. Os graus inteiros variam de 1 a 10 (havendo, portanto, 10 valores distintos); os graus intermediários, de $0{,}5$ a $9{,}5$ (9 valores distintos). Há, então, 19 graus possíveis. Desse modo, pelo menos 20 alunos são necessários.

Questão 2

A alternativa E está correta.

Comentário:
Observe que há 7 dias da semana distintos (as casas dos pombos). Então, se em cada casa, já houver 4 pessoas (ao todo, 28 pessoas), inevitavelmente a próxima pessoa terá de completar a 5ª pessoa em uma das casas.

Módulo 3

Mão na massa

Questão 1

A alternativa A está correta.

Comentário:

$A \cap B$: mantendo no conjunto A apenas os elementos do conjunto B, ou seja, reais entre 1 e 3, o número 7/2 é eliminado. Logo, $A \cap B$ possui 4 elementos.
$A - B$: eliminando de A todos os números reais de B, isto é, entre 1 e 3, resta apenas o número 7/2.

Questão 2

A alternativa A está correta.

Comentário:

O objetivo deste exercício é, antes de tudo, testar sua atenção e verificar se você percebe algo simples! Como 1.000.000 é o quadrado de 1.000, os naturais cujo quadrado é inferior ou igual a um milhão obviamente são os naturais de 1 a 1.000. Como desejamos apenas os naturais ímpares, a resposta é a metade: 500.

Questão 3

A alternativa E está correta.

Comentário:

Designando por $\boldsymbol{S}$ o conjunto dos múltiplos de 6 entre 1 e 1.000 e por $\boldsymbol{O}$ o conjunto dos múltiplos de 8 entre 1 e 1.000, é fácil determinar a quantidade de elementos de cada um desses conjuntos, pois:

$\boldsymbol{S} = \{\mathbf{6};\ \mathbf{12};\ \ldots.;\ \mathbf{996}\,\} \rightarrow \boldsymbol{n}(\boldsymbol{S}) = \mathbf{166}$
$\boldsymbol{O} = \{\mathbf{8};\ \mathbf{16};\ \ldots.;\ \mathbf{1000}\,\} \rightarrow \boldsymbol{n}(\boldsymbol{S}) = \mathbf{125}$

Mas a quantidade de elementos de $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{O}$ corresponde ao conjunto dos múltiplos de 24 (que é o maior divisor comum entre 6 e 8). Logo:

$\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{O} = \{\mathbf{24}; \mathbf{48}; \ldots; \mathbf{984}\} \rightarrow \boldsymbol{n}(\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{O}) = \mathbf{41}$

Concluindo:
$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{O}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{S}) + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{O}) - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{O})$
$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{O}) = \mathbf{166} + \mathbf{125} - \mathbf{41} = \mathbf{250}$

Desse modo, como há 1.000 naturais de 1 a 1.000 e, além disso, 250 são múltiplos de 6 ou de 8 (ou até de ambos), o quantitativo desejado é $1.000 - 250 = 750$.

Questão 4

A alternativa A está correta.

Comentário:
É fácil perceber que a região $\boldsymbol{X}$, em um primeiro momento, possui apenas elementos que estão ao mesmo tempo nos conjuntos $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\ e\ \boldsymbol{D}$. Observado isso, é simples notar que, retirando desse conjunto os elementos de $\boldsymbol{A}$, “sobram” exatamente os elementos do conjunto indicado por $\boldsymbol{X}$.

Questão 5

A alternativa D está correta.

Comentário:
Representando por X o conjunto dos pesquisados que têm preferência pelo candidato X e por C o conjunto dos pesquisados da classe C, temos o seguinte:

Pesquisados na coluna candidato X:

$$n(X) = 150 + 170 + 220 = 540$$

Pesquisados na linha classe C:

$$n(C) = 220 + 280 = 500$$

Pesquisados da classe C que preferem o candidato X:

$$n(X \cap C\ ) = 220$$

Assim, como desejamos calcular $n(X \cup C\ )$, temos isto:

$$n(X \cup C) = n(X) + n(C) - n(X \cap C\ )$$

$$n(X \cap C\ ) = 540 + 500 - 220 = 820$$

Questão 6

A alternativa B está correta.

Comentário: Assista ao vídeo para conferir a resolução da questão.

Teoria na Prática

Comentário: Assista ao vídeo para conferir a resolução da questão.

Verificando o aprendizado

Questão 1

A alternativa B está correta.

Comentário:

Como, dos 30 funcionários, 7 não estudam nenhum dos dois idiomas, a quantidade de alunos a estudar algum idioma é 23. Chamando de $\boldsymbol{I}$ o conjunto desses funcionários que estudam inglês e de $\boldsymbol{M}$ o daqueles que estudam mandarim, podemos escrever que:

$$n(I \cup M) = n(I) + n(M) - n(I \cap M)$$

Ou seja:

$$23 = 15 + 25 - n(I \cap M)$$
$$n(I \cap M) = 17$$

Questão 2

A alternativa D está correta.

Comentário:

Você reconhece quem é esse sujeito? Trata-se do maior entre os divisores comuns de 72 e 90, isto é, o máximo divisor comum (MDC):

$$d(72) = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8;\ 9;\ 12;\ 18;\ 24;\ 36;\ 72\}$$
$$d(90) = \{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 9;\ 10;\ 15;\ 18;\ 30;\ 45;\ 90\}$$
$$d(72) \cap d(90) = \{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 9;\ 18\}$$

Dessa forma, o elemento procurado é 18.

Módulo 4

Mão na massa

Questão 1

A alternativa C está correta.

Comentário:
Como as letras da palavra ALFREDO são diferentes, basta embaralhar todas, que são 7. Logo, a resposta correta é a permutação de 7 objetos, ou seja, $P_7 = 7!$.

Questão 2

A alternativa D está correta.

Comentário:
A placa deve possuir seis caracteres: $\mathbf{C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ C_5\ C_6}$. Para o primeiro caractere, $\mathbf{C_1}$, podemos escolher qualquer uma das 26 letras do alfabeto; com o segundo caractere, já que eles devem ser diferentes, podemos escolher apenas 25 letras. De maneira análoga, os caracteres de C_3 a C_6 poderão ser preenchidos respectivamente por 10, 9, 8 e 7 dígitos. Como essas escolhas são independentes, a opção correta, pelo princípio da multiplicação, é a letra D.

Questão 3

A alternativa D está correta.

Comentário:
Escolhendo os algarismos das unidades (U), dezenas (D), centenas (C) e milhares (M), vemos, nessa ordem, que:

U: 4 alternativas $\Rightarrow$ 2, 4, 6, ou 8;
D: 7 alternativas $\Rightarrow$ 7 algarismos (exceto o já utilizado como U);

C: 6 alternativas $\Rightarrow$ 6 algarismos (exceto os dois já usados);

M: 5 alternativas $\Rightarrow$ 6 algarismos (exceto os dois já usados).

Como as escolhas dos dígitos de cada ordem são independentes, o total desejado é $4 \times 7 \times 6 \times 5 = 840$. Outra solução é calcular todos os números de 4 dígitos distintos independentemente de eles serem pares ou ímpares. Isso equivale a 8.7.6.5 = 1.680. Como há 4 algarismos pares e 4 ímpares, por simetria, a metade é de números pares.

Questão 4

A alternativa A está correta.

Comentário:
Para formar os subconjuntos de A, é preciso selecionar elementos de A para compor o desejado subconjunto. Em relação ao elemento **a**, pode-se escolhê-lo ou não, isto é, existem duas alternativas. Então, para cada um dos 7 elementos de A, é possível escolhê-los ou não para compor o subconjunto desejado.

Desse modo, há:

$2 \times 2 \times 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 2^7 = 128$ possibilidades de escolha.

Se nenhum dos elementos de A para compor o subconjunto desejado não for escolhido, naturalmente se obterá o conjunto vazio; se todos forem escolhidos, o próprio conjunto A será obtido.

Questão 5

A alternativa D está correta.

Comentário: Assista ao vídeo para conferir a resolução da questão.

Questão 6

A alternativa C está correta.

Comentário: Assista ao vídeo para conferir a resolução da questão.

Teoria na Prática

Comentário: Assista ao vídeo para conferir a resolução da questão.

Verificando o aprendizado

Questão 1

A alternativa B está correta.

Comentário:
Senhas com:

- Quatro algarismos: 10 escolhas para o 1º algarismo; 9, para o 2º; 8, para o 3º; e 4, para o 4º. Logo, há $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5.040$ senhas (princípio da multiplicação);
- Cinco algarismos: De forma análoga, $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30.240$ senhas (princípio da multiplicação);
- Seis algarismos: $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151.200$ senhas (princípio da multiplicação).

Observe que os conjuntos das senhas de 4, 5 ou 6 algarismos são conjuntos disjuntos dois a dois. Então, pelo princípio da adição, o total de senhas é $5.040 + 30.240 + 151.200 = 186.480$.

Questão 2

A alternativa B está correta.

Comentário:

Se não podemos escolher o número 5, tudo se passa como se escolhêssemos, entre os elementos 1, 3, 7 e 9, exatamente 3 deles! Desse modo, o resultado desejado equivale à quantidade de combinações de **4** elementos tomados **3** a **3**.

Ou seja:

$$\frac{4!}{(4-3)!\,3!} = 4$$