Limites: conceitos, propriedades e exemplos

Limite de uma função real, seus conceitos e suas propriedades.

Prof. Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

Propósito

Descrever o conceito de limite de uma função real por meio de uma abordagem intuitiva e analítica. Aplicar essa definição na continuidade e na obtenção das retas assíntotas.

Objetivos

- Aplicar abordagem intuitiva e definições de uma função real.
- Identificar as funções bem-comportadas e as técnicas para o cálculo de limites.
- Calcular limites no infinito, limites infinitos e assíntotas.

Introdução

Olá! Antes de começar, assista ao vídeo a seguir para ter uma visão geral sobre o conceito de limite, aplicações, bem como técnicas para seu cálculo e o conceito de continuidade de uma função.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Vamos começar!

A definição intuitiva de limite

Assista ao vídeo a seguir para conhecer alguns conceitos iniciais importantes sobre a definição intuitiva de limite.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Noção intuitiva de uma função real

Em muitas aplicações da matemática, será necessário conhecer o comportamento de uma função quando a variável independente se aproximar de determinado valor. Em outras palavras, será importante saber para que valor essa função tende (ou se aproxima) quando o valor do seu domínio tender (ou se aproximar) de um número dado.

Essa análise do comportamento de uma função real de variável real é obtida por meio da operação matemática denominada de limite de uma função.

Vamos analisar, a seguir, a função h, cujo gráfico, intuitivamente, não pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel, ou seja, há um salto, uma **descontinuidade** no desenho do gráfico.

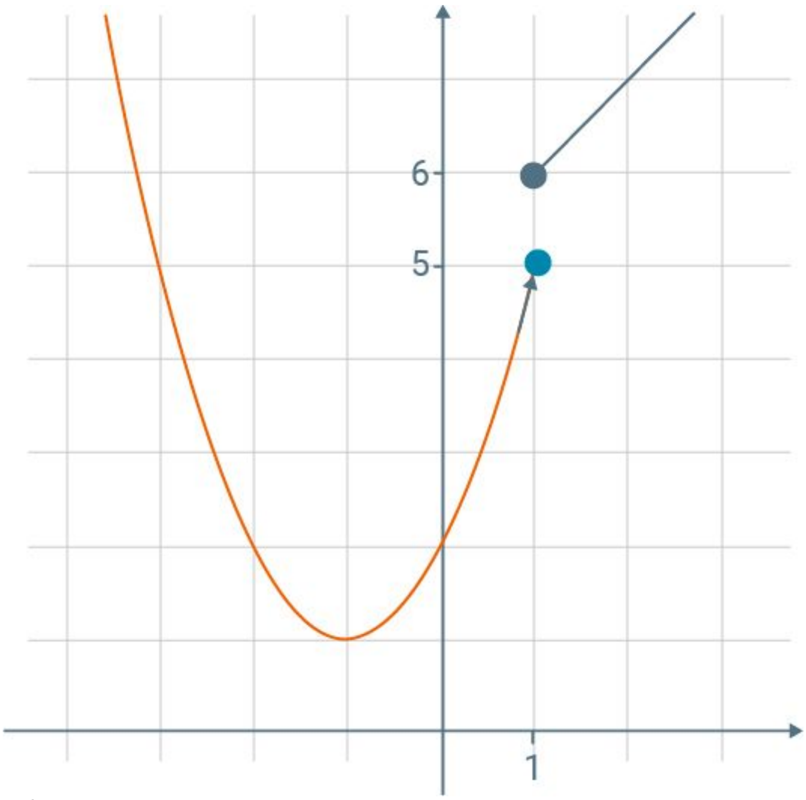


Gráfico de função h.

Então, não existe um **único** valor do qual $h(x)$ se aproxime, quando x se aproxima de 1. Note o comportamento da função h nas proximidades de $x = 1$:

- Quando x se aproxima de 1 pela esquerda, ou seja, por valores inferiores a 1, o valor de $h(x)$ se aproxima de 5.
- Quando x se aproxima de 1 pela direita, ou seja, por valores superiores a 1, o valor de $h(x)$ se aproxima de 6.

Tais valores, 5 e 6 , são chamados de **limites laterais de** h quando x tende a 1: ou seja, seu **limite à esquerda** e limite à direita, respectivamente. Escrevemos:

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = 5$$

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = 6$$

Assim, a função h possui **limites laterais** quando x tende a 1, mas não possui limite em $x = 1$.

Exemplo 1

Aplicando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o valor do limite de $f(x) = \{ \frac{(x^2-9)}{x-3}, x \neq 3 \; 12, x = 3$ para x tendendo a 2 e para x tendendo a 3.

Assista ao vídeo para conferir a solução.

Investigando um limite algebricamente

Neste vídeo, vamos realizar uma investigação, sobre o limite de uma função, de forma algébrica, Vamos ver como as propriedades de limites se aplicam, em uma função.

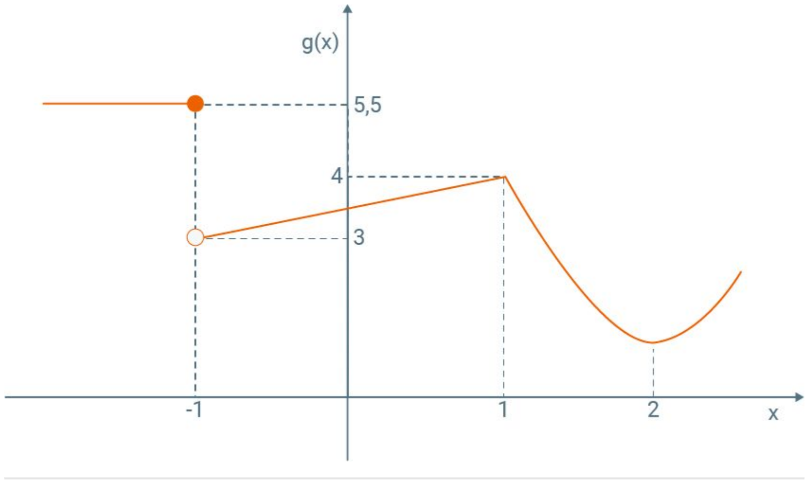
Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 2

Seja **g** a função cujo gráfico está indicado, determine, caso existam, os limites de **g** quando:

1. **x** tende a **-1** por valores inferiores.
2. **x** tende a **-1** por valores superiores.
3. **x** tende a **-1**.



Solução

Pelo gráfico, verifica-se que:

a) Quando x tende a -1, pela esquerda(ou seja, por valores inferiores a -1) – escrevemos $x \to -1^-$, a função f se aproxima de 5,5; assim, o limite de f quando x tende a -1, por valores inferiores, vale 5,5.
b) Quando x tende a -1, pela direita, ou seja, por valores superiores a -1, escrevemos $x \to -1^+$, a função f se aproxima de 3; assim, o limite de f quando x tende a -1, por valores superiores, vale 3.
c) Não existe limite de f(x) quando x tende a −1, pois dependendo de como a variável se aproxima de -1, o valor de f(x) tende a valores diferentes.

Abordagem simbólica do limite: notação

Exemplo 3

Represente simbolicamente a seguinte afirmativa: "O limite de $f(x)$ quando x tende ao número -2 é igual a zero".

Solução

$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$

Exemplo 4

Represente simbolicamente a seguinte afirmativa: "O limite de $g(y)$ quando y tende ao número 3 por valores superiores é igual a dez".

Solução

$< br > \lim_{y \to 3+} g(y) = 10 < br >$

Definiçao formal de limite

Até aqui, foi utilizada uma definição apenas intuitiva de limite apesar de já termos visto a representação simbólica. Afirmativas do tipo “se aproxima de” ou “tende a” são bastante vagas e necessitam de uma definição matemática mais rigorosa.

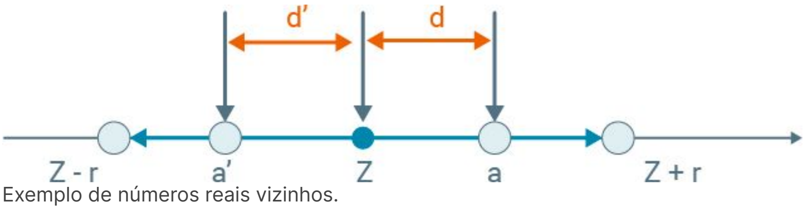
É necessário, portanto, determinar formalmente o limite de uma função real quando a variável independente tende a um número real.

Para isso, é útil explorarmos o conceito de vizinhança de um número real.

Conceito de vizinhança de um número real

Como o nome sugere, vizinhança remete à proximidade, concorda? Pois é, a vizinhança de um número real z e de raio r é o conjunto dos números reais que distam de z menos do que r .

Ora, mas veja a imagem! Note que, se um número real a ou a' dista de z menos do que r , a ou a' pertence ao intervalo aberto] $z-r; z+r$ [, chamado sugestivamente de vizinhança de centro em z e raio r . Ou seja, metaforicamente, os vizinhos de z (de raio r) são os que estão relativamente perto dele – que distam dele menos do que r .

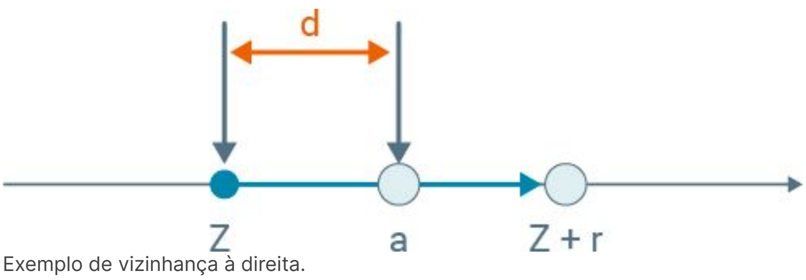


Exemplo de números reais vizinhos.

Podemos estender os conceitos de vizinhança como vizinhança à direita e vizinhança à esquerda de um número real z , com raio r . Parece natural que tais vizinhanças se restrinjam, respectivamente, aos números maiores ou iguais a z e menores ou iguais a z e que, naturalmente, distem de a menos do que r .

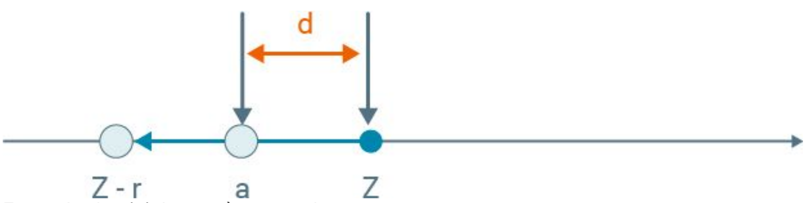
Veja as imagens!

Vizinhança à direita: $]z; z+r[$



Exemplo de vizinhança à direita.

Vizinhança à esquerda: $]z-r; z[$



Exemplo de vizinhança à esquerda.

Definição formal de limite

Neste vídeo, você entenderá melhor como podemos definir, formalmente, o conceito de limite via épsilons e deltas.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Qual é a representação simbólica correta para representar o limite da função $h(z)$ quando z tende a um valor k, por valores inferiores?

A

$\lim_{z \to k^-} h(z)$

B

$\lim_{z \to k^+} h(z)$

C

$\lim_{z \to k} h(z)$

D

$\lim_{h(z)} k$

E

$\lim_{z \to k-1} h(z)$

A alternativa A está correta.

Como se deseja apenas z tendendo a k por valores inferiores (à esquerda), a representação correta será $\lim_{z \to k} h(z)$. Complementando: se fosse pedido o limite de $h(z)$ quando a variável z se aproxima do número k por valores superiores (à direita), a simbologia seria $\lim_{z \to k^+} h(z)$.

Por fim, para o limite de $h(z)$ quando z tende a k, adotam-se os dois sentidos; assim, a simbologia é $\lim_{z \to k} h(z)$.

Questão 2

Aplicando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o valor do limite de:

$f(x) = \{ \frac{(x^2-16)}{x-4}, x \neq 4 \; 10, x = 4$, respectivamente, para quando a variável independente x tende para 3 e para quando x tende para $4.$

A

5 e 6

B

7 e 8

C

4 e 5

D

2 e 3

E

1 e 2

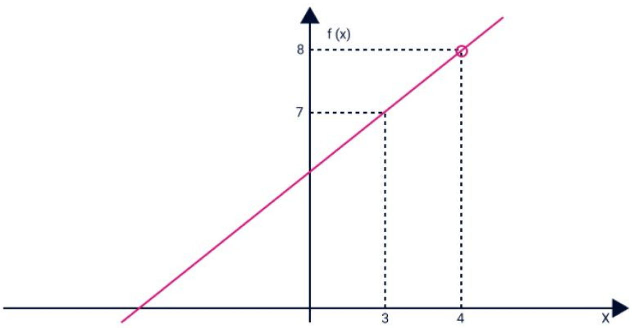
A alternativa B está correta.

Verifica-se que $(x^2 - 16) = (x-4)(x+4)$.

Assim:

$f(x) = \frac{(x^2-16)}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} = x+4, \text{ para } x \neq 4$

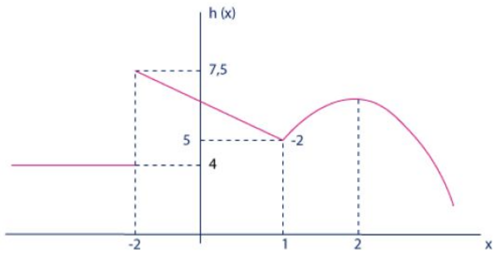
Esboçando o gráfico de $f(x)$, se tem:



Dessa forma, quando x tende para o número 3, a função $f(x)$ tende para o número 7, que, nesse caso, é o valor de $f(3)$. Assim, o limite de $f(x)$ é igual a 7 quando x tende a 3. Quando x tende para o número 4, a função $f(x)$ tende para o número 8, que é diferente de $f(4)$. Logo, o limite de $f(x)$ é igual a 8 quando x tende a $4.$

Questão 3

Seja $h(x)$, cujo gráfico é dado a seguir. Utilizando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o valor do limite de $h(x)$ quando x tende $a - 2.$



A

7,5

B

4

C

2,5

D

Não existe.

E

$+\infty$

A alternativa D está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 4

Utilizando o conceito intuitivo de limite, determine, caso exista, o limite de...

$$< br > m(x) = \begin{cases} < br > 3x - 1, \text{ para } x \\ lt; 0 \\ < br > 12, \text{ para } x = 0 \quad < br > \\ < br > 2 + e^x, \text{ para } x \\ gt; 0 < br > \end{cases}$$

... respectivamente quando x tende a 0 por valores superiores e por inferiores.

A

− 1 e 3

B

12 e 12

C

3 e − 1

D

12 e − 1

E

6 e -1

A alternativa C está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 5

Veja a função a seguir:

$$< br > f(x) = \begin{cases} < br > 2x + k, \text{ se } x \\ lt; 1 \\ < br > 9, \text{ se } x = 1 \quad < br > \\ < br > x^2, \text{ se } x \\ gt; 1 < br > \end{cases}$$

Determine o valor real de k para que exista $\lim_{x \to 1} f(x)$.

A

− 2

B

− 1

C

1

D

2

E

0

A alternativa B está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Dada a função real definida por $f(x) = 8 - 2x$, prove, utilizando a definição formal de limite, que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

A

ε

B

$\varepsilon/2$

C

$\varepsilon/4$

D

2ε

E

$\varepsilon/3$

A alternativa B está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

Utilizando um aplicativo gráfico, analise os gráficos das funções reais definidas por $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x, g(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ e $h(x) = x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, e verifique, intuitivamente, se existem seus limites quando x tende a zero.

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conhecer a solução do problema.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Seja $f(x) = \begin{cases} x+2, x \\ lt; 2 \\ x^2, x \geq 2 \end{cases}$. Aplicando o conceito intuitivo de limite, marque a alternativa que apresenta o do $\lim_{x \to 2} f(x)$.

A

1

B

3

C

4

D

O limite não existe.

E

O limite tende a ∞ .

A alternativa C está correta.

Quando x se aproxima de 2 por valores inferiores, $f(x)$ é definida por $x + 2$. Assim, $f(x)$ vai tender para 4 . Quando x se aproxima de 2 por valores superiores, $f(x)$ é definida por x^2 . Logo, $f(x)$ vai tender para 4 também. Portanto, o limite de $f(x)$ tende para 4 quando x tende para 2. Pode ser feita uma análise gráfica para solucionar também essa questão.

Questão 2

Qual das alternativas abaixo representa simbolicamente o limite de g(x) quando x tende para m apenas por valores superiores?

A

$\lim_{x \to m^-} g(x)$

B

$\lim_{x \to m+} g(x)$

C

$\lim_{x \to m} g(x)$

D

$\lim_{x \to g(x)} p$

E

$\lim_{x \to 0} g(x)$

A alternativa B está correta.

Como se deseja apenas x tendendo a m por valores à direita (superiores), representamos por $\lim_{x \to m+} g(x)$.

Caso se deseje o limite de $f(x)$ quando a variável x se aproximar do número m por valores à esquerda (inferiores), a simbologia será $\lim_{x \to m_-} g(x)$.

Para o limite de $g(x)$ quando x tende a m , adotam-se os dois sentidos; assim, a simbologia é $\lim_{x \to m} g(x)$.

Vamos começar!

Funções contínuas e cálculo de limites

Assista ao vídeo a seguir para entender o conceito de função contínua e conhecer as técnicas básicas para o cálculo de limites.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

O conceito de função contínua para \(x=x_0\)

Está relacionado ao comportamento de f nas proximidades de $x=x_0$.

Intuitivamente, uma função (não muito esquisita) é contínua em $x=x_0$ se o gráfico de f é suave nas proximidades de x_0, ou seja, se podemos traçar o gráfico de f sem tirar o lápis do papel.

Formalmente, uma função é contínua para $x=x_0$ caso ocorram duas condições:

- A função f é definida para $x=x_0$.
- O limite de f quando x tende a x_0 existe e é igual a $f\left(x_0\right)$.

Atenção

Se o domínio da função é um intervalo fechado, devemos utilizar o limite lateral nos extremos. Se uma função é contínua em todo seu domínio, dizemos simplesmente que é uma função contínua.

As funções (usuais) a seguir são contínuas em respectivos domínios:

- As funções polinomiais.
- As funções seno e cosseno.
- A função exponencial, dada por $f(x)=a^x$, em que $a>0$ e $a \neq 1$.
- A função logaritmo, dada por $f(x)=\log_a x$, em que $a>0$ e $a \neq 1(x>1)$.

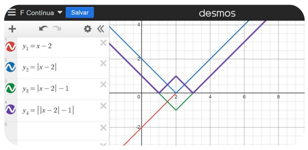
Finalmente as funções racionais, ou seja, da forma $f(x)=p(x)/q(x)$, que são quocientes de dois polinômios, são contínuas, em que $q(x) \neq 0$.

Exemplo 5

Verifique que a função definida pela seguinte fórmula é contínua para todo x real.

$$f(x) = ||x-2|-1|$$

Solução



Veja que o gráfico de f se parece com uma letra W, pois:

- Partimos da reta $y_1 = x - 2$
- Tomamos o módulo desse gráfico - o que significa rebater a parte negativa do gráfico; $y_2 = |x-2|$
- Subtraímos 1 do gráfico de $|x-2|$, o que é equivalente a deslocar verticalmente de uma unidade o gráfico anterior: $y_3 = |x-2|-1$
- Finalmente tomamos outra vez o módulo, ou seja, rebatemos as partes negativas: $y_4 = ||x-2|-1|$

Usando o aplicativo Desmos, obtemos a seguinte imagem.

Note que o gráfico de f possui uma continuidade, sem sobressaltos.

Propriedades operatórias de limites

São extremamente intuitivas. Imagine que duas grandezas G_1 e G_2 se aproximem, respectivamente, de L_1 e L_2. É razoável supor que a grandeza:

- $G_3 = G_1 + G_2$ se aproxime de $L_1 + L_2$
- $G_4 = G_1 - G_2$ se aproxime de $L_1 - L_2$
- $G_5 = G_1 \times G_2$ se aproxime de $L_1 \times L_2$
- $G_6 = 1/G_1$ se aproxima de $1/L_1$ caso $L_1 \neq 0$
- $G_7 = G_1/G_2$ se aproxime de L_1/L_2 caso $L_2 \neq 0$
- $G_8 = G_1^n$ se aproxime de L_1^n caso n seja um inteiro positivo

Essas observações podem ser reescritas sob a forma de propriedades operatórias dos limites. Veja!

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções tais que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$, valem as seguintes propriedades:

- $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x) \times g(x)] = L_1 \times L_2$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L_1}$, caso $L_1 = 0$

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, caso $L_2 = 0$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = L_1^n$

Exemplo 6

Determine os limites indicados:

a. $\lim_{x \to 1} (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)$
b. $\lim_{x \to 1} (x^3 + 2x^2 - 3x + 1)$
c. $\lim_{x \to \pi/2} \cos 2x$
d. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

Solução

a) A função $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ é uma função polinomial e, portanto, uma função contínua. Logo, .
b) Da mesma forma a função $f(x) = \cos 2x$ é uma função contínua. Logo, .
c) A função $\frac{x^2-1}{x+1}$ é uma função da forma $\frac{f(x)}{g(x)}$, em que $g(1) \neq 0$. Logo,
$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{\lim_{x \to 1}(x^2-1)}{\lim_{x \to 1}(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$

Exemplo 7

Determine $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$

Confira a solução no vídeo a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 8

Determine $\lim_{x \to 0} (x^2 + 1) \cdot e^{2x}$

Confira a solução no vídeo a seguir:

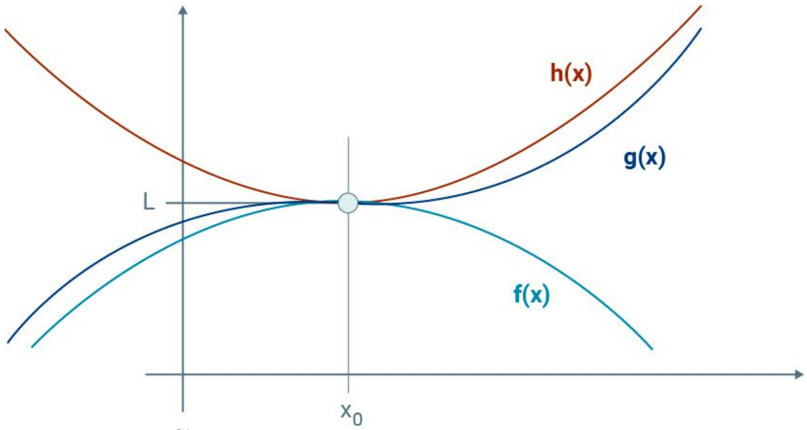
Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teorema do sanduiche (ou do confronto)

Imagine a seguinte situação curiosa: temos três funções $f(x), g(x)$ e $h(x)$, em que, no entorno de $x = x_0$, vale a desigualdade $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Veja, graficamente, a situação descrita:



Representação gráfica do teorema de sanduiche.

Exemplo

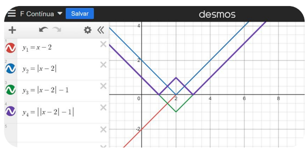
Se e são iguais e valem , o que você acha que ocorre com ? A função está espremida entre e (daí o sugestivo nome de teorema do sanduiche). Então, se e se aproximarem de quando está próximo de , a função não tem alternativa. Também se aproxima de quando se aproxima de .

Exemplo 9

Determine $\lim_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen} x$

Solução

Note que $\operatorname{sen} x$ está entre $-1 e +1$ como consequência,
$-x \leq x \cdot \operatorname{sen} x \leq x$.



Como $\lim_{x \to 0} x$ e $\lim_{x \to 0}(-x)$ valem zero, segue-se pelo teorema do sanduiche, que o limite desejado vale zero.

Veja o gráfico da função f , delimitado pelas retas $y = x$ e $y = -x$.

Mão na massa

Questão 1

Sabe-se que a função $f(x)$ é contínua em todo seu domínio. Seja um ponto p do domínio de $f(x)$. Marque a alternativa correta. Os limites laterais de $f(x)$ quando x tende a p .

A

Podem ser diferentes entre si, desde que o limite de $f(x)$ quando x tende a p seja igual a $f(p)$.

B

Devem ser obrigatoriamente iguais, mas podem ter valores diferentes do que $f(p)$.

C

Devem ser iguais ao limite de $f(x)$ tendendo a p , mas podem ser diferentes de $f(p)$.

D

Devem ser iguais entre si e obrigatoriamente iguais a $f(p)$.

E

Devem ser iguais entre si e tendem a infinito.

A alternativa D está correta.

Para uma função ser contínua, o limite deve existir em p ; para isso, os limites laterais devem existir e ser iguais entre si. Mas o limite de $f(x)$ tendendo a p deve ser igual a $f(p)$ para a função ser contínua; portanto, os limites laterais também serão obrigatoriamente iguais a $f(p)$.

Questão 2

Seja a função $h(x)\begin{cases} 4-x^2, x \\ lt;3 \\ p, x=3 \\ x+k, x \\ gt;3 \end{cases}$. Determine o valor de $(k+p)$ para que a função $h(x)$ seja contínua em $x=3$.

A

-2

B

-8

C

-5

D

-13

E

-12

A alternativa D está correta.

Para ser contínua em $x=3$, os limites laterais devem ser iguais, além de terem o mesmo valor que h(3).

$\lim_{x \to 3-} h(x) = \lim_{x \to 3-} 4 - x^2 = 4 - 3^2 = -5$

$\lim_{x \to 3+} h(x) = \lim_{x \to 3-} x + k = 3 + k$

$\text{assim } 3 + k = -5 \to k = -8$

$E h(3) = p = \lim_{x \to 3} h(x) = -5$

Dessa forma, $k + p = -13$.

Questão 3

Determine, caso exista, $\lim_{x \to 1} (x^4 + 2) \times (\ln(x) + 1)$.

A

1

B

2

C

3

D

4

E

5

A alternativa C está correta.

Usando a propriedade algébrica:

$\lim_{x \to 1} (x^4 + 2) (\ln(x) + 1) = \lim_{x \to 1} (x^4 + 2) \lim_{x \to 1} (\ln(x) + 1)$

A função $f(x) = (x^4 + 2)$ é uma função polinomial, contínua em todo seu domínio; portanto, podemos usar o teorema da substituição para executar o cálculo.

$\lim_{x \to 1} (x^4 + 2) = 1 + 2 = 3$

A função $g(x) = (\ln(x) + 1)$ é uma função logarítmica, contínua em todo seu domínio; portanto, podemos usar o teorema da substituição para executar o cálculo.

$\lim_{x \to 1}(\ln(x) + 1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$

Assim:

$\lim_{x \to 1} \left(x^4 + 2\right) (\ln(x) + 1) = \lim_{x \to 1} \left(x^4 + 2\right) \lim_{x \to 1}(\ln(x) + 1) = 3.1 = 3$

Questão 4

Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{8-x^3}{x^5+1}$

A

-1

B

0

C

1

D

2

E

-8

A alternativa B está correta.

Note que o denominador da expressão é um polinômio que não se anula para $x = 2$, mas o numerador, sim. Então,

Questão 5

Calcule $\lim_{x \to \pi}(x - \pi)^2 \cos \frac{1}{x-\pi}$

A

-1

B

π

C

1

D

0

E

Não existe

A alternativa D está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Determine $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

A

0

B

1

C

-1

D

3

E

-3

A alternativa E está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

Uma importante função, utilizada na modelagem de diversos problemas, em particular o crescimento populacional e a teoria de resposta ao item (TRI) – usada na correção das provas do ENEM –, é a chamada função logística. A fórmula a seguir representa um exemplo em que A e k são constantes.

$f(x) = \frac{A}{1+e^{-kx}}$

Analise o comportamento dessa função (com $A = k = 1$) para as seguintes situações:

1. Quando x se aproxima de zero.
2. Quando x cresce indefinidamente (positivamente).
3. Quando x decresce indefinidamente (negativamente).
4. Use um aplicativo gráfico para visualizar o gráfico dessa função.

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conhecer a solução do problema.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Calcule o limite de $f(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2-x-1}$ quando x tende para 1.

A

-1

B

3

C

-4

D

2

E

-3

A alternativa C está correta.

Você entendeu o cálculo do limite por meio dos teoremas.

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2-x-1} = \frac{m(1)}{n(1)}$

Pode-se usar a substituição direta, pois $f(x)$ é uma função racional e, para $x = 1$, seu denominador não se anula.

Assim:

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2-x-1} = \frac{m(1)}{n(1)} = \frac{4}{-1} = -4$

Questão 2

Determine $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

A

0

B

1

C

-1

D

2

E

-2

A alternativa E está correta.

Observe que $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ e $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

Logo, se $x \neq 2$ a expressão dada torna-se equivalente a:

$\frac{x^2-4}{x(x^2-5x+6)} = \frac{(x+2)}{x(x-3)}$

Então, o limite desejado vale:

$\frac{2+2}{2(2-3)} = -2$

Vamos começar!

O infinito na jogada

Assista ao vídeo a seguir para perceber os conceitos que envolvem um passeio pelo infinito, na análise do comportamento das funções: limites no infinito, limites infinitos e assíntotas.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Limites no infinito

Até este ponto, definimos e calculamos os limites de uma função quando a variável independente de seu domínio tende a um número real p. Contudo, poderemos estender esse cálculo do limite para quando x tender ao infinito ou ao menos infinito.

Atenção

Um número real tenderá para infinito, , sempre que real, . Um número real tenderá para menos infinito, , sempre que real, .

Esse tipo de limite será utilizado para se obter o comportamento da função quando x assumir valores cada vez maiores, ou seja, crescer sem limitação, representado por $x \to \infty$, ou quando x assumir valores cada vez menores ou decrescer sem limitação, representado por $x \to -\infty$.

Veja o gráfico da função $w(x)$ a seguir:

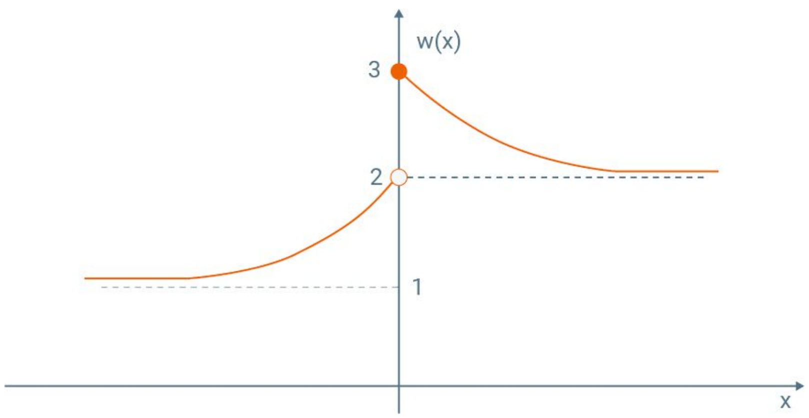


Gráfico da função.

Quando x tende para infinito, o gráfico da função $w(x)$ tende para a reta y $= 2$. Isso quer dizer que o valor de $w(x)$ fica cada vez mais próximo de 2; portanto, o limite de $w(x)$ quando x tende ao infinito vale 2 . De forma análoga, quando x tende para menos infinito, o gráfico da função tende para a reta $y = 1$.

Assim, o valor de $w(x)$ fica cada vez mais próximo de 1; consequentemente, o limite de $w(x)$, quando x tende a menos infinito, vale $1.$.

> Utiliza-se, portanto, a simbologia $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$ para indicar o comportamento de $f(x)$ se aproximando cada vez mais de L_1, sem nunca alcançar, quando x tende ao infinito. No gráfico anterior, L_1 vale 2.
>
> De forma análoga, há a notação $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$ para o caso em que x tende ao menos infinito. No caso anterior, L_2 vale 1.

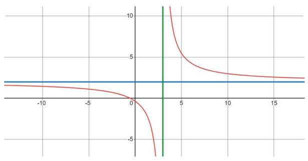
Exemplo 10

Determine o comportamento da função $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ quando x tende a $+\infty$ e $-\infty$.

Solução

Dividindo numerador e denominador da expressão de $f(x)$ por x, obtemos:

$f(x) = \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$



Note que, se x aproxima-se de $+\infty$ ou $-\infty$, a fração $1/x$ tende a zero. Logo, $f(x)$ se aproxima de $2/1 = 2$.

Limites infinitos

Até este ponto, obtivemos os valores de limites da função iguais a um número real L tanto quanto x tende a um número real p ou ao infinito.

Outra extensão que pode ser feita é quando determinada função tem um comportamento de tender não a um número, e sim ao infinito, quando x se aproxima de um número real ou até mesmo do infinito. Veja o gráfico da função $I(x)$:

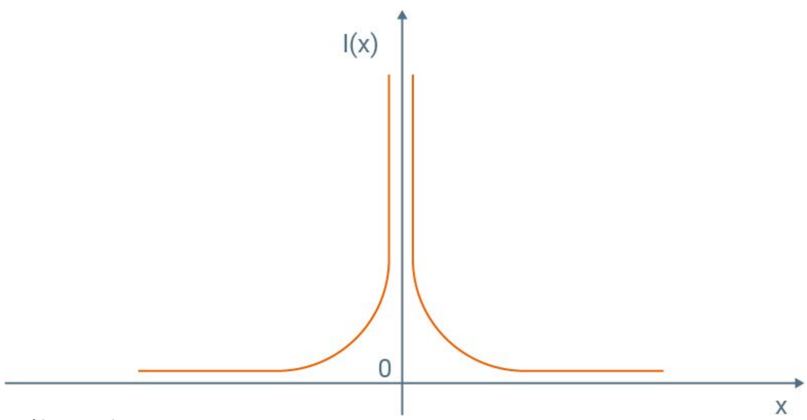


Gráfico da função.

Observe que, quando x tende a zero tanto por valores superiores quanto por inferiores, a função assume valores que tendem para o infinito. o infinito não é um número. Porém, ao usarmos a notação $\lim_{x\to 0} I(x) = \infty$, estamos representando o comportamento da função ao assumirmos valores tão grandes quanto quisermos, ou seja, crescendo sem limitações.

O conceito de limites laterais também pode ser aplicado nesse caso. Podemos afirmar que:

$$\lim_{x \to 0^+} I(x) = \lim_{x \to 0^-} I(x) = \infty \leftrightarrow \lim_{x \to 0} I(x) = \infty$$

Teorema de Leibniz

Um teorema que também pode ser usado para calcular limites de funções polinomiais quando x tende a zero ou a $\pm\infty$ é o teorema de Leibniz.

Todo polinômio é equivalente ao seu termo de maior grau, em que a sua variável independente tende para mais ou menos infinito.

Todo polinômio é equivalente ao seu termo de menor grau, em que a sua variável independente tende para zero.

Exemplo 11

Calcule o valor de $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 3x^2 + 8}}{x^3 - x + 1}$.

Solução

Por meio do teorema de Leibniz, como x está tendendo ao infinito, há $4x^6 - 3x^2 + 8 \to 4x^6$ e $x^3 - x + 1 \to x^3$, que são seus termos, respectivamente, de maior grau.

Assim:

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 3x^2 + 8}}{x^3 - x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^6}}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2|x^3|}{x^3}$

Como x está tendendo para infinito, $xgt;0$, então $|x^3| = x^3$.

Assim, $\lim_{x \to \infty} \frac{2|x^3|}{x^3} \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$.

Exemplo 12

Calcule o valor de $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 3x^2 + 8}}{x^3 - x + 1}$.

Solução

Solução análoga à anterior pelo teorema de Leibniz.

$< br > \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 3x^2 + 8}}{x^3 - x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^6}}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2|x^3|}{x^3} < br >$

A diferença é que x está tendendo para menos infinito, $xlt;0$; então, $|x^3| = -x^3$.

Logo, $\lim_{x \to -\infty} \frac{2|x^3|}{x^3} \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^3}{x^3} = -2$.

Exemplo 13

Calcule o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 8}{x^4 + x + 1}$.

Solução

Graças ao teorema de Leibniz, como x está tendendo a zero, sabe-se que $x^3 + 8 \to 8$ e $x^4 + 1 \to 1$

Assim, $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+8}{x^4+x+1} = \lim_{x\to 0} \frac{8}{1} = 8$

Você pode perceber que esse limite também poderia ter sido resolvido pelo teorema da substituição direta, mostrando que não existe apenas um caminho para resolver o mesmo limite.

Assíntotas

Assíntota é uma reta imaginária tal que a distância entre a curva que descreve o gráfico da função e essa reta tende para zero, mas sem nunca ser zero. Podemos defini-la também como uma reta tangente à curva de $f(x)$ no infinito.

Existem três tipos de assíntotas:

Assíntota vertical

A assíntota vertical é uma reta vertical do tipo $x = p$ que pode ocorrer nos pontos interiores do domínio da função em que existe a descontinuidade. Para verificar se existe essa assíntota, devem ser calculados os dois limites laterais de $f(x)$ quando x tende para p, em que p é um ponto de descontinuidade.

Se pelo menos um dos limites tiver um resultado mais ou menos infinito, existirá a assíntota vertical e sua equação será dada por $x = p$. Basta que um tenha resultado $\pm\infty$.

Assíntota vertical $x = p \leftrightarrow \{$

Assíntota horizontal

A assíntota horizontal é uma reta horizontal do tipo $y = L$ que pode ocorrer quando x tende a mais infinito e a menos infinito.

Para existir essa assíntota, a função vai tender a um número L quando x tender a mais ou menos infinito.

Para verificar se existe a assíntota horizontal para x tendendo ao infinito, deve ser calculado o limite de $f(x)$ quando x tende para ∞. Se o resultado for um número real L, existirá a assíntota horizontal de equação $y = L$.

Para verificar se existe a assíntota horizontal para x tendendo ao menos infinito, deve ser calculado o limite de $f(x)$ quando x tende para $-\infty$. Se o resultado for um número real L, existirá a assíntota horizontal de equação y $= L$.

Assintota horizontal $y = L \leftrightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$

Lembre-se de que uma função pode ter assíntotas horizontais nos dois lados com a mesma equação, nos dois lados com equações diferentes, em um lado só ou até mesmo não ter assíntota horizontal.

Assíntota inclinada

A assíntota inclinada é uma reta inclinada do tipo $y = mx + q$. Ela pode ocorrer quando x tende ao infinito ou ao menos infinito.

$$< br > x = p \leftrightarrow \begin{cases} < br > \lim_{x \to p+p} f(x) = \pm\infty \\ < br > \lim_{x \to p-} f(x) = \pm\infty < br > \end{cases} < br >$$

Na verdade, a assíntota horizontal é um caso particular da assíntota inclinada. Quando $m = 0$, a reta inclinada vira uma reta horizontal.

Para existir a assíntota inclinada na região em que x tende para o infinito, deve haver valores de m e de q reais que satisfaçam à seguinte propriedade:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{mx + q}{x} = m$$
$$\lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} mx + q - mx = q$$

Se alguns dos limites acima não existirem ou não derem, ambos, números reais, não haverá a assíntota inclinada.

Para existir a assíntota inclinada na região em que x tende para o menos infinito, deve haver valores de m e de q reais que satisfaçam à seguinte propriedade:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{mx + q}{x} = m$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to -\infty} mx + q - mx = q$$

Se alguns dos limites acima não existirem ou não derem, ambos, números reais, não existirá a assíntota inclinada.

Exemplo 14

Analise as eventuais assíntotas das funções $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ e $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

Confira a solução no vídeo a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 15

Obtenha, caso existam, as assíntotas inclinadas para $f(x) = 2\,\mathrm{arctg}\left(e^{-x}\right) - x$ quando x tende ao infinito.

Solução

Vamos calcular os limites necessários:

$$< br > \begin{array}{l} < br > amp; \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\,\mathrm{arctg}\left(e^{-x}\right) - x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\,\mathrm{arctg}\left(e^{-x}\right)}{x} + \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{x} \\ < br > amp; \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2\,\mathrm{arctg}\left(e^{-\infty}\right)}{\infty} - 1 = \frac{2\,\mathrm{arctg}(0)}{\infty} - 1 = \frac{0}{\infty} - 1 = -1 < br > \end{array} < br >$$

Portanto $m = -1$

$$< br > \begin{array}{c} < br > \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} f(x) - (-1)x = \lim_{x \to \infty} \left(2\,\mathrm{arctg}\left(e^{-x}\right) - x\right) + x = \lim_{x \to \infty} 2\,\mathrm{arctg}\left(e^{-x}\right) \\ < br > \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} 2\,\mathrm{arctg}\left(e^{-x}\right) = 2\,\mathrm{arctg}\left(e^{-\infty}\right) = 2\,\mathrm{arctg}(0) = 0 < br > \end{array} < br >$$

Portanto, como os dois limites tiveram como resultados números reais, existe uma assíntota inclinada de equação $y = -x$.

Exemplo 16

Obter, caso existam, as assíntotas verticais e horizontais da função $h(x) = \{\ 3e^x, x \leq 0\ 4 + \frac{1}{x}, x > 0$

Solução

A função $h(x)$ tem uma descontinuidade para $x=0$, sendo, portanto, o único ponto possível para se ter uma assíntota vertical.

$$
 \begin{array}{c}
 \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0-} 3 e^x=3 \cdot e^0=3 \\
 \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0+} 4+\frac{1}{x}=4+\infty=\infty
 \end{array}
$$

Assim, como em pelo menos um dos limites o resultado foi ∞, existe uma assíntota vertical em $x=0$.

Analisaremos agora $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow-\infty$ para a verificação das assíntotas horizontais.

$$
 \lim_{x \rightarrow-\infty} f(x)=\lim_{x \rightarrow-\infty} 3 \cdot e^x=3 \cdot e^{-\infty}=3.0=0
$$

Desse modo, existe uma assíntota horizontal para x tendendo a menos infinito com a equação $y=0$.

$$
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\lim_{x \rightarrow \infty} 4+\frac{1}{x}=4+0=4
$$

Dessa forma, existe uma assíntota horizontal para x tendendo a mais infinito com a equação $y=4$.

Mão na massa

Questão 1

Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow-\infty} \frac{\sqrt{x^4-8}}{x^2-1}$

A

0

B

1

C

2

D

3

E

∞

A alternativa B está correta.

Pelo teorema de Leibniz:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^4-8}}{x^2-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x^2|}{x^2}$

Quando x está tendendo para menos infinito, $x lt; 0$, então $|x^2| = x^2$

Assim,

Questão 2

Calcule o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{x^7+8x}{x^5+x+7}$

A

0

B

1

C

2

D

3

E

4

A alternativa A está correta.

Por meio teorema de Leibniz, como x está tendendo a zero, tem-se $x^7 + 8x \to 8x$ e $x^5 + x + 7 \to 7$, que são seus termos, respectivamente, de menor grau.

Assim:

$\lim_{x \to 0} \frac{x^7+8x}{x^5+x+7} = \lim_{x \to 0} \frac{8x}{7} = \frac{0}{7} = 0$

Você pode perceber que esse limite também poderia ter sido resolvido pelo teorema da substituição direta.

Questão 3

Calcule o valor de $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{10}{e^u}$

A

0

B

1

C

2

D

∞

E

$-\infty$

A alternativa D está correta.

No cálculo do limite, é preciso conhecer as funções envolvidas. Nesse caso, por exemplo, conhecer a função e usando as propriedades algébricas e a substituição direta, pois as funções envolvidas são contínuas.

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{10}{e^u} = \frac{\lim_{w \rightarrow -\infty} 10}{\lim_{w \rightarrow -\infty} e^u} = \frac{10}{e^{-\infty}}$$

Quando x tender a menos infinito, a função $e^{-\infty}$ tenderá a zero.

Assim,

Questão 4

Obtenha, caso exista, a equação da assíntota vertical para a função $g(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 4 \\ x+4, x \\ gt; 4 \end{cases}$

A

$x = 1$

B

$x = 2$

C

$x = 4$

D

Não existe assíntota vertical.

E

$x = 0$

A alternativa D está correta.

A função $h(x)$ tem uma descontinuidade para $x = 4$, sendo, portanto, o único ponto possível para se ter uma assíntota vertical.

Logo, como nenhum dos dois limites tiveram o resultado $\pm\infty$, não existe uma assíntota vertical em $x = 4$.

Questão 5

Dada a função $h(x)$, definida como $h(x) = 5.e^x$, se $x \leq 0$, e definida como $4 + \frac{1}{x}$ se $xgt;0$. Marque a alternativa correta.

A

Há uma assíntota vertical e uma horizontal para x tendendo a mais infinito.

B

Há uma assíntota vertical e duas assíntotas horizontais diferentes.

C

Não tem assíntota vertical, mas existem duas assíntotas horizontais com a mesma equação.

D

Há uma assíntota vertical e uma horizontal para x tendendo a menos infinito.

E

Não existem assíntotas.

A alternativa B está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

A função logística f , definida por $f(x) = \frac{2}{1+e^{-x}}$ possui:

A

Duas assíntotas horizontais.

B

Uma única, que é inclinada.

C

Uma única assíntota, que é horizontal.

D

Uma assíntota inclinada e uma assíntota horizontal.

E

Uma única assíntota, que é vertical.

A alternativa A está correta.

Confira a solução no vídeo a seguir:

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

A função definida por $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2+1}$ possui uma assíntota inclinada que intersecta seu gráfico! Determine as coordenadas desse ponto.

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conhecer a solução do problema.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{\sqrt[3]{x^3+x^2+8}}$:

A

0

B

∞

C

-1

D

2

E

$-\infty$

A alternativa D está correta.

O limite é:

Utilizando o teorema de Libiniz, podemos reescrever o limite da seguinte forma:

Veja que o denominador pode ser reescrito devido à raiz cúbica, logo:

Substituindo temos:

Questão 2

Obtenha a equação da assíntota vertical, se existir, do gráfico da função $h(x) = \frac{1}{x-5}$

A

$x = 3$

B

$x = 5$

C

$x = 7$

D

Não existe.

E

$x = 0$

A alternativa B está correta.

Você entendeu a obtenção das assíntotas verticais. O ponto de descontinuidade para $h(x)$ é para $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$.

$$\lim_{x \to 5-} h(x) = \lim_{x \to 3-} \frac{1}{x-5} = \frac{1}{0-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 5+} h(x) = \lim_{x \to 3+} \frac{1}{x-5} = \frac{1}{0+} = \infty$$

Então, como os resultados dos dois limites foram $\pm\infty$, existe uma assíntota vertical, que vale $x = 5$.

Considerações finais

Ao longo do conteúdo, descrevemos a abordagem do conceito de limite de forma intuitiva, como também com a formalidade matemática necessária.

Analisamos o conceito de continuidade de uma função de limites e situações que envolvem o conceito de infinito, ou seja, limites quando a variável tende a $\pm\infty$ ou quando o valor da função cresce (ou decresce) indefinidamente para $+\infty$ (ou $-\infty$). Finalmente, analisamos o conceito de assíntota, em essência, a situação do gráfico de uma função se aproximar indefinidamente de uma reta (vertical, horizontal ou inclinada).

Esperamos que, ao final deste material, você tenha ampliado seus recursos para analisar o comportamento das funções.

Explore +

Para entender melhor o conceito de limite, pesquise na internet sobre **Arquimedes**, o mais belo exemplo de genialidade. Ele aplicou de forma intuitiva o conceito de limite, que sequer existia formalmente para inúmeras de suas descobertas no campo da física e da matemática. Vale conferir!

Referências

HALLET H. *et al.*; **Cálculo, a uma e a várias variáveis**. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011.

LARSON, R.; EDWARDS, B.H. **Cálculo, com aplicações**. 6. ed. São Paulo: LTC, 2003.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008.