Métodos de la Física matemática

Ejercicio: Series de Laurent

Determine la serie de Laurent de la función $f(z) = 1/(1-z)$.

Solución: La función f es analítica salvo en el punto $z = 1$, por tanto podemos distinguir dos regiones $|z| < 1$ y $|z| > 1$. Para la región interior, $|z| < 1$, la serie coincide con la serie geométrica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Para la región exterior $|z| > 1$ vemos que $|1/z| < 1$, por tanto podemos reescribir la función f en terminos de una nueva variable $w = 1/z$, i.e.

$$f = -w/(1-w) \quad \text{con} \quad |w| < 1.$$

De nuevo, reconocemos la forma de la serie geométrica, es decir

$$f = -w/(1-w) = -w\sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\sum_{n=1}^{\infty} w^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Ejercicio: Series de Laurent

Determine la serie de Laurent de la función $f(z) = e^{1/z}$. **Solución:** La función f es analítica salvo en el punto $z = 0$, por tanto podemos distinguir solo una región $|z| > 0$. En terminos de una nueva variable $w = 1/z$, la condición de la región de validéz se transforma $|w| = |1/z| < \infty$. Por tanto en terminos de la variable w la serie de Laurent se reduce a la serie de Taylor centrada en el origen, i.e.

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$$

Ejercicio: Series de Laurent

Determinar las series de Laurent en potencias de z de la función $f(z) = 1/(z-1)(z-3)$. Use como ayuda la definición de la serie geométrica, pero también verifique los valores de los coeficientes usando la definición formal de la serie de Laurent.

Nótese que cuando se dice que las expansiones que se buscan son en potencias de solo z implica que las regiones que se deben explorar deben ser alrededor y centradas en el origen $z_0 = 0$.