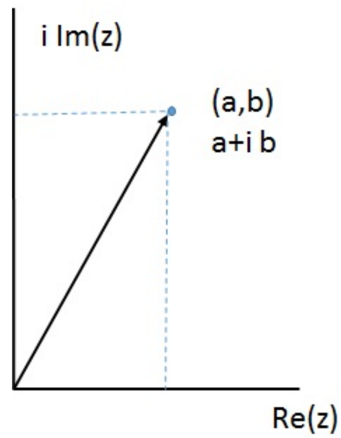
Representación gráfica de los números complejos

Como los números complejos satisfacen la definición de un espacio vectorial del tipo R^2, se pueden graficar en un plano:



identidad de Euler

Se parte sabiendo que la función exponencial se puede expresar en serie de potencias de la forma

$$e^x = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Si substituimos $x \to i\theta$ obtenemos

$$e^{i\theta} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{i^n \theta^n}{n!}$$

donde i es la unidad imaginaria con las propiedades

$$i^0 = 1 \qquad i^1 = 1 \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1 \qquad \text{etc}$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$

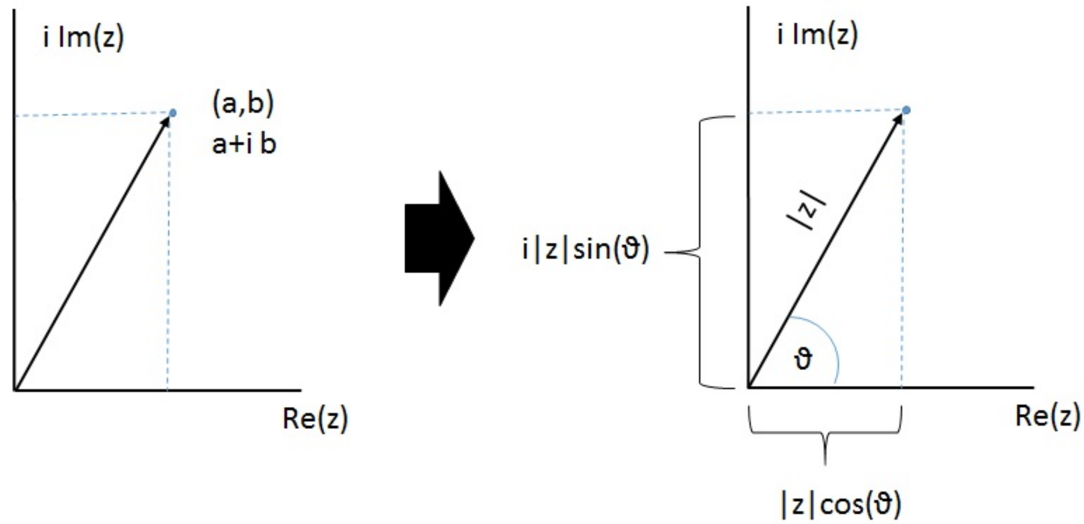
Esta sumatoria se puede separar así:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdot\cdot\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)$$

Y finalmente reconocemos que las dos sumatorias corresponden a las funciones trigonométricas seno y coseno, i.e

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Fasores



De la representación gráfica se puede ver que

$$z = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta) = |z|\bigg(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\bigg) = |z|e^{i\theta}$$

donde algunas veces $|z|$ es llamado también r, i.e

$$z = re^{i\theta} \qquad \text{con} \qquad r = |z|$$

Con esta nueva notación de los números complejos, operaciones de multiplicación y división se ejecutan así:

Multiplicación:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = re^{i\theta}$$

donde

$$r = r_1 r_2$$

y

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 + 2\pi k$$

con

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

División:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} = re^{i\theta}$$

donde

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

y

$$\theta = \theta_1 - \theta_2 + 2\pi k$$

con

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

Definición

El argumento de una función compleja se define como

$$\theta = Arg(z) + 2\pi k$$

con

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

Potencias y raices

Es fácil ver a partir de las propiedades de la multiplicación que

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$$

Si suponemos $r = 1$, se obtiene el teorema de "de Moivre"

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

con $n = 1, 2, 3, \cdots$ por tanto

$$\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Esta fórmula permite hallar la n-raíces de $z = re^{i\theta}$.

Supongamos que $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ es una de las n-raices de $z = re^{i\theta}$, entonces

$$r_0^n e^{in\theta_0} = re^{i\theta}$$

Por tanto $r_0 = r^{1/n}$ y $n\theta_0 = \theta + 2\pi k$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$. Esto significa que

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}}$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$ Nótese que en esta última formula no se considera el signo negativo para los índices k porque los resultados son idénticos para ambos signos.

Ejercicio

$$\sqrt[6]{1+i}$$

$$z = 1 + i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

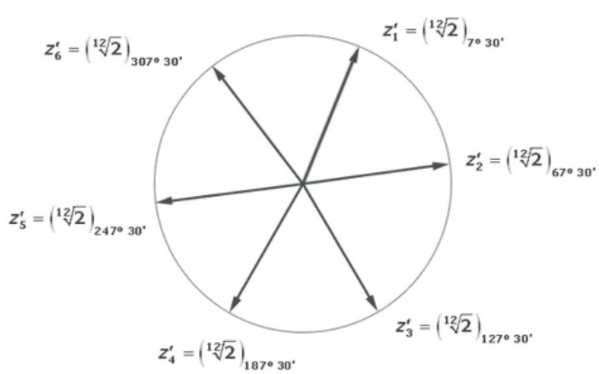
$$\alpha = arctg\,\frac{+1}{+1} = 45^{\circ}$$

$$z = \left(\sqrt{2}\right)_{45^{\circ}}$$

$$\sqrt[6]{\left(\sqrt{2}\right)_{45^{\circ}}}$$

$$|z'| = \sqrt[6]{\left(\sqrt{2}\right)} = \sqrt[12]{2}$$

$$\alpha = \frac{45^{\circ} + 360^{\circ}\mathbf{k}}{6} \begin{cases} \mathbf{k} = 0 & \alpha_1 = 7^{\circ}\ 30' & z'_1 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{7^{\circ}\ 30'} \\ \mathbf{k} = 1 & \alpha_2 = 67^{\circ}\ 30' & z'_2 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{67^{\circ}\ 30'} \\ \mathbf{k} = 2 & \alpha_3 = 127^{\circ}\ 30' & z'_3 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{127^{\circ}\ 30'} \\ \mathbf{k} = 3 & \alpha_4 = 187^{\circ}\ 30' & z'_4 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{187^{\circ}\ 30'} \\ \mathbf{k} = 4 & \alpha_5 = 247^{\circ}\ 30' & z'_5 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{247^{\circ}\ 30'} \\ \mathbf{k} = 5 & \alpha_6 = 307^{\circ}\ 30' & z'_6 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{307^{\circ}\ 30'} \end{cases}$$



La fórmula de De Moivre se puede generalizar así:

$$z^{m/n} = r^{m/n} e^{\frac{m\theta}{n} + k\frac{2m\pi}{n}}$$

con $k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$.

Esta última óormula aplica cuando la fracción m/n no se puede reducir a un número entero.

Resumiendo:

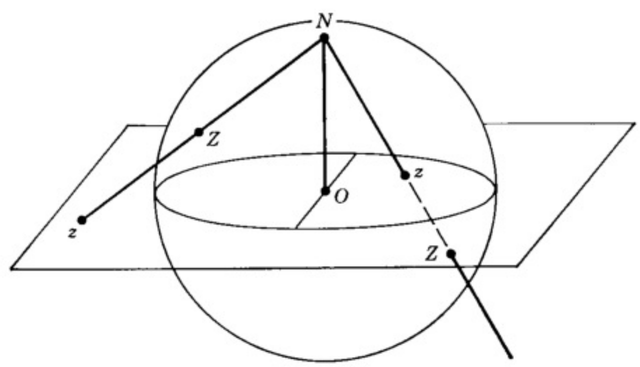
Se puede decir que hay n raíces de cualquier número complejo $z \neq 0$. Todas tienen el mismo módulo y sus argumentos están igualmente espaciados.

Nótese que si denotamos las raices como ω^k, entonces se puede ver facilmente que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

Representación esférica del plano complejo

En muchos casos es conveniente extender el plano complejo para introducir el infinito ∞. Obviamente en el plano complejo no hay un punto para el infinito, por consiguiente, es necesario recurrir a otra representación de los números complejos para poder incluir explícitamente un punto para el infinito. Una posible representación es la llamada esfera unitaria de Riemann.



Las coordenadas x_1, x_2 y x_3 de la superficie de la esfera Σ obedece la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Si usamos la relación:

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

Nótese que con esta relación se obtien

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1},$$

$$x_2 = \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)}$$

y

$$x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}$$

Cada punto del plano complejo, $z = x + iy$, tiene una correspondencia uno a uno con los puntos de la superficie de la esfera unitaria, excepto el punto N (ver figura)

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0,1)$$

Sin embargo, si incluimos el infinito ∞ en el plano complejo, entonces la inclusión del punto N en la esfera unitaria completa la correspondencia uno a uno con el plano complejo extendido i.e $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$.

Si escribimos $z = x + iy$, se puede verificar que los puntos $(0, 0, 1)$, $((x_1, x_2, x_3)$ y $(x, y, 0)$ forman una línea recta. Por tanto la correspondencia es una proyección del punto $N : (0, 0, 1)$. La afirmación opuesta también es cierta. Este es la llamada una proyección estereografica.

Ejercicio

Mostrar que la distancias entre dos proyecciones esterograficas z y z' es:

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}$$