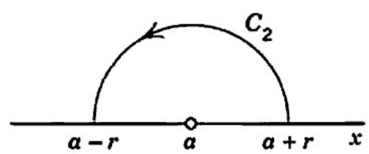
Teorema

Si $f(z)$ tiene un plo en $z = a$ sobre el eje real, entonces

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_2} f(z)dz = \pi i \mathrm{Res}[f(z), a]$$



Para $0 < |z-a| < R$ tenemos

$$f(z) = \frac{b_1}{z-a} + g(z), \qquad b_1 = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

$$C_2: \quad z = a + re^{i\theta}, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$$

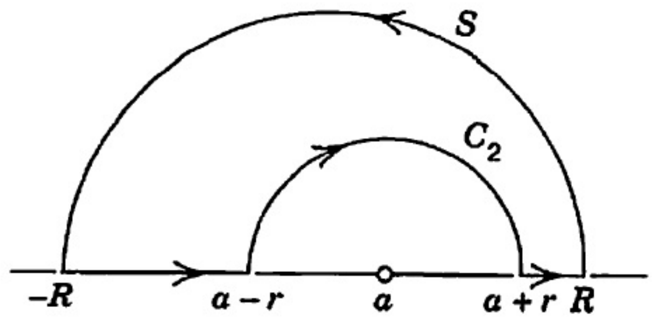
$g(z)$ es analítica entonces $|g(z)| \leqq M$ en C_2.

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \frac{b_1}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\,d\theta + \int_{C_2} g(z)\,dz = b_1\pi i + \int_{C_2} g(z)\,dz.$$

$$\left|\int_{C_2} g(z)dz\right| \leq M\pi r$$

Entonces para $r \to 0$ la contribución de esta integral es despreciablemente pequeña.

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_2} f(z)\,dz = b_1\pi i$$



$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \int_{S} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}[f(z); z_n],$$

Para el radio de S tendiendo a infinito y el radio r de C_2 tendiendo a cero obtenemos

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}[f(z); z_n] - \int_{C_2} f(z)dz$$

Como C_2 va en el sentido de las manecillas del reloj, entonces

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}[f(z); z_n] + \int_{\overline{C}_2} f(z)dz$$

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}[f(z); z_n] + \pi i \text{Res}[f(z); a]$$

Generalizando obtenemos

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}(z_n) + i\pi \sum_{j=1}^{s} \text{Res}(a_j)$$

Mapeo conforme

Una transformación conforme es una función que preserva ángulos. Si una función compleja $w = f(z)$ es definida en el dominio D del plano z, entonces por cada punto en D existe un punto en el plano w. En esta forma se obtiene un mapeo de D sobre el rango de valores de $f(z)$ en el plano w. Cuando la función $f(z)$ es analítica entonces el mapeo dado por $w = f(z)$ es conforme (preserva el ángulo), excepto en puntos donde la derivada $f'(z)$ es cero.

Antes de continuar con las definiciones del mapeo conforme es importante mencionar que el mapeo es una método estandar para solucionar problemas de frontera de dos dimensiones donde regiones complicadas son transformadas en simples. Esto se ve en aplicaciones de electrostática, flujo de calor y fluidos.

una función compleja

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

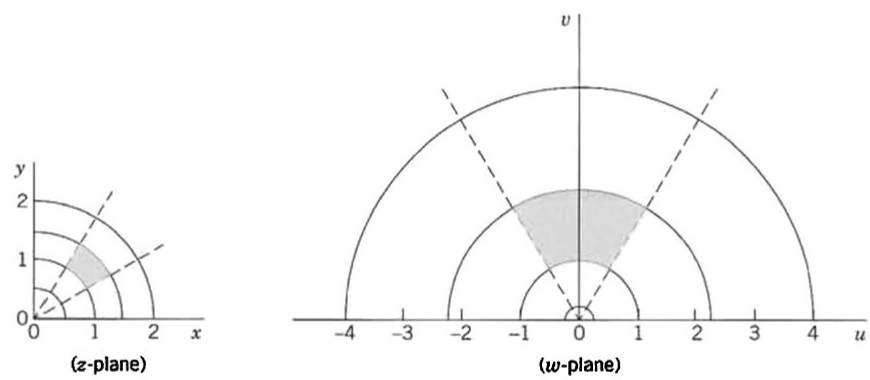
con $z = x + iy$. Para cualquier punto $z_0 \in D$ existe un punto $w_0 = f(z_0)$ que es llamado la imagen de z_0. No solo la imagen de puntos individules se pueden definir, sino de forma más general contornos C y otros tipos de conjuntos.

Ejemplo: Mapeo $w = f(z) = z^2$

Usando la forma polar $z = re^{i\theta}$ y $w = Re^{i\phi}$. Por tanto tenemos $w = z^2 = r^2 e^{2i\theta}$. Por comparación vemos que $R = r^2$ y $\phi = 2\theta$.

En coordenadas cartesianas $z = x + iy$ se obtiene $u = Re(z^2) = x^2 - y^2$ $v = Im(z^2) = 2xy$.

Por tanto las lineas verticales $x = c = constante$ son mapeadas en $u = c^2 - y^2$, $v = 2cy$. Eliminando la coordenada y se obtiene $y^2 = c^2 - u$ y $v^2 = 4c^2 y^2$. Entonces $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$ que son parabolas que abren hacia la izquierda. De forma similar, las lineas horizontales $y = k = constante$ son mapeadas en parabolas que abren hacia la derecha: $v^2 = 4k^2(k^2 + u)$.



$w = z^2$. lineas $|z| = const$, $\arg z = const$ y sus imagenes en el plano w

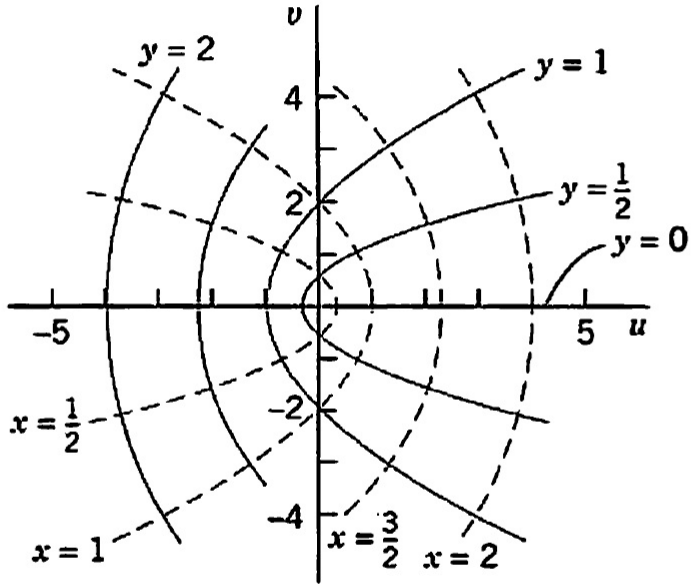
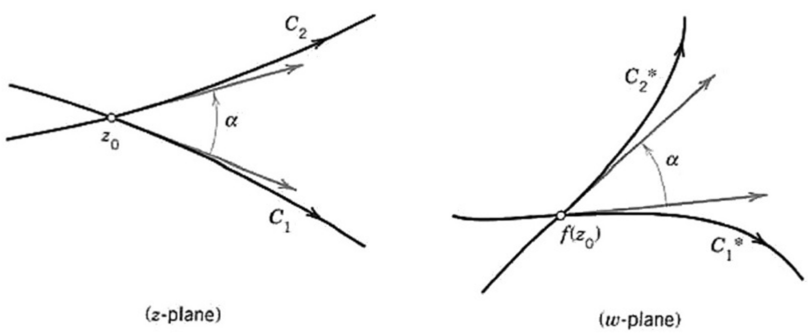


Imagen de $x = const, y = const$ para $w = z^2$

Un mapeo conformal preserva los ángulos en magnitud así como en sentido



Curves C_1 and C_2 and their respective images C_1* and C_2* under a conformal mapping $w = f(z)$

Teorema

El mapeo $w = f(z)$ por una función analítica f es conformal, excepto en los puntos críticos, estos son puntos donde la derivada f' es cero.

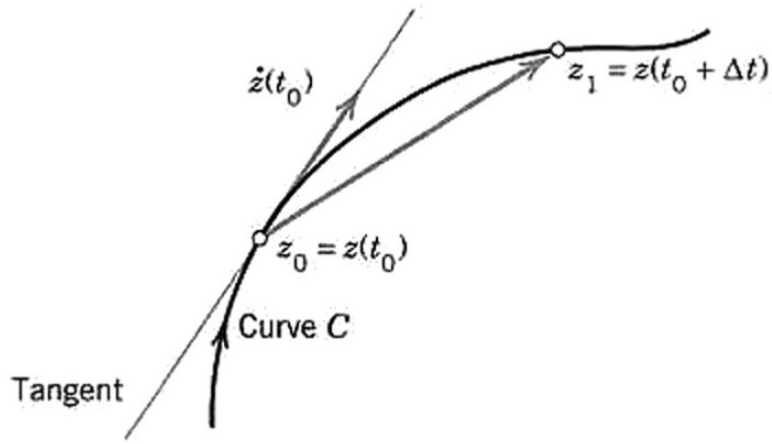
Demostración: Considere la curva

$$C: \quad z(t) = x(t) + iy(t)$$

en el dominio $f(z)$. La idea es demostrar que $w = f(z)$ rota con el mismo ángulo todas las tangentes en el punto z_0 donde $f'(z) \neq 0$. Nótese que $\dot{z} = \dot{x} + \dot{y}$ es tangente a la curva C y la dirección es dada por $\arg(\dot{z})$. Por regla de la cadena se tiene que $\dot{w} = f'(z(t))\dot{z}(t)$. La tangente de la curva imagen $C^\star$ es dada por el argumento

$$\arg(\dot{w}) = \arg(f') + \arg(\dot{z})$$

Esto muestra que el mapeo rota todas las direcciones en el punto z_0 siempre y cuando $f'(z(t)) \neq 0$ (ver figura de ejemplo).



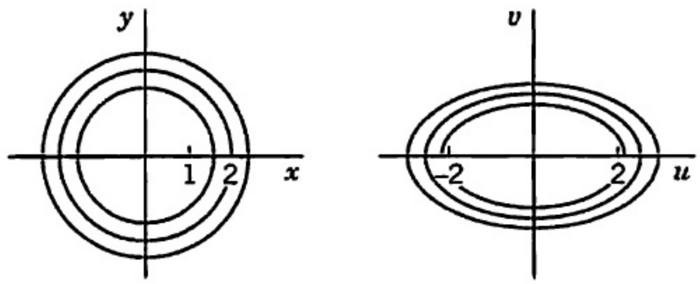
Ejemplo: Mapeo Conforme: $w = z^n$

Ejemplo: Mapeo Conforme: $w = z + 1/z$. Joukowski Airfoil

$$w = u + iv = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

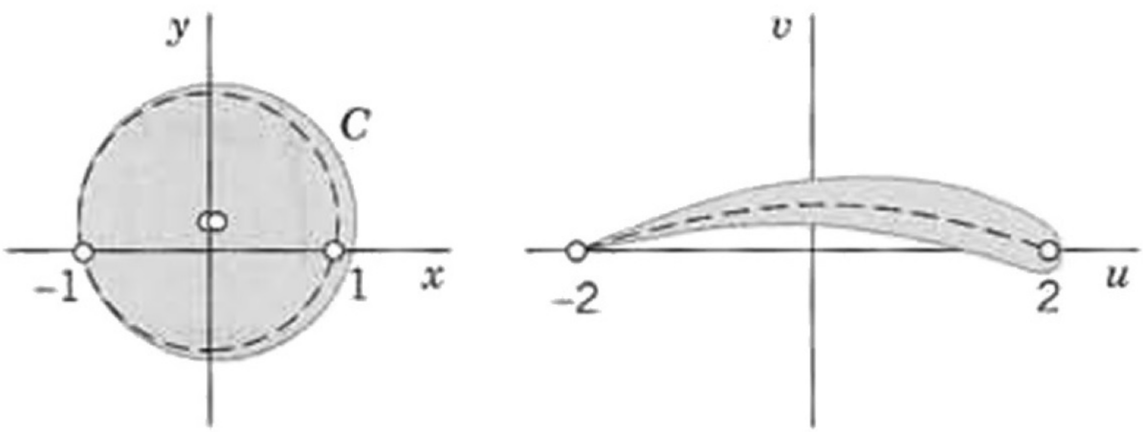
$$u = a\cos\theta, \qquad v = b\sin\theta \qquad \text{where} \qquad a = r + \frac{1}{r}, \quad b = r - \frac{1}{r}.$$

$$|z| = r = const \neq 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$



$$w' = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2}$$

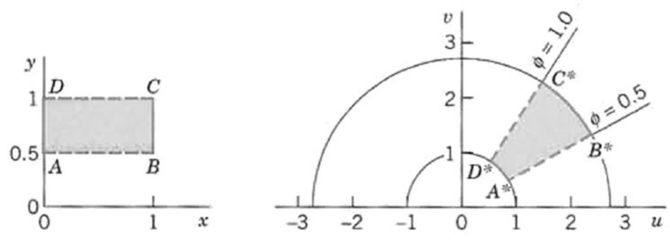
Este mapeo no es conforme cuando $z = \pm 1$.



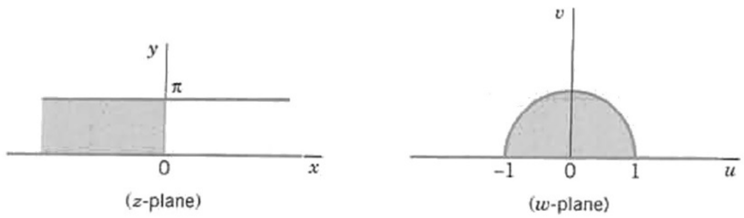
Joukowski airfoil

Ejemplo cuando un círculo pasa por uno o dos de los puntos críticos.

Ejemplo: Mapeo Conforme: $w = e^z$



$\boldsymbol{w = e^z}$



$\boldsymbol{w = e^z}$

Principio del Mapeo inverso

El mapeo por una función inversa $z = f^{-1}(w)$ es obtenido por medio del intercanbio de los roles del plano z y el plano w en el mapeo $w = f(z)$.

Ejemplo: $w = \ln z$ el inverso es $z = e^w$, es decir $f^{-1}(w) = e^w$.