Isomorfismo entre complejos y reales

Un isomorfismo es una operación biyectiva entre dos conjuntos ordenados y que conserva el orden.

Sea $h : P \to Q / \forall p_1, p_2 \in P$ se tiene que $p_1 \leq p_2 \Leftrightarrow h(p_1) \leq h(p_2)$. En este caso los conjuntos P y Q se dicen similares.

Los números de la forma $(a, 0)$ tienen una correspondencia uno a uno con los números reales a, Esto es

$$(a, 0) \leftrightarrow a$$

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \leftrightarrow a + b$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b, 0) \leftrightarrow a \cdot b$$

Esas tres condiciones establecen lo que se llama un isomorfismo entre el conjunto de los $(a, 0)$ y los números reales a. Esto significa que $(a, 0)$ puede ser remplazado por a. Como caso particular $(0, 0)$ se puede remplazar por 0. Si se denota $(0, 1)$ por i entonces se puede ver que

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

por tanto i es la raíz cuadrada de -1: $i = \sqrt{-1}$

$$\Rightarrow \qquad (a, b) = a + ib$$

donde a es llamada la parte real y b la parte imaginaria del número complejo $a + ib$

Teorema: Dados dos números complejos $x = (a, b)$ y $y = (c, d)$ con $y \neq 0$ existe un único numero complejo $\delta = (g, h)$ tal que $y \cdot \delta = x$, donde

$$g = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{y} \quad h = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Por tanto, la división se define como

$$\delta = (g, h) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

Ejercicio

Muestre que el número complejo $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ satisface la ecuación

$$1 = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z}$$

Conjugado de un número complejo

El conjugado de un número complejo $x = (a, b) = a + ib$ es dado por $\overline{x} = (a, -b) = a - ib$. Con esta definición se puede verificar que

$$
\begin{aligned}
\overline{x+y} &= \overline{x} + \overline{y} && (1)\\
\overline{x-y} &= \overline{x} - \overline{y} && (2)\\
\overline{x \cdot y} &= \overline{x} \cdot \overline{y} && (3)\\
\overline{\left(\frac{x}{y}\right)} &= \frac{\overline{x}}{\overline{y}} \qquad y \neq 0 && (4)\\
& && (5)
\end{aligned}
$$

De estas propiedades se obtiene que para toda expresión racional $R(x, y, z, \cdots)$ se satisface la relación

$$\overline{R(x, y, z, \cdots)} = R(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \cdots)$$

Valor Absoluto de un número complejo

El valor absoluto de un número complejo $z = (a, b) = a + ib$ se escribe como $|z|$ y es dado por la operación $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Teorema

$$|z| = |\overline{z}| \qquad |z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$|Re(z)| \leq |z| \qquad |Im(z)| \leq |z|$$

Teorema

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$$

Teorema

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Este teorema se puede extender a cualquier número finito de números complejos.

Teorema

$$\left| \sum_{k=1}^{N} z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{N} |z_k|$$

Teorema

$$\Big| |z_1| - |z_2| \Big| \leq |z_1 - z_2|$$

caso especial

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + iz_2|$$

Fórmula para el valor absoluto de una suma

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

Identidad de Lagrange para complejos

$$\left| \sum_{k=1}^{N} a_k b_k \right|^2 = \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{N} |b_k|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq N} |a_i \bar{b}_j - a_j \bar{b}_i|^2$$