Métodos de la Física matemática

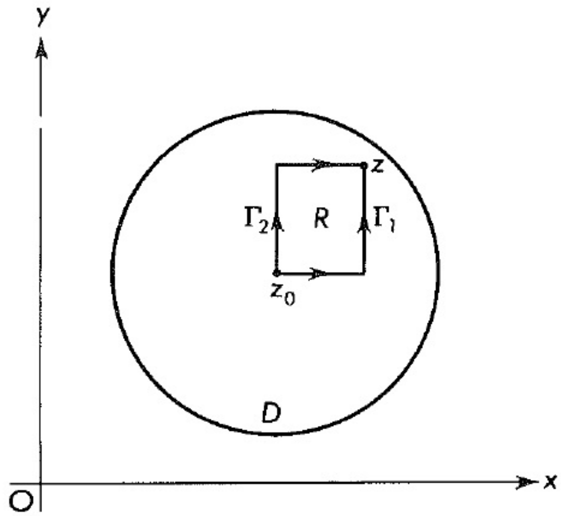
Lemma: Sea $f(z)$ analítica en el interior D de un círculo y sea z_0 el centro de este círculo. Considere

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta,$$

donde la trayectoría de integración entre el punto inicial y final esta dado por la suma de un segmento vertical y uno horizontal. Entonces $F(z)$ es uni-valuada y analítica en D por tanto se tiene que

$$f(z) = F'(z).$$

En otras palabras existe una antiderivada.



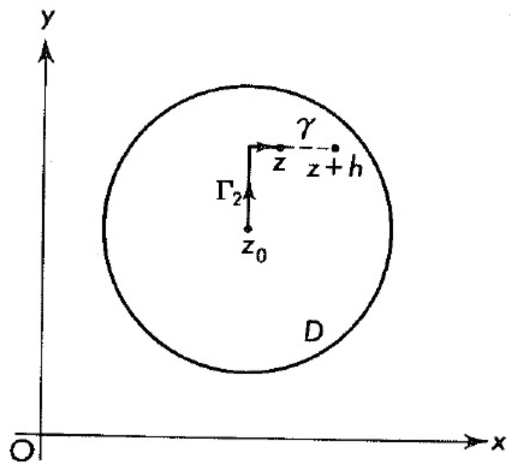
Demostración:

Como D es simplemente conectado, entonces tenemos que

$$\int_{\Gamma_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_2} f(\zeta) d\zeta$$

Para demostrar que $F(z)$ es analítica en D y por tanto que $f(z) = F'(z)$ se debe demostrar que $f(z) = F_x = -iF_y$.

Considerese dos puntos z y $z+h$ con $z \in C$ y $h \in R$ ambos en el dominio D tal como se muestra en la figu-



ra:
Nótese que el contorno entre z y $z+h$ es llamado γ.

Es fácil ver que

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{\Gamma_2+\gamma} f(\zeta)d\zeta - \int_{\Gamma_2} f(\zeta)d\zeta\right] = \frac{1}{h}\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^1 f(\zeta+ht)hdt = \int_0^1 f(\zeta+ht)dt.$$

Nótese que para $h=0$ se tiene que

$$\int_0^1 f(\zeta)dt = f(\zeta)\int_0^1 dt = f(\zeta).$$

Con este resultado podemos decir que

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(\zeta)\right| = \left|\int_0^1 f(\zeta+ht)dt - \int_0^1 f(\zeta)dt\right| = \left|\int_0^1 [f(\zeta+ht)-f(\zeta)]dt\right| \leq 1 \cdot \max_t \left|f(\zeta+ht)-f(\zeta)\right|$$

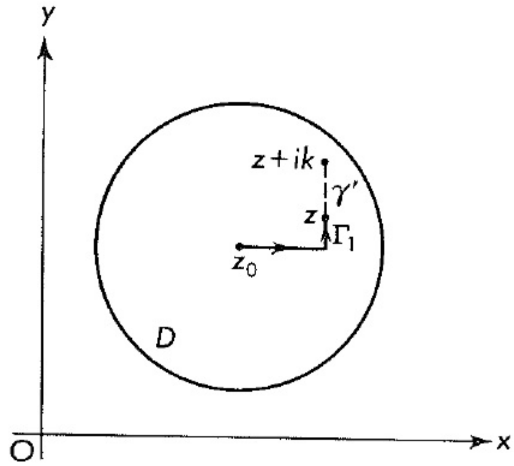
por tanto

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(\zeta)\right| = 0$$

es decir

$$F_x(z) = f(z).$$

Para mostrar que $f(z) = -iF_y(z)$ consideramos nuevamente dos puntos z y $z+ik$ con $z \in C$ y $k \in R$ ambos en el dominio D tal como se muestra en la figura:



Y se sigue la misma estrategía, como en el caso anterior, para obtener

$$\lim_{k\to 0}\left|\frac{F(z+ik)-F(z)}{k}-if(\zeta)\right|=0$$

es decir

$$f(z)=-iF_y(z).$$

Estos resultados para la función $f(z)$ llevan a concluir que:

$$F_x(z)=-iF_y(z).$$

Esta última relación satisface las condiciones de Cauchy-Riemman, lo cual se puede demostrar facilmente así: Sea $F(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, entonces

$$u_x+iv_x=-i(u_y+iv_y)=v_y-iu_y.$$

Tomando la parte real e imaginaría de esta última relación se tiene que $u_x=v_y$ y $v_x=-u_y$. Luego $F(z)$ es analítica en D y por tanto $f(z)=F'(z)$.

Teorema integral de Cauchy para el interior de un círculo: Cauchy-Goursart

Nótese que el interior de un circulo es un dominio simplemente conectado.

Sea $f(z)$ analítica in el interior D de un círculo y sean Γ_1 y Γ_2 dos contornos en D con los mismos puntos iniciales y finales. Entonces

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz=\int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

En otras palabras

$$\int_{\Gamma_1+\overline{\Gamma}_2} f(z)dz=\int_{\Gamma} f(z)dz=0,$$

donde $\Gamma=\Gamma_1+\overline{\Gamma}_2$ es un contorno cerrado.

Aproximación a través del análisis vectorial: Teorema de Green

Sea $\vec{V} = (V_1, V_2)$ un vector de campo continuo y diferenciable, definido en un dominio D conectado simplemente. Sea Γ un contorno cerrado simple y positivamente orientado dentro de D. Entonces en dos dimensiones se tiene

$$\int_\Gamma \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\Gamma_{area}} \nabla \times \vec{V} dxdy$$

que puede ser expresada como

$$\int\limits_\Gamma (V_1 dx + V_2 dy) = \iint_{\Gamma_{area}} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dxdy,$$

donde Γ_{area} denota el área encerrada por Γ.

Si aplicamos este resultado al plano complejo, se obtiene:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma (udx - vdy) + i \int_\Gamma (vdx + udy) = \iint_{\Gamma_{area}} (-v_x - u_y) dxdy + i \iint_{\Gamma_{area}} (u_x - v_y) dxdy.$$

Si $f(z)$ es analítica en D, cada una de las dobles integrales es igual a cero debido a las relaciones de Cauchy-Riemann. En otras palabras

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$