Métodos de la Física matemática

Definición de potencias usando el logaritmo

definición $z^a = e^{a \log z}$ con $a \in C$ y $z, a \neq 0$

Esta función es analítica

$$\frac{d}{dz}(z^a) = \frac{d}{dz}(e^{a \log z}) = e^{a \log z}\frac{a}{z} = e^{a \log z}\frac{a}{e^{\log z}} = ae^{(a-1)\log z} = az^{(a-1)}$$

$$z^a = e^{a \log z} = e^{a(\log|z| + i \arg z + 2i\pi n)}$$

con $-\pi < \arg z \leq \pi$

El valor principal es z^a es

$$z^a = e^{a \log z} = e^{a(\log|z| + i \arg z)}$$

Ejemplo:

$$(-i)^i = e^{i \log|-i| - i\pi/2} = e^{\pi/2}$$

La función logaritmo también puede ser usada para definir el inverso de las funciones trigonométricas complejas.

Ejemplo: demostrar

$$\arcsin(z) = -i \log\left[iz + \sqrt{1-z^2}\right]$$

Solución

$$w = \arcsin(z) \rightarrow z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \rightarrow e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0 \rightarrow e^{2iw} - e^{iw}(2iz) - 1 = 0$$

$$\rightarrow e^{iw} = iz \pm \sqrt{1-z^2}$$

Por tanto una raiz es:

$$w = -i \log(iz + \sqrt{1-z^2})$$

La otra raiz se obtiene de la expresión

$$e^{iw} = iz - \sqrt{1-z^2}$$

Nótese que

$$(iz - \sqrt{1-z^2})(iz + \sqrt{1-z^2}) = -1 = e^{i\pi}$$

por tanto

$$-i \log(iz - \sqrt{1-z^2}) - i \log(iz + \sqrt{1-z^2}) = \pi$$

Es decir que la segunda raiz se puede escribir como

$$w_2 = \pi - w$$

$$\rightarrow \sin(\pi - w) = -\cos(\pi)\sin w = \sin w$$

por tanto

$$\arcsin(z) = -i \log\left[iz + \sqrt{1-z^2}\right]$$

Funciones multivaluadas: Ramas y cortes

Como se menciono antes, una función multivaluada puede verse como una colección de funciones univaluadas llamadas ramas. Un ejemplo de esto es la función

$$f(z) = \sqrt{z} \quad \text{con} \quad z = re^{i\theta_0}$$

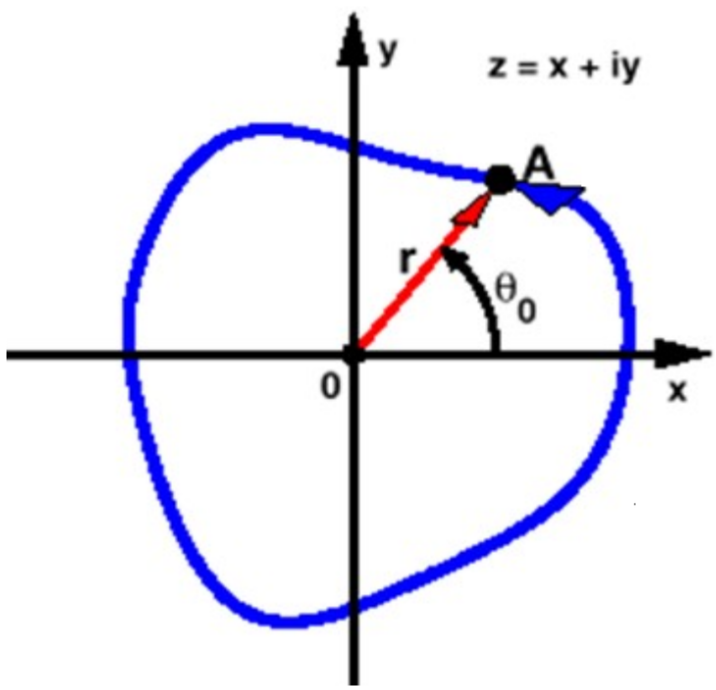
donde sus raices usando el teorema deMoivre son

$$w_k = \sqrt{r}e^{i\theta_0/2 + i\pi k} \quad \text{con} \quad k = 0, 1$$

es decir

$$w_0 = \sqrt{r}e^{i\theta_0/2} \quad \text{y} \quad w_1 = \sqrt{r}e^{i\theta_0/2 + i\pi} = -\sqrt{r}e^{i\theta_0/2}$$

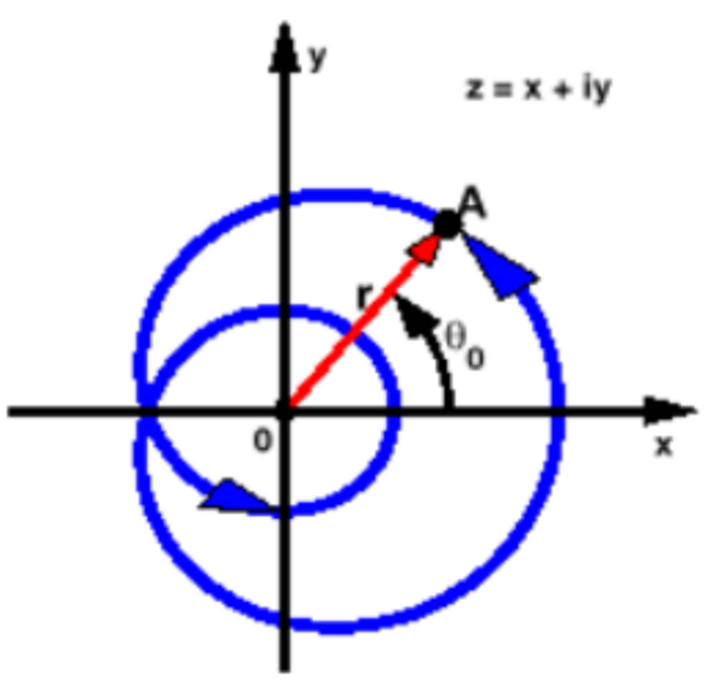
Como consideramos que $z = re^{i\theta_0}$, en principio se puede girar la función z siguiendo un camimo continuo como muestra la figura:



Al final del giro se obtendria que $z = re^{i\theta_0 + i2\pi}$, por tanto su raiz principal tomaría la forma

$$w_0 = \sqrt{r}e^{i\theta_0/2+i\pi}$$

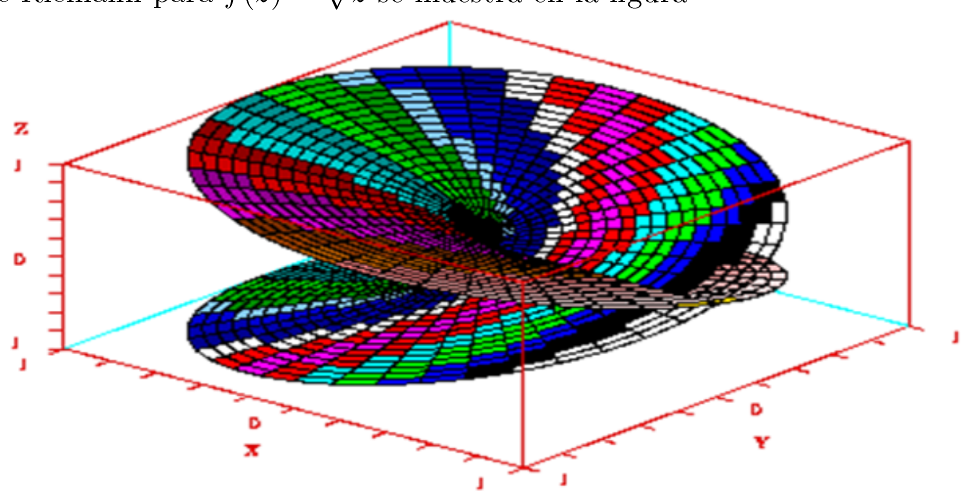
Es decir que la raiz sufre una “crisis de identidad”. Si damos dos vueltas (alrededor de $z = 0$) volvemos al punto de partida



En este caso $z = 0$ es llamado punto de ramificación.

Definición: Un punto de ramificación de una función de $f(z)$ es aquel donde la función $f(z)$ no regresa a su valor original cuando se traza una curva cerrada alrededor de él, de manera que $f(z)$ varía de forma continua a medida que se recorre la curva. La curva, en principio es arbitraría y la función $f(z)$ no tiene que ser continua o existir en el punto de ramificación.

La superficie de Riemann para $f(z) = \sqrt{z}$ se muestra en la figura

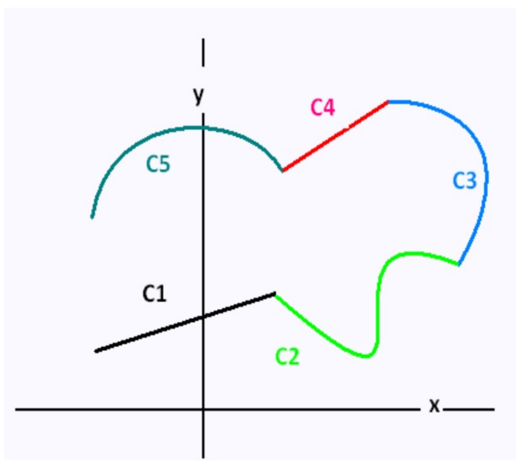


Cada rama de la función corresponde a un piso de la superficie. La raices se observan como cortes de la superficie de Riemann. Para el caso de la raiz cuadrada hay un solo corte además las vueltas pares llegan al corte por un camino y las impares por otro. Estas dos formas de llegar al corte corresponden a las dos raices.

Integración

Definición: Sea $z = f(t)$ una función compleja parametrizada en el intervalo $\alpha < t < \beta$. Esta función puede ser representada por una curva continua en la medida que el parametro t varía. Supongase que la derivada $f'(t)$ también existe, quizás exeptuando los puntos extremos $t = \alpha$ y $t = \beta$. Este tipo de curvas es llamado curva regular.

Definición: Sea $z = f(t)$ una función compleja parametrizada en el intervalo $\alpha < t < \beta$. Suponga que existe una sub-división tal que $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$. Si se restringe la función $f(t)$ a cualquiera de estos sub-intervalos $t_k < t < t_{k+1}$ con $k = 1, 2, \cdots, n$, entonces la función representa una curva regular en ese intervalo. Por tanto, la función $z = f(t)$ en el intervalo $\alpha < t < \beta$ representa una curva a trozos o un contorno.



Ejemplo de curva continua a trozos

De esta definición sigue que la $f'(t)$ es continua y diferente de cero en todas partes exepto quizás en los puntos de contacto entre los diferentes sub-intervalos. Gráficamente, el contorno consiste de un número finito de curvas regulares unidas en sucesión.

Definición: Un contorno es cerrado si $f(\alpha) = f(\beta)$.

Definición: Un contorno se dice simple si no se cruza asimismo.

Ejemplos de contornos:

• Línea recta: $z = z_1 + (z_2 - z_1)t$ con $0 \leq t \leq 1$ • Circulo: $z = z_1 + (z_2 - z_1)e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$

Integrales de Contorno

Sea $H(t) = H_1(t)+iH_2(t)$ una función compleja, donde $H_1(t)$ y $H_2(t)$ son reales en el intervalo $\alpha < t < \beta$, entonces la operación integración es definida así:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} H(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} H_1(t)dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} H_2(t)dt.$$

Para simplificar la notación, el operador integral $\int$ se considera que actua hacia la derecha.

Sea la parametrización $z = f(t)$ tal que $dz/dt = f'(t)$ es continua a trozos, entonces las la integral

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} G[f(t)]f'(t)dt = \int_C G(z)dz$$

existe y continuna a trozos. El valor de esta integral depende del contorno C (o también llamado trayectoría) que se siga. Nótese que en la definición de la integral compleja la trayectoria C es dada por $z = f(t)$, con $\alpha < t < \beta$.

Algunas propiedades de las integrales de contorno:

Sea $F(z)$ una función compleja.

- Para $C = C_1 + C_2$ se tiene que

$$\int_C F(z)dz = \int_{C_1+C_2} F(z)dz = \int_{C_1} F(z)dz + \int_{C_2} F(z)dz$$

- Para una trayectoria inversa $\overline{C} = -C$ se tiene que

$$\int_C F(z)dz = -\int_{\overline{C}} F(z)dz = -\int_{-C} F(z)dz,$$

- La expresión $n\int_C F(z)dz$ implica considerar n-veces la integral $\int_C F(z)dz$ sobre el contorno C, en otras palabras la trayectoría trazada varias veces.

- Si $H(t) = H_1(t) + iH_2(t)$ con $H_1(t) \in R$ y $H_2(t) \in R$, entonces

$$Re\left\{\int_{\alpha}^{\beta} H(t)dt\right\} = \int_{\alpha}^{\beta} Re\{H(t)\}dt$$

Tarea: Demostrar

$$\left|\int_C G(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} G[f(t)]f'(t)dt\right| \leq \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big|G[f(t)]\Big|\Big|f'(t)\Big|dt = \int_C \Big|G(z)\Big|\Big|dz\Big|.$$