Funciones Analíticas de una sola variable compleja

Definición

Sea D es un conjunto no vacio de puntos del plano complejo. Si z puede denotar cualquier punto de D, entonces z es llamada una variable compleja y D es llamado dominio.

Definición

Una función de variable compleja z se define como

$$f: \quad D \rightarrow R$$

tal que a cada valor $z \in D$ le corresponde un único número complejo $w = f(z) \in R$. Nótese que R es un conjunto no vacio de puntos del espacio complejo y es llamado Rango. Si R consiste de un único punto entonces es llamado función constante.

Nota

- Una función compleja de un solo valor $w = f(z)$ con $z \in D$ y $w \in R$ es lo mismo que un mapeo de D en R.
- $w = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u, v \in R$ y $x, y \in R$.

Funciones Elementales

Polinomios

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n z^n \qquad a_n \in C \quad z \in C$$

Funciones racionales

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Función exponencial

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + \sin y)$$

Nótese que

$$e^z = e^{z+2k\pi i} \qquad k \in Z$$

Funciones trigonométricas (argumento real x)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad x \in R$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Nótese que $|\sin x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$

Funciones trigonométricas (argumento complejo z)

$$\sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\cos x = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Nótese que $|\sin z| \leq \infty$ y $|\cos x| \leq \infty$

Funciones hiperbólicas

$$\sinh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = -i \sin(iz) \qquad \cosh z = \cos(iz)$$

$$\sin z = -i \sinh(iz) \qquad \cos z = \cosh(iz)$$

Función logaritmo

Dado $z = x + iy \in C$, $z \neq 0$, se define

$$\log Z = \ln |z| + i(arg(z) + 2k\pi)$$

con $k \in Z$

Límite de funciones

Sea $w = f(z)$ con $z \in D$ excepto quizás en el punto $z_0 \notin D$. Entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

En otras palabras

$$f(z) \to w_0 \quad \text{cuando} \quad z \to z_0$$

si para $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Notas

- Si el limite existe, entonces es único.
- la operación de limite tambien es satisfecha por las operaciones de suma, resta, multiplicación y división.
- los polinomios también satisfacen la operación de límite.

Continuidad

Una función compleja $f(z)$ es continua en un punto z_0 si está definida en z_0 y en puntos próximos a z_0 toma valores próximos a $f(z_0)$.

La definición formal es la siguiente

Definición

La función $f(z)$ es continua en un punto z_0 si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ se verifica que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. En otras palabras, $f(z)$ es continua en z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Es importante subrayar que para que una función $f(z)$ sea continua en un punto z_0 hace falta verificar las siguientes tres condiciones

- $f(z_0$ esta definida
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Definición

Una función es continua en el dominio D si es continua en todos los puntos de D.

Teorema

Si las funciones $f(z)$ y $F(z)$ son continuas en el dominio D, entonces

- $f(z) + F(z)$
- $f(z) - F(z)$
- $f(z)F(z)$
- $kf(z)$ con k constante
- $f(z)/F(z)$ con $F(z) \neq 0$

son continuas en el punto z_0.

Definición

una función $f(z)$ es uniformemente continua en D si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall z_1, z_2 \in D$

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$$

cuando $|z_1 - z_2| < \delta$.

Teorema

Si $f(z)$ es continua en el conjunto compacto R, entonces $f(z)$ es uniformemente continua en R.

Prueba: En este caso para probar el teorema se supondrá que lo contrario es cierto y se mostrará que esto conduce a una contradicción.

Entonces supóngase que $f(z)$ es continua sobre un conjunto compacto R, pero falla en satisfacer la uniformidad de la continuidad en el conjunto. Por tanto, $\exists \varepsilon > 0 \quad / \quad \delta > 0$ y $\exists z, \zeta \in R$ tal que

$$|z - \zeta| < \delta \quad \text{y} \quad |f(z) - f(\zeta)| \geq \varepsilon.$$

Permitiendo que $\delta = 1/2, 1/3, 1/4, \cdots, 1/n, \cdots$ se pueden obtener dos secuencias de puntos en R: $\{z_n\}$ y $\{\zeta_n\}$ tal que

$$|z_n - \zeta_n| < 1/n \quad \text{y} \quad |f(z_n) - f(\zeta_n)| \geq \varepsilon.$$

Nótese que las dos ejemplos de subsecuencias puede ser $z_n = 1/(2n)$ y $\zeta_n = 1/(2n+1)$.

Como R es compacto, es decir está acotado y además es cerrado, entonces la secuencia $\{z_n\}$ tiene un punto de acumulación $z_0 \in R$. Por tanto, se puede tomar una subsecuencia $\{z'_n\}$ que converja a z_0. Podemos decir lo mismo para la otra subsecuencia $\{\zeta_n\}$, es decir tomar una subsecuencia $\{\zeta'_n\}$ de ésta tal que también converge en z_0. Por tanto, podemos decir

$$|z_0 - \zeta'_n| \leq |z_0 - z'_n| + | \leq |z'_n - \zeta'_n|.$$

Ya que $z'_n \to z_0$, se tiene que $|z_0 - z'_n| \to 0$. Lo mismo se puede decir para la otra subsecuencia, es decir $|z'_n - \zeta'_n| \to 0$.

Ahora bien

$$|f(z'_n) - f(\zeta'_n)| \leq |f(z'_n) - f(z_0)| + |f(z_0) - f(\zeta'_n)|.$$

Ya que $f(z)$ es continua en z_0, se ve que $|f(z'_n) - f(\zeta'_n)| \to 0$ para $n \to \infty$, lo cual contradice la suposición hecha al principio, i,e

$$|f(z) - f(\zeta)| \geq \varepsilon \quad \forall m.$$

Por tanto $f(z)$ es uniformemente continua en R.

La derivada de una función

Sea $f(z)$ definida en el dominio D y $z_0 \in D$ es cualquier punto fijo. $f(z)$ tiene derivada en el punto z_0 si los siguientes limites existen. El número $f'(z_0)$ definido por este límite es llamado la derivada:

$$\frac{df(z_0}{dz} = f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Esta definición implica que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

cuando $0 < |z - z_0| < \delta$.

Definición

Una función compleja es analítica en un dominio D si esta tiene derivada en todo punto de D.

Nota:

- Una función, $f(z)$, es analítica en z_0 si $f(z)$ es analítica en un dominio D conteniendo z_0.
- Una función, $f(z)$, es analítica en un conjunto S si la función es analítica en cada punto de S.
- Los términos holomórfica y regular son frecuentemente usados en lugar de analítica.

Teorema

Si $f(z)$ tiene una derivada en un punto z_0, entonces $f(z)$ es continua en z_0.

Prueba

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = 0\cdot f'(z_0) = 0$$

Entonces

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\{[f(z)-f(z_0)]+f(z_0)\} = f(z_0)+0 = f(z_0).$$

El resultado arriba implica que en una vecindad de z_0, la función $f(z)$ es acotada, i.e en una vecindad $|z-z_0|<\delta$, se tiene que $|f(z)|\leq M$ con M constante.

Nótese que la continuidad de una función en un punto z_0 no implica que la función tiene una derivada en z_0. Consideremos por ejemplo la función

$$f(z) = |z|^2$$

sea

$$g(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{|z|-|z_0|^2}{z-z_0}, \qquad z\neq z_0$$

Definiendo $z-z_0 = re^{i\theta}$ obtenemos

$$g(z) = \overline{z} + z_0\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0} = \overline{z} + z_0(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)$$

Es obvio que no existe un único límite para la función $g(z)$, luego la derivada no existe en este ejemplo particular.

Nota importante: Las fórmulas para las derivadas de funciones complejas son semejantes a las fórmulas de las funciones reales.