Pauta I-2

FIZ0223 -Métodos de la Física Matematica 1

Facultad de Física

Pontificia Universidad Católica de Chile

Octubre 11, 2016

Cada problema tiene un puntaje máximo de 1

1. Problema

Encuentre el valor de $\int\limits_{|z|=1} |z-1|\,|dz|$ en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

Solución: El contorno de integración es un círculo centrado en cero y de radio 1, i.e $z = e^{i\theta}$. Entonces $dz = e^{i\theta} i d\theta \to |dz| = d\theta$.

Sea $f = |z-1| = |e^{i\theta} - 1|$, entonces

$$f^2 = |e^{i\theta} - 1|^2 = (e^{i\theta} - 1)(e^{-i\theta} - 1) = (2 - e^{-i\theta} - e^{i\theta}) = 2(1 - \cos\theta) = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

La función $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ es positiva para $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\int\limits_{|z|=1} |z-1|\,|dz| = 2\int\limits_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8 \qquad \blacksquare$$

2. Problema

Consiere $F(z)$ definida como

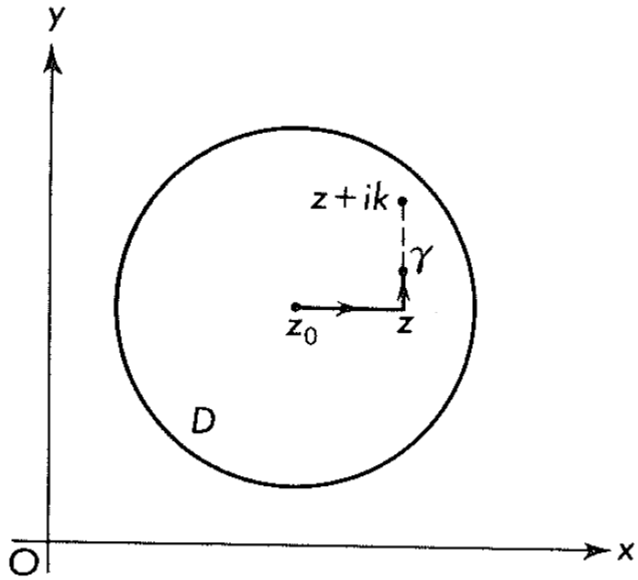
$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta,$$

donde la trayectoria entre los puntos z y $z + ih$ es vertical y en el sentido positivo de la coordenada y. Muestre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+ih) - F(z)}{h} = \frac{\partial F(z)}{\partial y} = if(z),$$

donde $f(z)$ es analítica en el dominio simplemente conexo que contiene la trayectoria entre z y $z + ih$.

Solución: la curva sobre la que se integra esta indicada por la letra γ en la figura



$$F(z+ih) = \int_{z_0}^{z+ih} f(\zeta)d\zeta,$$

$$F(z+ih) - F(z) = \int_{z_0}^{z+ih} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{z}^{z+ih} f(\zeta)d\zeta = \int_{0}^{1} f(z+iht)ihdt$$

$$\frac{F(z+ih)-F(z)}{ih} = \int_0^1 f(z+iht)dt$$

además es necesario notar que

$$f(z) = \int_0^1 f(z)dt$$

entonces

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(z+ih)-F(z)}{ih} - f(z)\right| = \lim_{h\to 0}\left|\int_0^1 (f(z+iht)-f(z))dt\right| = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F(z)}{i\partial y} = f(z) \Rightarrow \frac{\partial F(z)}{\partial y} = if(z) \qquad \blacksquare$$

3. Problema

(a) Muestre que

$$\left|\int_C (x^2+iy^2)dz\right| \leq \pi$$

donde C es un semi-círculo donde $z = \pm i$ son los extremos del diámetro.

Solución: El contorno de integración es un semicírculo centrado en cero y de radio 1, i.e $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Entonces $dz = e^{i\theta} i d\theta \to |dz| = d\theta$ así como $x = \cos\theta$ y $y = \sin\theta$.

$$\left| \int_C (x^2 + iy^2) dz \right| \leq \int_C |x^2 + iy^2||dz| = \int_C \sqrt{x^4 + y^4}|dz|$$

Nótese que

$$\sqrt{x^4 + y^4} = \sqrt{\cos^4\theta + \sin^4\theta} \leq 1$$

entonces

$$\int_C \sqrt{x^4 + y^4}|dz| \leq \int_C |dz| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi$$

$$\Rightarrow \left| \int_C (x^2 + iy^2) dz \right| \leq \pi \qquad \blacksquare$$

(b) Sea C es la frontera de un triángulo de vértices: $z = 0$, $z = -3$ y $z = -4i$ orientado en la forma positiva, entonces encuentre la cota superior del valor absoluto de $\int_C (e^z - \overline{z})\, dz$.

Solución:

$$\left| \int_C (e^z - \overline{z})\, dz \right| \leq \int_C |e^z - \overline{z}||dz|$$

Nótese que

$$|e^z - \overline{z}| \leq |e^z + (-\overline{z})| \leq |e^z| + |-\overline{z}| = |e^z| + |z| = e^x + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ahora buscamos cual es el valor más alto que puede tomar esta última funsión en el contorno triangular. Examinando los tres puntos nos damos cuenta que el valor más alto ocurre en el punto $z = -4i = (0, -4)$, i.e. $x = 0$ e $y = -4$. En este caso

$$e^x + \sqrt{x^2 + y^2}\Big|_{z=-4i} = 1 + 4 = 5.$$

$$\Rightarrow \int_C |e^z - \overline{z}||dz| \leq 5 \int_C |dz| = 5L(c)$$

donde $L(C)$ es la longitud del contorno, i.e. el perímetro del triángulo $L(C) = 3 + 4 + 5 = 12$.

$$\Rightarrow \left| \int_C (e^z - \overline{z})\, dz \right| \leq 5 \times 12 = 60$$

$$\Rightarrow \left| \int_C (e^z - \overline{z})\, dz \right| \leq 60 \qquad \blacksquare$$

(c) Encuentre la cota superior del valor absoluto de $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z+1} dz$.

Solución (forma a):

$$\left| \int\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z+1} dz \right| \leq \int\limits_{|z|=4} \left| \frac{e^z}{z+1} \right| |dz| = \int\limits_{|z|=4} \frac{|e^z|}{|z+1|} |dz|$$

Nótese que $z = 4e^{i\theta}$, entonces $|z+1|^2 = (4e^{i\theta}+1)(4e^{-i\theta}+1) = 17 + 8\cos\theta$, por tanto

$$9 \leq 17 + 8\cos\theta \leq 25$$

$$\Rightarrow 3 \leq |z+1| \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{|z+1|} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \left| \int\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z+1} dz \right| \leq \frac{e^4}{3} \int\limits_{|z|=4} |dz| = \frac{e^4}{3}(2\pi)4 = \frac{8e^4\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \left| \int\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z+1} dz \right| \leq \frac{8e^4\pi}{3} \qquad \blacksquare$$

Solución (forma b):

$$\left| \int\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z+1} dz \right| = \left| 2\pi i e^{-1} \right| = 2\pi e^{-1} = \text{constante} \qquad \blacksquare$$

4. Problema

(a) Sea $f(z)$ entera y $|f(z)| \geq 1$ sobre todo el plano complejo. Demuestre que f es constante. Explique claramente.

Solución: Como $|f(z)| \geq 1$, entonces no tiene raices, lo que implica que $g(z) = 1/f(z)$ es una función entera. Pero además $|g(z)| = 1/|f(z)| \leq 1$, entonces por el teorema de Liouville $g(z)$ es constante. Por tanto podemos concluir que $f(z) =$constante $\quad \blacksquare$.

(b) Sea $f(z)$ una función entera tal que $|f(z)| < |e^z|$, con $z \in C$. Obtenga la expresión general de $f(z)$. Explique claramente.

Solución: Nótese que $|f(z)/e^z| < 1$, luego por el teroma de Liouville la función $g(z) = f(z)/e^z$ es constante. En otras palabras $f(z)/e^z = K$, donde K es constante. Obviamente la expresion general es $f(z) = Ke^z \quad \blacksquare$.

(c) Halle todas las funciones analíticas en el disco $|z| \leq 4$ y que verifiquen que $f(2+i) = 3+4i$ tal que $|f(z)| \leq 5$. Explique claramente.

Primero verificamos que el punto $z_0 = 2+i$ esta dentro del disco $|z| \leq 4$. Segundo verificamos el módulo $|f(z_0)| = |f(2+i)| = |3+4i| = 5$, luego $|f(z_0)| = |f(2+i)|$ es el máximo local en el disco $|z| \leq 4$. Entonces por el teorema del valor medio sabemos que la única posible función existente en el disco $|z| \leq 4$ es $f(z) = 3+4i \qquad \blacksquare$.

5. Problema

Evalue las integrales

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz, \quad \int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz \quad \text{y} \quad \int\limits_{|z|=1} \frac{\sin e^z}{z} dz.$$

Solución (i)

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \cos z \Big|_{z=0} = 2\pi i \qquad \blacksquare$$

Solución (ii)

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz = 2\pi i \frac{d}{dz} \sin z \Big|_{z=0} = 2\pi i \qquad \blacksquare$$

Solución (iii)

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin e^z}{z} dz = 2\pi i \sin e^z \Big|_{z=0} = 2\pi i \sin(1) \qquad \blacksquare$$

6. Problema

Sea $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ donde a_k es constante. Calcular la integral

$$I = \int\limits_{|z|=r} z^{n-1} |p(z)|^2 dz,$$

Nótese que el integrando no es una función analítica debido al valor absoluto.

Solución:

$$I = \int\limits_{|z|=r} z^{n-1} |p(z)|^2 dz = \int\limits_{|z|=r} z^{n-1} p(z)\overline{p(z)} dz = \int\limits_{|z|=r} z^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k \overline{z}^k \right) dz$$

Nótese que $r^2 = |z|^2 = z\overline{z}$ entonces $\overline{z} = r^2/z$. Usando este hecho reescribimos la integral

$$I = \int\limits_{|z|=r} z^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k \frac{r^{2k}}{z^k} \right) dz = \int\limits_{|z|=r} z^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right) \left(\sum_{k'=0}^{n} \overline{a}_{k'} r^{2k'} z^{n-k'} \right) dz$$

$$I = \int\limits_{|z|=r} z^{-1} \left(\sum_{k,k'=0}^{n} r^{2k'} a_k \overline{a}_{k'} z^{n+k-k'} \right) dz = \sum_{k,k'=0}^{n} r^{2k'} a_k \overline{a}_{k'} \int\limits_{|z|=r} z^{-1} \left(z^{n+k-k'} \right) dz$$

Nótese que $n + k - k' \geq 0$. Entonces el único termino que después de integración es diferente de cero es aquel para el cual $n + k - k' = 0$, es decir $k = 0$ y $k' = n$.

$$I = 2\pi i r^{2n} a_0 \overline{a}_n \qquad \blacksquare$$