Ayudantía 4. Metodos.

Problema 1:

La condición de Cauchy Riemann nos dice que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}$$

Sea $f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$. Entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

Por igualdad de complejos tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (2)$$

Como debe cumplirse (1) (y) (2) se tiene que:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2) = -2x$$

Integrando respecto a y tenemos:

$$\int \frac{\partial v}{\partial y}dy = -2xy + c = v(x,y).$$

donde c es una constante.

De la ecuación (2) se llega a lo mismo. ∴ las funciones buscadas son del tipo:

$$f_\lambda(x,y) = x^2-y^2 - 2ixy + \lambda.$$

donde λ es complejo.

Problema 2:

$f(z)$ continua en R compacto $\Rightarrow$ $f(z)$ uniformemente continua en R.

Utilizaremos el metodo de demostración por contradicción: $|z_1 - z_2| < \delta$ $\Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| \geq \varepsilon$; $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$

Dado que R es compacto, toda secuencia de numeros tiene punto limite en el espacio. En particular sean ξ_n y η_n tales que tienen (ambos) punto limite z_0. Entonces, escojamos un δ arbitrario tal que.

$$|\xi_n - \eta_n| < \delta.$$

Concideramos ahora:

$$|f(\xi_n) - f(\eta_n)| = |f(\xi_n) - f(z_0) + f(z_0) - f(\eta_n)|$$

por la desigualdad del triangulo tenemos que

$$|f(\xi_n) - f(\eta_n)| \leq |f(\xi_n) - f(z_0)| + |f(z_0) - f(\eta_n)|$$

Pero abiamos dicho que $\eta_n \to z_0$ y $\xi_n \to z_0$ y $f(z)$ es continua

$$\therefore \quad |f(\xi_n) - f(z_0)| \longrightarrow 0$$

$$|f(z_0) - f(\eta_n)| \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \quad |f(\xi_n) - f(\eta_n)| \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad |f(\xi_n) - f(\eta_n)| = 0 \geq \varepsilon$$

Pero ε es $\varepsilon > 0$. $\therefore$ hemos llegado a una contradicción.

Problema 3.

Las funciones armonicas son las que cumplen la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \left(\text{En cartesianas } 2D\right)$$

1:

$$\phi = \cancel{(\ldots)} = x^3 - 3y^2 x$$

$$\partial_x^2 \phi = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - 3y^2\right) = 6x$$

$$\partial_y^2 \phi = \frac{\partial}{\partial y}\left(-6yx\right) = -6x$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \phi = \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi = 6x - 6x = 0 \quad \therefore \text{ Es armonica.}$$

2. $\phi = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$

$$\partial_x\phi = 2x\cdot e^{x^2-y^2}\sin 2xy + e^{x^2-y^2}\cdot 2y\cos 2xy$$

$$\partial_x^2\phi = 2e^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2x\cdot 2x e^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2x e^{x^2-y^2}\cdot 2y\cos 2xy$$

$$= \cancel{2e^{x^2-y^2}\left\{\sin 2xy + 2x^2\sin 2xy + 2xy\cos 2xy\right\}}.$$

$$\cancel{\partial_y\phi = -2y e^{x^2-y^2}\sin 2xy + e^{x^2-y^2}\cdot 2x\cos 2xy}$$

$$\cancel{\partial_y^2\phi = -2e^{x^2-y^2}\sin 2xy - 2y\cdot(-2y)e^{x^2-y^2}\sin 2xy - e^{x^2-y^2}\cdot 4xy\cos 2xy}.$$

$$\partial_x^2\phi = 2e^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2x\cdot 2x\, e^{x^2-y^2}\sin 2xy + 2x e^{x^2-y^2}\cdot 2y\cos 2xy$$
$$+ 2x\, e^{x^2-y^2} 2y\cos 2xy - e^{x^2-y^2}\cdot 2y\cdot 2y\sin 2xy$$

$$= e^{x^2-y^2}\left(2\cancel{\sin} 2xy + 4x^2\cancel{\sin} 2xy + 4xy\cancel{\cos 2xy} + \cancel{4xy\cos} 2xy - 4y^2\cancel{\sin 2xy}\right)$$

$$\partial_y\phi = -2y e^{x^2-y^2}\sin 2xy + e^{x^2-y^2}\cdot 2x\cos 2xy.$$

$$\partial_y^2\phi = -2e^{x^2-y^2}\sin 2xy - 2y(-2y)e^{x^2-y^2}\sin 2xy - 2y\cdot 2x\cdot e^{x^2-y^2}\cos 2xy$$
$$- 2y\, e^{x^2-y^2}\cdot 2x\cos 2xy - e^{x^2-y^2}\cdot 2x\cdot\sin 2xy\cdot 2x$$

$$= -e^{x^2-y^2}\left(2\cancel{\sin(2xy)} - 4y^2\cancel{\sin} 2xy + 4yx\cancel{\cos} 2xy + 4yx\cancel{\cos} 2xy + 4x^2\cancel{\sin} 2xy\right)$$

$$\Rightarrow\quad \partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi = \nabla^2\phi = 0.$$

Problema 4:

Tenemos que

$$(1-z)\,(1+\cdots+z^N) = 1 - z^{N-1}$$

donde

$$(1+\cdots+z^N) = \sum_{n=1}^{N} z^n$$

es la suma parcial de la serie que queremos calcular.

si $z \neq 1$, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N-1}}{1-z}$$

$$= \frac{1}{1-z} - \frac{z^{N-1}}{1-z}$$

$$= \frac{1}{1-z} - z^N \cdot \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$= \frac{1}{1-z}\left[1 - \frac{z^N}{z}\right]$$

Notar que $\frac{1}{1-z}$ es una cantidad finita $\therefore$ solo nos interesa la convergencia del termino z^N.

- $|z| \geq 1 \Rightarrow z^N \longrightarrow \infty$
- $|z| < 1 \Rightarrow z^N \longrightarrow 0$.

Luego $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} z^N = \frac{1}{1-z}\left[1 - \frac{1}{z}\cancel{\lim_{N\to\infty} z^N}^{\,0}\right] = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$