Métodos de la física matemática I
Tarea 2 parte A

PROFESOR: EDWARD ARÉVALO (EAREVALO@FIS.PUC.CL)
AYUDANTE: AGUSTÍN ESCOBAR (ATESCOBAR@UC.CL)

7 de octubre de 2016

---

1. Problema: Teorema de Riemann

Mostrar que si $g(z)$ una función analítica en un dominio D, entonces la función $F_n(z_0)$ definida como

$$F_n(z_0) = \int_C \frac{g(z)dz}{(z-z_0)^n} \quad \text{con} \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

satisface la relación de recurrencia $F'_n(z_0) = nF_{n+1}(z_0)$, donde C es un contorno cerrado totalmente contenido en D.

2. Problema

Muestre que

$$\left| \int_C (x^2 + iy^2)dz \right| \leq \pi$$

donde C es un semi-círculo donde $z = \pm i$ son los extremos del diámetro.

3. Problema

Encuentre el valor de la

$$\int_C |z-1|\,|dz|$$

donde C es el círculo $|z| = 1$ descrito en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

4. Problema

Encuentre el valor de la integral

$$\int_{-i}^{i} |z|\, dz$$

(a) en la línea recta que va de $-i$ a i.
(b) sobre la mitad derecha del círculo $|z| = 1$ descrito en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

5. Problema

La función índice o numero de vueltas esta definida como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{G'(z)}{G(z)} dz = n$$

donde $G(z)$ es analítca sobre el contorno C. Muestre que esta función es invariante con respecto a traslaciones y rotaciones de los ejes coordenados.

6. Problema

Consiere $F(z)$ definida como

$$F(z) = \int_{z}^{z+h} f(\zeta) d\zeta,$$

donde la trayectoria entre los puntos z y $z+h$ es horizontal y en el sentido positivo de la coordenada x. Muestre que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{\partial F(z)}{\partial x} = f(z),$$

donde $f(z)$ es analítica en el dominio simplemente conexo que contiene la trayectoria entre z y $z+h$.

7. Problema

Encuentre el valor de la integral

$$\int_C \frac{9z^2 - iz + 4}{z(z^2+1)} dz$$

para los contornos C
(a) $|z| = 2$
(b) $|z| = 1/2$
(c) $|z + i| = 1/2$

8. Problema

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en el dominio D entonces por inducción muestre que

$$i^k f^{(n)} = \frac{\partial^n f(z)}{\partial x^r \partial y^k} = \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^r \partial y^k} + i\frac{\partial^n v(x, y)}{\partial x^r \partial y^k}, \quad r, k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

con $r + k = n$.

9. Problema

Use la fórmula de Cauchy para la derivada y demuestre que

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^z}{z^{n+1}} dz.$$

10. Problema: Fórmula de Wallis

Obtenga la fórmula de Wallis

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

a través de la integracion de $f(z) = (z + 1/z)^{2n}/z$ sobre $|z| = 1$.