

Métodos de la física matemática I

Tarea 2 parte B

PROFESOR: EDWARD ARÉVALO (EAREVALO@FIS.PUC.CL)

AYUDANTE: AGUSTÍN ESCOBAR (ATESCOBAR@UC.CL)

17 de octubre de 2016

11. Problema: Integral de Cauchy

Sea f una función analítica, pruebe que

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} - f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\frac{-1}{(z - z_0)^2} + \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} \right] f(z) dz,$$

donde $C : |z - z_0| = R$.

12. Problema: Integral de Cauchy

Evalúe las integrales

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} dz, \quad \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz \quad \text{y} \quad \int_{|z|=1} \frac{\sin e^z}{z} dz.$$

13. Problema: funciones enteras

Sea $f(z)$ entera y $|f(z)| \geq 1$ sobre todo el plano complejo. Demuestre que f es constante.

14. Problema: Integración

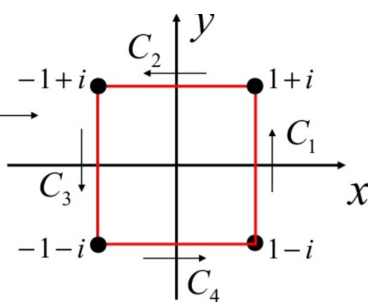
Calcular $\int_{\gamma} f(z) dz$ siendo $\gamma : z = e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$ y $f(z) = z^{-i+1}$.

15. Problema: Integración

Integrar la función $f(z) = 1/z$
a lo largo del cuadrado

Introducir un parámetro t
variando entre $-1 \leq t \leq +1$

$$\int_C f(z) dz = \int_{-1}^1 f[z(t)] \frac{dz}{dt} dt$$



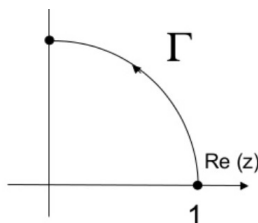
16. Problema

Encuentre la cota superior del valor absoluto de $\int_{|z|=4} \frac{e^z}{z+1} dz$.

17. Problema

Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\left| \int_{\Gamma} \text{Log } z dz \right| \leq \frac{\pi^2}{4}$$



18. Problema

Demostrar que si el contorno C es la frontera de un triángulo de vértices: $z = 0$, $z = 3i$ y $z = -4$ orientado en la forma positiva, entonces se verifica que

$$\left| \int_C (e^z - |z|) dz \right| \leq 60.$$

19. Problema: Integración

Sea $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ donde a_n es constante compleja. Calcular la integral $I = \int_{|z|=r} z^{n-1} |p(z)|^2 dz$.

20. Problema: Integración

Sea $G(z) = \int_{\pi-i\pi}^z \cos(3t)dt$.

- a) Determine si $G(z)$ es analítica
- b) Halle $G(\pi i)$
- c) Calcule $G'(z)$

21. Problema: Función índice

Muestre que el índice $\frac{1}{2\pi i} \int_C 1/z dz = 1$ a lo largo de un contorno cuadrado de vértices $1+i$, $1-i$, $-1-i$, $-1+i$ recorrido en el sentido antihorario.

22. Problema: Función índice

Sea $h(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0} ds$. Entonces demostrar que $\frac{1}{2\pi i} h(b)$ es un entero, donde el dominio de γ es $[a, b]$ con $\gamma(a) = \gamma(b)$.

23. Problema: Integración

De una función analítica $f(z)$ se sabe que

$$\operatorname{Im}(f(z)) = x^2 - y^2 + 3x + 2y - \frac{5y}{(x-1)^2 + y^2}.$$

Calcule $\int_{|z|=3} f(z) dz$.

24. Problema: Integral de Cauchy

Sea $f(z)$ analítica en el disco $|z| < R$ con $R > 1$. Calcule la integral

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

en función de f y sus derivadas evaluadas en el origen.

25. Problema: Integral de Cauchy

Sea $f(z)$ analítica en un dominio D y $z_0 \in D$. Probar que existe una circunferencia C , centrada en z_0 tal que si $f'(z) \neq 0$, se verifica

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)} = \int_C \frac{dz}{f(z) - f(z_0)}.$$

26. Problema: función entera

Sea $f(z)$ una función entera tal que

$$|f(z)| < |e^z|, \quad \text{con } z \in C$$

Con ayuda del teorema de Liouville obtener la expresión general de $f(z)$.

27. Problema: Teorema del valor medio

Con ayuda del teorema del valor medio halle todas las funciones analíticas en el disco $|z| \leq 4$ y que verifiquen que $f(2+i) = 3+4i$ y que $|f(z)| \leq 5$.

28. Problema: Función de Bessel

Probar que si $z \neq 0$, entonces

$$e^{\alpha(z-1/z)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) z^n$$

donde

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - \alpha \sin(\theta)) d\theta \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y conociendo además que

$$\int_0^{2\pi} \sin(\alpha \sin(\theta) - n\theta) d\theta = 0.$$