Ay. 3 Metodos.

Problema 1:

1.- Queremos demostrar que si:

$$\left.\begin{array}{l}\sum \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} S \\ \sum \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} S\end{array}\right\} \Rightarrow \sum z_n = S.$$

Dem: Podemos escribir la sucesión de la forma.

$$z_n = \operatorname{Re} z_n + i \operatorname{Im} z_n$$

Entonces

$$\sum z_n = \sum \operatorname{Re} z_n + i \sum \operatorname{Im} z_n.$$

Por hipótesis

$$\sum \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} S$$

$$\sum \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} S.$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \operatorname{Re} S + i \operatorname{Im} S.$$

Pero esto no es más que

$$S = \operatorname{Re} S + i \operatorname{Im} S.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \qquad \blacksquare$$

2.- Mostrar que $\sum |z_n| < \infty$

$$\Rightarrow \left| \sum z_n \right| \leq \sum |z_n|$$

Dem: Consideremos $\sum z_n$ absolutamente convergente
~~tenemos que~~:
La suma parcial de la serie es

$$\sum_{n=1}^{N} z_n = S_N$$

Por la desigualdad triangular

$$|S_N| = |z_1 + \cdots z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$$

$$\Rightarrow |S_N| \leq \sum_{n=1}^{N} |z_n|$$

Pero por hipotesis, $\sum z_n$ es absolutamente convergente

$$\Rightarrow |S_N| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

$\blacksquare$

3: Queremos demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} z_n < \infty.$$

$\Rightarrow$) Sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n < \infty$ el número al que converge la serie.

Por definición: $\exists M(\varepsilon)\ \forall \varepsilon > 0$ tal que

$$m > M(\varepsilon) \Rightarrow \quad |S - S_m| < \varepsilon$$

Notar que:

$$S_m = S_1 + \cdots + S_N + \cdots + S_m$$

$$S_m = \sum_{n=1}^{N} S_n + R_m$$

$$R_m = S_N + \cdots + S_m = \sum_{n=N}^{m} z_n.$$

Claramente, se cumple para S_n que; para $m > M$

$$|S - S_m| \overset{*}{=} |S - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} S_n}_{S'} - R_m|$$

$$\overset{*}{=} |S - S' - R_m| = |S'' - R_m|$$

pues S' es un numero (suma parcial) Entonces, como por hipótesis:

$$|S - S_m| < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow |S'' - R_m| < \varepsilon, \quad m > M.$$

$$\Rightarrow R_m \longrightarrow S'' < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} z_n < \infty.$$

$\Leftarrow$) queda propuesto (Tarea).

(1) Claramente:

$$\lim \frac{n i^n}{\log n} \longrightarrow \infty$$

$\therefore$ la serie diverge.

(2) Notar que:

$$\sum \frac{3n}{|(n+2i)^2|} = \sum \frac{3n}{(n^2+4)^3}$$

y $(n^2+4)^3 > n^3 \cdot \frac{1}{3n}$

$$\frac{3n}{(n^2+4)^3} < \frac{3}{n^2}$$

$\therefore$ por comparación, converge.

Estrategia: Por contradicción

(1) $|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| \geq \varepsilon$

Queremos demostrar que ~~no~~ ocurre esto nos lleva a una contradicción.

Estrategia de la demostración es

→ Encontrar secuencias que tienden a cero (su diferencia)
→ encontrar otras secuencias que tienden al mismo número (en particular subsecuencia)
→ Mostrar que la desigualdad triangular implica que

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq 0$$

$$\Rightarrow |f(z) - f(z_2)| = 0$$

Demo: ~~Conjunto compacto implica que podemos elegir~~

Sean z_{1n} y $z_{2n} \to z_0$. Entonces, podemos elegir δ tal que

$$|z_{1n} - z_{2n}| < \delta$$

Consideremos ahora $z_n^{1'}$ y $z_n^{2'}$ subsecuencias de z_1 y z_2 respectivamente.
⇒ Converge a z_0, Nota que: ~~$z_n^{2'} \to z_0$~~

⇒ ~~$|z_n^{1'} - z_n^{1'}| \leq |z_n^{1'} - z_n^{1'}| + |z_{2n}^{1'} - z_n^{2'}|$~~

⇒ ~~$|z_n^{1} - z_{2n}| \leq |z_n^{1} - z_n^{1}| + |z_n^{1'} - z_n^{2'}|$~~

$$|z_0 - z_n^{2'}| \to 0 \quad (\text{subsecuencia de } z_n^2)$$

Por otro lado:

$$|f(z''_n) - f(z^{2\prime}_m)| \leq |f(z''_n) - f(z_0)| + |f(z_0) - f(z^{2\prime}_n)|$$

pero $f(z''_n) \to z_0$ porque $f(z)$ es continua.

$f(z^{2\prime}_n) \to z_0$ misma razon.

$\Rightarrow$ $|f(z''_n) - f(z_0)| \to 0$

$|f(z_0) - f(z^{2\prime}_n)| \to 0$

$\Rightarrow$ $|f(z'_n) - f(z^{2\prime}_n)| \to 0 = |f(z_1) - f(z_2)|$

pero habiamos supuesto que $|f(z^{1\prime}_{m}) - f(z_2)| \geq \epsilon\ (>0)$.

$\divideontimes$

Contradiccion.

3.- Producto de Cauchy.

Si dos series son convergentes a S y W se cumple que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_1 w_n + \cdots + z_n w_1) = S \cdot W.$$

En este caso, $z_n = z^n$ y $w_n = z^n$.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{z^{n+1} + \cdots + z^{n+1}}_{n \text{ veces}}) = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n+1} = \left(\frac{1}{1-z}\right)^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-z}\right)^2.$$

Problema 4:

1 - $f(z) = Re(z)$

sea $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Por def. de derivada se debe cumplir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = x + i \cdot 0 = x$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{no } \exists \text{ derivada}.$$

2.-

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \ \Big| \Rightarrow \text{no derivable}$$

3.-

$$f(z) = \sqrt{x^2+y^2} = f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \nexists \text{ derivada}$$

4.

$$f(re^{i\theta}) = \theta = \arctan x/y = f(x,y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\frac{x^2}{y^2}+1} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cancel{y^2}}{x^2+y^2} \cdot \frac{-1}{\cancel{y^2}} = \frac{-1}{x^2+y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \text{ derivada}.$$