Teorema

Suponga que $f(z)$ es analítica excepto quizás en un número finito de puntos aislados en el semiplano superior positivo del plano complejo junto con el eje real. Suponga además que por a $|z|$ lo suficientemente grande $|f(z)| \leq K/|z|^p$, donde $p > 1$ y K es constante. Entonces

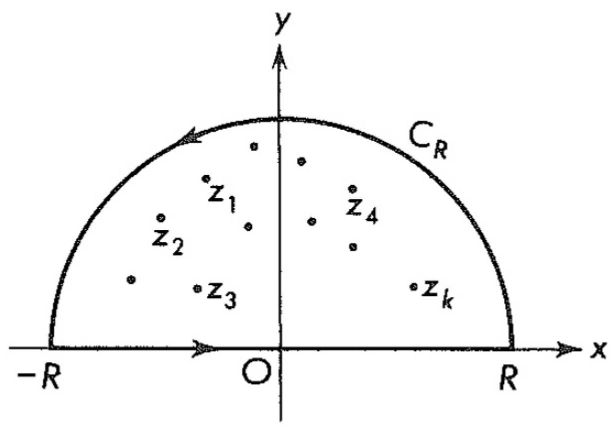
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}(z_n),$$

donde los z_n son los polos situados en el semiplano superior.

Nótese que se asume que el límite

$$\lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

existe.



Demostración

Sea C_R la parte superior del circulo $|z| = R$ descrito en la dirección positiva y R lo suficientemente grande tal que todos los polos z_n yacen en su interior (ver figura). Por tanto

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}(z_n).$$

Nótese que

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)||dz| \leq (K/R^p) \int_{C_R} |dz| = \frac{\pi K}{R^{p-1}}.$$

Como $p > 1$, entonces $\int\limits_{C_R} f(z)dz \to 0$ cuando $R \to \infty$.

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}(z_n).$$

Así finalmente obtenemos

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}(z_n).$$

Teorema

Sea $f(z) = p(z)/q(z)$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios irreducibles y $q(z)$ no tiene ceros sobre el eje real. Si el grado de $q(z)$ menos el grado de $p(z)$ es por lo menos 2 o mas grande entonces

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}(z_n).$$

donde z_n son los polos en el semiplano superior del plano complejo.

Sea

$$p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j, \quad q(z) = \sum_{i=0}^{n} b_i z^i \quad \text{con} \quad a_m \neq 0, \quad b_n \neq 0.$$

Entonces si escribimos

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1}{z^{n-m}} R(z),$$

donde

$$R(z) = \frac{a_0/z^m + \cdots + a_{m-1}/z + a_m}{b_0/z^n + \cdots + b_{n-1}/z + b_n}.$$

Para un $|z|$ lo suficientemente grande se obtiene que $|R(z)| \leq K$. Por tanto

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^{n-m}} |R(z)| \leq \frac{K}{|z|^r},$$

donde $r = n - m \geq 2$.

Del último teorema tenemos que para funciones pares se satisface

$$\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}(z_n),$$

Teorema

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}[f(z)e^{imz}; z_n),$$

De las partes real e imaginaria de este teorema se pueden calcular las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx dx$$

Valor principal de Cauchy

Suponga que $|f(x)| \to \infty$ cuando $x \to c$. El valor principal de Cauchy para una integral impropia

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

es dado como

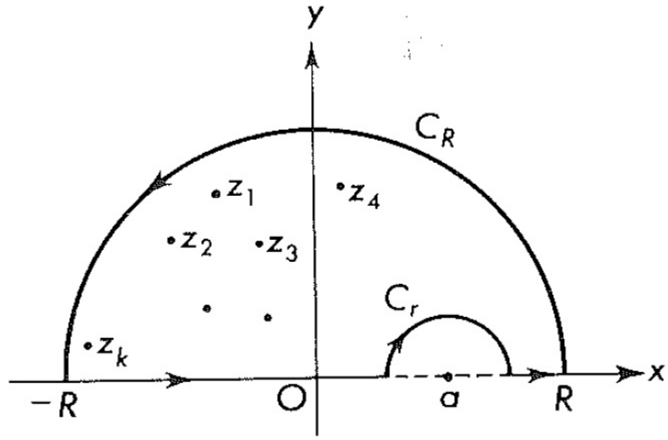
$$P\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0}\left[\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]$$

Nótese que cuando $f(x)$ es definida en todo el eje real, entonces

$$P\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{R}^{-R} f(x)dx$$

Nótese también que el concepto de valor principal de Cauchy se puede generalizar a varias singularidades sobre el eje real.

Ahora consideremos la extensión del concepto de valor principal al plano complejo. En este nuevo caso, estamos considerando la situación cuando uno o más polos (número finito) se encuentran sobre el eje real x. En este caso, el contorno debe ser diseñado de tal manera que los polos sobre el eje x sean rodeados, tal como se muestra en la figura.



En este caso particular de la figura, se tiene que si la funcion $f(z)$ es analítica excepto en un número finito de puntos, entonces el valor principal de Cauchy se puede calcular así:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{n=1}^{k}\mathrm{Res}(z_n) + i\pi\mathrm{Res}(a)$$

donde a es un polo sobre el eje real.

Una extensión de esta fórmula a un número finito de polos sobre el eje x es inmediata y está dada por la expresión:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{n=1}^{k}\mathrm{Res}(z_n) + i\pi\sum_{j=1}^{s}\mathrm{Res}(a_j)$$

donde los a_j son los polos sobre el eje real.