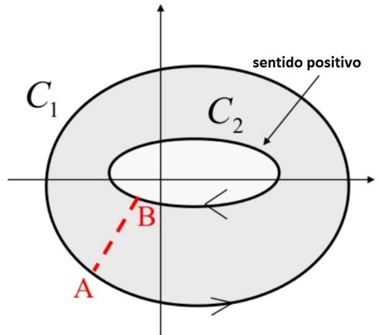
Teorema integral de Cauchy para regiones multiplemente conexas

$$\oint_{C_1+AB+C_2+BA} f(z)dz = 0$$

$$= \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{AB} f(z)dz +$$

$$\oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{BA} f(z)dz$$



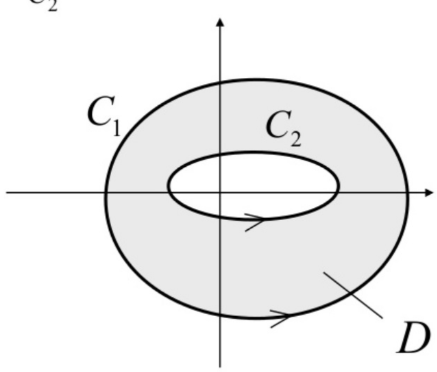
Como: $\oint_{AB} f(z)dz = -\oint_{BA} f(z)dz$

$$\oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

Nota: Observa que los sentidos en que se recorren los circuitos en este dibujo

$$\oint_{C=C_1+C_2} f(z)dz = 0$$

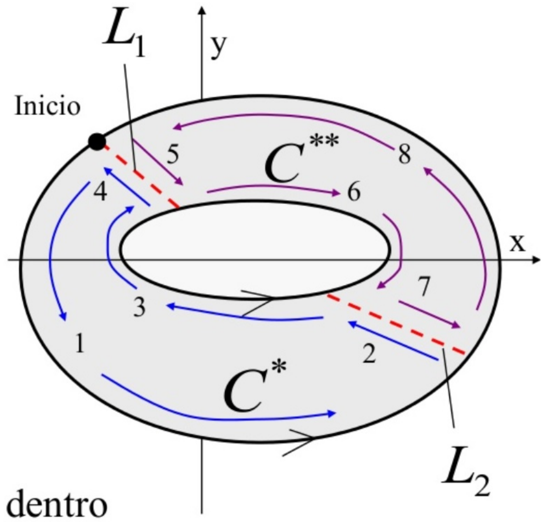
Ejemplo 1: $\oint_{C_1} e^z dz = \oint_{C_2} e^z dz$ (¡obvio!)



Ejemplo 2: $\oint_{C_1} \frac{1}{z} dz = \oint_{C_2} \frac{1}{z} dz$ (no tan obvio)

demostración

Introduzcamos dos cortes, L_1 y L_2 ,que unen los dos contornos.

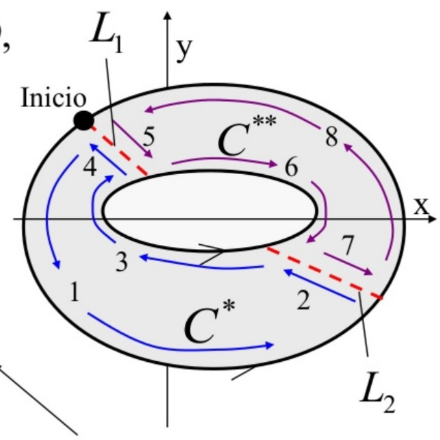


Sean C^* y C^{**} los dos nuevos contornos cerrados indicados por las flechas (1-2-3-4) y (5-6-7-8), respectivamente.

Ahora $f(z)$ es analítica sobre y dentro de C^* y C^{**} . Por el teorema Integral de Cauchy:

$$\oint_{c^*} f(z)dz = 0, \qquad \oint_{c^{**}} f(z)dz = 0$$

Integramos alrededor del dominio D, a lo largo de 1-2-3-4-5-6-7-8. Así:



$$\oint_{\substack{1-2-3-4-\\5-6-7-8}} f(z)dz = \oint_{C^*} f(z)dz + \oint_{C^{**}} f(z)dz$$

$$= \int_{1,3} f(z)dz + \int_{6,8} f(z)dz$$

$$= \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz$$

Las integrales a lo largo de L_1 y L_2 se anulan

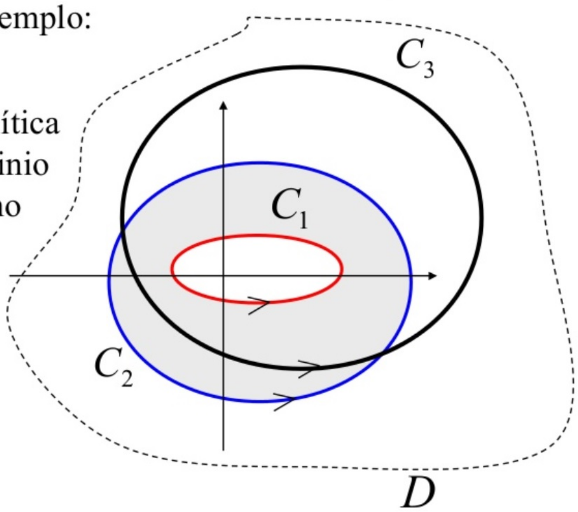
Pero como las integrales a lo largo de C^* y C^{**} son cero, entonces:

$$\int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

con lo que se demuestra el enunciado

No es necesario que los caminos cerrados no se corten, es decir que formen anillos. Por ejemplo:

Imaginemos que f(z) es analítica en todos los puntos del dominio D de la figura. Tanto C_2 como C_3 forman anillos con C_1. Por deformación de contornos:

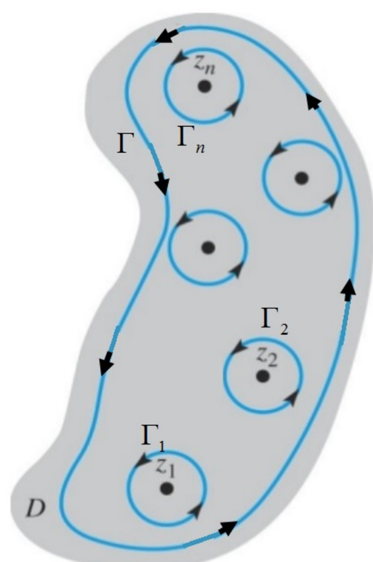


$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$
$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_3} f(z)dz \longrightarrow \oint_{C_2} f(z)dz = \oint_{C_3} f(z)dz$$

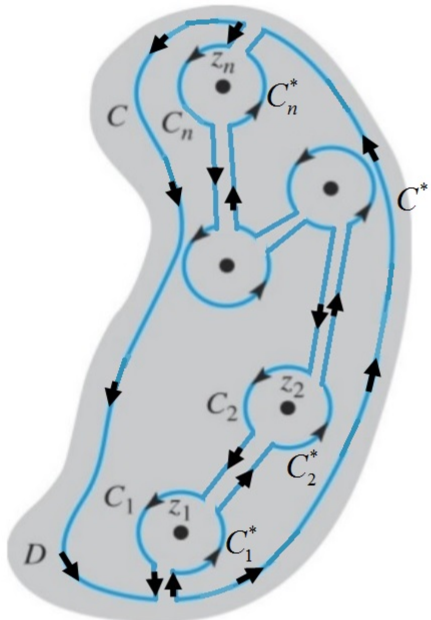
Teorema Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos

Supongamos que Γ, $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ son curvas cerradas simples con orientación positiva, tales que que $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ son interiores a Γ pero regiones interiores a cada Γ_k con $k = 1, 2, ..., n$, no tienen puntos en común. Si f es analítico dentro y sobre el contorno γ, sin el interior de todos los Γ_k con $k = 1, 2, ..., n$, entonces

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} f(z)dz.$$



Demostración:



$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Consideremos las curvas

$$\Gamma \sim \Gamma_A + \Gamma_B$$

$$\Gamma_n \sim C_n + C_n^\star$$

con

$$\Gamma_A = C - \sum_{k=0}^{n} C_k - \sum_{k=0}^{n+1} \ell_k$$

$$\Gamma_B = C^\star - \sum_{k=0}^{n} C_k^\star - \sum_{k=0}^{n+1} \ell_k^\star$$

donde ℓ_k y $\ell_k^\star$ son los segmentos rectos que unen los diferentes C_n y $C_n^\star$.

Usando el teorema de Cauchy-Riemann obtenemos que

$$\int\limits_{\Gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{C} f(z)dz - \int\limits_{\sum_{k=0}^{n} C_k} f(z)dz - \int\limits_{\sum_{k=0}^{n+1} \ell_k} f(z)dz = 0$$

$$\int\limits_{\Gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{C^\star} f(z)dz - \int\limits_{\sum_{k=0}^{n} C_k^\star} f(z)dz - \int\limits_{\sum_{k=0}^{n+1} \ell_k^\star} f(z)dz = 0$$

Como el dominio de los contornos Γ_1 y Γ_2 son simplemente conexos entonces podemos deformar estos contornos continuamente tal que al final obtenemos $\Gamma = C + C^\star$ y $\Gamma_n = C_n + C_n^\star$. En este límite se tiene que $\ell_k^\star = -\ell_k \; \forall k$. En otras palabras

$$\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)dz = \int\limits_{C+C^\star} f(z)dz - \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{C_k+C_k^\star} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)dz.$$

Más allá de los dominios simplemente conexos

A pesar de los resultados anteriores, la idea que una integral pueda escribirse como la antiderivada solo funciona cuando el dominio es simplemente conectado, es decir no tiene huecos. Estos huecos o puntos singulares se pueden evaluar cuando se tienen en cuenta las propiedades de los dominios múltiplemente conexos, en los cuales el contorno de integración no es arbitrario. Considere el siguiente ejemplo:

$$e^{\phi(t)} = G[z(t)]$$

Es fácil demostrar que la función $\phi(t)$ se puede escribir por medio de una integral indefinida así:

$$\phi(t) = \int\limits_{\alpha}^{T} \frac{G'[z(t)]z'(t)}{G[z(t)]} dt + k$$

con $\alpha \leq t \leq \beta$ y donde k es una constante tal que $e^k = G[z(\alpha)]$.

Además

$$\phi(\beta) - \phi(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{G'[z(t)]z'(t)}{G[z(t)]} dt$$

por tanto en el caso especial de un contorno cerrado, $z(\alpha) = z(\beta)$, se tiene

$$e^{\phi(\alpha)} = e^{\phi(\beta)}$$

Pero además de las propiedades del logaritmo se tiene que

$$\phi(\beta) - \phi(\alpha) = 2in\pi$$

donde n es un entero llamado “número de vueltas” o “índice” y definido como:

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{G'[z]}{G[z]} dz.$$

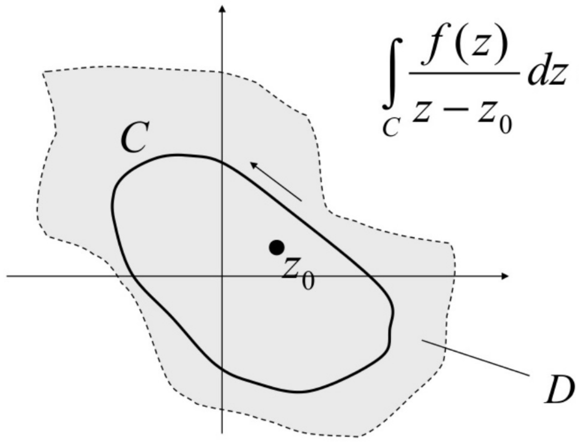
Ejercicio: Encuentre el valor de la integral

$$\int\limits_{C} (z - z_0)^n dz$$

para cualquier entero n a lo largo del circulo C centrado en z_0 y radio r. Considere la dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj.

Fórmula integral de Cauchy

Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D. Para cualquier punto z_0 en D y cualquier contorno cerrado C en D que incluyz z_0:



$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

Ejemplo: Considerese el caso $f(z) = 1$ y $z_0 = 0$. La fórmula integral de Cauchy

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0),$$

se convierte en

$$\int_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i \times 1 = 2\pi i.$$

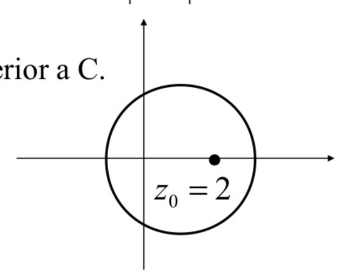
<u>Ejemplo</u>

Evaluar la integral $\int_C \frac{z^2}{2-z}dz$ donde C es $|z-1| = 2$

z = 2 es un punto singular en el interior a C.

La fórmula integral de Cauchy

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\, f(z_0)$$



$f(z)$ es analítica en todo punto de modo que C puede ser cualquier contorno en el plano complejo conteniendo el punto z = 2.

se convierte en:

$$-\int_C \frac{z^2}{z-2}dz = -2\pi i \times 4 = -i8\pi$$