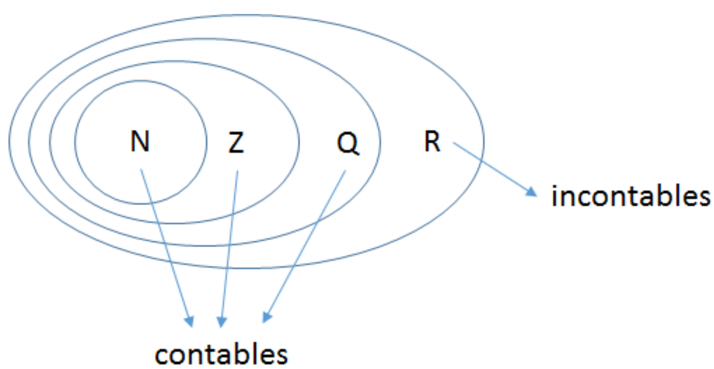
Métodos de la Física matemática

Bibliografía Básica

- Elements of complex variables, Louis L. Pennisi
- Complex Analysis (3a edición), Lasr V. Ahlfors
- Mathematical Physics: A modern introduction to its foundations, Sadri Hassani
- Advanced Engineering Mathematics, Erwing Kreyszig

Números Reales

- Los números naturales N son los que se usan para contar: 1,2,3,4,$\cdots$
- Los números enteros Z son aquellos que se escriben de la forma:$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$
  Obviamente estos números sugieren la significancia de la sustracción o resta.
- Los números raciones Q son aquellos que tienen la forma p/q donde $p, q \in Z$
- Los números irracionales son aquellos que no se pueden expresar de la forma p/q, tales como $\sqrt{2}, \pi, e$,etc



Si a, b y c son números reales, las siguientes reglas algebraicas se satisfacen:

- Conmutatividad: $a + b = b + a$
- Asociatividad: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Conmutatividad del producto: $ab = ba$
- Asociatividad del producto: $(ab)c = a(bc)$
- Distributividad: $a(b + c) = ab + ac$

Números Complejos C

Los números complejos se pueden definir como la expresión de la forma $a + bi\,/\forall a, b \in R$, donde i es una de las raices de la funcion $x^2 + 1 = 0$.

Mas formalmente un sistema de números complejos es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) de números reales cuya operación de suma "+" y multiplicación "'·'son definidas como

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

y además dos números complejos son idénticos si $a = c$ y $b = d$.

Espacio Vectorial

Definición: Un conjunto V dotado de la operación suma "+" y producto "'·én el que

$$+ : V \times V \to V \quad \cdot : C \times V \to V$$

Se dice espacio vectorial sobre los complejos si satisface las siguientes propiedades

- Asociatividad: $(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in V$
- Existencia de un único elemento nulo: $\exists 0 \in V \,/\, x + 0 = 0 + x = x \quad \forall x \in V$
- Conmutatividad : $x + y = y + x, \quad \forall x \in V$
- $\exists 1 \in C \,/\, 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in V$
- Asociatividad: $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x, \quad \forall \alpha, \beta \in C, x \in V$
- Distributividad: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha, \beta \in C,\ x, y \in V$
- Distributividad: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall \alpha, \beta \in C,\ x \in V$

Para darle estructura a un espacio vectorial también es necesario introducir una métrica a través del concepto de distancia

Espacio Métrico

Un espacio métrico es un conjunto con una función distancia sobre sobre él, de modo que cualquier par de puntos del conjunto están a cierta distancia asignada por dicha función.

Definición: Un espacio métrico es un conjunto X con una función distancia asociada $d : X \times X \to R$

- $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y$
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

- simetría: $d(x, y) = d(y, x)$
- desigualdad triangular: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

la función es llamada métrica. Un espacio métrico es llamado también Euclidiano.

Ejemplo

para el espacio R^n la distancia entre dos puntos puede ser dada por la función:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = ||x - y||$$

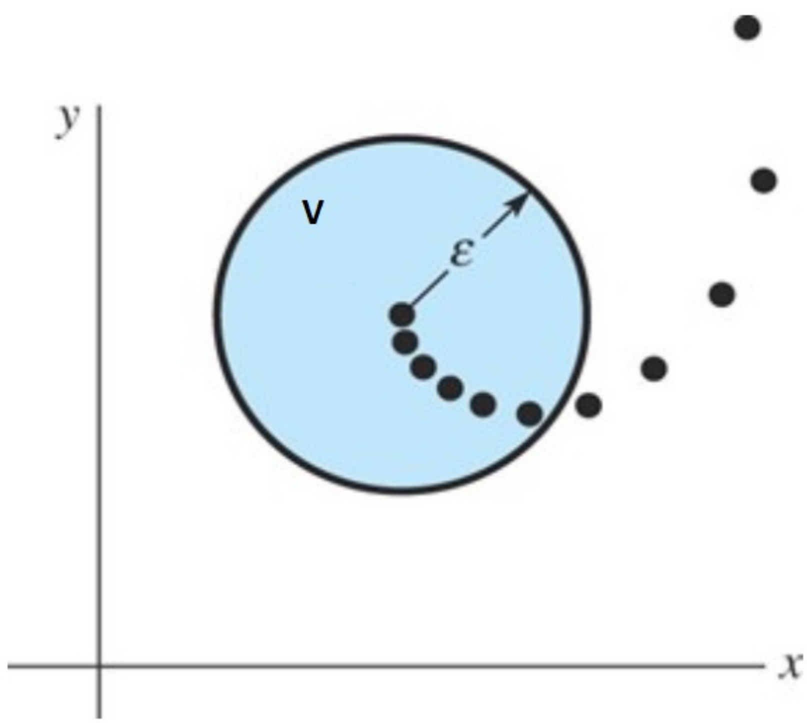
con $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$

Secuencias y su convergencia en espacio vectoriales

Definición: Una secuencia infinita de vectores $x_n \quad n \in [1, N]$ en un espacio vectorial normado V converge a un elemento $x \in V$ si $||x - x_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir

$$\lim_{n \to \infty} ||x - x_n|| = 0$$

lo que significa que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \,/\, ||x - x_n|| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$



Usualmente no es posible saber directamente si una secuencia dada es convergente pues para esto es necesario saber el punto limite x. Sin embargo, usando el concepto de la secuencia de Cauchy se puede estimar la convergencia de una secuencia.

Definición: Un secuencia infinita de vectores x_n con $n \in [1, \infty)$ en un espacio vectorial normado V es llamada secuencia de Cauchy si

$$\lim_{n,m \to \infty} ||x_m - x_n|| = 0$$

esto es

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad / \quad n, m \geq N \Rightarrow ||x_m - x_n|| < \varepsilon$$

Toda secuencia convergente es necesariamente de Cauchy.

Prueba: Dado $x_n \to x$ (converge) para $\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad / \quad n > N \Rightarrow ||x_m - x|| < \frac{\varepsilon}{2}$ Para $n, m \geq N$ implica que

$$||x_n - x_m|| \leq ||x_n - x|| + ||x_m - x|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow ||x_n - x_m|| \leq ||x_n - x|| + ||x_m - x|| < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Definición: Un espacio vectorial V completo es un espacio vectorial en el cual toda secuencia de Cauchy de vectores en V tiene como límite un vector en V. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de Cauchy entonces existe un $x \in V \quad / \quad \lim_{n \to \infty} ||x_n - x|| = 0$

Definición

Una secuencia de números complejos $\{z_n\}$ es acotada si para alguna constante M, $|z_n| \leq M \; \forall n$.

Una secuencia acotada no necesariamente converge. Por ejemplo la secuencia $\{(-1)^n\}$ es acotada pero no converge.

Definición

Si $\{z_n\}$ es convergente, entonces $\{z_n\}$ es acotada.