Teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno

Suponga que $C = C(t)$ es una curva continua a trozos parametrizada por $\alpha \leq t \leq \beta$ y F es una función definida y analítica en un dominio D que contiene el contorno C. Supongase además que F' existe y es continua, entonces

$$\int_C F'(z)dz = F(C(\beta)) - F(C(\alpha)),$$

donde $C(\beta)$ y $C(\alpha)$ son los puntos extremos de llegada y partida de la trayectoria C.

En partícular, si $C(\alpha) = C(\beta)$, entonces

$$\int_C F'(z)dz = 0.$$

El teorema fundamental del cálculo para integrales de contorno se puede domostrar fácilmente si se tiene en cuenta la existencia de este teorema para las funciones reales (demostración para el lector).

• Si F es una función definida y analítica en un dominio conectado D y si $F'(z) = 0$ para todo punto en D, entonces F es constante en D.

Ejemplo: Considere la integral $\int_C z^3 dz$ donde la trayectoria C es una parte de la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ que une el punto $z = 1$ con el punto $z = i/2$.

Solución:

$$\int_C z^3 dz = \left.\frac{z^4}{4}\right|_1^{i/2} = -15/64$$

Nótese que no fue necesario parametrizar la curva.

Ejemplo: Calcular

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+4} dz$$

Solución: la función

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+4}$$

no esta definida en los "polos" $z = \pm 2i$. Como estos puntos estan fuera de la región de integración, $D : |z| = 1$, entonces

$$f'(z) = \frac{e^z \left(z^2 - 2z + 4\right)}{\left(z^2+4\right)^2}$$

existe y es analítica en D. Nótese que si $f(z) = u + v$ con

$$u = \frac{e^x \left(\left(x^2 - y^2 + 4\right)\cos(y) + 2xy\sin(y)\right)}{x^4 + 2x^2\left(y^2+4\right) + \left(y^2-4\right)^2}$$

y

$$v=\frac{e^{x}\left(\left(x^{2}-y^{2}+4\right)\sin(y)-2xy\cos(y)\right)}{x^{4}+2x^{2}\left(y^{2}+4\right)+\left(y^{2}-4\right)^{2}}$$

Entonces

$$u_x=u_y=\frac{e^{x}(2x\cos(y)+2y\sin(y))}{x^{4}+2x^{2}\left(y^{2}+4\right)+\left(y^{2}-4\right)^{2}}+\frac{e^{x}\left(\left(x^{2}-y^{2}+4\right)\cos(y)+2xy\sin(y)\right)}{x^{4}+2x^{2}\left(y^{2}+4\right)+\left(y^{2}-4\right)^{2}}$$

$$-\frac{e^{x}\left(4x^{3}+4x\left(y^{2}+4\right)\right)\left(\left(x^{2}-y^{2}+4\right)\cos(y)+2xy\sin(y)\right)}{\left(x^{4}+2x^{2}\left(y^{2}+4\right)+\left(y^{2}-4\right)^{2}\right)^{2}}$$

$$v_x=-u_y=\frac{e^{x}(2x\sin(y)-2y\cos(y))}{x^{4}+2x^{2}\left(y^{2}+4\right)+\left(y^{2}-4\right)^{2}}+\frac{e^{x}\left(\left(x^{2}-y^{2}+4\right)\sin(y)-2xy\cos(y)\right)}{x^{4}+2x^{2}\left(y^{2}+4\right)+\left(y^{2}-4\right)^{2}}$$

$$-\frac{e^{x}\left(4x^{3}+4x\left(y^{2}+4\right)\right)\left(\left(x^{2}-y^{2}+4\right)\sin(y)-2xy\cos(y)\right)}{\left(x^{4}+2x^{2}\left(y^{2}+4\right)+\left(y^{2}-4\right)^{2}\right)^{2}}.$$

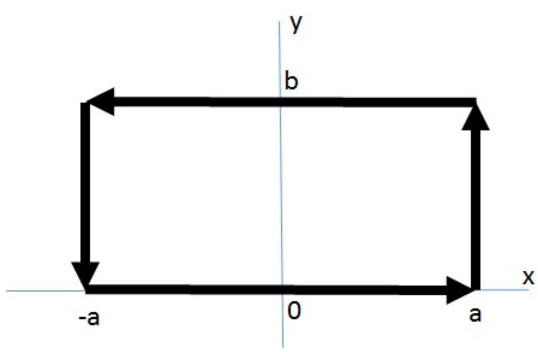
Por tanto

$$\int_{|z|=1}\frac{e^{z}}{z^{2}+4}dz=0.$$

Ejemplo: Mostrar que

$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-x^{2}}\cos(2bx)dx=\sqrt{\pi}e^{-b^{2}}$$

Solución: Si se aplica el teorema de Cauchy a una función e^{z^2} en una región que contenga el rectángulo $|x|\leq a$ y $0\leq y\leq b$ se obtiene



$$\int_C f(z)dz=0=\int_{-a}^{a} e^{-(x+0i)^{2}}dx+\int_{0}^{b} e^{-(a+iy)^{2}}idy+\int_{a}^{-a} e^{-(x+ib)^{2}}dx+\int_{b}^{0} e^{-(-a+iy)^{2}}idy$$

$$\int_{-a}^{a}(e^{-x^{2}}-e^{-(x+ib)^{2}})dx+\int_{0}^{b}(e^{-(a+iy)^{2}}-e^{-(-a+iy)^{2}})idy=0$$

$$\int_{-a}^{a} (e^{-x^2} - e^{-(x+ib)^2})dx + 2e^{-a^2} \int_{0}^{b} e^{y^2} \sin(2ay)dy = 0$$

$$\int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx - e^{b^2} \int_{-a}^{a} e^{-x^2}(\cos(2bx) - i\sin(2bx))dx + 2e^{-a^2} \int_{0}^{b} e^{y^2} \sin(2ay)dy = 0$$

En el límite $a \to +\infty$ se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx - e^{b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(\cos(2bx) - i\sin(2bx))dx = 0$$

Observemos que en partícular

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}(\sin(2bx))dx = \lim_{h\to+\infty} \int_{-h}^{h} e^{-x^2}(\sin(2bx))dx,$$

donde

$$\int_{-h}^{h} e^{-x^2}(\sin(2bx))dx = 0$$

para todo $h \geq 0$ debido a que la función e^{-x^2} es par y la función $\sin(2bx)$ es impar, entonces su multiplicación da una función impar. Recordar que la integral de una función impar, cuando los límites de integración son simétricos, es siempre cero.

Nótese que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\pi/\alpha}$, entonces

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx)dx = e^{-b^2}\sqrt{\pi}.$$