Ayudantía 2, Solución.

Problema 1:

1: Una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de las distancias a los focos es constante. Es decir:

$$|z-f_1|+|z-f_2|=c$$

En este caso, $f_1=1$ y $f_2=i$.

$$\Rightarrow |z-1|+|z-i|=c$$

Como la elipse pasa por el origen $(z=0)$ se tiene:

$$|-1|+|-i|=c=2.$$

Entonces:

$$\boxed{|z-1|+|z-i|=2.}$$

En geometría analítica:

sea $x+iy=z$.

$$\Rightarrow 2=|z-1|+|z-i|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}-2x+\cancel{1}+y^2=4+\cancel{x^2}+\overset{\cancel{y^2-2y+1}}{(y-1)^2}-4\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$(2(y-x)-4)^2=16(x^2+y^2-2y+1)$$

$$4y^2-8xy+4x^2+\cancel{16}-16(y-x)=16x^2+16y^2-32y+\cancel{16}$$

$12y^2+12x^2-16y-16x+8xy=0$

$\boxed{3y^2+3x^2+\cancel{2}xy-4y-4x=0} \to$ Elipse Rotada.

2.- Parabola es el conjunto de puntos que tienen la misma distancia al foco f que a la recta directriz.

Si $z \in$ Parabola, entonces:

$$|z-f| = d(\cancel{z}, r).$$

donde

$$d(z,r) = \frac{|a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

En este caso $\cancel{z}$ $f=i$, recta es $\underbrace{\operatorname{Im} z = -1}_{y=-1}$

Luego:

$$d(z,r) = \frac{|1 \cdot y + 1|}{\sqrt{1^2}}$$

$$\boxed{|z-i| = |\operatorname{Im} z + 1|}$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \cancel{} y+1.$$

$$x^2 + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} = \cancel{y^2} + 2y + \cancel{1}$$

$$\boxed{x^2 = 4y}$$

3.- La hiperbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de las distancias a los focos es constante.

En este caso:

$$\boxed{|z-a| - |z-b| = c}$$

si la hiperbola pasa por $z = i$ se tiene

$$|i-a| - |i-b| = c$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} = c.$$

Luego:

$$\boxed{|z-a| - |z-b| = \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}}.$$

Para encontrar las raíces tenemos:

$$z^n = e^{i\theta}$$

$$z_n = e^{\frac{i\theta}{n}}.$$

$$z_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{i\theta}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k \text{ impar}} \frac{(i\theta/n)^k}{k!} + \sum_{k \text{ par}} \frac{(i\theta/n)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\theta/n)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\theta/n)^{2k}}{(2k)!}.$$

$$= i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\theta/n)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\theta/n)^{2k}}{(2k)!}.$$

$$= i \sin \theta/n + \cos \theta/n$$

Pero θ es la fase de la unidad:

$$\sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Rightarrow \boxed{z_n = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right).}$$

$\blacksquare$

2.-

(a) Por la parte 1 sabemos que las raíces son de la forma:

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{6}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{6}\right)$$

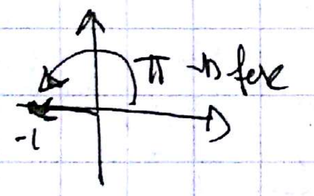
$$= \cos\left(\frac{\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)$$

con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

(b) De manera análoga, se tiene:

$$z_4 = \cos(\theta/n) + i \sin(\theta/n)$$

con θ la fase de -1, en este caso.



$\Rightarrow \cos\theta = -1$

$\Rightarrow \theta = \pi(2k+1)$

$k = 0, 1, \ldots$

$$\Rightarrow z_4 = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{4}\right).$$

$$z_4 = \frac{1+i}{\sqrt{2}};\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}};\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}};\ \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

(c) $z^4 = -1 + \sqrt{3} i$.

En forma polar: $r^4 e^{i4\theta} = -1 + \sqrt{3} i$.

$$|-1+\sqrt{3} i| = \sqrt{1+3} = 2 = r^4$$

$$\boxed{r = 2^{1/4}.}$$

tenemos que

$$4\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

pues $4\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Luego $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{12}(1+6k)$.

$$z_k = 2^{1/4} e^{i\frac{\pi}{12}(1+6k)}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} z_1 = 2^{1/4} \cdot e^{\frac{i\pi}{12}} \; ; & z_2 = 2^{1/4} e^{i\frac{7\pi}{12}} \\ z_3 = 2^{1/4} e^{i\frac{13\pi}{12}} & z_4 = 2^{1/4} e^{i\frac{19\pi}{12}}. \end{array}}$$

Problema 3:

Queremos representar los puntos $z \in \mathbb{C}$ como puntos (x_1, x_2, x_3) en una esfera. $\ominus$
Para ello, a cada punto en la esfera le asociamos un punto en z mediante el mapeo:

$$\boxed{z = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}}.$$

Notar:

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2} = \frac{(\cancel{1-x_3})(1+x_3)}{(1-x_3)^2}$$

Recordar que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

Luego $|z|^2 = \frac{1+x_3}{1-x_3}$. (1)

El mapeo inverso está dado por:

$$z+\bar{z} = \frac{2x_1}{1-x_3}$$

$$z-\bar{z} = \frac{2ix_2}{1-x_3}$$

de (1): $(1-x_3)|z|^2 = 1+x_3$

$$\Rightarrow |z|^2 - 1 = x_3(|z|^2+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}}.$$

$$\frac{2x_1(|z|^2+1)}{|z|^2 \cancel{+1} - |z|^2+1} = z+\bar{z} = x_1(|z|^2+1)$$

$$\cancel{x_1(|z| + |z|^{-2}) = z+\bar{z}}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{z+\bar{z}}{\cancel{|z|+|z|^{-2}}}}$$

$$x_2 \cancel{= \frac{i(z-\bar{z})}{|z|+|z|^{-2}}}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \quad x_2 = \frac{z-\bar{z}}{|z|^2+1}$$

Para encontrar la distancia de las proyecciones estereográficas; transformamos los puntos z y z' a los puntos (x_1, x_2, x_3) y (x_1', x_2', x_3')

La distancia entre dos puntos al cuadrado es:

$$d^2 = (x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2.$$

$$d^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')$$

Como los puntos están en la esfera de radio 1:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$\Rightarrow d^2 = 2 - 2\underbrace{(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')}_{(*)}.$$

Luego:

$$(*) = \frac{(z+\bar{z})(z'+\bar{z}')}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)} + \frac{(z-\bar{z})(z-\bar{z})}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)} + \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\cdot\frac{|z'|^2-1}{|z'|^2+1}.$$

$$= \frac{(z+\bar{z})(z'+\bar{z}') + (z-\bar{z})(z-\bar{z}) + (|z|^2-1)(|z'|^2-1)}{(|z|^2+1)(|z'|^2+1)}$$

$$(*) = \frac{\cancel{zz'} + z\bar{z}' + \bar{z}z' + \cancel{\bar{z}\bar{z}'} - \cancel{zz'} + \cancel{\bar{z}\bar{z}'} + \bar{z}z' - \cancel{zz'}}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

$$= \cancel{2z\bar{z}' + 2\bar{z}z'} + \frac{|z|^2|z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 + 1}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

Notar que $2z\bar{z}' + 2\bar{z}z' = 2(z\bar{z}' + \overline{z\bar{z}'}) = 4\operatorname{Re}(z\bar{z}')$

además:

$$|z-z'|^2 = (z-z')(\overline{z-z'})$$
$$= |z|^2 - z\bar{z}' - z'\bar{z} + z'\bar{z}' - \cancel{|z'|^2}$$
$$= |z|^2 + |z'|^2 - 2\operatorname{Re} z\bar{z}'$$

Luego $4\operatorname{Re}(z\bar{z}') = -2|z-z'|^2 + 2|z|^2 + 2|z'|^2$.

Entonces:

$$(*) = \frac{-2|z-z'|^2 + 2|z|^2 + 2|z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)} + \frac{|z|^2|z'|^2 - |z|^2 - |z'| + 1}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

$$= \frac{-2|z-z'|^2 + |z|^2|z'|^2 + |z|^2 + |z'|^2 + 1}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

Pero $(1+|z|^2)(1+|z'|^2) = 1 + |z|^2 + |z'|^2 + |z|^2|z'|^2$

$$(*) = 1 - \frac{2|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

Reemplazando en d^2:

$$d^2 = 2-2\left(1-2\frac{|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}\right)$$

$$= \frac{4|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}}}$$