Métodos de la Física matemática

Definición: La longitud L de un contorno C esta dada por la operación:

$$\int_C |dz| = L$$

Teorema: Con esta última demostración se puede mostrar que

$$\left|\int_C G(z)dz\right| \leq ML,$$

donde

$$|G(z)| \leq M$$

para todos los puntos en el contorno C. Demostración:

$$\left|\int_C G(z)dz\right| \leq \int_C \left|G(z)\right|\left|dz\right| \leq M\int_C |dz| = ML.$$

Si se escribe $F(z) = u(z) + iv(z)$, entonces

$$\int_\alpha^\beta F[z(t)]z'(t)dt = \int_\alpha^\beta (u+iv)(dx+idy) = \int_\alpha^\beta (udx - vdy) + i\int_\alpha^\beta (udy + vdx),$$

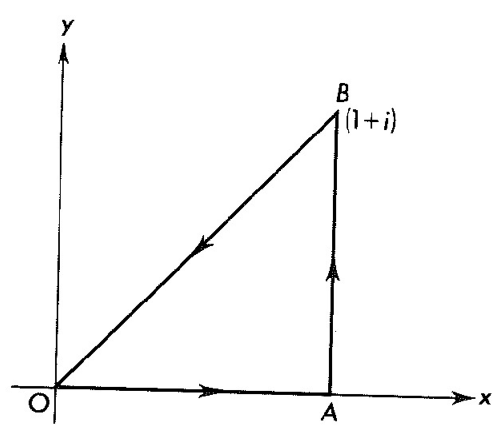
donde $z'(t)dt = x'(t)dt + iy'(t)dt = dx + idy$.

Por tanto

$$\int_C F[z(t)]dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (udy + vdx).$$

Es de anotar que las integrales sobre las funciones reales (u, v) conservan su significado usual del cálculo de funciones reales.

Ejercicio:

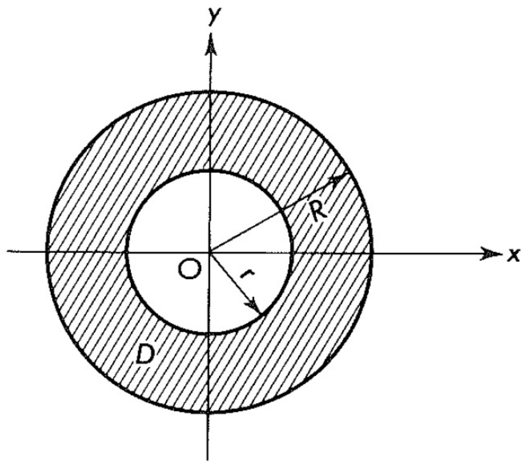


Encontrar la integral $\int\limits_C z^2 dz$ para los contornos

- OB, desde $z = 0$ hasta $z = 1 + i$.
- OAB
- OABO

Dominio simplemente conectado

Intuitivamente es un dominio sin huecos. Por ejemplo el interior de un circulo o el conjunto de todos los números $Re(z) > 0$, son dominios simplemente conectados. Un annulus (también conocido como corona circular) como en la figura, es un ejemplo de un dominio que no es simplemente conectado: $r < |z| < R$



Definición: Sean $C : z = f(s)$ y $\Gamma : z = \phi(s)$ para $\alpha \leq s \leq \beta$ dos curvas continuas con los mismos puntos inicial y final z_1 y z_2, respectivamente. Se dice que C puede ser deformada continuamente en Γ si existe una función $F(t, s)$ continua y definida en el intervalo $0 \leq t \leq 1$, $\alpha \leq s \leq \beta$, tal que $F(t, \alpha) = z_1$, $F(t, \beta) = z_2$ $\forall 0 \leq t \leq 1$ y $F(0, s) = f(s)$, $F(1, s) = \phi(s)$ $\forall \alpha \leq s \leq \beta$. Entonces se dice que C es deformable en Γ.

Definición: Dadas dos curvas cualesquiera C y Γ en D que tienen los mismos puntos inicial y final se dice que un dominio D es simplemente conectado si C es continuamente deformable en Γ dentro del dominio D.