Generalización de la fórmula integral de Cauchy

Se pueden tratar funciones más complicadas con potencias de z-z_0, con la fórmula:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\left.\frac{d^n f}{dz^n}\right|_{z_0}$$

f analítica en y dentro de C, z_0 dentro de C

Por ejemplo,

$$\int_C \frac{z^2-3z}{(z+1)^2}\,dz = 2\pi i\left.\frac{d\left[z^2-3z\right]}{dz}\right|_{z_0=-1}, \quad \int_C \frac{\cos z}{(z-2)^3}\,dz = \pi i\left.\frac{d^2[\cos z]}{dz^2}\right|_{z_0=2}$$

Esta fórmula también es conocida como la "formula para las derivadas de una función analítica."

Nota: cuando n=0 tenemos la Fórmula Integral de Cauchy: $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z)\Big|_{z_0}$

Demostración de la generalización de la fórmula integral de Cauchy

Partamos de la fórmula integral de Cauchy: $\displaystyle f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

Tomando $f(z_0)$ como una función de variable z_0. Derivando con respecto a z_0 y aplicando la regla de Leibnitz:

$$\frac{d}{dz_0}f(z_0) = \frac{d}{dz_0}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{d}{dz_0}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

Usar el mismo procedimiento para demostrar por inducción:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\left.\frac{d^n f}{dz^n}\right|_{z_0}$$

La generalización de la fórmula integral de Cauchy nos muestra algo excepcional:

Si una función f(z) es analítica en cierto dominio, entonces posee derivadas de todos los órdenes en dicho dominio. Y estas derivadas son a su vez también analíticas en el dominio.

Sea f(z) una función definida en todo punto de un entorno de z_0. Si f(z) no es analítica en z_0 es imposible encontrar una función F(z) tal que dF/dz = f(z) en todo punto del entorno. De existir F(z) sería analítica y por la fórmula generalizada de Cauchy, su segunda derivada df/dz existiría en todo punto del entorno considerado. Y entonces f(z) sería analítica en z_0: una contradicción.

Teorema

Sea $f(z)$ es analítica en un dominio D. Entonces todas la derivadas existen y son también analíticas en el dominio D.

Demostración: Sea z_0 cualquier punto en D y C un círculo centrado en z_0 y contenido totalmente con todo y su interior en D. Entonces

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad \forall z \in D.$$

Esta fórmula necesariamente implica que $f(z)$ tiene derivadas de todos los ordenes en la vecindad de z_0 y como z_0 es cualquier punto en D, entonces el teorema queda emostrado.

Nota: cuando $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en el dominio D entonces

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = u_x + iv_x$$

y

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{i\partial y} = -iu_y + v_y.$$

Por medio de inducción se puede demostrar que

$$i^k f^{(n)} = \frac{\partial^n f(z)}{\partial x^r \partial y^k} = \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial x^r \partial y^k} + i\frac{\partial^n v(x, y)}{\partial x^r \partial y^k}, \quad r, k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

con $r + k = n$. (demostrar como tarea).

Resumen:

(1) $\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0)$ donde $\dfrac{dF}{dz} = f(z)$

$F(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D, con derivada dF/dz = f(z) y z_0 y z_1 en D.

(2) $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ con $f(z)$ analítica dentro y sobre C.

(Teorema integral de Cauchy-Goursat)

(3) $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{z - z_o}\,dz = 2\pi i f(z_0)$ con $f(z)$ analítica dentro y sobre C

(Fórmula integral de Cauchy)

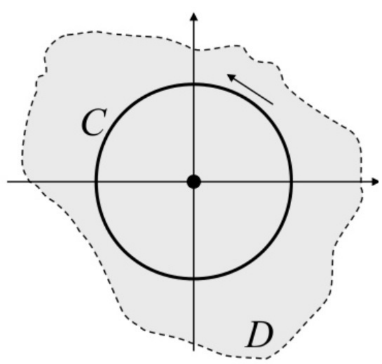
(4) $\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} \left.\frac{d^n f}{dz^n}\right|_{z_0}$ con $f(z)$ analítica dentro y sobre C

(Fórmula para derivadas)

Ejemplo

Evaluar la integral

$\displaystyle\int_C \frac{e^{\pi z}}{z^2}\,dz$ donde C es el círculo $|z| = 2$



$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz = 2\pi i\, f'(z_0)$$

$f'(z) = \pi e^{\pi z}$

sea $f(z) = e^{\pi z}$

$f'(z_0) = \pi e^0 = \pi$

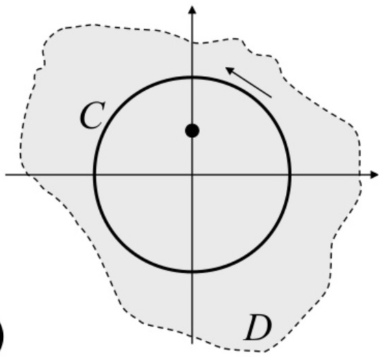
sea $z_0 = 0$

$f(z)$ es analítica en D, y C incluye z_0 $\longrightarrow$ $\displaystyle\int_C \frac{e^{\pi z}\,dz}{z^2} = 2\pi^2 i$

Ejemplo

Evaluar la integral

$\int_C \frac{z^2}{(z-i)^3}\,dz$ donde C es el círculo $|z|=2$



$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2} f''(z_0)$$

sea $z_0 = i$

sea $f(z) = z^2$

$f''(z) = 2$

$f''(z_0) = 2$

$f(z)$ es analítica in D, y C incluye z_0 $\longrightarrow$ $\int_C \frac{z^2\,dz}{(z-i)^3} = 2\pi i$

Calcular $\int_C \frac{e^z}{(z+2i)^3}\,dz$

donde C es la circunferencia $|z| = 3$ **con sentido positivo.**

$$I = \int_C \frac{e^z}{(z+2i)^3}\,dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\ ,$$

siendo:

$$z_0 = -2i;\quad f(z) = e^z \Rightarrow f''(z_0) = e^{-2i}$$

$$e^{-2i} = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{e^z}{(z+2i)^3}\,dz = \frac{I}{\pi i} \Rightarrow I = \pi i e^{-2i}$$

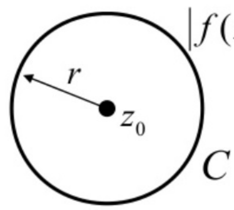
Ejercicios: Demostrar

(1) El **teorema de Morera**:

"Si $f(z)$ es continua en un dominio simplemente conexo D y si $\int_C f(z)dz = 0$ para cualquier camino cerrado en D, entonces $f(z)$ es analítica en D"

(2) La **desigualdad de Cauchy**:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{r^n}$$



$|f(z)| \leq M$ en C

(Probarlo usando la fórmula para las derivadas de una función analítica y la desigualdad *ML*)

(3) El **teorema de Liouville**

"Si una función entera $f(z)$ está acotada en valor absoluto para todo z, entonces $f(z)$ debe ser constante" – probarlo usando la desigualdad de Cauchy.

Demostración del teorema de Morera

Por hipotesis $f(z)$ es continua y $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ es indepeniente del camino de integración. Por tanto como se probó anteriormente $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D$. Además, por la formula integral de Cauchy se sabe que la derivada de una función analítica es también analítica para todo $z \in D$.

Demostración de la desigualdad de Cauchy

Ya que la ecuación del circulo C esta dada por $|z - z_0| = r$ y además $|f(z)| \leq M$, se tiene entonces que

$$|f^{(n)}(z)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\right|\left|\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int\limits_C \left|\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right|$$

$$|f^{(n)}(z)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int\limits_C \frac{|f(z)||dz|}{|z-z_0|^{n+1}}$$

$$|f^{(n)}(z)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\int\limits_C |dz|$$

$$|f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{Mn!}{r^n}$$