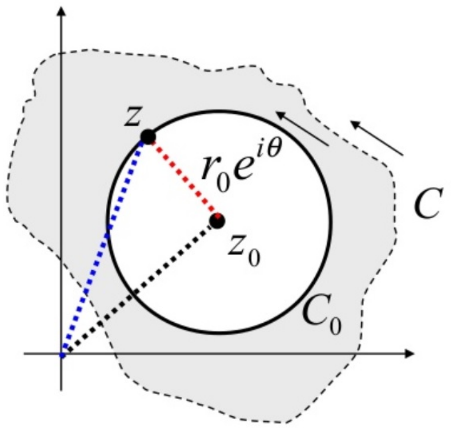


Demostración **no** rigurosa de la fórmula integral de Cauchy:

Por el principio de deformación de contornos:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$\oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+r_0e^{i\theta})}{r_0e^{i\theta}} ir_0e^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} f(z_0+r_0e^{i\theta})d\theta$$

Cambio de variable: $z = z_0 + r_0e^{i\theta}; \quad \frac{dz}{d\theta} = ir_0e^{i\theta}$

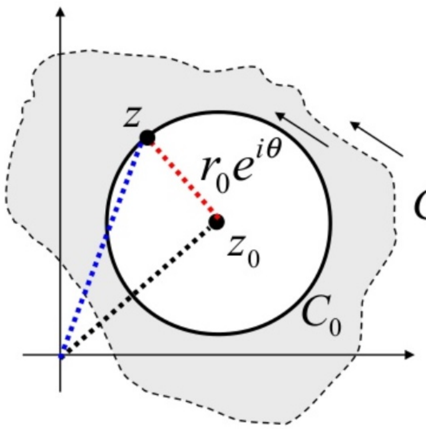
Hemos tomado un r_0 arbitrario. Hagámoslo infinitamente pequeño:

$$\lim_{r_0\to 0}\left[i\int_0^{2\pi} f(z_0+r_0e^{i\theta})d\theta \right] = i\int_0^{2\pi} f(z_0)d\theta =$$

$$if(z_0)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0)$$

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

¿Qué no es riguroso aquí?



Demostración de la fórmula integral de Cauchy. Por el principio de deformación de contornos:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{C_0} \frac{f(z_0)+f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz =$$

$$f(z_0)\underbrace{\oint_{C_0} \frac{1}{z-z_0}dz}_{I_1} + \underbrace{\oint_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz}_{I_2}$$

$$I_1 = \oint_{C_0} \frac{1}{z-z_0}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_0e^{i\theta}} ir_0e^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Vamos a encontrar una cota *ML* para $I_2 = \oint_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$

Tenemos: $L = 2\pi\, r_0$

Y necesitamos M tal que: $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} \le M$

Para todo z en C_0: $|z-z_0| = r_0$

Como f(z) es continua en z_0: $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon \;\; si \;\; |z-z_0| < \delta$

Si tomamos $r_0 \le \delta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$

para todo z sobre C_0.

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{r_0}\right| \leq \frac{\varepsilon}{r_0} \equiv M$$

$$L = 2\pi r_0$$

Ya podemos aplicar la desigualdad *ML:* para

$$|I_2| = \left|\oint_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \leq ML = \frac{\varepsilon}{r_0} 2\pi r_0 = 2\pi\varepsilon$$

Epsilon puede ser tan pequeño como queramos (de hecho reducirlo es reducir el radio r_0. Así que: $|I_2| = 0 \Rightarrow I_2 = 0$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\underbrace{\oint_{C_0} \frac{1}{z-z_0}\,dz}_{I_1=2\pi i} + \underbrace{\oint_{C_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz}_{I_2=0} = 2\pi i f(z_0)$$

Demostración alternativa de la fórmula integral de Cauchy

Una forma alternativa de demostrar la fórmula integral de Cauchy consiste en usar la serie de Taylor para las funciones complejas, i.e.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

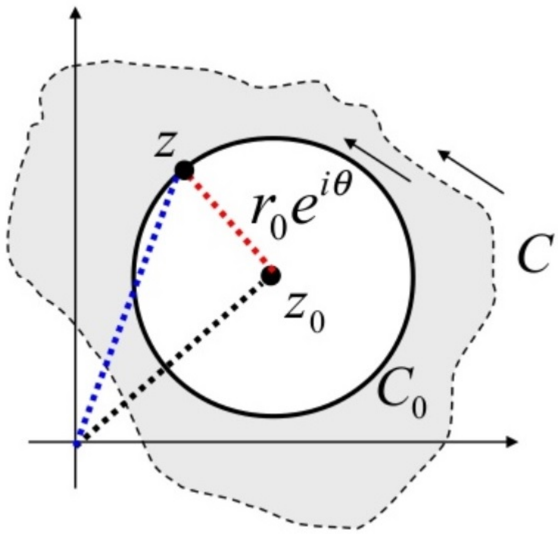
donde $f^{(k)}(z_0)$ es la derivada de orden k de $f(z)$ y evaluada en $z = z_0$. Nótese que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \lambda(z)(z-z_0),$$

donde

$$\lambda(z) = \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = (z-z_0)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z-z_0)^k.$$

Si considerarmos el contorno de integración $C = C_0$ como en la figura:



entonces

$$\left|\int_{C_0} \lambda(z)\right| \leq \varepsilon 2\pi r_0$$

con $\varepsilon = \max_{z\in C_0} |\lambda(z)|$. Ya que el contorno C_0 puede ser continuamente deformado tal que $r_0 \to 0$ entonces $\varepsilon \to 0$.

Con esto en mente podemos considerar

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{C_0} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{C_0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k}{z-z_0}dz = \int_{C_0} \frac{f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\lambda(z)(z-z_0)}{z-z_0}dz$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)\int_{C_0} \frac{1}{z-z_0}dz + f'(z_0)\int_{C_0} dz + \int_{C_0} \lambda(z)dz$$

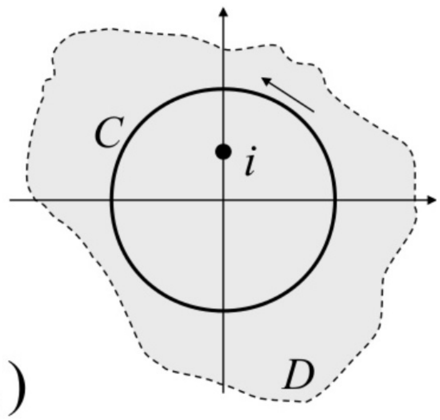
$$\Rightarrow \left|\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz - f(z_0)2\pi i\right| = \left|\int_{C_0} \lambda(z)dz\right| < \varepsilon 2\pi r_0.$$

Por tanto para $r_0 = 0$ tenemos que

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0).$$

Ejemplos

Evaluar las siguientes integrales:



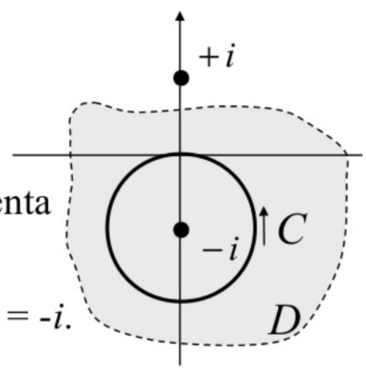
(1) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-i}$ donde C es el círculo $|z|=2$

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

$z_0 = i$ $\quad$ $f(z)=1$ $\quad$ $f(z_0)=1$

$f(z)$ es analítica en D y C incluye z_0 $\longrightarrow$ $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2+1}$ donde C es el círculo $|z+i|=1$



En primer lugar, notemos que $1/(z^2+1)$ presenta puntos singulares en $z = \pm i$.

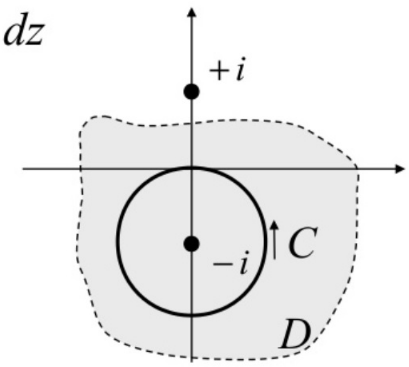
El contorno C incluye uno de esos puntos, $z = -i$. Ese es nuestro punto z_0 en la fórmula

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

Necesitamos un término en la forma $1/(z-z_0)$ así que rescribimos la integral como:

$$\int_C \frac{dz}{z^2+1} = \int_C \frac{dz}{(z+i)(z-i)} = \int_C \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i}\,dz$$

$$\int_C \frac{dz}{z^2+1} = \int_C \frac{dz}{(z+i)(z-i)} = \int_C \frac{\frac{1}{z-i}}{z+i}\,dz$$



$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

$f(z_0) = i/2$

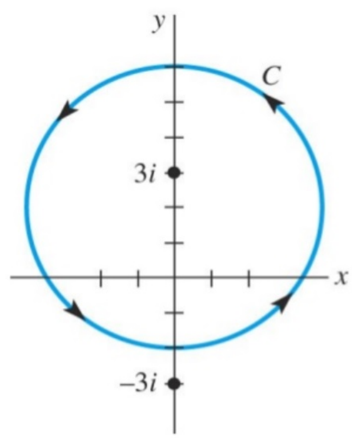
$f(z) = \dfrac{1}{z-i}$

$z_0 = -i$

$$\rightarrow \int_C \frac{dz}{z^2+1} = -\pi$$

Evaluar $\displaystyle\oint_C \frac{z}{z^2+9}\,dz$

donde C es el círculo $|z-2i| = 4$.



Solución

Solo $z = 3i$ está dentro de C, y

$$\frac{z}{z^2+9} = \frac{\frac{z}{z+3i}}{z-3i}$$

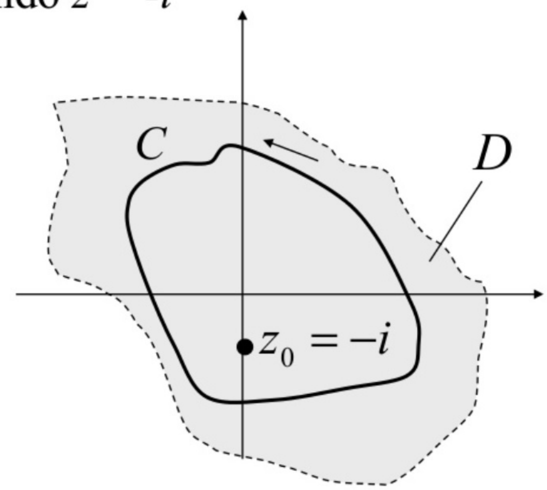
Sea $f(z) = \dfrac{z}{z+3i}$, entonces:

$$\oint_C \frac{z}{z^2+9}\,dz = \oint_C \frac{\frac{z}{z+3i}}{z-3i}\,dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i \frac{3i}{6i} = \pi i$$

<u>ejemplo</u>

Evaluar $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z+i}\,dz$ donde C es cualquier contorno cerrado conteniendo $z = -i$

Fórmula integral de Cauchy:



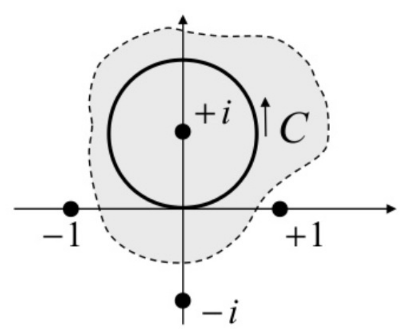
$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

se convierte en

$$\int_C \frac{e^z}{z+i}\,dz = 2\pi i e^{-i}$$

$f(z)$ es analítica en todo punto

$\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^4-1}$ donde C es el círculo $|z+i|=1$



Tenemos que

$$\int_C \frac{dz}{z^4-1} = \int_C \frac{dz}{(z+1)(z-1)(z+i)(z-i)}$$

El contorno C incluye uno de esos puntos, $z = +i$.
Ese es nuestro punto z_0 en la fórmula

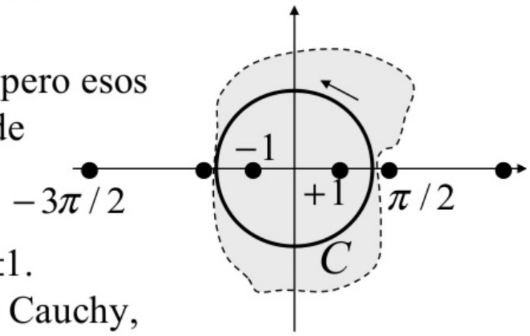
$$\int_C \frac{dz}{z^4-1} = \int_C \frac{f(z)}{z-i}\,dz \quad \text{donde} \quad f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)(z+i)}$$

Ahora $\displaystyle f(z_0) = f(i) = \frac{1}{(i+1)(i-1)(2i)} = \frac{i}{4}$

$$\rightarrow \int_C \frac{dz}{z^4-1} \equiv \int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_C \frac{\tan z\, dz}{z^2 - 1}$$ donde C es el círculo $|z|=3/2$

tan z es no analítica en $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, …, pero esos puntos están fuera de nuestro contorno de integración



C incluye dos puntos singulares, $z = \pm 1$.
Para poder usar la fórmula integral de Cauchy, debemos tener sólo un punto singular z_0 dentro de C.

Usaremos fracciones parciales:

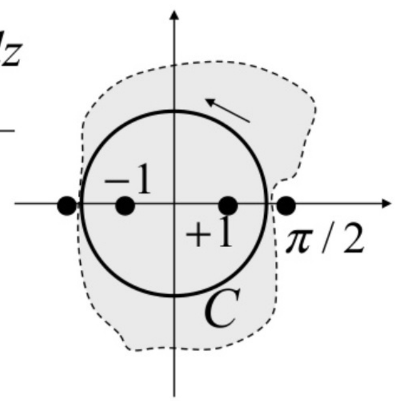
$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} = \frac{A(z+1)+B(z-1)}{(z-1)(z+1)}$$

$$\rightarrow \begin{matrix} (A+B)z = 0 \\ A - B = 1 \end{matrix} \rightarrow A = 1/2,\ B = -1/2$$

$$\int_C \frac{\tan z}{z^2-1} dz = \frac{1}{2}\underline{\int_C \frac{\tan z}{z-1} dz} - \frac{1}{2}\underline{\int_C \frac{\tan z}{z+1} dz}$$

$$z_0 = +1 \qquad f(z) = \tan z \qquad f(z_0) = \tan 1$$

$$z_0 = -1 \qquad f(z) = \tan z \qquad f(z_0) = \tan(-1)$$



$$\int_C \frac{\tan z}{z^2-1} dz = 2\pi i \times \frac{1}{2}\left[\tan(1) - \tan(-1)\right] \approx 9.785i$$

Derivadas de las funciones analíticas

Ya se ha demostrado anteriormente que la derivada de una función es analítica. Considere la expresión discreta de una derivada de la forma

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{h}\left[\frac{1}{z-z_0-h} - \frac{1}{z-z_0}\right] f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0-h)(z-z_0)}.$$

Observe que

$$\frac{1}{(z-z_0-h)(z-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)},$$

Por tanto

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} + \frac{h}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}$$

Como $f(z)$ es continua sobre y en el interior del contorno C, es también acotada $|f(z)| \leq M > 0$ sobre C. Denotemos L como la longitud del contorno C y $r > 0$ la más corta distancia entre la singularidad situada en z_0 y el contorno C. Como h es arbitrariamente pequeña podemos elegirla como $|h| \leq r/2$. Entonces para $z \in C$ tenemos que $|z - z_0| \geq r$ y además

$$|z-z_0-h| \geq |z-z_0| - |h| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

Poniendo estos resultados juntos tenemos que

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\right| \leq \frac{ML}{\pi r^3}|h|.$$

Por tanto cuando $h \to 0$, entonces

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\right| \to 0.$$

Como

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z)$$

entonces

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}.$$

Por inducción se puede mostrar que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$