Métodos de la física matemática I
Ayudantía 2

Profesor: Edward Arévalo (earevalo@fis.puc.cl)
Ayudante: Agustín Escobar (atescobar@uc.cl)

7 de septiembre de 2016

Problema 1: Teoremas sobre convergencia de series

1. Demostar que una condicion necesaria y suficiente para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converja a S es

$$\sum_{n=1}^{\infty} Re(z_n) = Re(S)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Im(z_n) = Im(S)$$

2. Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, se cumple

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

3. Probar que para un entero positivo N, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y solo si la serie $\sum_{n=N}^{\infty} z_n$ converge.

Problema 2: Convergencia de Series

Probar que las siguientes series son convergentes

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{ni^n}{log(n)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3ni^n}{(n+2i)^3}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^{n^2} i^n$

Problema 3: Serie Geometrica

- Usando la identidad
$$(1-z)(1+...+z^N) = 1 - z^{N-1}$$
mostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$
- Tomando el producto de Cauchy de la serie anterior con sigo misma, encontrar una expresión para $< \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$

Problema 3: Funciones analiticas

Mostrar que las funciones

- $f_1(z) = Re(z)$
- $f_2(Z) = Im(z)$
- $f_3(Z) = |z|$
- $f_4(Z) = arg(Z)$
no tienen derivada en en todo el plano complejo.

Problema 4:

Demostrar que si f(z) es continua en un conjunto compacto R, entonces es uniformemente confinua en R.

- Continuidad uniforme: $\forall \epsilon \geq 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x-y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$

Problema 5: Nociones de topología (Pendientes)

1. La clausura de un conjunto S es el conjunto más pequeño que contiene a S y a sus puntos de acumulación. Sea S dado por los puntos que cumplen $|z - z_0| < \delta$. Mostrar que la clausura de S está dada por $\bar{S}$ dado por $|z - z_0| \leq \delta$
2. ¿Cuál es el punto de acumulación de el conjunto de puntos $z_n = 1/n$?
3. Mostrar que un punto en una región es un punto de acumulación en dicha region

Referencias

- Bak & Newman, Complex Analysis.
- Pennisi, Elements of Complex Variable.