Métodos de la Física matemática

Definición:

Un punto z_0 es llamado un punto singular aislado, o singularidad aislada, de la función $f(z)$ si $f(z)$ no es analítica en z_0 pero es analítica en la vecindad sin el punto z_0.

Ejercicio: Determinar los puntos singulares, o singularidades de

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z + 5}{(z^2 + 4)(z^2 - 5z + 6)}$$

Solución: La función $f(z)$ no es analítica donde el denominador es zero, es decir para los valores

$$z = \pm 2i, \quad z = 3, \quad z = 2.$$

Aplicaciones de las funciones analítcas:

Determinante Jacobiano

Calcular $|f'(z)|^2$ bajo las condiciones de Cauchy-Riemanny y mostrar que satisface la definición del jacobiano de u, v con respecto a x, y.

$$|f'(z)|^2 = (u_x + iv_x)\overline{(u_x + iv_x)}$$
$$\Rightarrow |f'(z)|^2 = (u_x + iv_x)(u_x - iv_x) = u_x^2 + v_x^2 = u_x u_x + v_x v_x$$

usando las condiciones de Cauchy Riemann para funciones analíticas, se obtiene

$$|f'(z)|^2 = u_x v_y - u_y v_x = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = J(x, y),$$

donde $J(x, y)$ es el determinante de la matriz Jacobiana usado en el calculo de integrales de varias variables cuando un cambio de coordenadas esta involucrado.

Curvas de Nivel

Sea una función $f(z)$ en un dominio D. Todos los puntos $z \in D \quad / \quad |f(z)| = M > 0$ es llamado curva de nivel, o contorno de la función $f(z)$. Ya que M puede tomar diferentes valores, entonces existen diferentes curvas de nivel.

Considerese la función compleja $f(z) = z^2 - 1$. Las curvas de nivel de la función $f(z)$ están dadas por la expresión

$$|z^2 - 1| = M$$

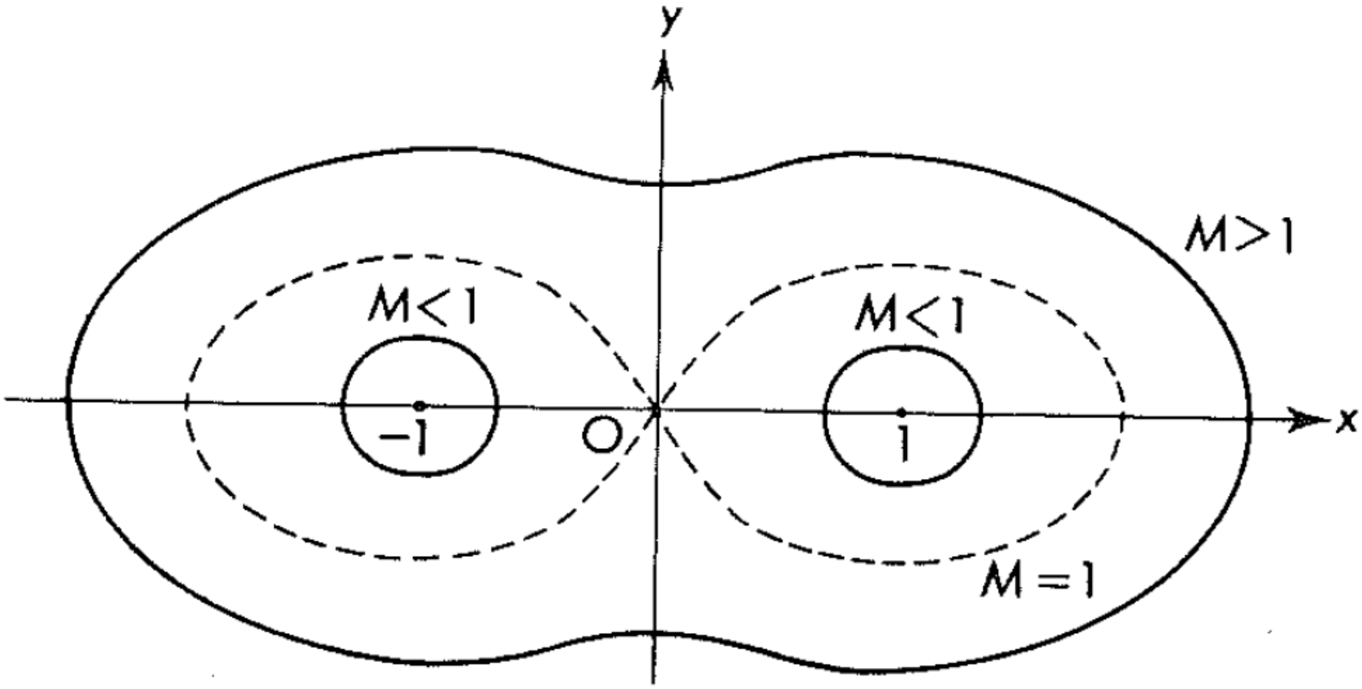
en términos de x e y

$$\Big((x-1)^2 + y^2\Big)\Big((x+1)^2 + y^2\Big) = M^2$$

Si usamos coordenadas polares, las curvas de nivel están dadas por

$$(\rho^2 + 1)^2 = 4\rho^2 \cos^2 \theta + M^2.$$

Cuando $M > 1$, se obtiene los llamados ovalos de Cassini. Cuando $M = 1$, se obtienen las Lmeniscatas de Bernoulli. Cuando $0 < M < 1$, se obtienen dos sistemas que no se intersectan y que rodean los puntos $z = 1$ y $z = -1$, respectivamente (Ver figura).



Ahora considerese que una curva de nivel de una función real $\lambda(x, y)$ definida en un dominio D está dada por un locus en D tal que $\lambda(x, y) = C = constante$.

Entonces para la parte real e imaginaria de una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ las curvas de nivel se definene como

$$u(x, y) = c_1, \quad v(x, y) = c_2$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Ahora se mostrará que este sistema de curvas de nivel forma un sistema ortogonal. Por simplicidad considerese que las curvas de nivel de las dos funciones mencionadas se intersectan en un punto $(x_0, y_0) \in D$. Considerese además que $f'(z_0) \neq 0$. Esta última condición implica que las funciones $u_x(x_0, y_0)$ y $u_y(x_0, y_0)$ no desaparecen simultanemente, por ejemplo supongase que $u_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Entonces, se puede definir la función $h_1(x, y) = u(x, y) - c_1$ tal que $h_1(x, y) = 0$, por tanto la derivada total de h_1 es

$$dh_1(x, y) = u_x dx + u_y dy = 0.$$

Esto implica que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}.$$

De igual manera se puede obtener para $v(x,y)=c_2$ que

$$-\frac{dx}{dy}=-\frac{v_y}{v_x}.$$

Para que las curvas $u(x,y)=c_1$ y $v(x,y)=c_2$ sean ortogonales en el punto (x_0,y_0) una de las pendientes tiene que ser el reciproco negativo de la otra en este punto. En otras palabras

$$-\frac{u_x(x_0,y_0)}{u_y(x_0,y_0)}=\frac{v_y(x_0,y_0)}{v_x(x_0,y_0)},$$

la cual puede ser escrita como

$$u_y(x_0,y_0)v_y(x_0,y_0)+u_x(x_0,y_0)v_x(x_0,y_0)=0.$$

Como $f(z)$ es analítica en z_0, las condiciones de Cauchy-Riemann

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0), \qquad v_x(x_0,y_0)=-u_y(x_0,y_0)$$

son válidas por tanto la condición de ortogonalidad se satisface.

La ecuación diferencial parcial de Laplace

Como se ha visto, no es posible elegir simplemente dos funciones arbitrarias u y v que aseguren la analiticidad de $f=u+iv$. Es necesario satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann.

De otra parte, las funciones u o v no son totalmente arbitrarias, sino que obedecen ciertas relaciones como se verá enseguida. Si $f(z)$ es analítica en un dominio D, entonces las derivadas de todos los órdenes $f^{(}n)$ existen en D. Además las derivadas parciales de u y v de todos los ordenes existen y son continuas en x e y para todo (x,y) en D.

Para la presente discusión es suficiente con saber que cuando la función $f(z)$ es analítica entonces sus segundas derivadas con respecto a x e y son continuas en el espacio D. Por tanto, derivando las condiciones de Cauchy-Riemann con respecto a x e y obtenemos respectivamente:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ya que $\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

La última ecuación es conocida como la ecuación en derivadas parciales de Laplace en dos dimensiones.

Definición: Una función real $u(x,y)$ se dice armónica en el dominio D si para todo $(x,y)\in D$, todas las derivadas segundas existen, son continuas, y satisfacen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$