Métodos de la Física matemática

Teorema

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D, entonces u y v son armónicas.

El hecho que las funciones u y v sean gobernadas por la ecuación de Laplace indica que son armónicas.

Definición: Si u y v son funciones armónicas en un dominio D, entonces v se dice ser el "*conjugado*" de u.

La expresión "*conjugado*" aca no se refiere a que sea "*complejo conjugado*".

Ejercicio: Muestre que la funcion $u(x, y) = e^x \cos y$ es armónico y determine su armónico conjugado $v(x, y)$ y la función analítica asociada $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

solución:

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_{xx} = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad u_{yy} = -e^x \cos y$$

Por tanto,

$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0,$$

lo que significa que $u(x, y) = e^x \cos y$ es armónica.

Para determinar el armónico conjugado $v(x, y)$, se usan las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Se puede observar que

$$v_y = e^x \cos y.$$

Integrando esta última ecuación con respecto a y (se mantiene x constante) se obtiene

$$v = e^x \sin y + \lambda(x)$$

donde $\lambda(x)$ es una función arbitraría tal que $\lambda'(x)$. Ya que $u_y = -v_x$ se ve que

$$-e^x \sin y = -e^x \sin y - \lambda'(x).$$

Por tanto $\lambda'(x) = 0$, es decir $\lambda(x) = c$, donde c es una constante. Lo anterior significa que $v = e^x \sin y + c$ es el armónico conjugado de la función $u = e^x \cos y$. La función $f(z) = u + iv$ puede ser escrita como

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y + ic = e^z + ic.$$

Aplicación de la ecuación de Laplace

Considerese las expresiones

$$\vec{v} = \nabla\phi \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Estas expresiones tiene uso en electrodinámica y en fluidos. Por ejemplo en electrodinámica $\vec{v}$ es un campo eléctrico y ϕ es un potencial eléctrico. También puede ser un potencial de velocidades en hidrodinámica. Nótese que

$$v_x = \phi_x \quad \text{y} \quad v_y = \phi_y.$$

Estas ecuaciones pueden ser solucionadas de forma real (sin el uso de expresiones complejas):

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = 0.$$

Entonces el potencial ϕ obedece la ecuación de Laplace $\Delta \phi = 0$.

Otra posibilidad para solucionar las expresiones $\vec{v} = \nabla \phi \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$ es considerando un potencial complejo $w = \phi + i\psi$ donde ϕ es el potencial antes mencionado, y ψ es una función auxiliar que sirve para extender el problema al plano complejo.

Si w es una función analítica entonces las condiciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, es decir

$$\phi_x = \psi_y \quad \text{y} \quad \phi_y = -\psi_x.$$

Las componentes v_x y v_y se pueden calcular usando la operación dw/dz.

Se tiene que

$$\frac{dw}{dz} = \phi_x + i\psi_x$$

y

$$\frac{dw}{dz} = \psi_y - i\phi_y,$$

por tanto

$$\frac{dw}{dz} = \phi_x - i\phi_y = v_x - iv_y.$$

Es decir $v_x = \phi_x = \psi_x$ y $v_y = \phi_y - \psi_x$ asi que

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{y} \quad \Delta \psi = 0.$$

En hidrodinámica la función ψ es llamado la funcion de corriente. Las lineas para ψ constante son llamadas de corriente y las de ϕ constante son las lineas equipotenciales. Estos dos tipos de lineas son ortogonales entre si, es decir

$$\nabla \phi \cdot \nabla \psi = (\phi_x, \phi_y) \cdot (\psi_x, \psi_y) = (\phi_x \psi_x + \phi_y \psi_y) = 0.$$

$$\Rightarrow (\psi_y \psi_x - \psi_x \psi_y) = \begin{vmatrix} \psi_x & \psi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = 0.$$

El último resultado indica que un flujo es irrotacional.

Algunos apuntes sobre funciones elementales (ya vistas)

Ejercicios

1) Muestre que la función exponencial e^z es analítica para todos los valores de z.

2) Muestre que w es una funcion analítica de z, entonces e^w es una función analítica de z

$$\frac{d}{dz}(e^w) = e^w \frac{dw}{dz}.$$

3) Muestre que la función exponencial $\sinh z$ y $\cosh z$ son analíticas para todos los valores de z.

Notas sobre la función logaritmo complejo

Definición

Sea $z \neq 0$ cualquier numero complejo. Si $e^w = z$, entonces $w = \log z$ es llamado el logaritmo de z.

Ya antes se había definido la función logaritmo como

$$w = \log z = \log |z| + i \arg z + 2n\pi i$$

donde el argumento $\arg z$ obedece la condición

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

y además $n \in Z$. La función $\arg z$ es multi-valuada.

Definición El valor principal de un logaritmo esta dado por la expresión:

$$w = \log z = \log |z| + i \arg z$$

con $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Considerese los siguientes ejercicios

1) Muestre que $\log i = i\frac{\pi}{2}$

2) Muestre que $\log(-1 + i) = \frac{1}{2} \log 2 + i\frac{3\pi}{4}$

2) Muestre que $\log(-i - 1) = \frac{1}{2} \log 2 - i\frac{3\pi}{4}$

Con los resultados anteriores podemos ver que aunque

$$-1 - i = i(-1 + i)$$

, se tiene que

$$\log(-1 - i) \neq \log i + \log(-1 + i).$$

Luego en la operación de producto y división se debe tener especial cuidado con el argumento para que los resultados concuerden, i.e escoger un valor de n en

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi n$$

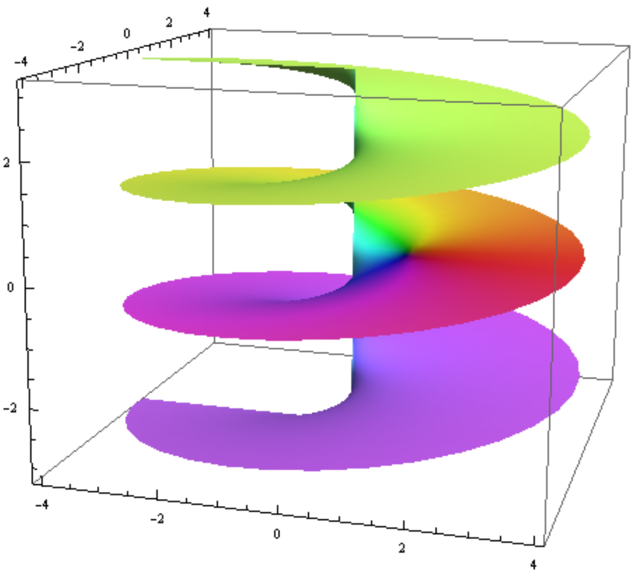
tal que $-\pi < \arg(z_1 z_2) \leq \pi$. Sin embargo el hecho de que los resultados del ejercicio anterior no concuerden no implica que esten mal, es una consecuencia de que la función argumento es multi-valuada, como en el caso de la función logaritmo. Observese que la funcion argumento no es continua a lo largo de la parte negativa del eje x, i.e.

$$\lim_{y \to 0} \arg(x + iy) = \pi, \quad \lim_{y \to 0} \arg(x - iy) = -\pi.$$

Este resultado de la función argumento es indeseable para definir las funciones inversas. Por tanto para recobrar la continuidad, existen dos caminos:

a) Un camino es remover del dominio D los puntos de la parte negativa del eje x y redefinir de las funciones multivaluadas de tal forma que siempre se de la continuidad. Es decir considerar la función multi-valuada como una colección de funciones uni-valuadas. Cada miembro de esta colección se llama una rama de la funcion multi-valuada.

b) El otro camino es considerar que el dominio de la función no es el plano complejo sino la superficie de Riemann tal como se muestra en la figura. En este caso la función se vuelve uni-valuada



Ambos caminos permiten definir las funciones inversas de las funciones multi-valuadas.