Conjuntos abiertos, cerrados y conectados

Definición

Un punto $z_0 \in S$ se dice interior de S si existe una vecindad $|z - z_0| < \varepsilon$ totalmente contenida en S con $\varepsilon > 0$.

Definición

Si todo punto del conjunto S es interior, entonces el conjunto S se dice abierto.

Definición

Un punto $z_0 \in S$ se dice de acumulación de un conjunto S si toda vecindad de z_0 contiene infinitos puntos de S. El punto z_0 no necesariamente pertenece a S.

Definición

Un conjunto S se dice cerrado si todo punto de acumulación de S pertenece a S

Definición

La unión de S con el conjunto de puntos acumulación se llama la clausura de S.

Definición

Un punto de frontera, z_0, del conjunto S es aquel para el cual toda vecindad, $|z - z_0| < \varepsilon$, contiene por lo menos un punto de S y un punto que no pertenece a S. Nótese que los puntos de frontera de un conjunto abierto no pertenecen al conjunto. Lo opuesto es para los conjuntos cerrados, i.e los puntos de frontera de un conjunto cerrado pertenecen a este.

Definición

Un conjunto S se dice separado en los conjuntos S_1 y S_2 si

- S_1 y S_2 no están vacios
- $S = S_1 \cup S_2$

- $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
- S_1 no contiene puntos de acumulación de S_2
- S_2 no contiene puntos de acumulación de S_1

Definición

Un conjunto se dice conectado si no se puede separar en dos subconjuntos con las condiciones mencionadas en el anterior punto.

Definición

Un conjunto abierto S se dice conectado si todo par de puntos $z_1, z_2 \in S$ puede ser conectados por un poligono totalmente contenido en S.

Definición

Un conjunto abierto y conectado con alguno, ninguno, o todos los puntos de su frontera se llamará región. Si ningún punto de la frontera es incluido entonces la región es llamada abierta o dominio. Si todos los puntos de la frontera están incluidos, entonces la región es llamada cerrada.

Definición

Un conjunto compacto es aquel que es acotado y cerrado. Ejemplo: el intervalo $I = [\alpha, \beta]$ sobre la línea real es compacto. Otro ejemplo es: $|z| \leq M$ con M constante.

Algunos ejercicios

Describa geométricamente la región en el plano z descrita por las siguientes funciones:

- $|z| < 1$
- $|z| \leq 1$
- $|z + i| < |z - 1|$
- $|z - 1| \leq 1$
- $Re(z) > 0$
- $Re(z^2) \geq 9$

Series de Números complejos

Hasta ahora hemos hablado de secuencias de puntos en un plano y su convergencia, en especial usando el criterio de Cauchy. Sin embargo, existen otras estructuras matemáticas constituidas de sumas de números complejos y llamadas series:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} z_n,$$

donde $m \to \infty$.

Nótese que

$$S_1 = z_1$$
$$S_2 = z_1 + z_2$$
$$\vdots$$
$$S_m = \sum_{n=1}^{m} z_n,$$

Luego $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ forma una secuencia.

Definición

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se dice convergente si

$$\lim_{m\to\infty} S_m = S$$

entonces se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

Una serie es divergente si $\lim_{m\to\infty} S_m$ no existe o es infinita.

Teorema : Cauchy

Una condición necesaria y suficiente para que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converja para todo $\varepsilon > 0$ es que existe un entero N tal que

$$|S_m - S_n| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad n, m > N$$

Definición

Una serie infinita de números complejos, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, converge absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

Para determinar esta convergencia se pueden usar los siguientes criterios:

Criterio de la comparación con una serie convergente

Si $|z_n| \leq |w_n|$ para todo $n > N_0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente.

Criterio de la razón

Si

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L,$$

entonces si $L < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente, y si $L > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es divergente. En el caso $L = 1$ el criterio es inconclusivo, es decir la serie puede converger o diverger.

Demostración

Sea $0 < L < 1$ y sea $\eta \in (L, 1)$. Si la serie converge, entonces existe un N tal que $\forall n \geq N$ se satisface que

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < \eta$$

por tanto,

$|z_{n+1}| < \eta |z_n|$ $\forall n \geq N$ esto siginifica que

$$|z_{N+1}| < \eta |z_N|$$

$$|z_{N+2}| < \eta |z_{N+1}| < \eta^2 |z_N|$$

$$|z_{N+3}| < \eta |z_{N+2}| < \eta^3 |z_N|$$

$$\cdots$$

$$|z_{N+k}| < \eta |z_{N+k-1}| < \eta^k |z_N|$$

con $k \to \infty$. Entonces

$$\sum_{n=N}^{\infty} |z_n| = \sum_{k=0}^{\infty} |z_{N+k}| < \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k |z_N| = |z_N| \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} |z_n| < |z_N| \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} |z_n| < |z_N| \frac{1}{1-\eta} < \infty$$

.

La serie converge!

Ejercicios

- considere la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} i^k/k!$
- considere la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} i^k/k$

Desigualdad de Cauchy

$$\left| \sum_{k=1}^{N} a_k b_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{N} |b_k|^2$$

Demostrar usando la relación

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k - \lambda \bar{b}_k|^2 \geq 0 \qquad \lambda \in C$$

Teorema

Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = S$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = T$ son absolutamente convergentes, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(z_1 w_n + \cdots, + z_n w_1 \Big)$$

también converge absolutamente y tiene la suma $S \cdot T$ (demostrar usando desigualdad de Cauchy).