Métodos de la física matemática I
Tarea 3

Profesor: Edward Arévalo (earevalo@fis.puc.cl)
Ayudante: Agustín Escobar (atescobar@uc.cl)

6 de noviembre de 2016

---

1. Problema: Convergencia de serie de potencias

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ y $r > 0$. Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z-z_0|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n,$$

muestre que cuando la serie converge uniformemente, el radio de convergencia es definidio como

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

2. Problema: Convergencia de serie de potencias

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ y $r > 0$. Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z-z_0|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n,$$

muestre usando el criterio de Cauchy que el radio de convergencia de la serie puede ser definido como

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

3. Problema: Radios de convergencia

Determine los radios de convergencia de las siguientes series

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^4} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$$

$$(c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n} \qquad (d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$$

$$(e) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^n)}{n!} z^n \qquad (f) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n}$$

4. Problema: Convergencia

Muestre que las series

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n z^n}{n+1}$$

Tienen el mismo círculo de convergencia.

5. Problema: Serie de Taylor

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ y converge en la región $|z - z_0| < R$. Muestre que los coeficientes c_n estan dados por la expresión

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(z_0)}{dz^n}.$$

6. Problema: Expansion en serie de Taylor

Determine la serie de Taylor y el radio de convergencia de:

- $$f = \log z = \ln|z| + i\arg(z)$$

con $-\pi < \arg(z) \leq \pi$, alrededor del punto $z_0 = -1 + i$.

- $f = 1/z$ alrededor de $z = 1$.
- $f = \frac{1}{z-4}$ alrededor de $z = 3$

7. Problema: Serie de Taylor

Muestre que para todo punto z en el interior del círculo $|z| = 1$, entonces

$$|\log(1+z)| \leq -\log(1-|z|).$$

8. Problema: Serie de Laurent

Halle la serie de Laurent (o Taylor según el caso) en potencias de z de las siguientes funciones y regiones indicadas.

- $f = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ $\quad (A) \quad 0 < |z| < 1 \quad (B) \quad 1 < |z| < 3 \quad (C) \quad |z| > 3$
- $f = \dfrac{1}{z^2(z-1)(z+2)}$ $\quad (A) \quad 0 < |z| < 1 \quad (B) \quad 1 < |z| < 2 \quad (C) \quad |z| > 2$
- $f = \dfrac{1}{(z-\lambda)^k}$ $\quad (A) \quad |z| < |\lambda| \quad (B) \quad |z| > |h|$ ambos casos con $k = 1, 2, 3, ...$

9. Problema: Expansión

Sabemos que

$$f = \frac{1}{z-h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{z^{n+1}} \quad \text{cuando} \quad |z| > |h|.$$

Sustituzendo $z = e^{i\theta}$ con h real y $0 < |h| < 1$, muestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n \cos[(n+1)\theta] = \frac{\cos\theta - h}{1 - 2h\cos\theta + h^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n \sin[(n+1)\theta] = \frac{\sin\theta}{1 - 2h\cos\theta + h^2}$$

10. Problema

Muestre que la expansión de Laurent alrededor de un punto aislado z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

puede ser escrita como

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

11. Problema: Integración de la serie de Laurent

Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n},$$

es una serie que converge en una vecindad reducida alrededor de z_0, entonces muestre que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i b_1,$$

donde γ es un contorno cerrado círcular en el sentido positivo y centrado en z_0.

12. Problema: Singularidades

Halle y clasifique las singularidades aisladas de cada una de las siguientes funciones

$$(A) \quad \frac{z^3 + 1}{z^2(z+1)} \qquad (B) \quad z^3 e^{1/z} \qquad (C) \quad \frac{\cos z}{z^2 + 1}$$

$$(D) \quad \tan z \qquad (E) \quad \frac{1}{e^z - 1} \qquad (F) \quad \cot\left(\frac{1}{z}\right)$$

13. Problema: Polos

Demuestre que si $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0, entonces $f'(z)$ tiene un polor de orden $m + 1$.

14. Problema: verificar el Teorema de Picard

Verifique el teorema de Picard para la función $\cos(1/z)$ en $z_0 = 0$.

15. Problema

Muestre que si $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0, enteonces $g(z) = f'(z)/f(z)$ tiene un polo simple en z_0. Cual es el coeficiente b_1 de la serie de Laurent de la función $g(z)$.

16. Problema: Polo de orden m de una función

Si

$$f(z) = \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots +$$

es una funcion con un polo de orden m. Muestre que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!\, b_1$$

17. Problema: Determinando el coeficiente b_1

Determine el coeficiente b_1 (ver problemas anteriores) de la función

$$f(z) = \frac{cos z}{z^2(z-\pi)^3}$$

para los casos donde $z_0 = 0$ y $z_0 = \pi$.

18. Problema: Teorema de los residuos

Usando la trasnformación $z = e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ solucione la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$$

Ayuda: Usando la transformación propuesta re escriba la integral en términos de z. La integral de la expresón polinomial resultante puede solucionarse usando el teorema de los residuos.