Razón de magnificación

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0}{z - z_0} \right| = |f'(z_0)|$$

Para el mapeo $w = f(z)$ magnifica o acorta las lineas por un factor $|f'(z_0)|$.

Nótese que

$$|f'(z)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$|f'(z)|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} .$$

es el determinante Jacobiano.

Transformación lineal fracionaría

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

$$w' = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

$$ad - bc \neq 0.$$

$w = z + b$	Traslaciones
$w = az$ con $\lvert a \rvert = 1$	Rotaciones
$w = az + b$	Transformaciones lineales
$w = 1/z$	Inversion

De lo anterior concluimos que dependiendo de la elección de los cuatro números a, b, c y d se obtienen diferentes tipos de mapeos.

Ejemplo $w = 1/z$

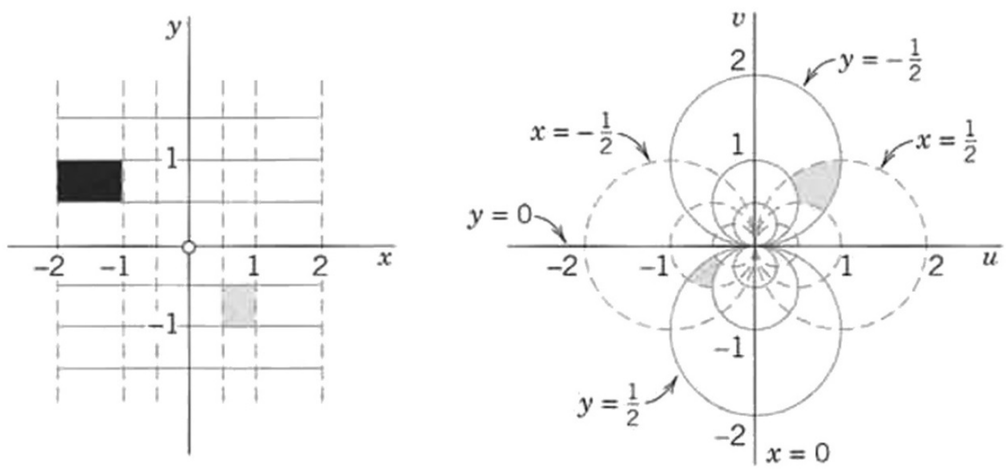
$$z = re^{i\theta} \qquad w = Re^{i\phi} \qquad w = 1/z$$

$$\Rightarrow \quad Re^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}\, e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{1}{r}. \qquad \phi = -\theta.$$

$$|z| = r = 1 \quad \Rightarrow \quad |w| = R = 1$$

$$\Rightarrow \quad w = e^{i\phi} = e^{-i\theta}.$$



Demostración

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

$A = 0$ (linea recta) $\qquad A \neq 0$ Círculo

$$Az\bar{z} + B\frac{z + \bar{z}}{2} + C\frac{z - \bar{z}}{2i} + D = 0.$$

$$z = 1/w$$

$$A + B\frac{\bar{w} + w}{2} + C\frac{\bar{w} - w}{2i} + Dw\bar{w} = 0$$

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0.$$

Teorema: círculos y lineas rectas

Toda transformación lineal fraccionaría,

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

mapea la totalidad de círculos y lineas rectas en el plano z en círculos y lineas rectas en el plano w.

Este teorema es obvio para traslaciones y rotaciones o por una expansión o contracción debida a una constante. Además como se demostró en el ejercicio anterior, eso también es cierto para la transformación $1/z$. Por ultimo, es importante remarcar que la composición de estos mapeos también satisface el teorema de mapeo de de círculos y lineas rectas. En particular para $c = 0$ la situación es trivial, sin embargo, para $c \neq 0$ se requiere un tanto más de detalle.

Para $c \neq 0$ el mapeo puede escribirse como

$$w = K\frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c} \qquad \text{con} \qquad K = -\frac{ad-bc}{c}.$$

Ahora es posible redefinir mapeos de la siguiente forma:

$$w_1 = cz, \quad w_2 = w_1 + d, \quad w_3 = \frac{1}{w_2}, \quad w_4 = Kw_3.$$

y por ultimo

$$w = w_4 + \frac{a}{c}$$

Como se observa el mapeo w se descompuso en cuatros mapeos simples, cada uno de ellos satisfaciendo el teorema. Por consiguiente el mapeo w también satisface el teorema de los círculos y la lineas rectas.

Ejemplo Encontrar la imagen de la círcunferencia $|z| = 1$ con el mapeo

$$w = \frac{2iz - 2 - 2i}{(1-i)z - 1}$$

El método consiste en tomar tres puntos sobre la circunferencia en el plano z y ver sus imagenes en el plano w, i.e.

$$w(1) = -2i \qquad w(-1) = 2i \qquad w(i) = -2 + 4i.$$

Suponiendo que estos tres puntos estan sobre un círculo, en principio se puede determinar el centro y el radio del círculo. De hecho se puede demostrar que estos tres puntos se encuentran sobre el círculo $|w+4| = \sqrt{20}$

Otra posibilidad para solucionar el problema es descomponer el mapeo en una serie de transformaciones sencillas w_1, w_2, w_3, y w_4, para finalmente llegar a completar la transformación w (ver ejercicio en la página siguiente).

Mapear $|z|=1$ con la transformación

$$w = \frac{2iz - 2 - 2i}{(1-i)z - 1}$$

$$W = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow \begin{array}{ll} a = 2i & b = -2-2i \\ c = 1-i & d = -1 \end{array}$$

Solución:

Nótese que $w = \dfrac{az+b}{cz+d} = k\dfrac{1}{cz+d} + \dfrac{a}{c}$

$$k = -\frac{ad-bc}{c} = \frac{bc-ad}{c}$$

Entonces se puede considerar una composición de mapeos de la forma

$$w_1 = cz \qquad w_2 = w_1 + d$$

$$w_3 = \frac{1}{w_2} \qquad w_4 = k w_3$$

$$w = w_4 + \frac{a}{c}$$

$$w_1 = cz \Rightarrow z = \frac{w_1}{c} \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow \left|\frac{w_1}{c}\right| = 1$$

$$\Rightarrow |w_1| = |c| \qquad |c| = \sqrt{2}$$

$$\boxed{|w_1| = \sqrt{2}}$$

$$w_2 = w_1 + d \Rightarrow w_1 = w_2 - d \Rightarrow |w_2 - d| = \sqrt{2}$$

$$\boxed{|w_2 + 1| = \sqrt{2}}$$

$$w_3 = \frac{1}{w_2} \Rightarrow w_2 = \frac{1}{w_3} \Rightarrow \left|\frac{1}{w_3} + 1\right| = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$|w_3 + 1| = \sqrt{2}\,|w_3| \Rightarrow |w_3+1|^2 = 2|w_3|^2$$

$$(u_3+1)^2+v_3^2=2(u_3^2+v_3^2)$$

$$u_3^2+2u_3+1+v_3^2=2u_3^2+2v_3^2$$

$$u_3^2+v_3^2-2u_3=1$$

$$u_3-2u_3+1+v_3^2=2$$

$$(u_3-1)^2+v_3^2=2 \Rightarrow \boxed{|w_3-1|=\sqrt{2}}$$

$$w_4=k\,w_3 \qquad k=\frac{bc-ad}{c}=\frac{-(2+2i)(1-i)-2i(-1)}{1-i}$$

$$=-3-i$$

$$|k|=\sqrt{10}$$

$$w_3=\frac{w_4}{k} \Rightarrow \left|\frac{w_4}{k}-1\right|=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |w_4-k|=\sqrt{2}\,|k|=\sqrt{20}$$

$$|w_4-(-3-i)|=\sqrt{20} \Rightarrow \boxed{|w_4+3+i|=\sqrt{20}}$$

$$w=w_4+\frac{a}{c} \qquad \frac{a}{c}=\frac{2i}{1-i}=-1+i$$

$$w=w_4-1+i \Rightarrow w+1-i=w_4$$

$$|w+1-i+3+i|=\sqrt{20}$$

$$\Rightarrow \boxed{|w+4|=\sqrt{20}}$$