AST0212 – 2016-1

Introducción al análisis de datos

Instituto de Astrofísica

Facultad de Física

Pontificia Universidad Católica de Chile

AST0212 – 2016-1

Introducción al análisis de datos

Instituto de Astrofísica

Facultad de Física

Pontificia Universidad Católica de Chile

Equipo docente:

Profesor: Alejandro Clocchiatti

Ayudantes:

Francisco Aros (TM6)

Nicolás Castro (TL4)

TM6: Tutoría del martes en módulo 6

TL4: Tutoría del lunes en módulo 4

Nuestro Semestre 2016-1

AST0212 C0 ✓

Sunday	Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday
6 Mar 2016 Semana 1	7	8	9	10	11 C1 ✓	12
13 Semana 2	14 TL1	15 TM1	16	17	18 C2 ✓	1
20 Semana 3	21 TL2	22 TM2	23	24	25 Feriado	2
27 Semana 4	28 TL3	29 TM3	30	31	1 Apr C3 ✓	2
3 Semana 5	4 TL4	5 TM4	6	7	C4	
10 Semana 6	11 TL5	12 TM5	13	14	C5	
17 Semana 7	18 TL6	19 TM6	20	21	22 C6 – SM1	
24 Semana 8	25 TL7	2		28	29 C7 – SM2	
1 May Semana 9	2 TL8	3 TM8		5	6 C8 – SM3	7
8 Semana 10	9 TL9	1		12	13 C9 – SM4	14
15 Semana 11	16 TL10	17 TM10		19	20 C10	21
22 Semana 12	23 TL11	24 TM11	25	26	27 C11	28
29 Semana 13	30 TL12	31 TM12	1 Jun	2	3 Feriado	4
5 Semana 14	6 TL13	7 TM13	8	9	10 C12	11
12 Semana 15	13 TL14	14 TM14	15	16	17 C13	18
19	20	21	22	23	24	25
		28			1 Jul	2
		5			8 Notas	9

← Control 1
Reparto Tarea 1

← Control 2

← Reparto T2

← Entrega Tarea 1

← Entrega Tarea 2

Tutorías día lunes
Módulo 4:
Nicolás Castro

Tutorías día martes
Módulo 6:
Francisco Aros

PDF Calendar by www.pdfcalendar.com

REPASO

Clase previa (Clase 3):

1. Temas pendientes
    1. Datos para Tarea 1 ¡Grupos 1, 6 y 8 no enviaron sus datos!
    2. Una vuelta de análisis sobre el Control 1
2. Vueltas de tuerca sobre la Tarea 1
    1. Herramientas Linux de selección de datos en archivos de texto simple organizados en columnas: *awk*

Temas del día: Visualización cualitativa de histogramas. Histogramas y funciones de distribución de probabilidad. Uso de la FDP para calcular parámetros de la distribución.

Esta clase (Clase 4):

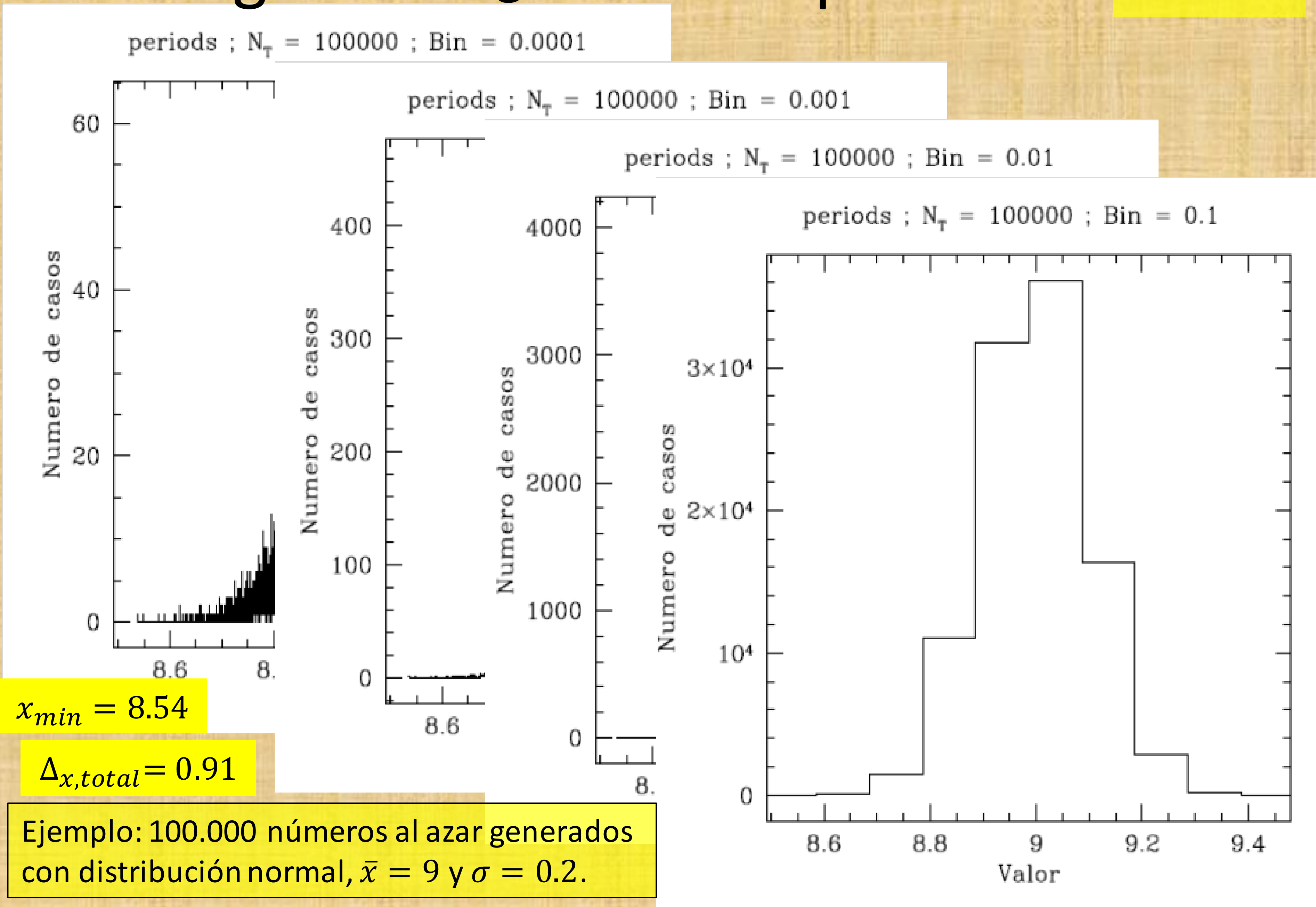
REPASO

1. Temas pendientes
   1. Observaciones desde Santa Martina
1. Herramienta Linux de selección de datos en archivos organizados en columnas: *awk*
2. Breve repaso de la clase previa
   1. Visualización cualitativa de histogramas.
   2. Histogramas y funciones de distribución de probabilidad.
   3. Uso de la FDP para calcular parámetros de la distribución.

Temas del día: Segunda vuelta sobre FDP constante. Otras FDP que hay que conocer: Poisson y Gauss. Modelos de la realidad, distribución subyacente. Test modelo vs. realidad.

Histogramas: ¿Tamaño óptimo del bin?

REPASO



$x_{min} = 8.54$

$\Delta_{x,total} = 0.91$

Ejemplo: 100.000 números al azar generados con distribución normal, $\bar{x} = 9$ y $\sigma = 0.2$.

REPASO

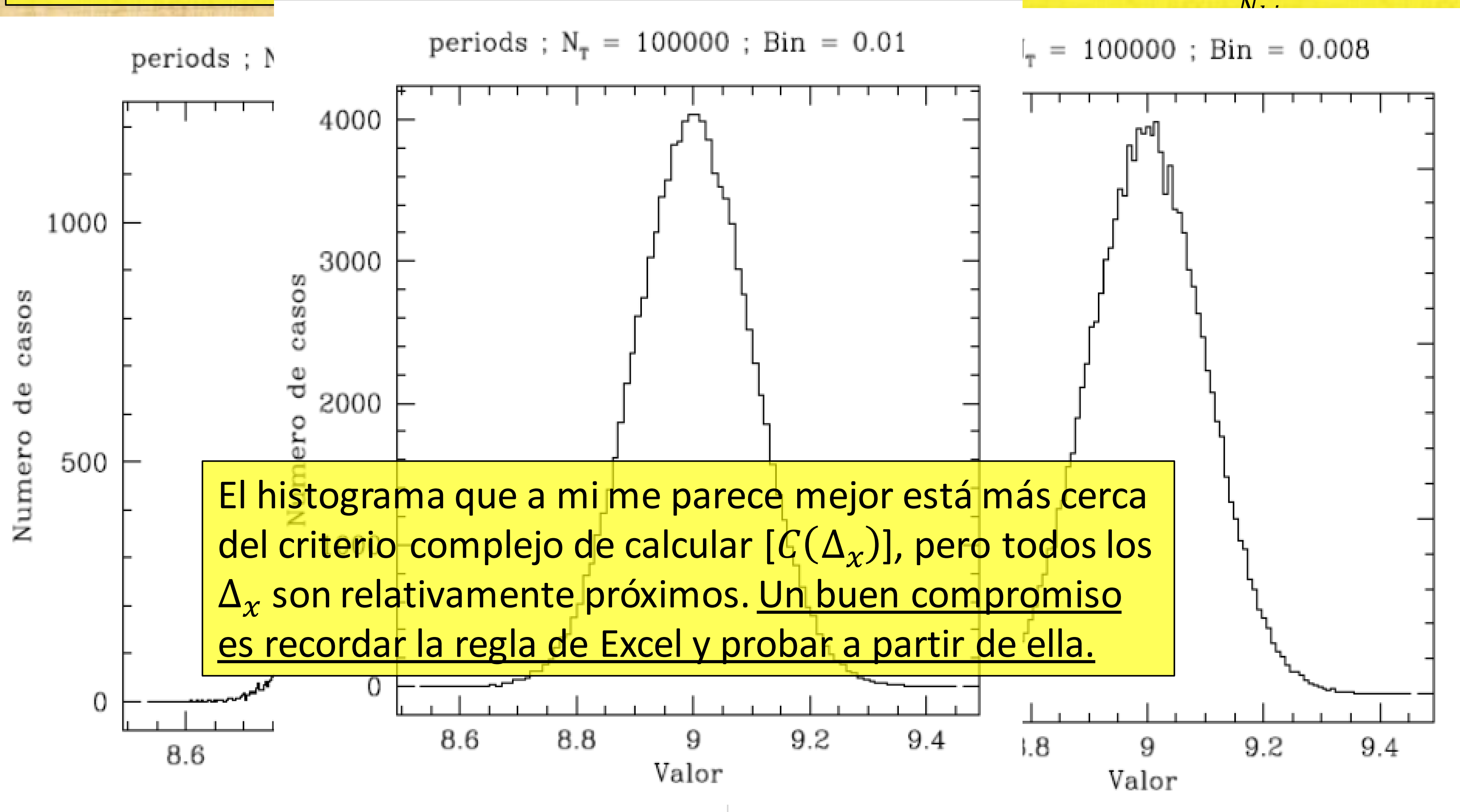
Histogramas: ¿Tamaño óptimo del bin?

Regla de "Excel": $N_{bin} \cong \sqrt{N_{total}}$

$$\Longrightarrow \Delta_x = \frac{0.91}{316,228} = 0,00288$$

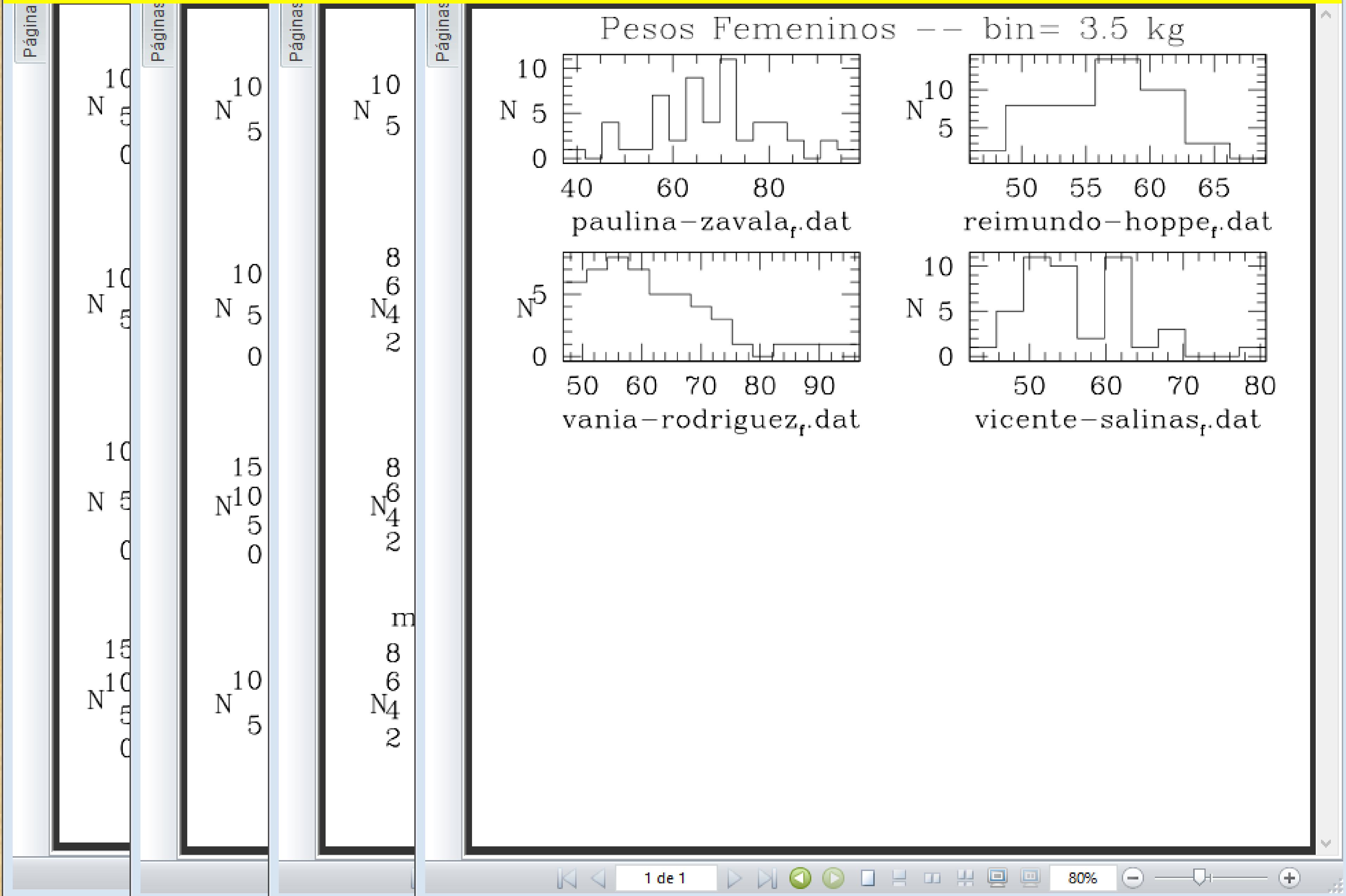
Regla de Shimazaki & Shinomoto (2007): El Δ_x que minimiza $C(\Delta_x)$

$$C(\Delta_x) = \frac{(2\bar{h} - v_h)}{\Delta_x^{\ 2}}$$

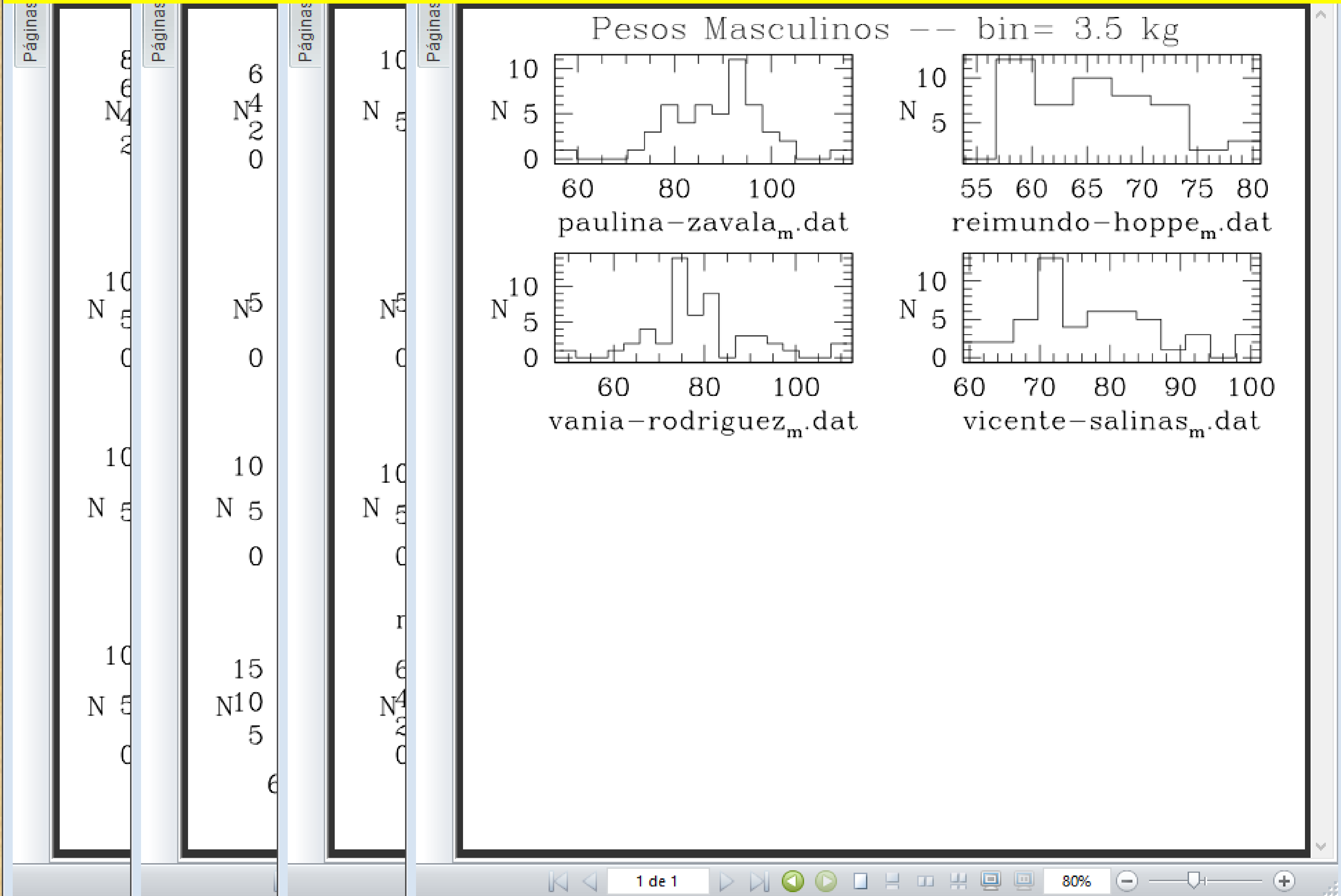


El histograma que a mi me parece mejor está más cerca del criterio complejo de calcular [$C(\Delta_x)$], pero todos los Δ_x son relativamente próximos. <u>Un buen compromiso es recordar la regla de Excel y probar a partir de ella.</u>

Histogramas de datos inventados REPASO

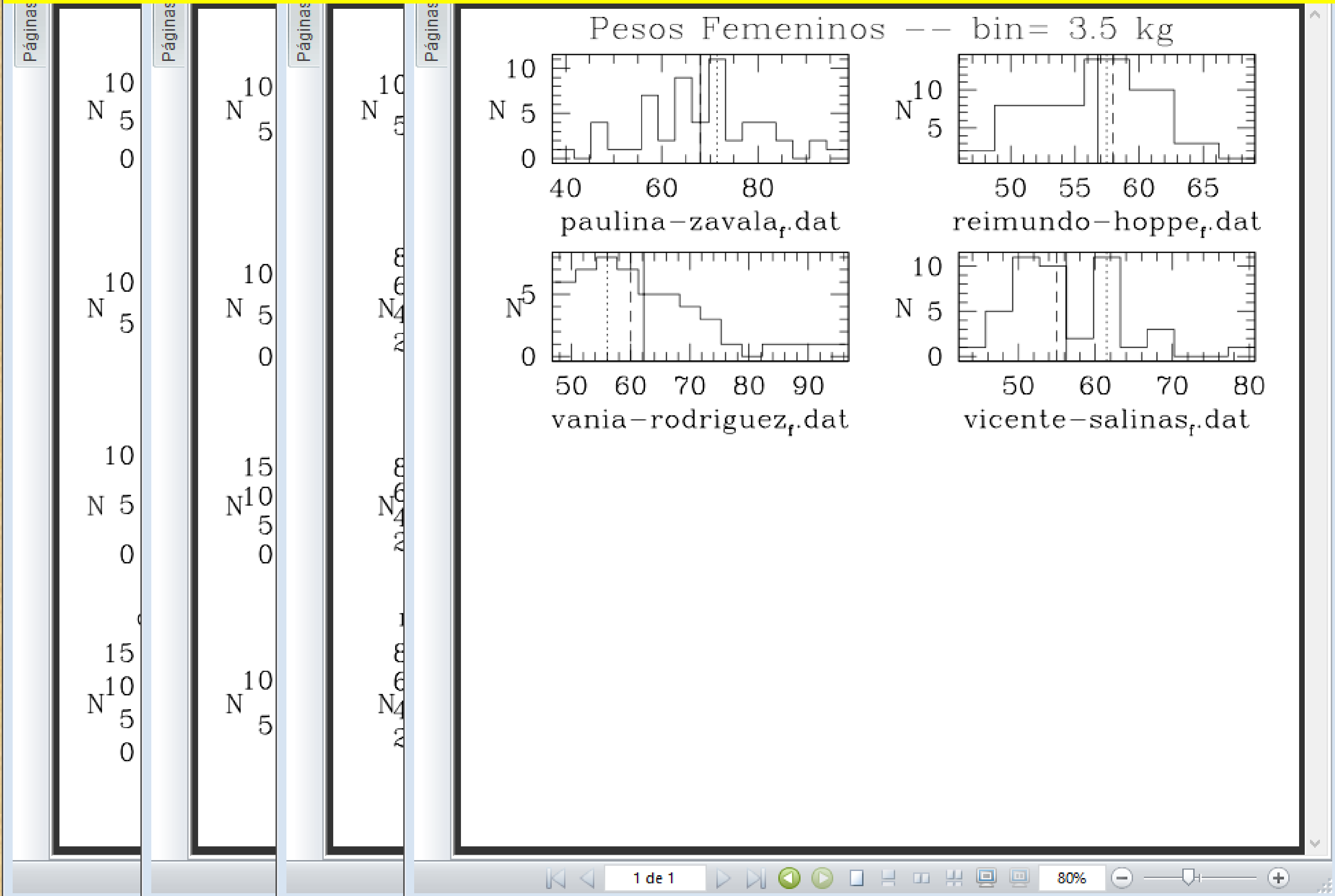


Histogramas de datos inventados REPASO

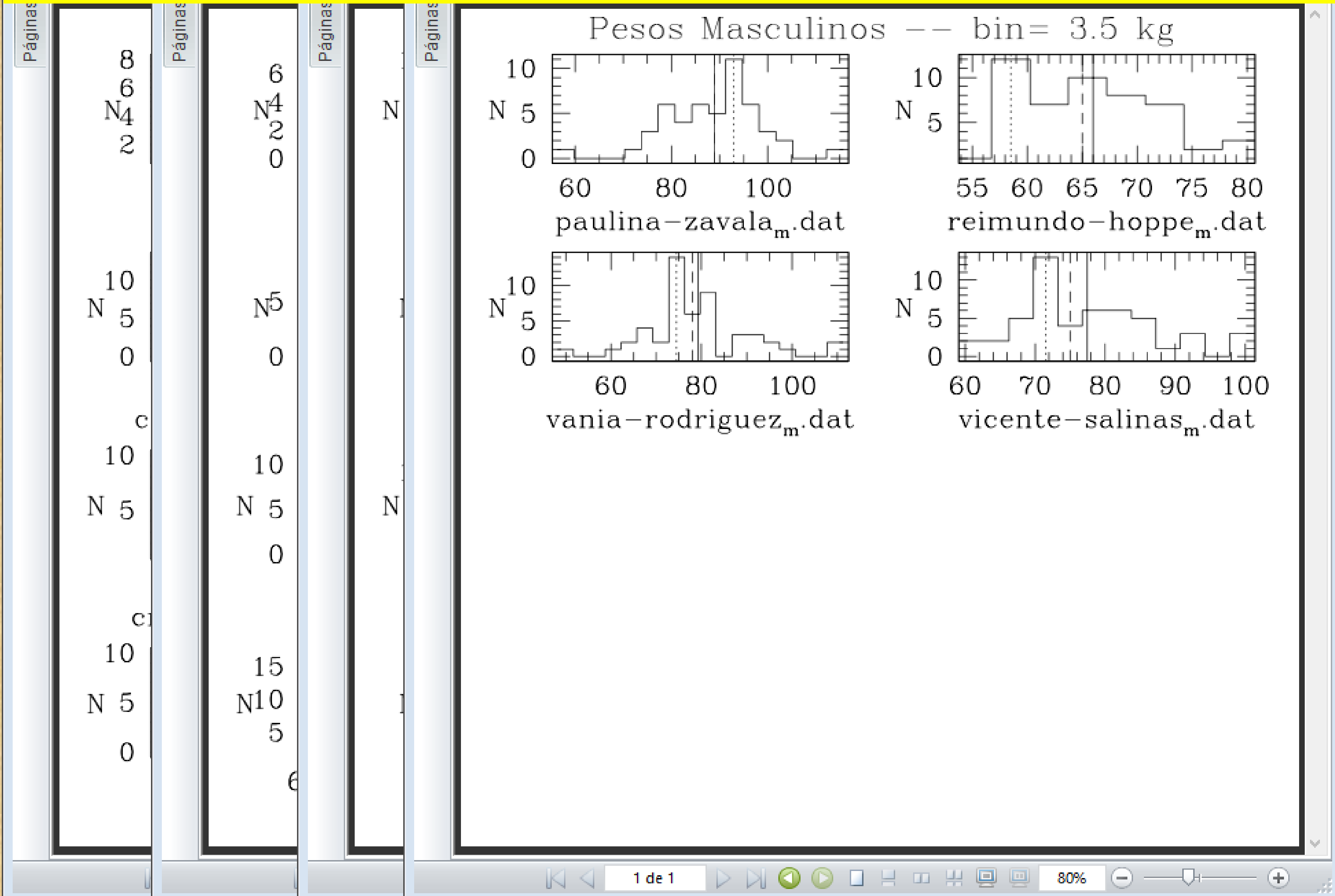


Histogramas de datos inventados

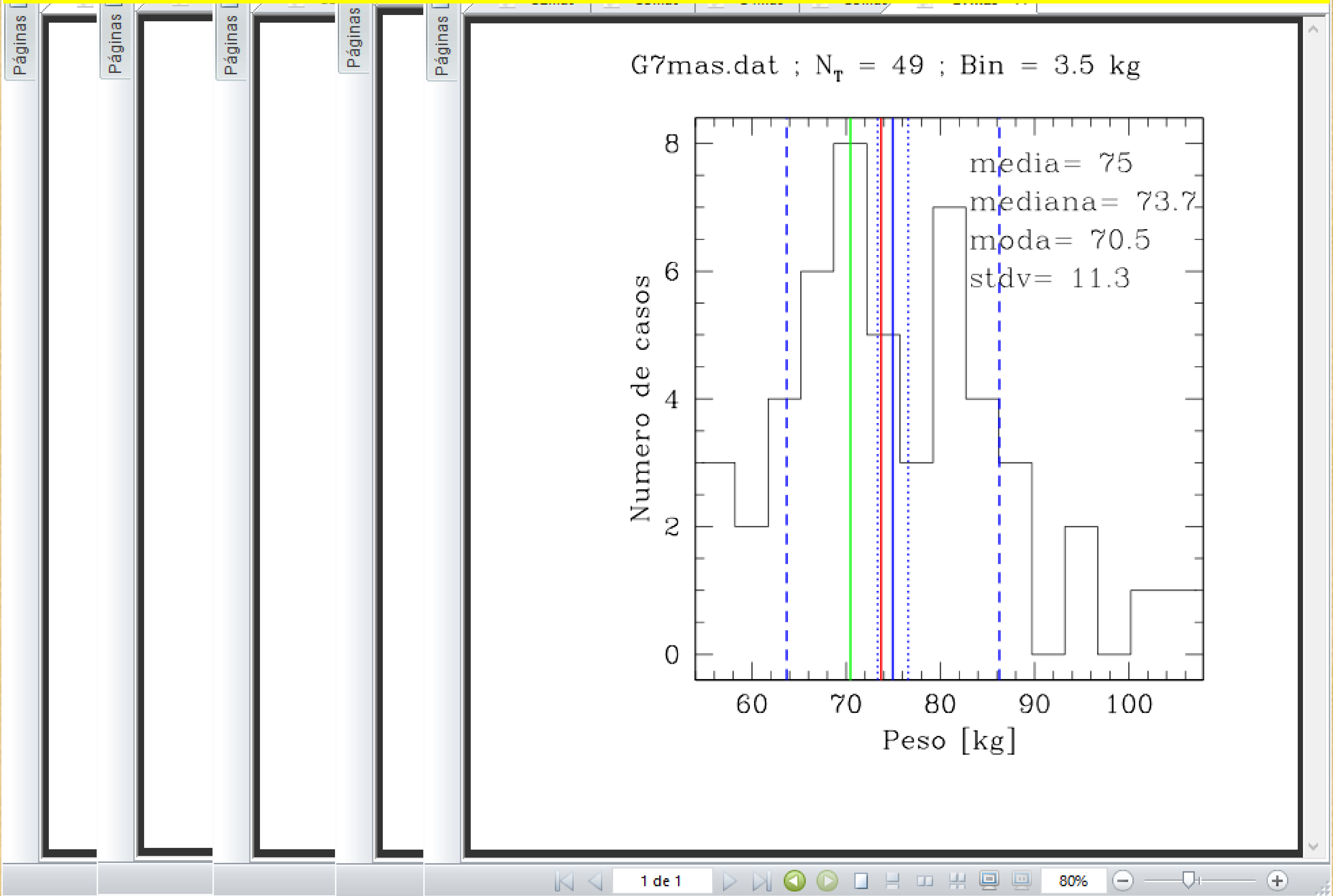
REPASO



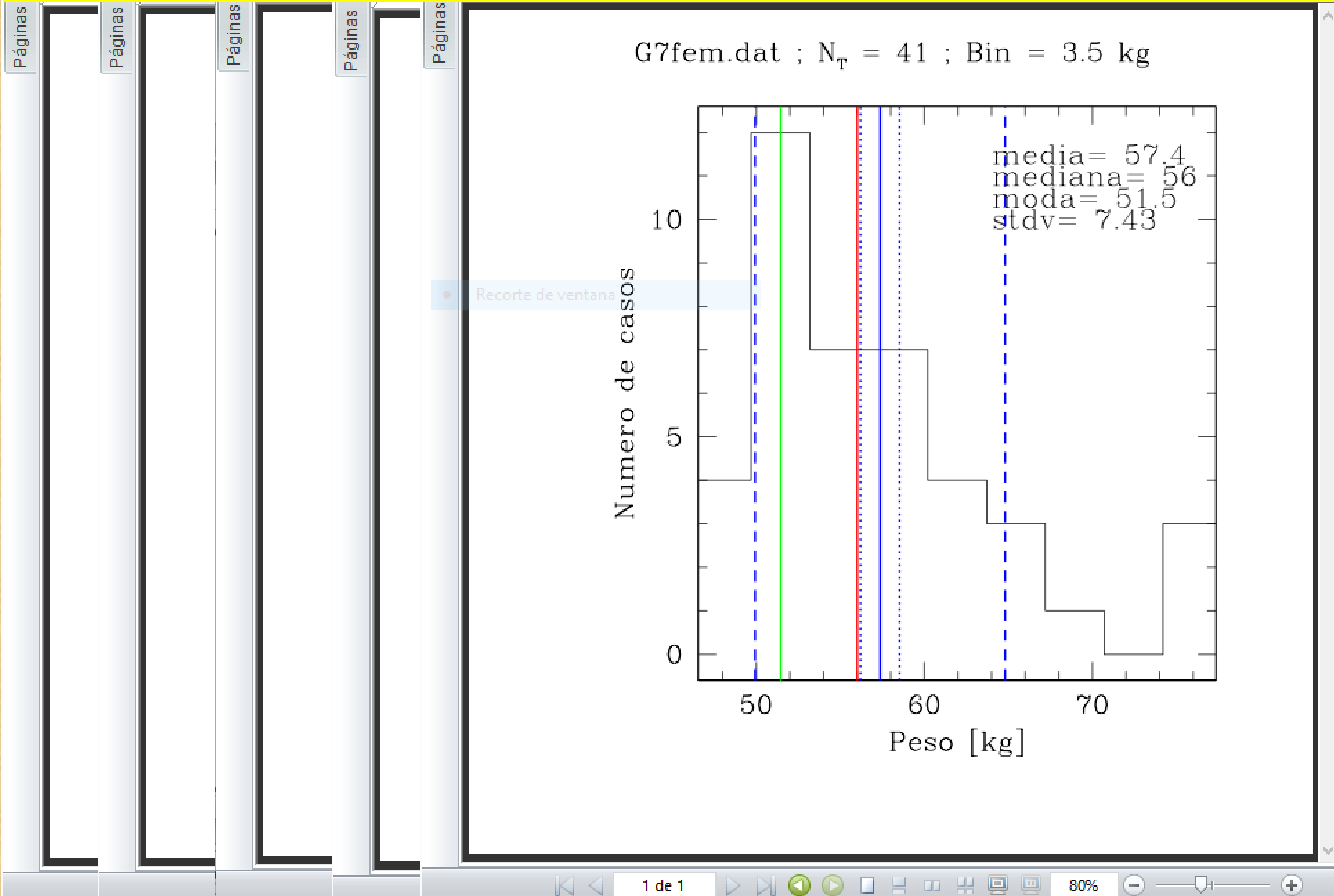
Histogramas de datos inventados REPASO



Histogramas de datos reales REPASO



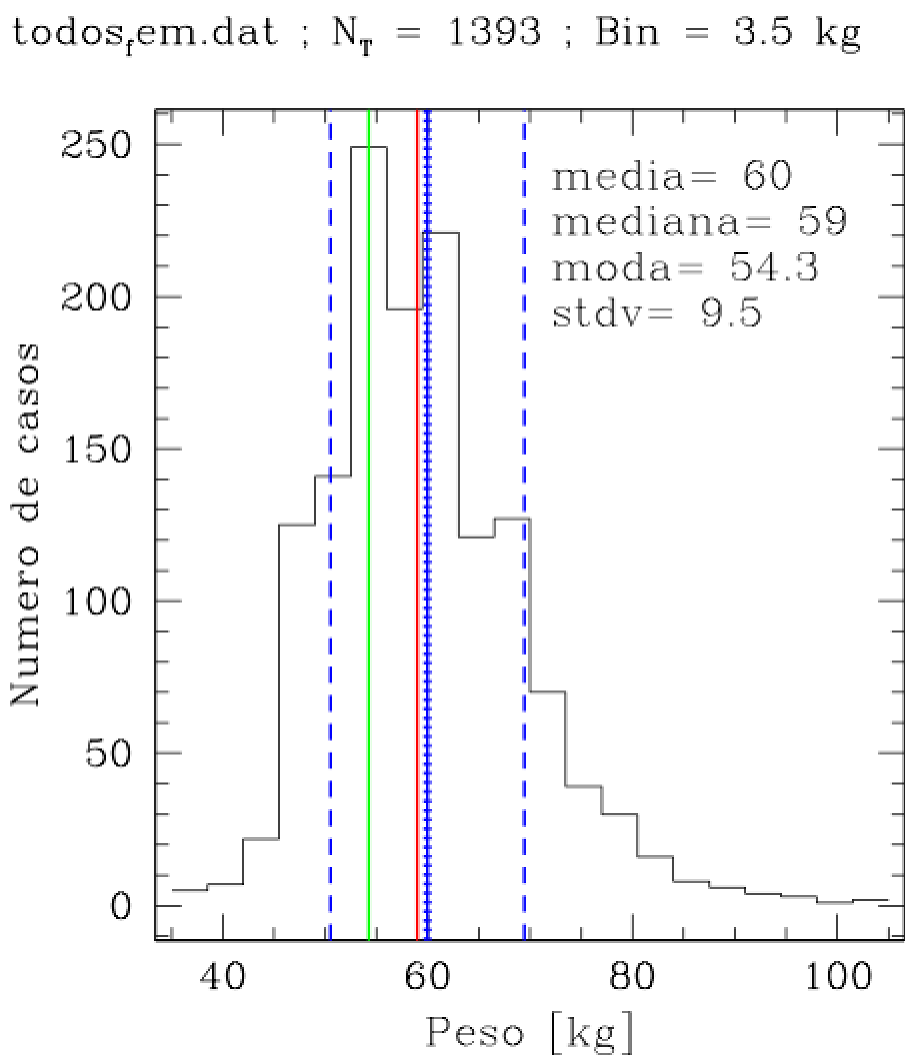
Histogramas de datos reales REPASO

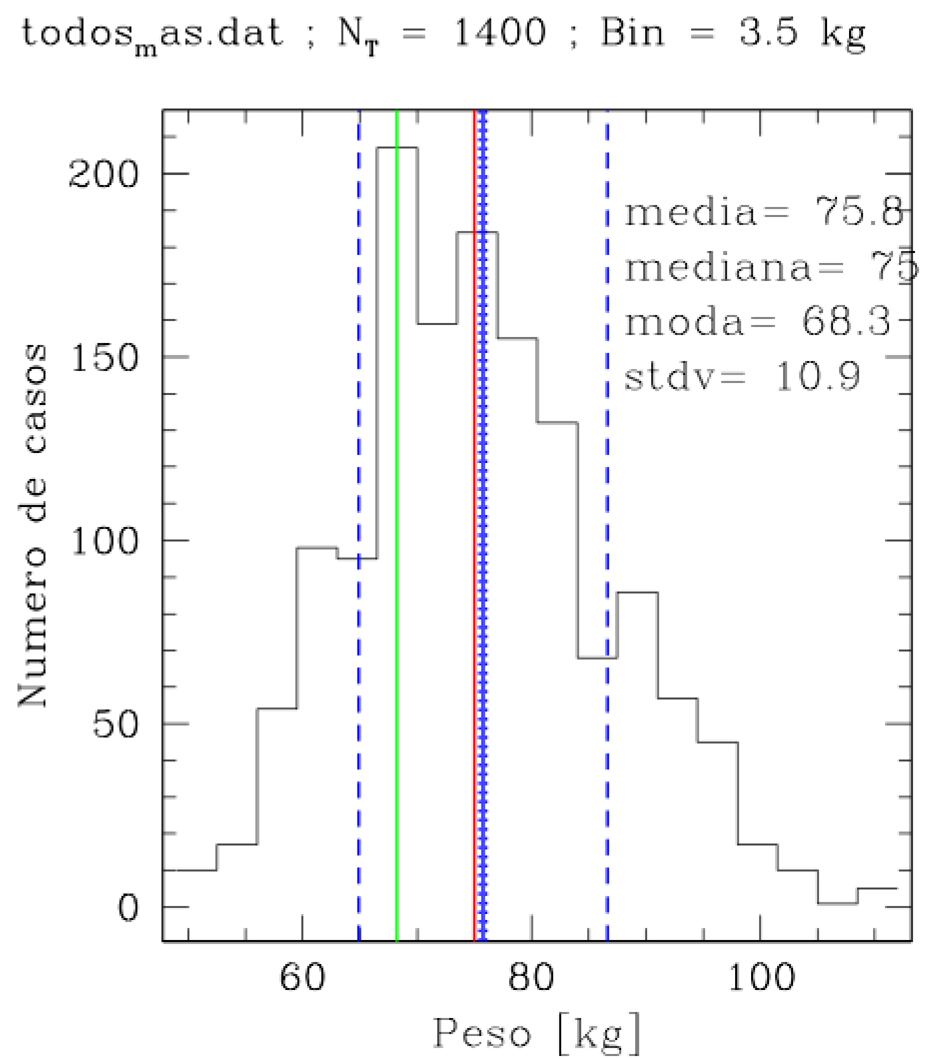


Histogramas de datos inventados

REPASO

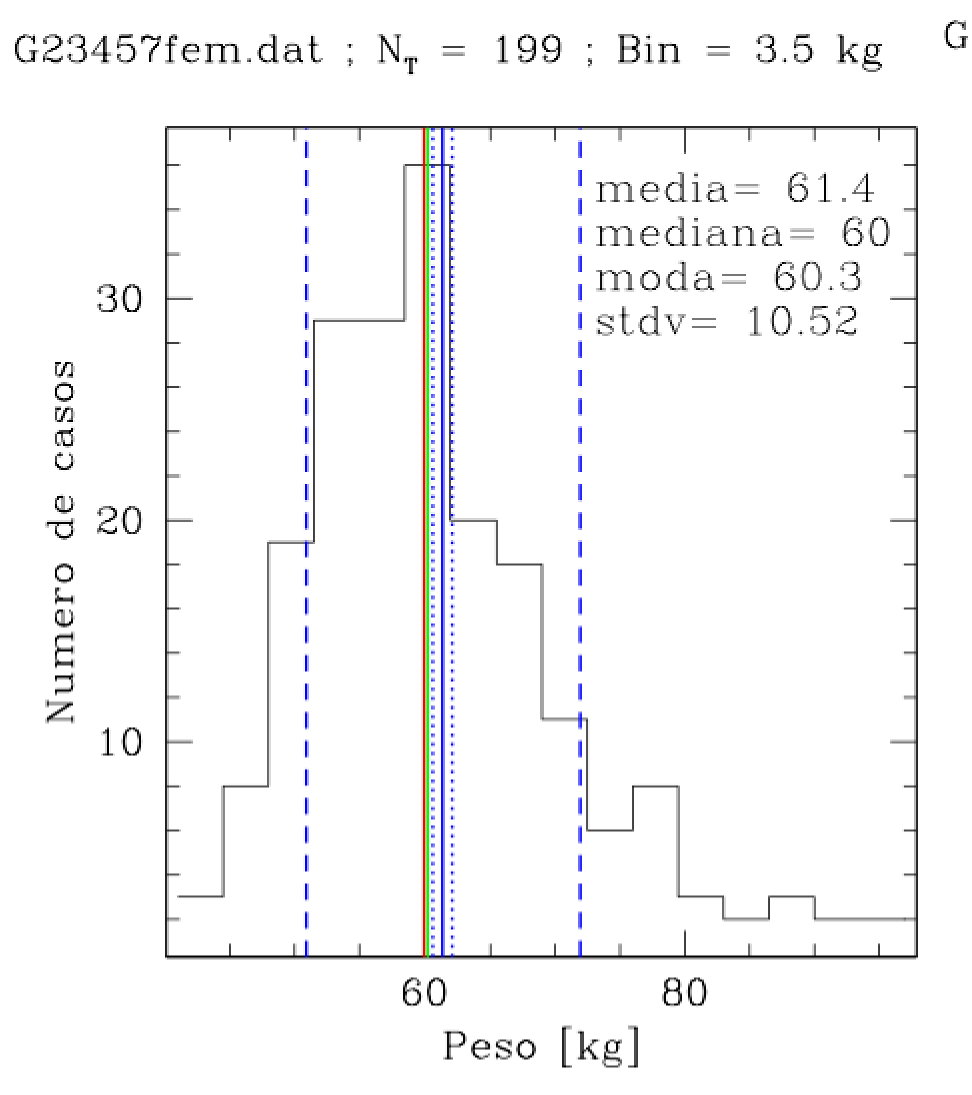
¿Qué pasa si agrupamos todos los datos que *imaginaron* ustedes?

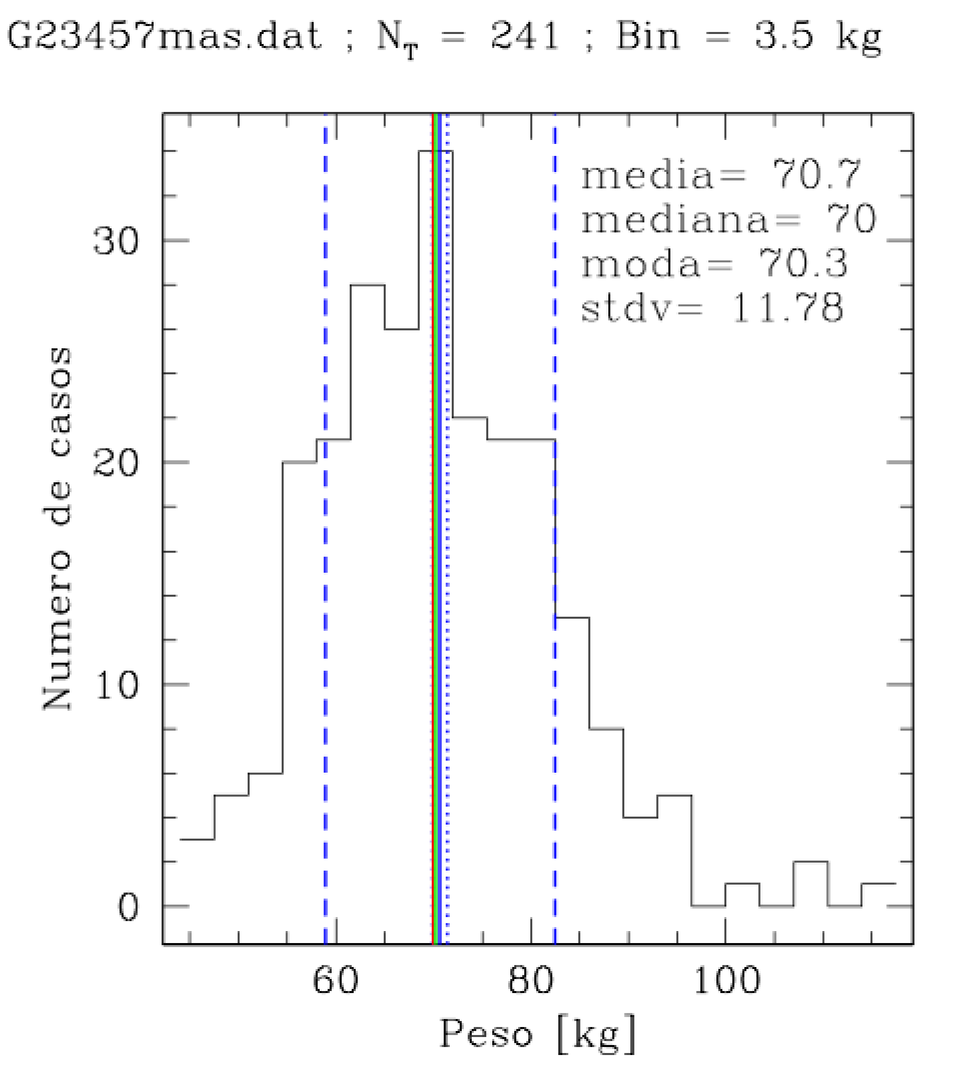




Histogramas de datos observados REPASO

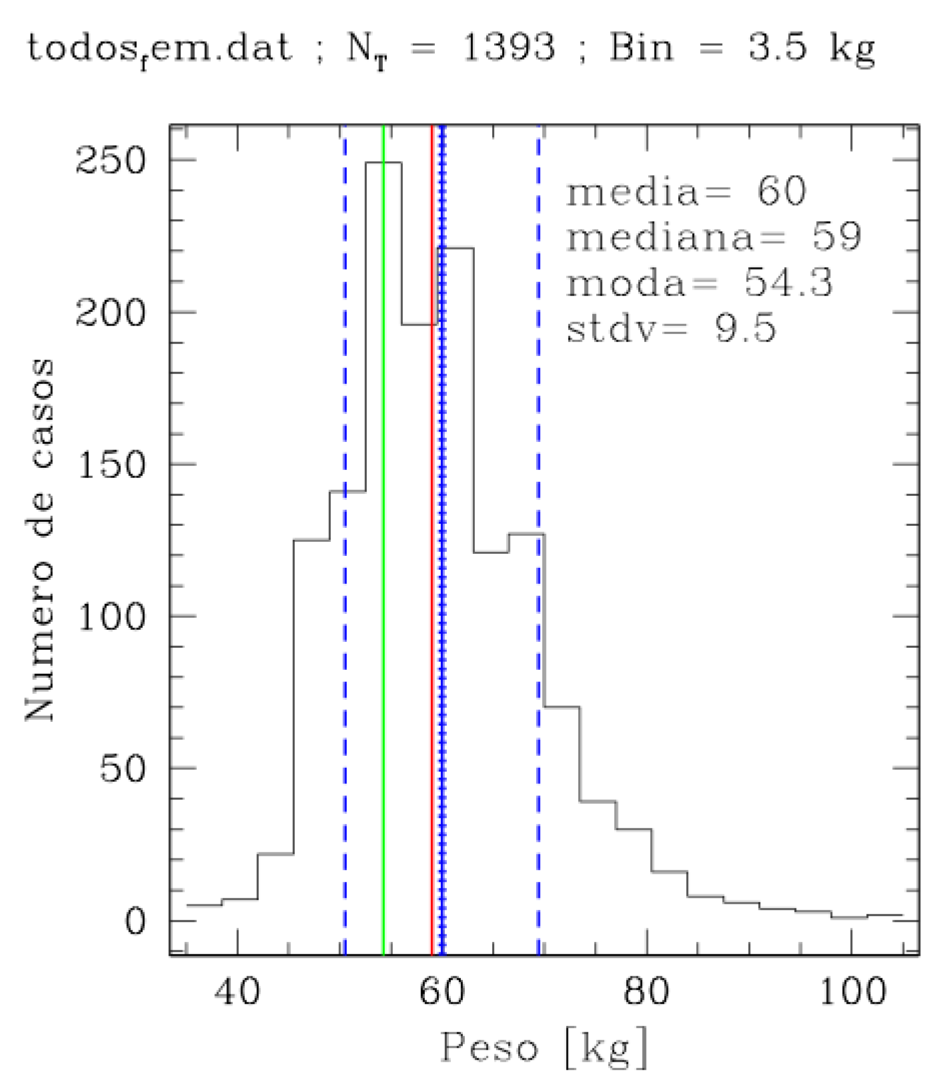
¿Qué pasa si agrupamos todos los datos que *tomaron* ustedes?



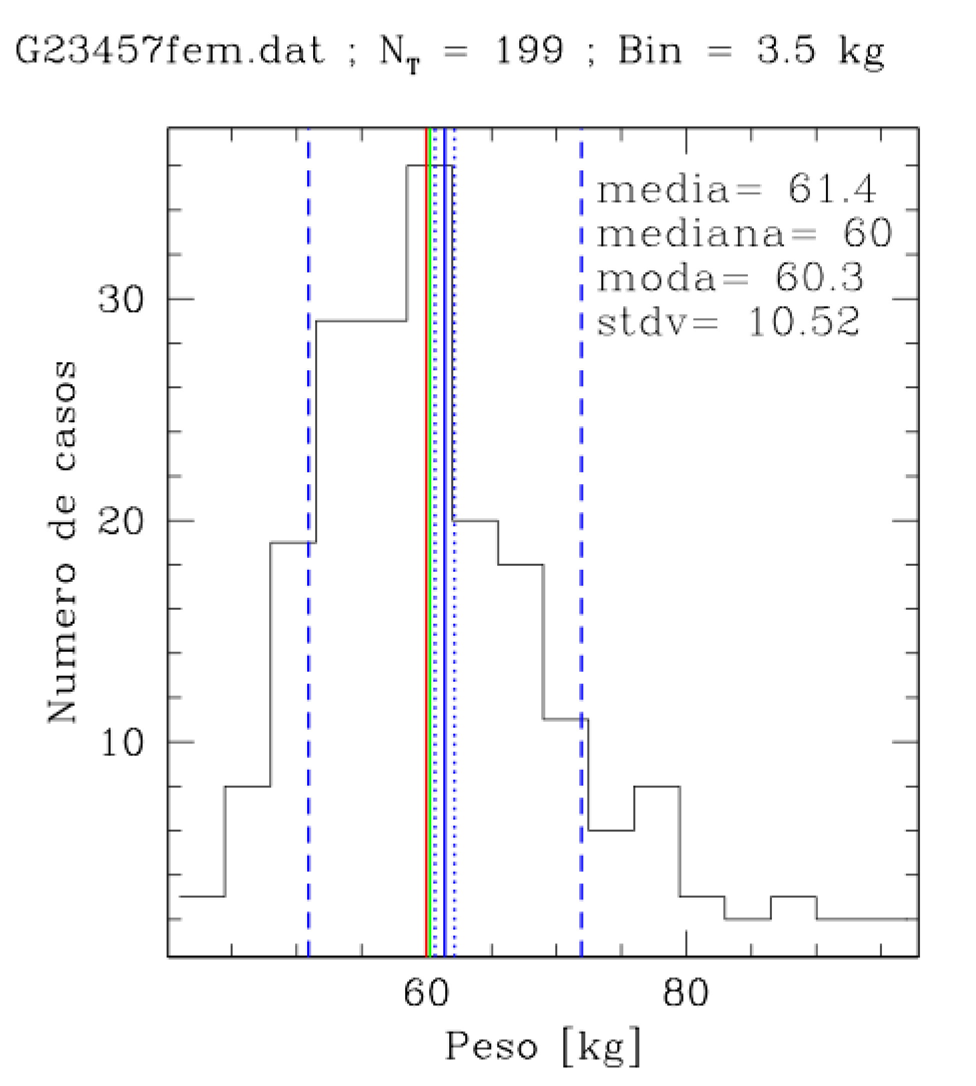


Histogramas imaginados vs. observados REPASO

Imaginado

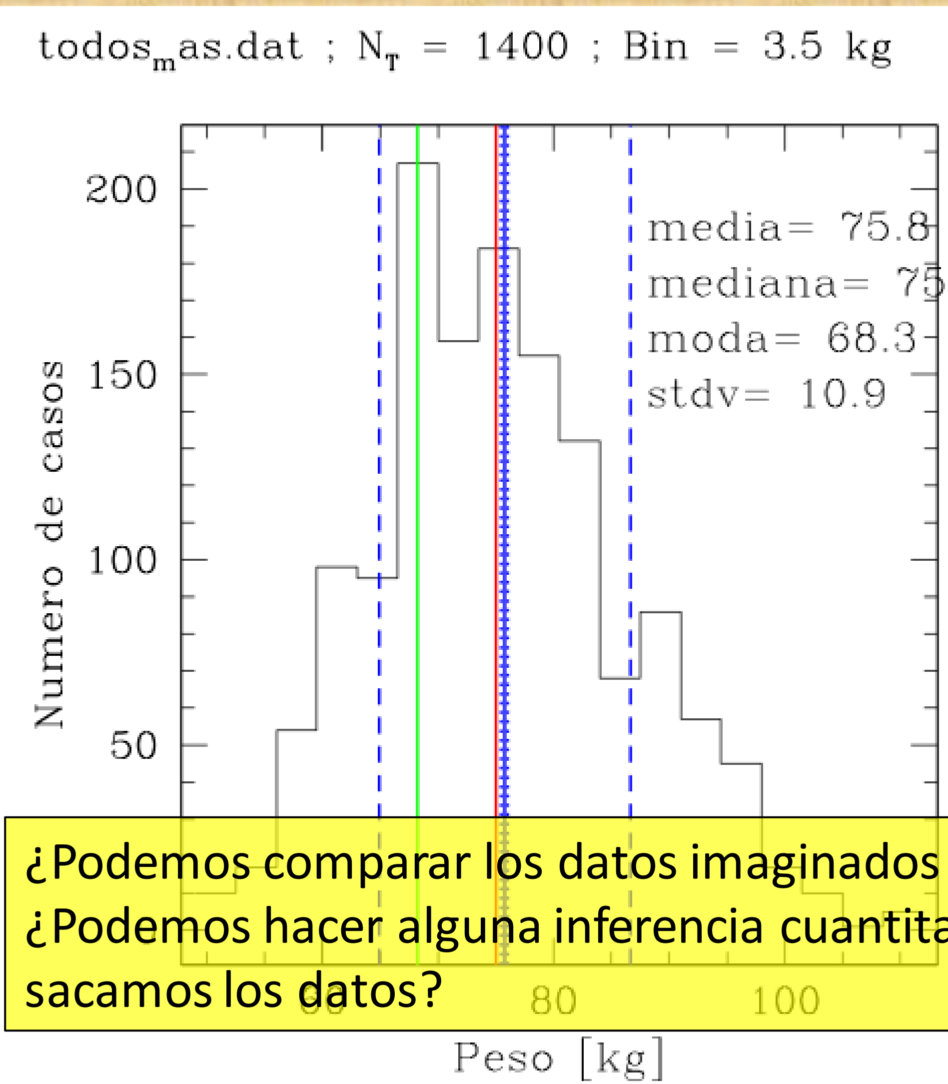


Observado

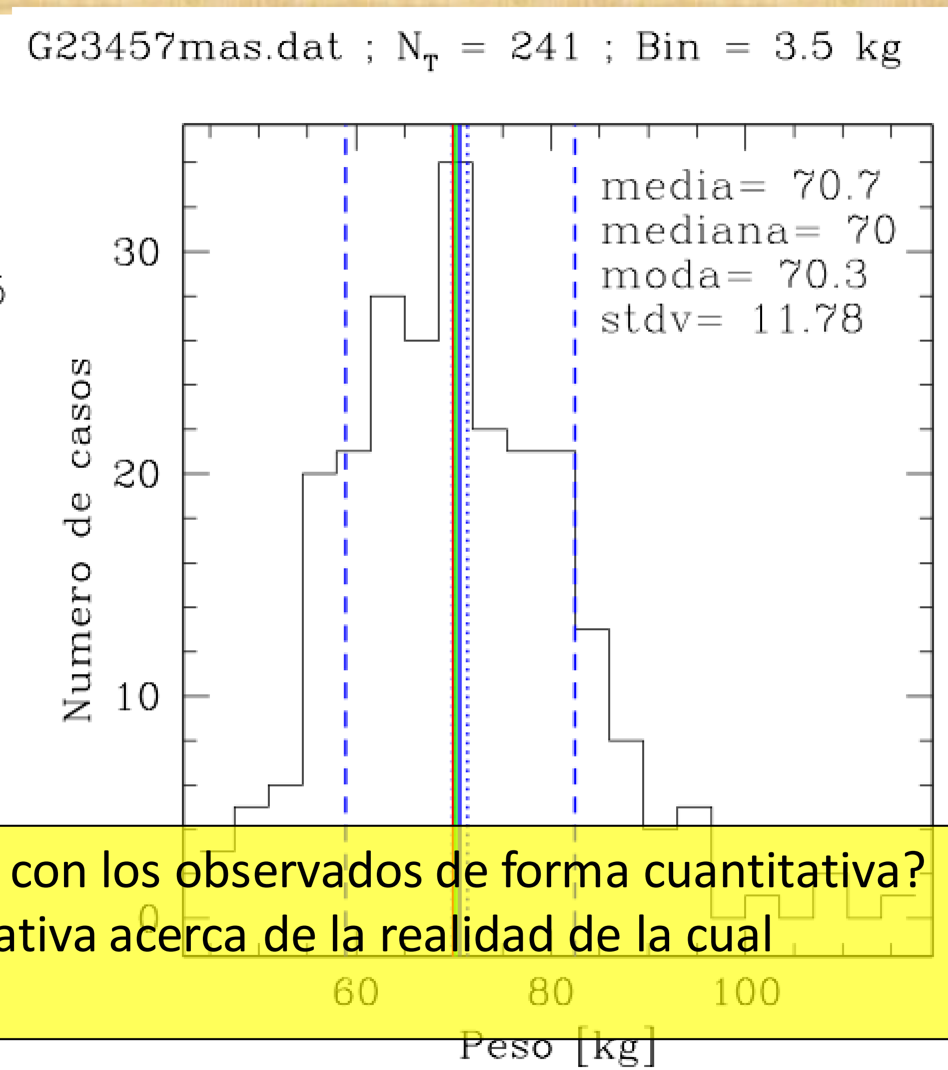


Histogramas imaginados vs. observados

Imaginado

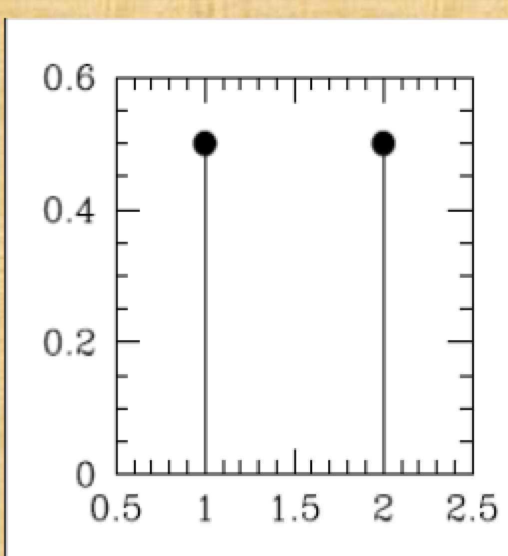


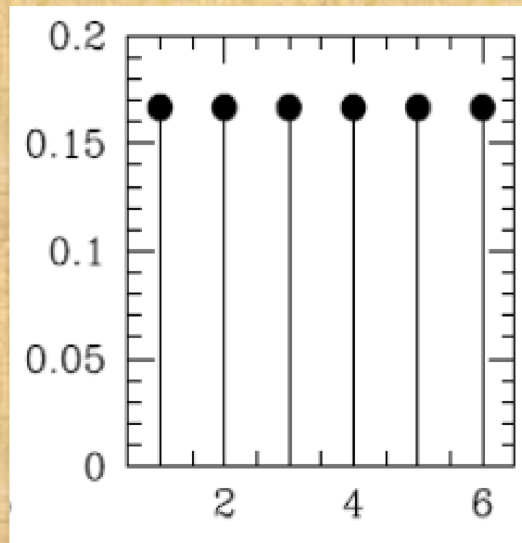
Observado

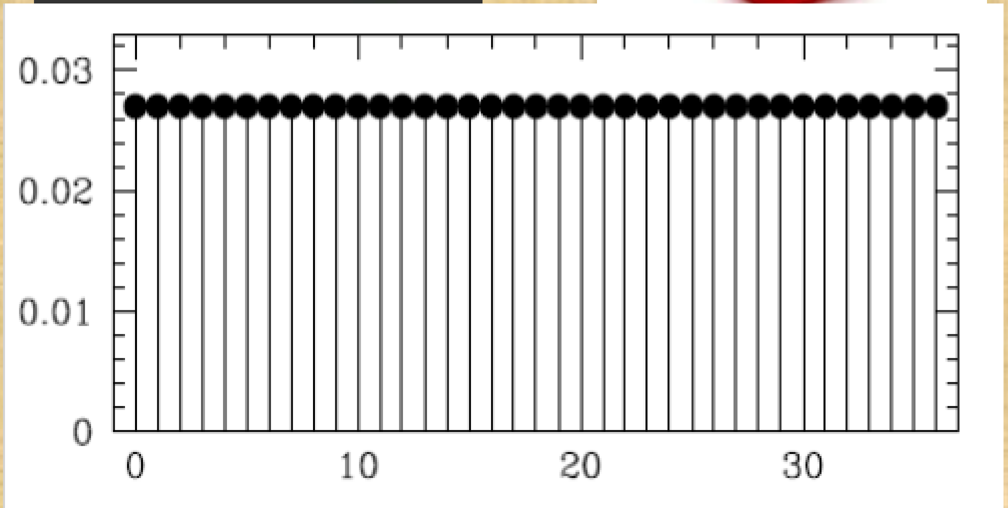


¿Podemos comparar los datos imaginados con los observados de forma cuantitativa?
¿Podemos hacer alguna inferencia cuantitativa acerca de la realidad de la cual sacamos los datos?

Funciones de distribución de probabilidad

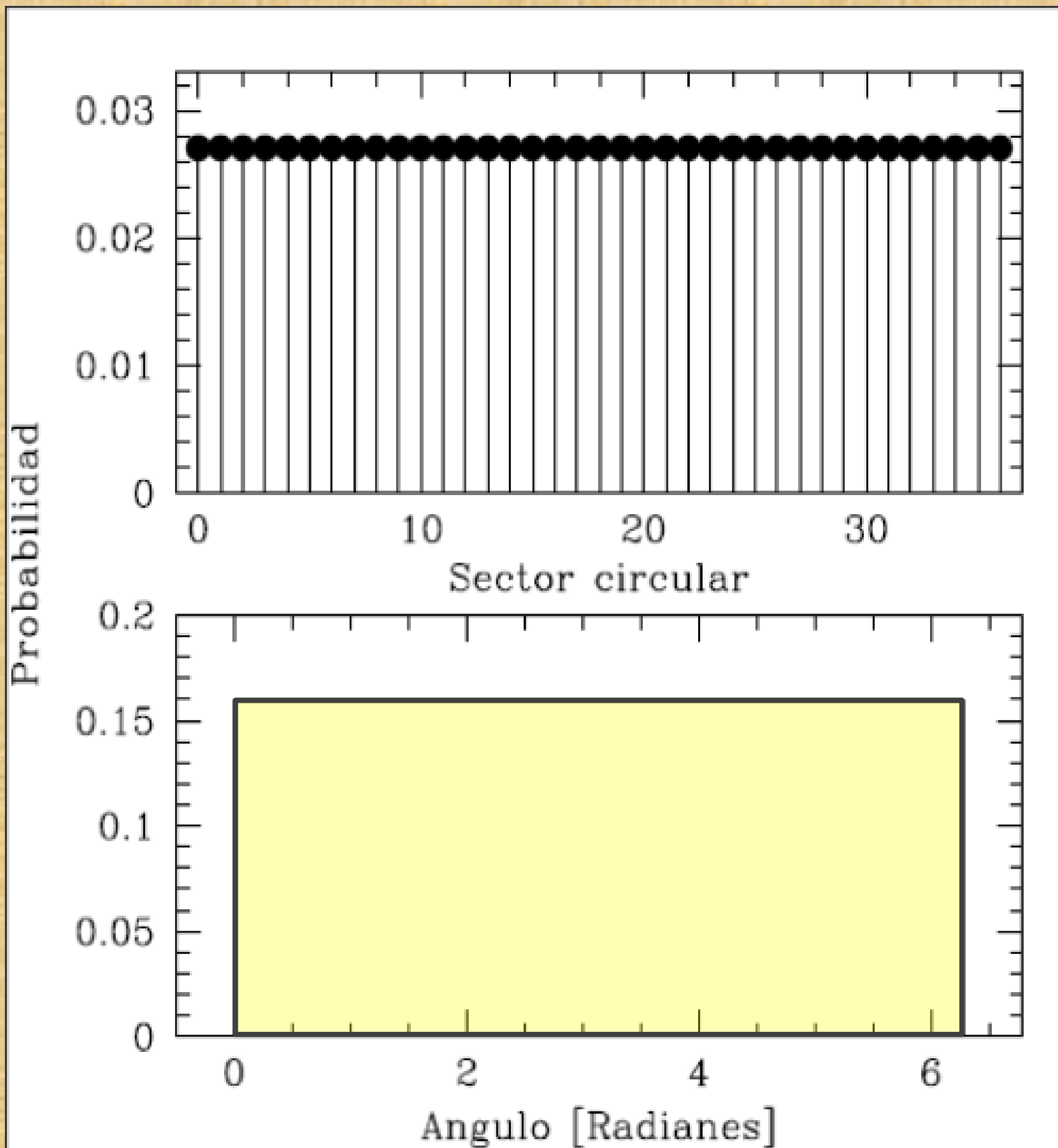






¿?

Funciones de distribución de probabilidad

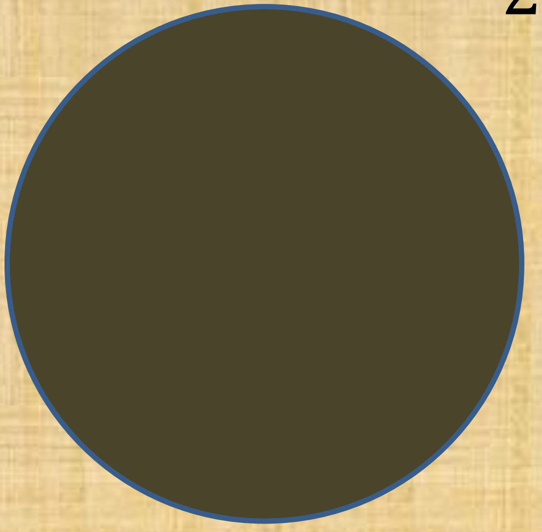


$$P_i = \frac{1}{37} \qquad \sum_{1}^{37} P_i = 1$$

$$dP_\theta = C d\theta$$

$$P_{\theta_1 < \theta < \theta_2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} C d\theta$$

$$\Longrightarrow C = \frac{1}{2\pi}$$



Funciones de distribución de probabilidad

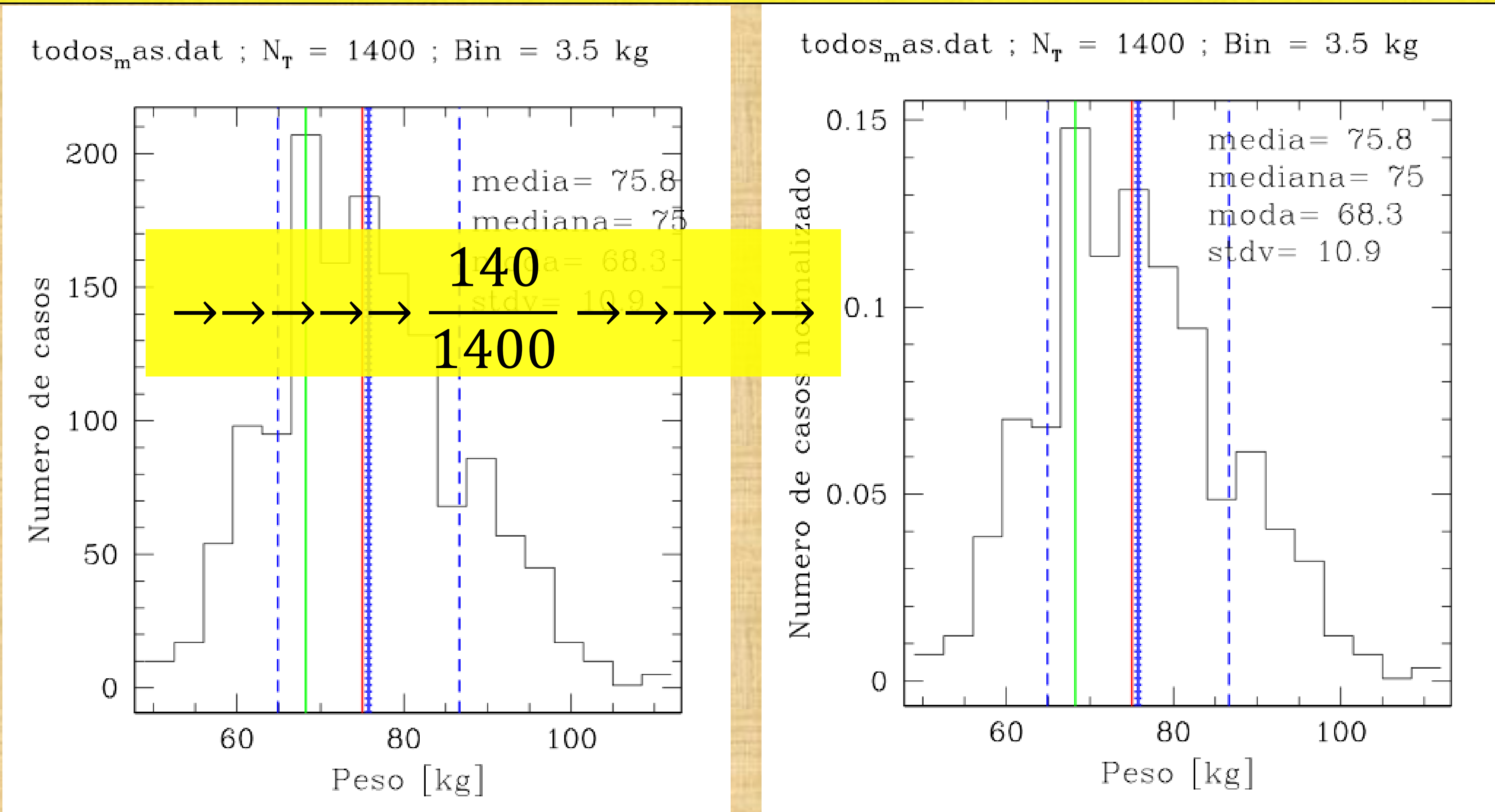
La FDP para el resultado del experimento de rotar un disco y tomar nota del ángulo en el que se detiene es un ejemplo de la forma más simple de una FDP continua.

Puedo usar la forma de la FDP para calcular los valores que tienen los parámetros teóricos de la distribución, por ejemplo valor medio y varianza.

Para entender esto un poco mejor, miremos de nuevo un histograma y tratemos de verlo como una aproximación a una FDP.

Histogramas como FDP discretas

Un histograma puede ser entendido como una FDP unidimensional discreta que asigna una cierta probabilidad a que el valor de la variable (x) en consideración esté comprendido en el intervalo Δx en torno al centro del j-ésimo *bin*. Para ilustrar esto sólo tenemos que dividir el histograma completo por el número total de casos:



Histogramas como FDP discretas

Para calcular el valor medio de la variable *x* cuando la teníamos clasificada dentro de los intervalos de un histograma (lo llamamos antes "caso de datos agrupados"), teníamos:

$$\overline{x_g} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M} n_j \overline{x_j}$$

De ésta →

$$\overline{x_g} = \sum_{j=1}^{M} \frac{n_j}{N}\overline{x_j} = \sum_{j=1}^{M} P_j \overline{x_j}$$

donde $P_j = \frac{n_j}{N}$ es la probabilidad de que la variable x esté en el *bin j.* Para el caso de una variable continua, la sumatoria tiende a una integral, exactamente igual que para la definición de integral como límite de una sumatoria (notar que $M \to \infty, \Delta x = (x_j - x_{j-1}) \to 0$):

$$\overline{x_g} = \sum_{j=1}^{M} P_j \overline{x_j} \to \int_{x_1}^{x_N} x P_x \, dx$$

x_1 y x_N son los límites entre los cuales la variable x está definida.

Funciones de distribución de probabilidad

Volviendo a la FDP del ángulo que se obtiene de rotar un disco imparcial, puedo calcular el valor medio y la varianza aplicando el resultado anterior:

$$\mu_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{4\pi^2}{2}\right\} = \pi \qquad \sigma_\theta = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_\theta{}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\theta - \mu_\theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta - \mu_\theta{}^2 = \frac{\pi^2}{3}$$

Estos resultados son casos particulares del caso general. Para una FDP constante de una variable unidimensional *x* que existe en el intervalo [*a, b*], se tiene:

$$dP_x = \frac{dx}{b-a}; \ \mu_x = \frac{a+b}{2}; \ \sigma_x{}^2 = \frac{(b-a)^2}{12}; \sigma_x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

FDP e histogramas de histogramas

10^6 números. FDP cte. entre 0 y 1.

$\bar{x}$ =0.5001, σ_x =0.2886, bin=0.0001

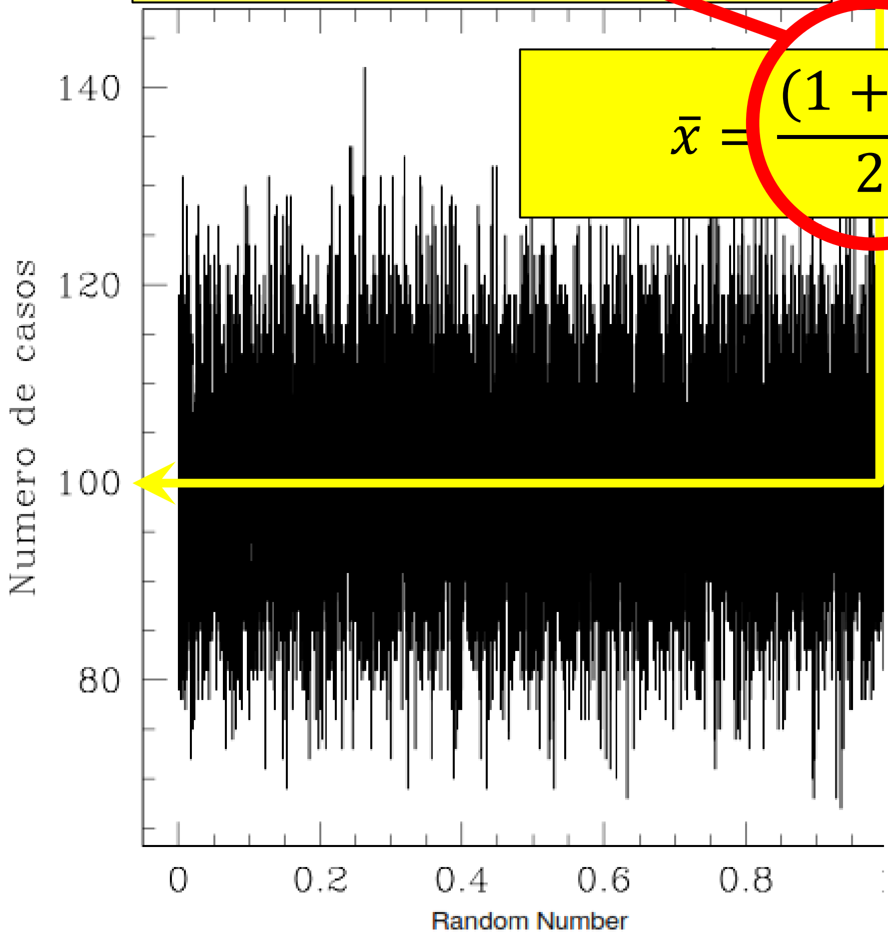
$1 \times 10^6 / 1 \times 10^4 = 100$

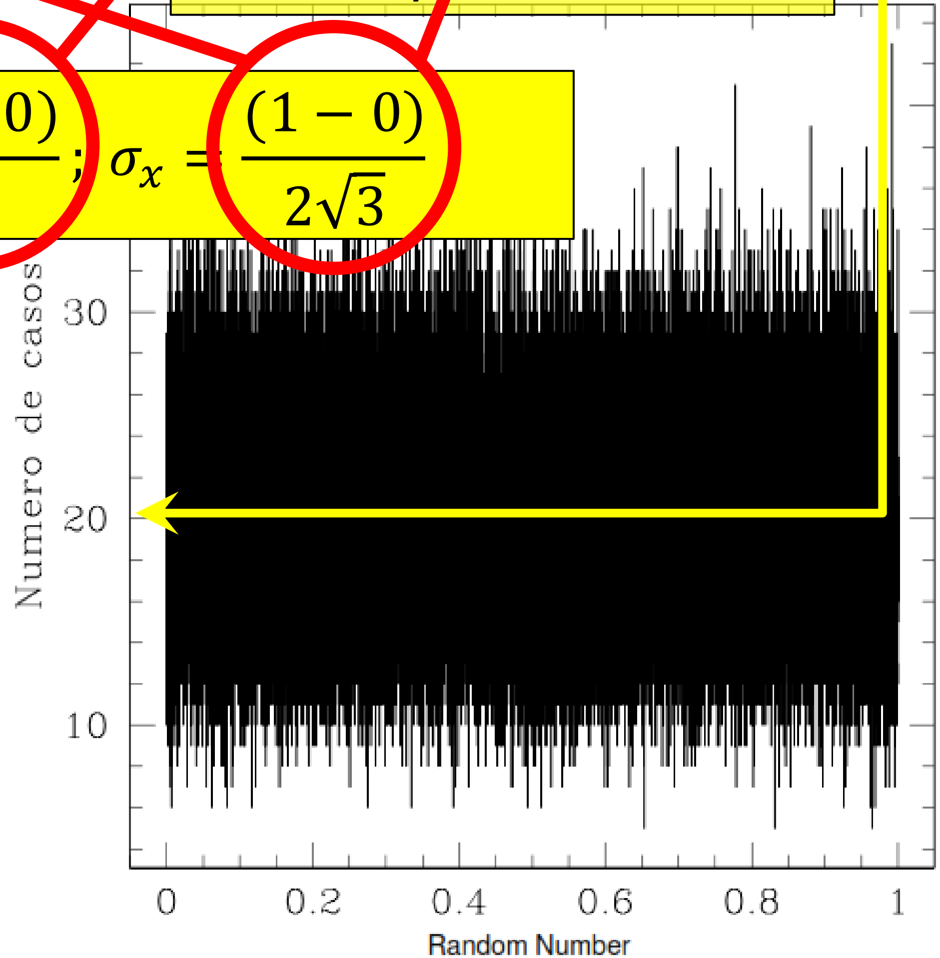
10^6 números. FDP cte. entre 0 y 1.

$\bar{x}$ =0.5001, σ_x =0.2886, bin=0.00002

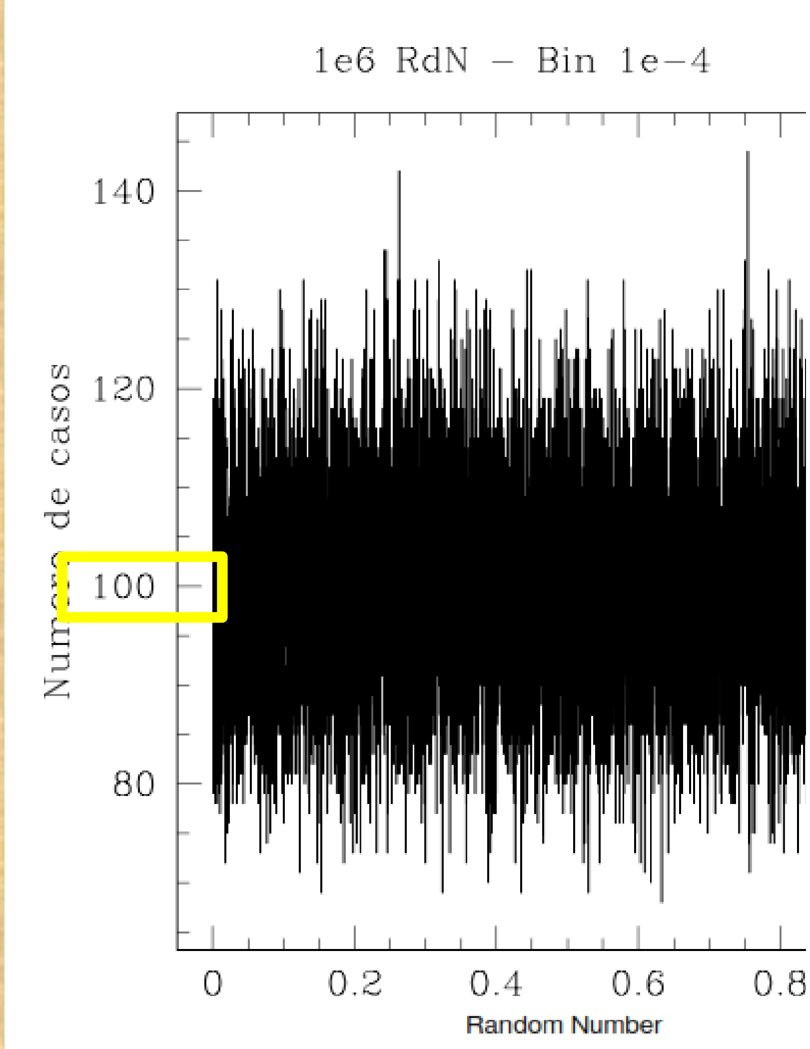
$1 \times 10^6 / 5 \times 10^4 = 20$

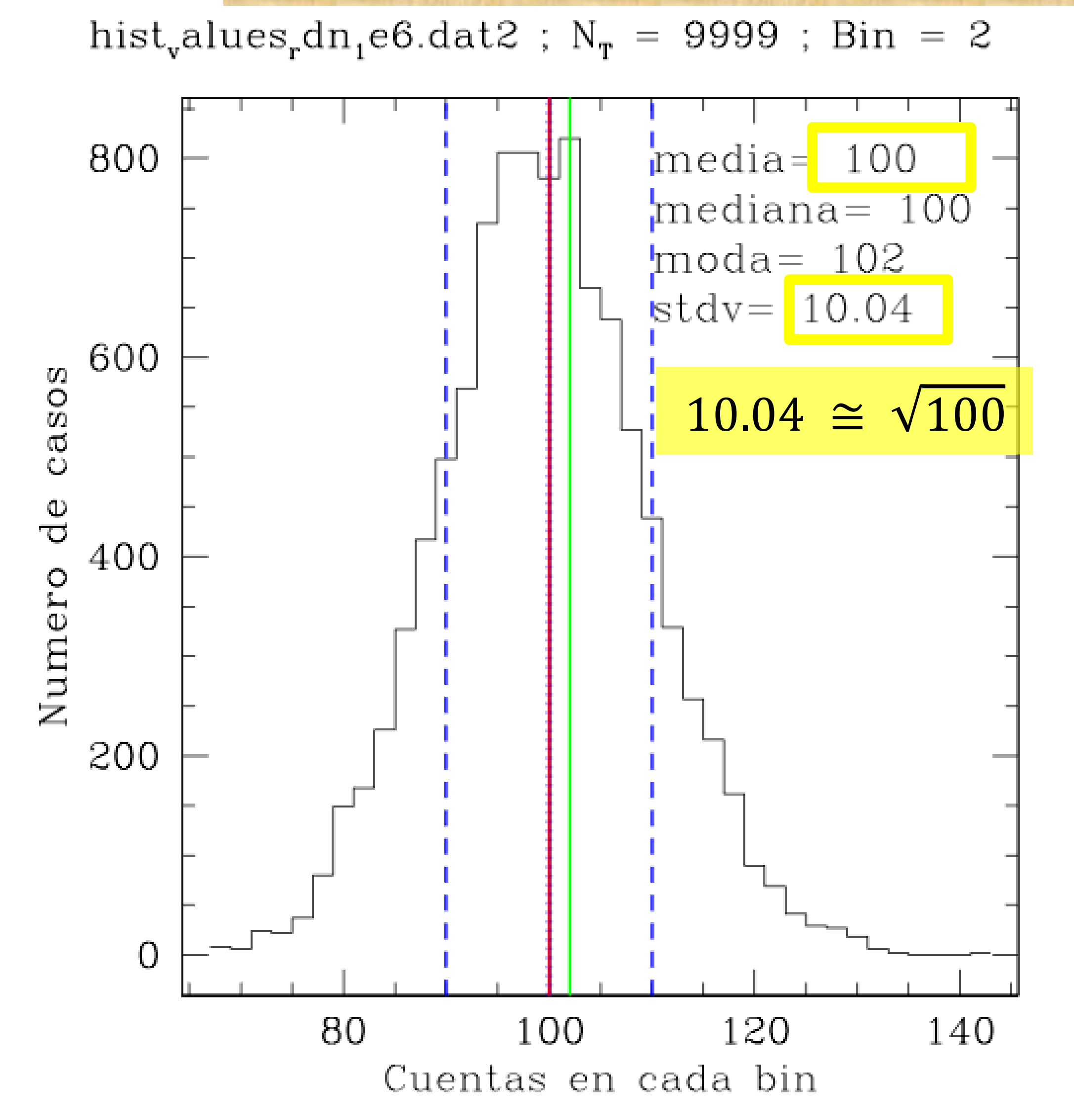
$$\bar{x} = \frac{(1+0)}{2} ; \sigma_x = \frac{(1-0)}{2\sqrt{3}}$$





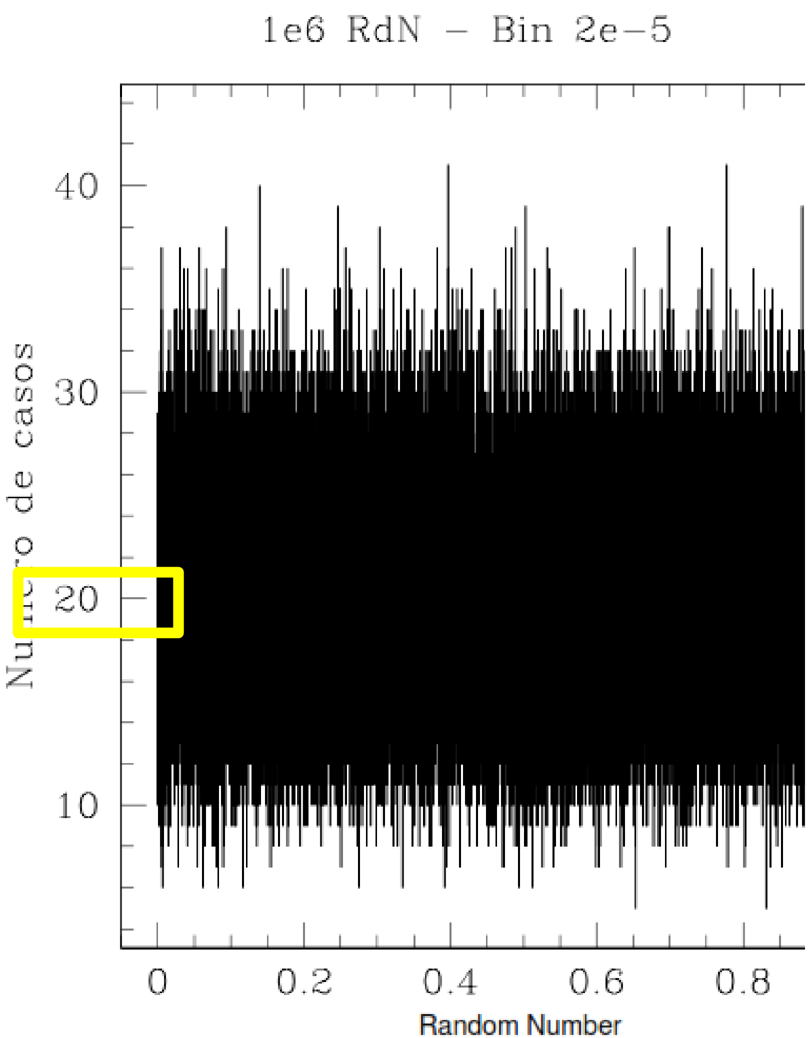
FDP e histogramas de histogramas

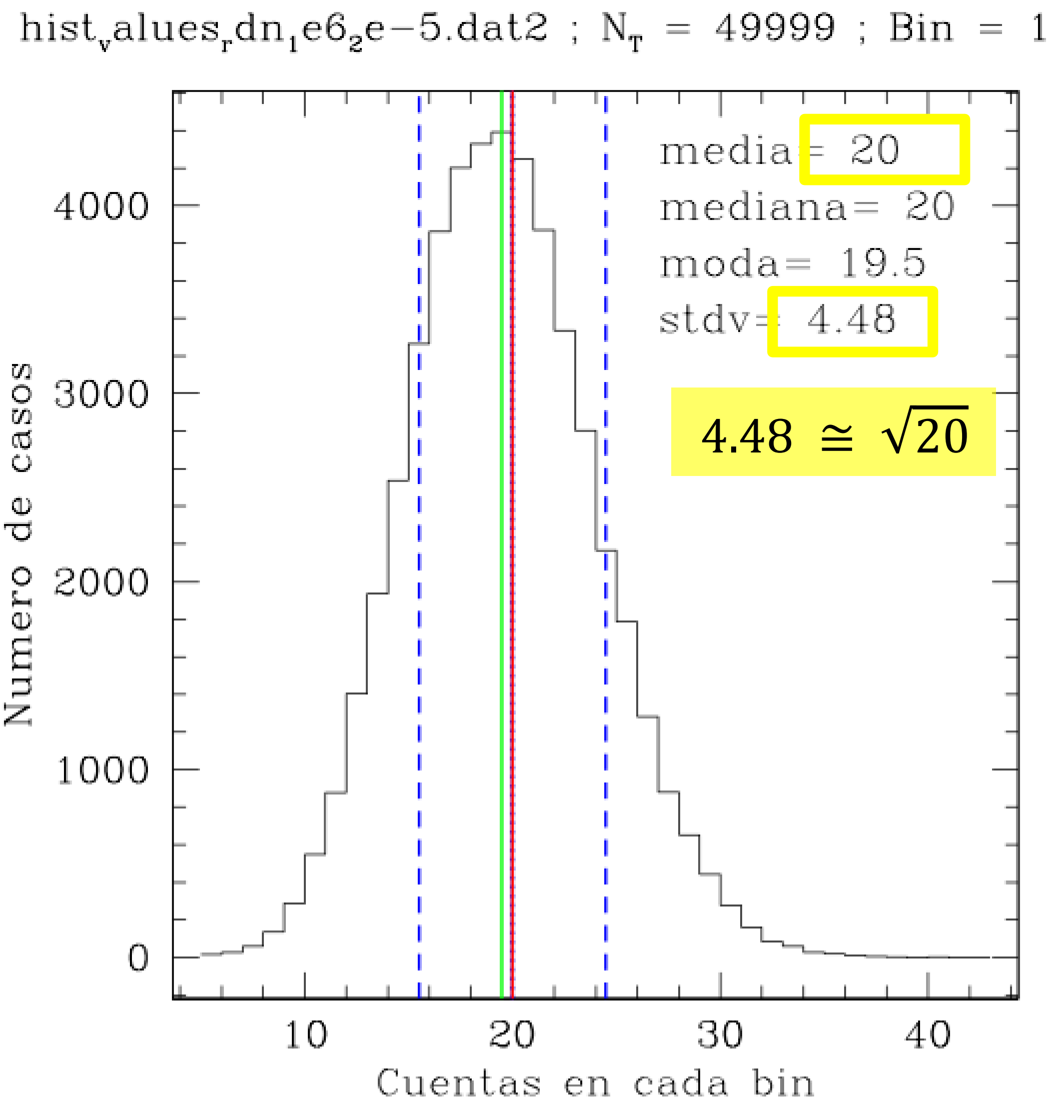




FDP e histogramas de histogramas

Si clasifico a los números aleatorios en bins más chicos, la FDP que obtengo será la misma, con parámetros diferentes:





FDP de Poisson

La FDP que está detrás de todo esto es la llamada *Distribución de Poisson,* que resulta de contar eventos que suceden en un intervalo (de tiempo o espacio) dado, definido, cuando la probabilidad individual de cada evento es muy baja. Por ejemplo:

1. Decaimiento radioactivo de núcleos atómicos por segundo.
2. Explosiones de SN en un volumen del universo en un intervalo de tiempo.
3. Cantidad de gotas de lluvia que caen en un vaso en un intervalo de tiempo.
4. Número de fotones que llegan a un pixel de un CCD en una exposición.
5. Cantidad de números aleatorios que caen en un bin específico.

La FDP de Poisson, está dada por:

$$P_\mu(\nu) = e^{-\mu}\frac{\mu^\nu}{\nu!} \quad ; \text{con } \mu > 0$$

que es, específicamente, la probabilidad de contar ν eventos en el intervalo dado (la ecuación anterior está normalizada).

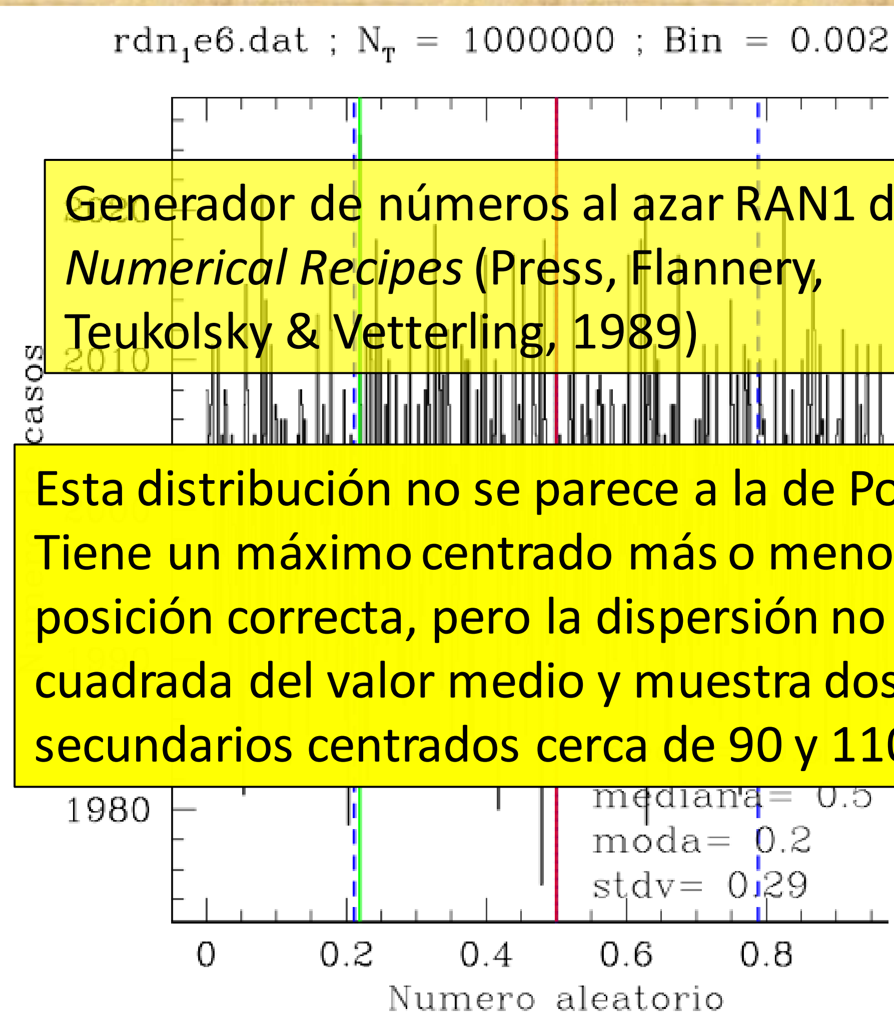
Puede mostrarse que para esta FDP $\bar{\nu} = \mu$ y ${\sigma_\nu}^2 = \mu$, o sea $\sigma_\nu = \sqrt{\mu}$.

Entonces, si la tasa de ocurrencia es R (probabilidad del evento por unidad de intervalo), entonces $\mu = RT$, donde T es el largo del intervalo. Estas ecuaciones aclaran todas las coincidencias anteriores.

FDP de Poisson

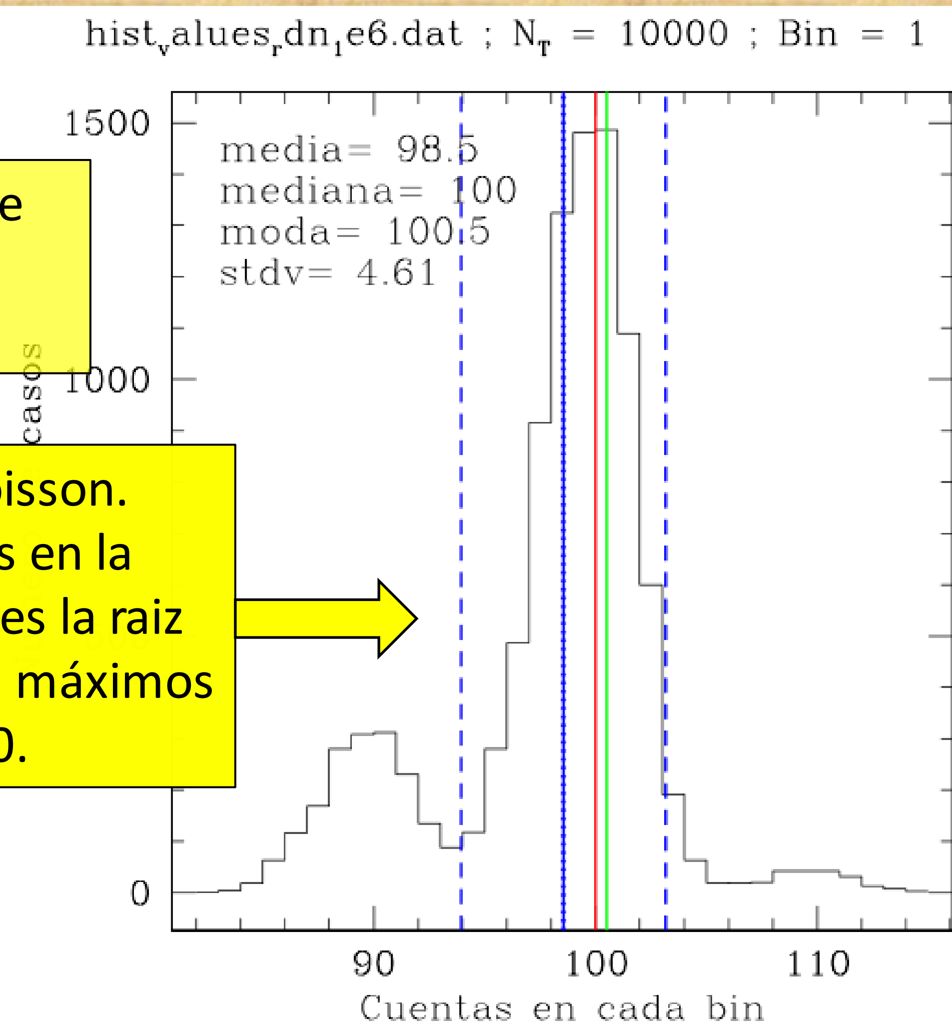
Esta clase de análisis provee una herramienta muy buena para testear el software que estamos usando y asegurarnos que hace lo que dice que hace:

¡No todos los generadores de números al azar que andan por ahí son buenos!



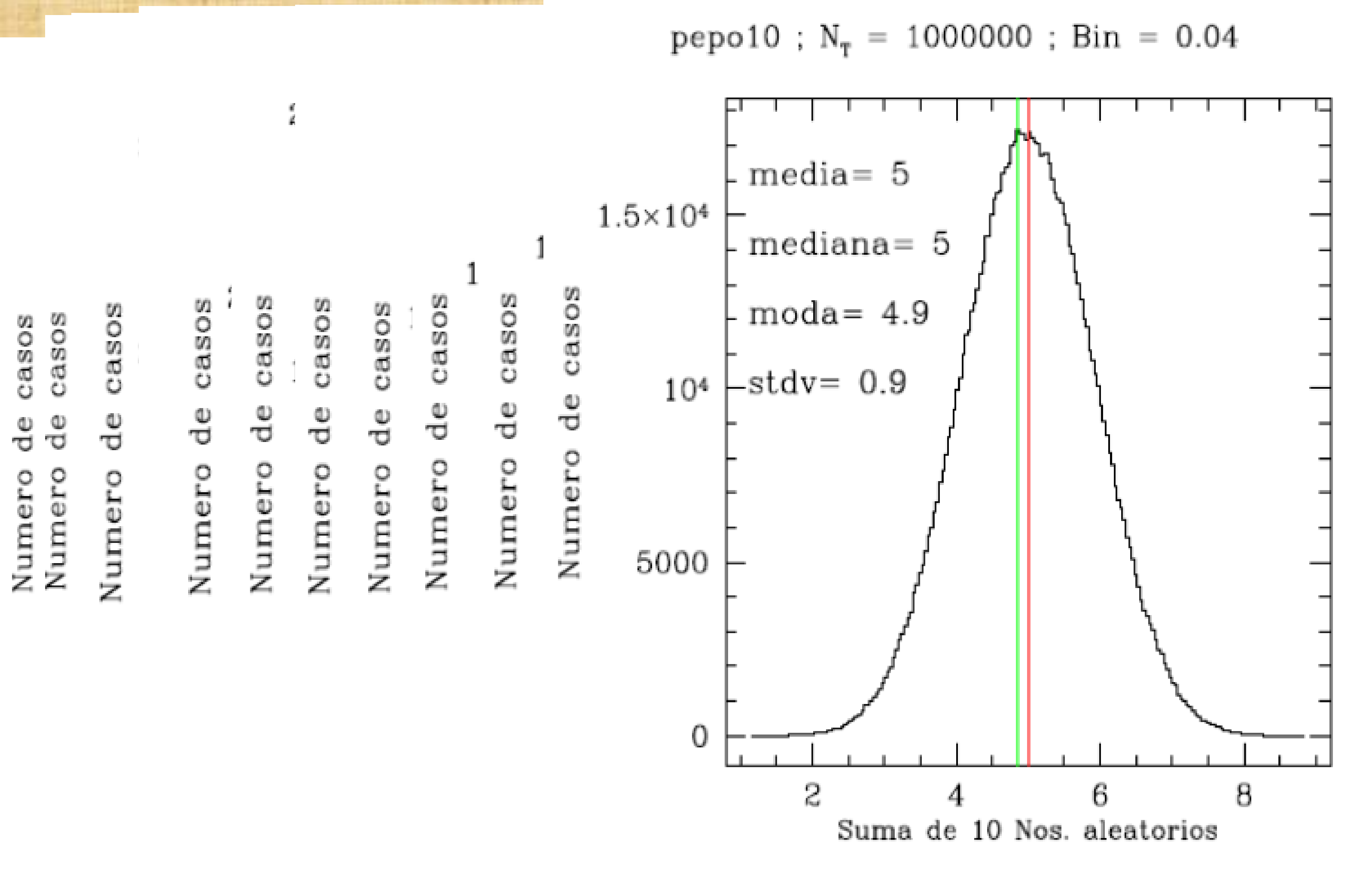
Generador de números al azar RAN1 de *Numerical Recipes* (Press, Flannery, Teukolsky & Vetterling, 1989)

Esta distribución no se parece a la de Poisson. Tiene un máximo centrado más o menos en la posición correcta, pero la dispersión no es la raiz cuadrada del valor medio y muestra dos máximos secundarios centrados cerca de 90 y 110.



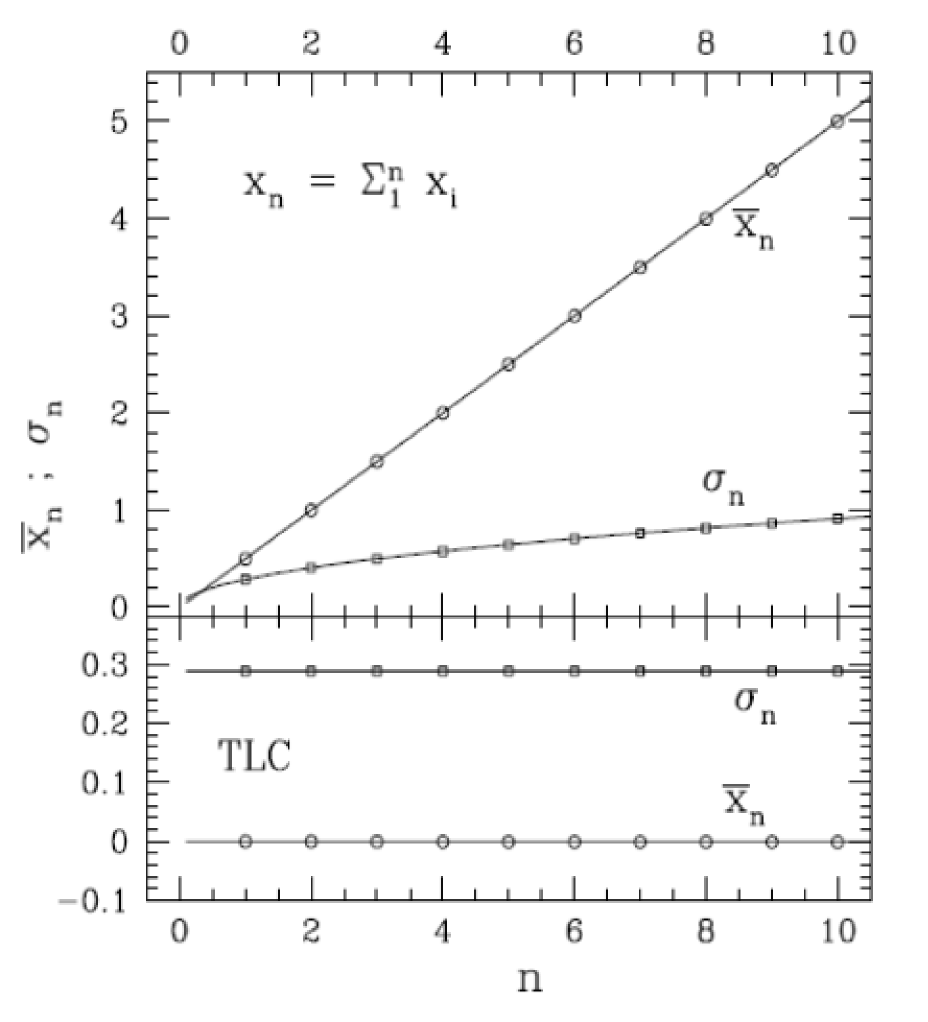
FDP de Gauss

Una forma de presentar la FDP de Gauss podría ser "la distribución que se obtiene a partir de la de Poisson, en el límite $\mu \gg 1$". Otra es jugar con las distribuciones de números con FDP constante: ¿Qué sucede si los sumamos? ¿Cómo es la FDP de $x_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$, si cada uno de los x_i tiene FDP cte distribuida en (0,1)?



FDP de Gauss

Parece haber algún secreto escondido ¿no?



Teorema del Límite Central

Si $x_1, \; x_2, \ldots, x_N$ son variables aleatorias independientes, y cada una de ellas tiene una FDP arbitraria $P_i(x_i)$, con valor medio μ_i y dispersión $\sigma^2{}_i$ entonces

$$x_N = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i - \sum_{i=1}^{N} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sigma^2{}_i}}$$, se aproxima a una distribución normal para $N \to \infty$.

$$\lim_{N \to \infty} P(x_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

El caso que mostré es un caso particular de esto, ya que las P_i son siempre la misma PDF, y por lo tanto $\mu_i = \mu = 0.5 \; y \; \sigma_i = \sigma = 1/\sqrt{12}$.

FDP de Gauss

Teorema del Límite Central

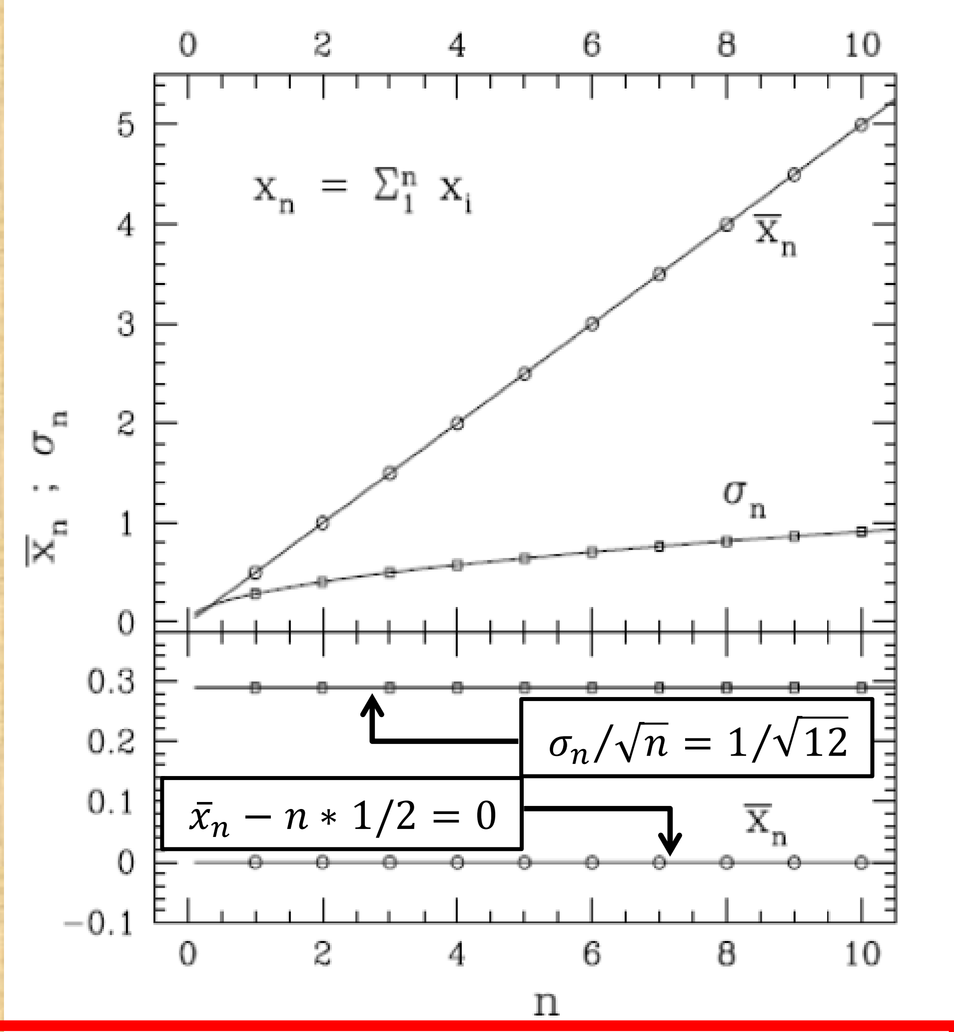
Entonces, para el caso específico de nuestra variable x_N,

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i = N * \mu = N * \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sigma^2{}_i} = \sigma\sqrt{N} = \sqrt{\frac{N}{12}}$$

entonces

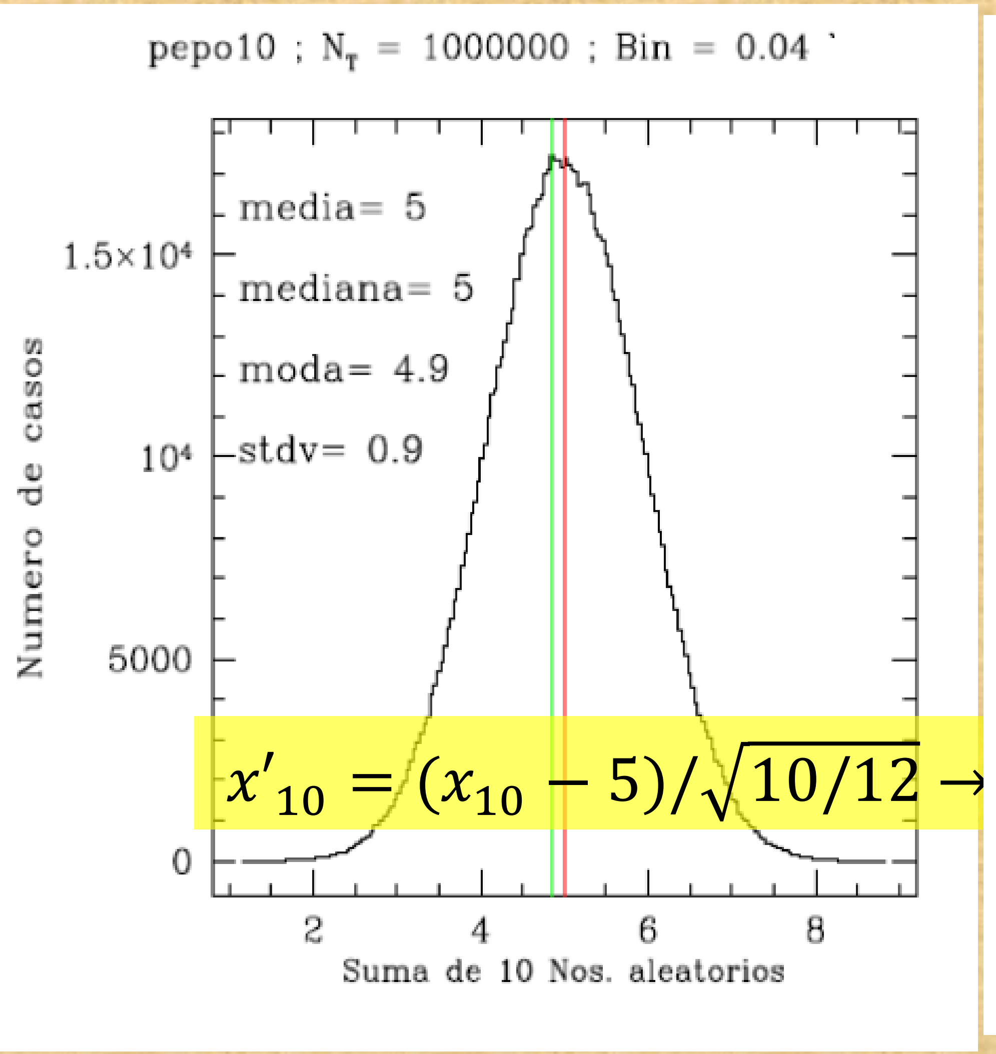
$x_N = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i - N/2}{\sqrt{N/12}}$, se aproxima a una distribución normal para $N \to \infty$.



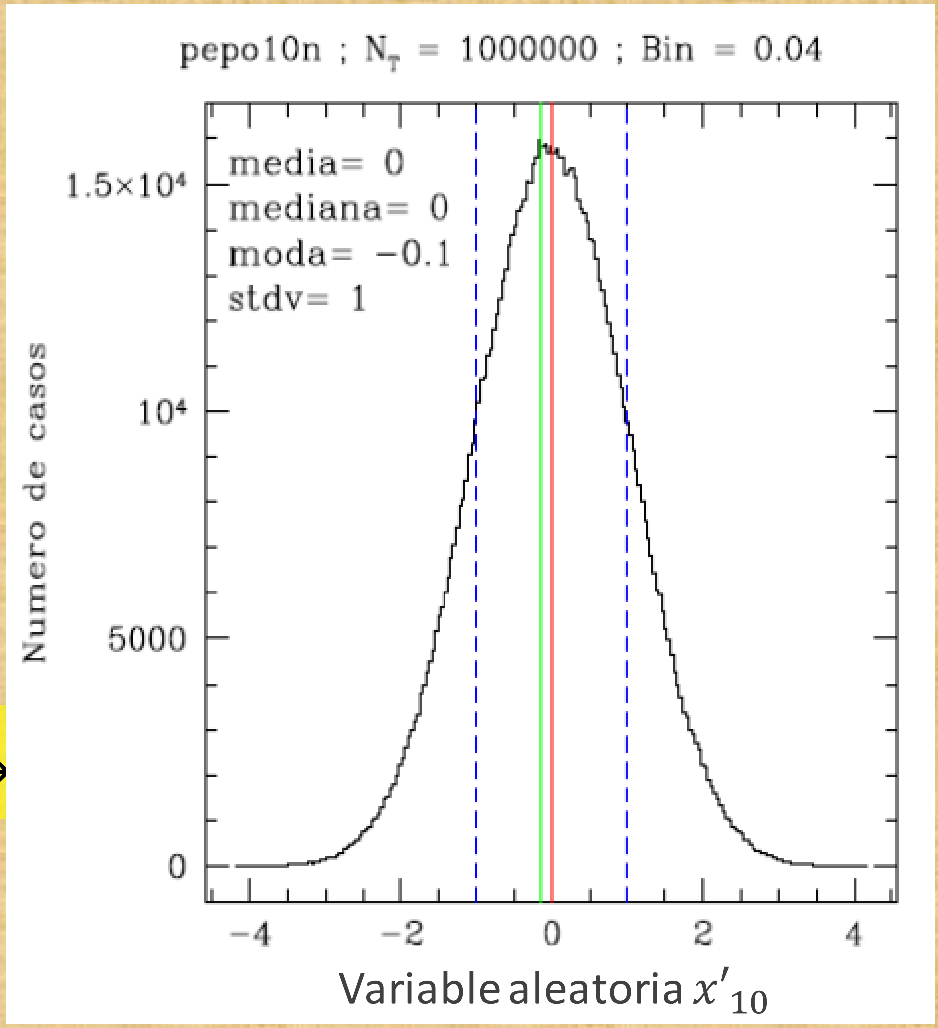
$$\boxed{\lim_{N\to\infty} P(x_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} x_i \to \left(\frac{1}{\sqrt{N/12}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-N/2)^2}{2}}\right)}$$

FDP de Gauss



$x'_{10} = (x_{10} - 5)/\sqrt{10/12} \rightarrow$

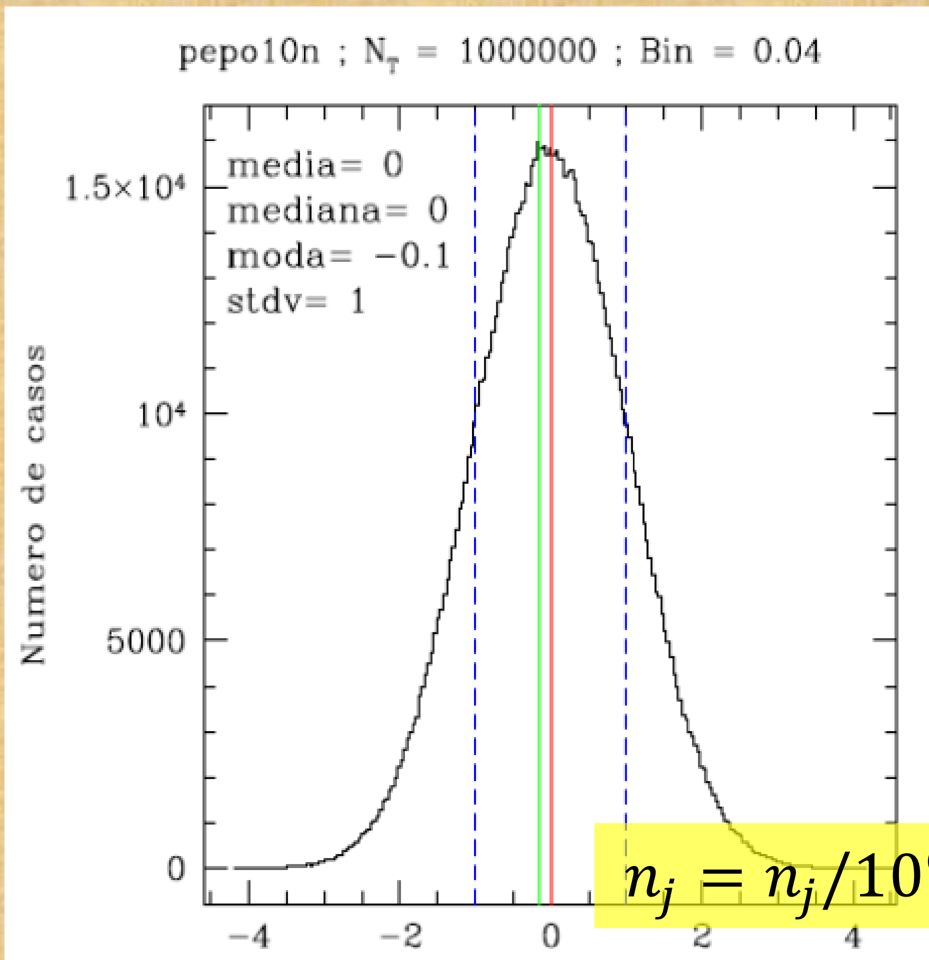


$$P(x_{10}) = N(5, \sqrt{10/12}) = \frac{1}{\sqrt{5\pi/3}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2\sqrt{5/6}}}$$

$$P(x_{10}') = 10^6 N(0,1) = \frac{10^6}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x'^2}{2}}$$

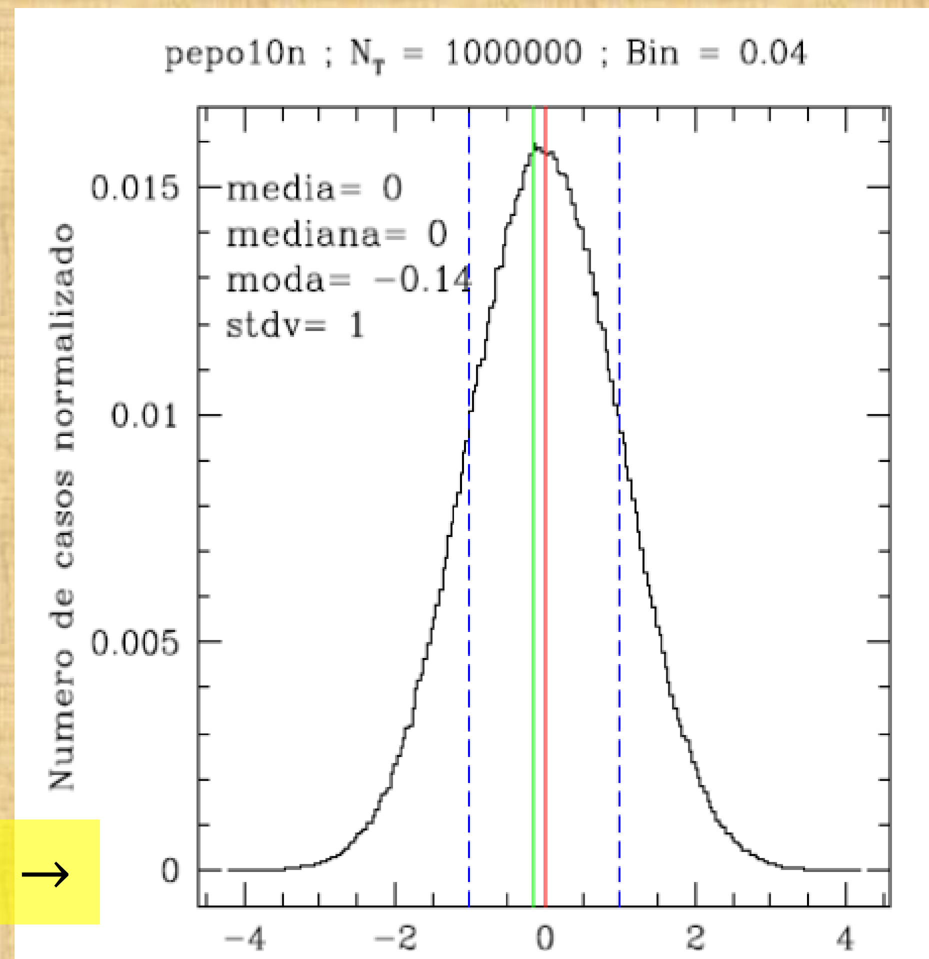
FDP de Gauss

La transformación a un histograma de FDP Gaussiano de *N(0,1)* todavía no está completa porque el número de casos sigue reflejando la población de 10^6 números. Para corregir esto, dividimos las cuentas del histograma final por 10^6.



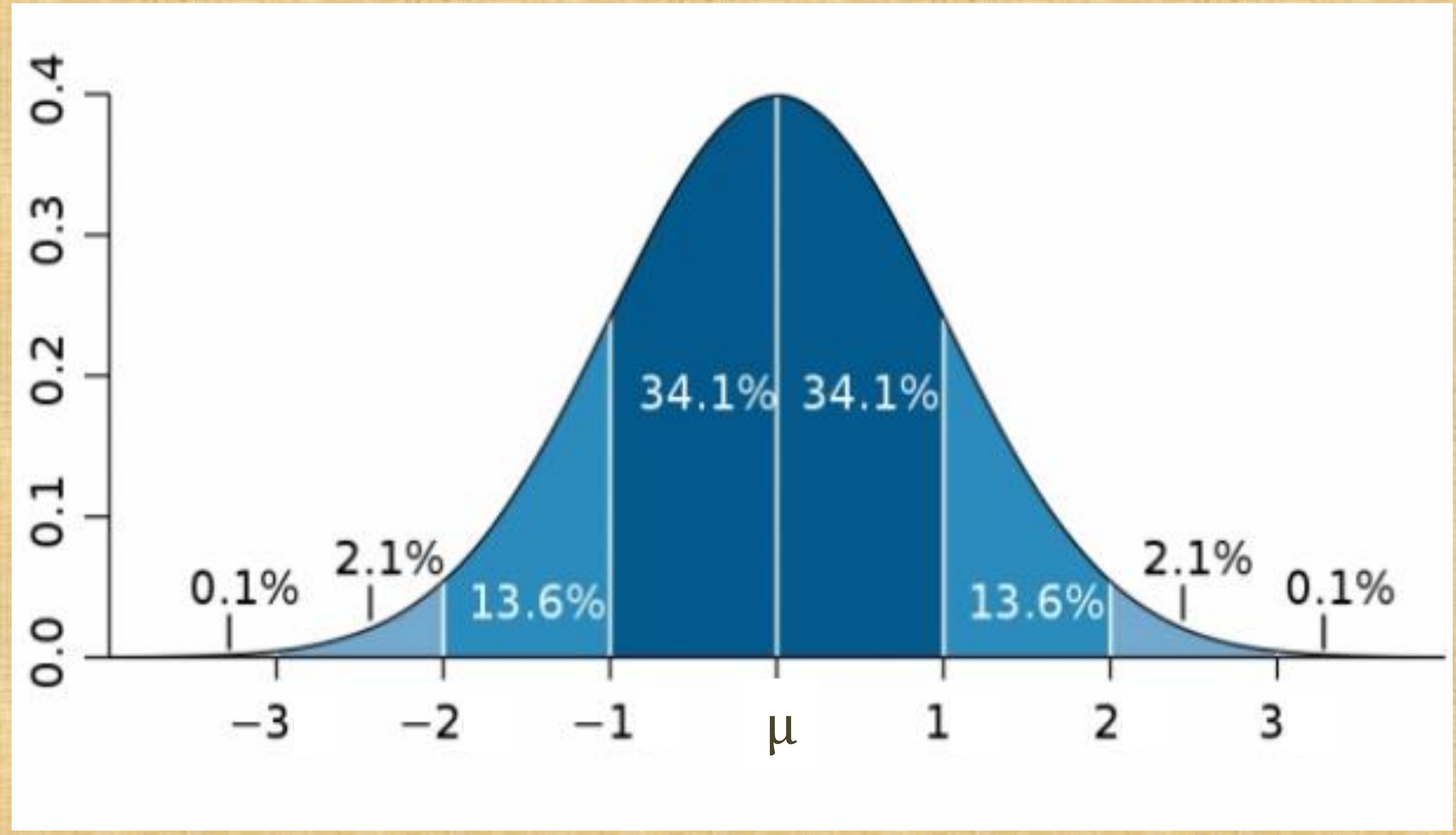
Variable aleatoria x'_{10}

$$n_j = n_j/10^6 \rightarrow$$



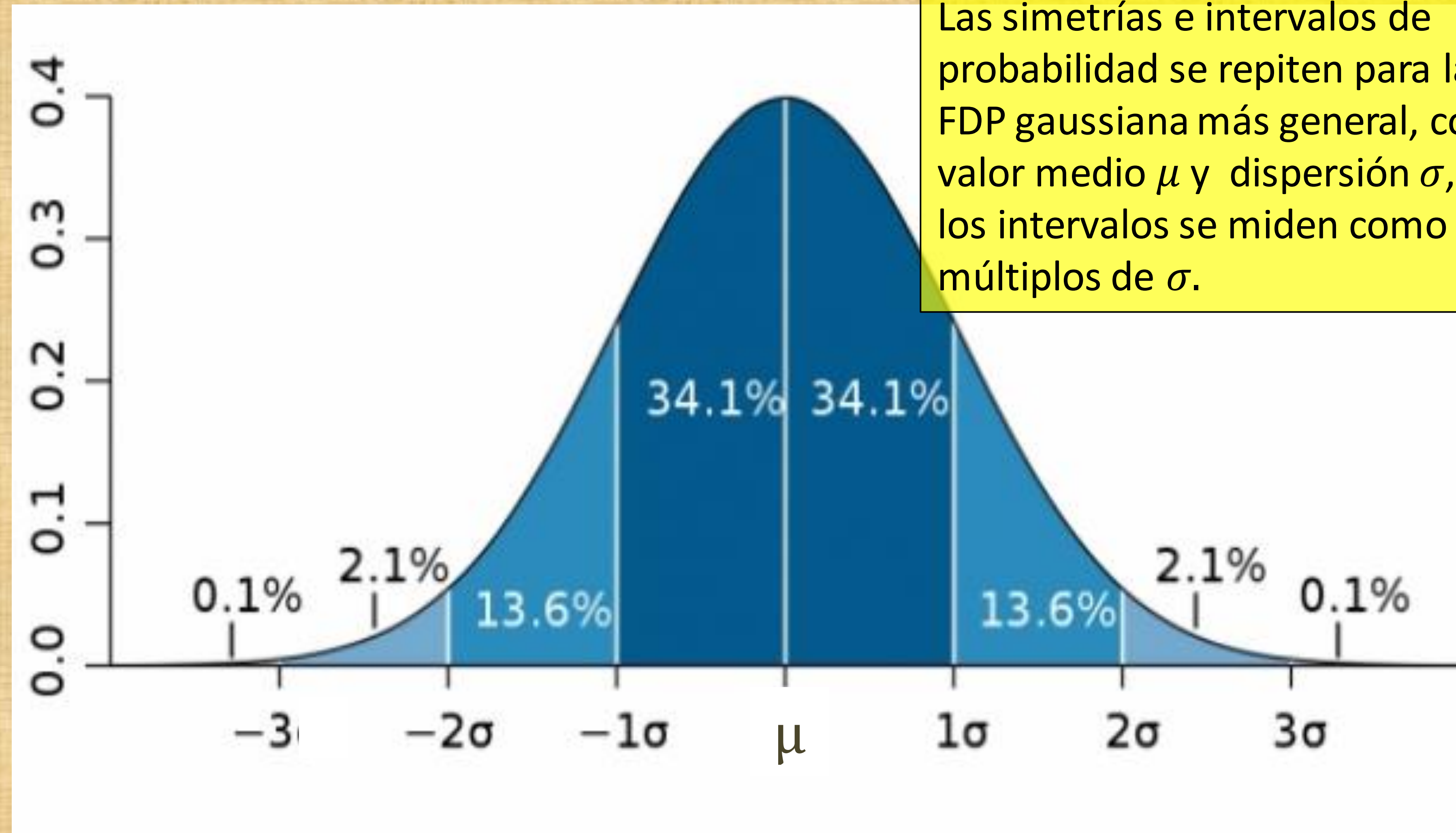
Variable aleatoria x'_{10}

FDP de Gauss



$$N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

FDP de Gauss



Las simetrías e intervalos de probabilidad se repiten para la FDP gaussiana más general, con valor medio μ y dispersión σ, si los intervalos se miden como múltiplos de σ.

$$N(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

FDP de Gauss

La forma anterior es la más general de la distribución normal:

$$N(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

forma que también está normalizada de forma que su integral en el espacio completo de definición de la probabilidad, $(-\infty,\infty)$ es 1:

$$P_{(-\infty < x < \infty)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

La FDP de Gauss puede usarse para predecir la probabilidad de que un valor de x esté en un cierto rango de la variable (x_1, x_2):

$$P_{(x_1 < x < x_2)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{x_1}^{x_2} N(\mu,\sigma) dx$$

FDP de Gauss

La forma usual de llevar a cabo ese cálculo es convirtiendo la $N(\mu,\sigma)$ en $N(0,1)$ con el cambio de variables $x' = (x-\mu)/\sigma$

$$P_{(x_1 < x < x_2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'_1}^{x'_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Erf(x'_2) - Erf(x'_1)$$

donde *Erf(x)* es

$$Erf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

La *erf(x)* nos permite calcular un primer "modelo de la realidad" para comparar con nuestras observaciones, o con nuestra imaginación.
Si el modelo de la realidad correcto es una distribución $N(\mu,\sigma)$, entonces el valor esperado, $n_{e,j}$, de casos que caerán en el intervalo de ancho Δx centrado en x_j será:

$$n_{e,j} = N_T\{Erf(x_j + \Delta x/2) - Erf(x_j - \Delta x/2)\}$$

donde N_T es el número total de casos (es decir, la suma total del histograma).

FDP de Gauss

Habiendo hecho esto puedo desarrollar un test cuantitativo para medir cuán diferente es el histograma observado del que predice el modelo. El test que vamos a usar es el llamado χ^2, que se construye sumando los cuadrados de las diferencias entre las cuentas real, observadas, y las predichas por el modelo, esperadas, bin a bin, normalizadas por las cuentas esperadas. Hay razones fundadas para proponer y usar este estimador, pero por esta clase sólo tomaremos nota de la receta:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{M} \frac{\left(n_{o,j} - n_{e,j}\right)^2}{n_{e,j}}$$

$n_{o,j}$ es el número de casos observados en el bin *j*, $n_{e,j}$ es el número de casos esperados en el bin *j*, calculados como se indica en la imagen previa, de acuerdo a la distribución $N(\mu, \sigma)$, donde μ y σ son el valor medio y la dispersión (o desviación estándar), medidas para el histograma que estamos tratando de representar, y la suma se extiende a los *M* bins que tenga el histograma.