Métodos de la física matemática I
Tarea 1

Profesor: Edward Arévalo (earevalo@fis.puc.cl)
Ayudante: Agustín Escobar (atescobar@uc.cl)

6 de septiembre de 2016

---

1. Problema: Convergencia de Series

Probar que las siguientes series son convergentes

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3ni^n}{(n+2i)^3}$

2. Problema: Desigualdad de Cauchy

Demostrar la Desigualdad de Cauchy

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n b_n \right|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)$$

3. Problema: Serie Geometrica

- Usando la identidad
$$(1-z)(1+z+...+z^N) = 1 - z^{N-1}$$
mostrar que
$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

- Tomando el producto de Cauchy de la serie anterior consigo misma, encontrar una expresión para $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$

4. Problema: Funciones analíticas

Mostrar que las siguientes funciones no tienen derivada en el plano complejo

- $f_2(Z) = Im(z)$
- $f_3(Z) = |z|$
- $f_4(Z) = arg(Z)$

5. Problema: Lugar geométrico

Hallar el lugar geométrico de $Re\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = 0$.

6. Problema

Hallar $|z|$ y $\arg(z)$ con $n \in N$ para

$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

7. Problema: Cauchy-Riemann

Probar por definción de la derivada en el plano complejo que las funciones analiticas deben cumplir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

8. Problema: Geometría - Elipse

Encontrar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $z_0 = 1+i$, cuyos focos estan en $z = \pm i$. ¿Cuál es la fórmula analitica correspondiente?

9. Problema: Geometría - Parabola

Encontrar la ecuación de la parabola con foco $z = 1 + i$ con directríz la recta $Re(z) = Im(y)$.

10. Problema

Muestre que

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$$

si $|a| < 1$ y $|b| < 1$.

11. Problema

Solucionar la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

con el ansatz $Q = Ae^{\lambda t}$ donde $A \in R$ y $\lambda \in C$.

12. Problema: Raices n-simas

Resolver las ecuaciones complejas

1. $z^6 = 1$
2. $z^2 = \sqrt{i}$
3. $z^4 = -1$
4. $z^4 = -1 + \sqrt{3}i$

13. Problema: Argumento de un número complejo

La función $Arg(z)$ representa el argumento de un número complejo en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Demostrar que

$$Arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \begin{cases} \pi/2 & Im(z) > 0 \\ -\pi/2 & Im(z) < 0 \end{cases}$$

donde z es un punto en la circunferencia unitaria $|z| = 1$.

14. Problema: Series de Potencia

Encontrar el dominio de convergencia de las siguientes series:

- $\Sigma_{n=0}^{\infty} n(z-i)^n$
- $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(z+1)^n$
- $\Sigma_{n=0}^{\infty} n^2(2z-1)^n$

15. Problema: Topología

Probar que un conjunto es cerrado si y solo si contiene todos sus puntos de acumulación
Hint: Considere que el complemento de un conjunto cerrado es abierto. El complemento de un conjunto es el plano complejo menos el conjunto:

$$S^c = C - S$$

16. Problema:

Mostrar que

$$|e^z| = e^x$$

17. Problema:

Mostrar que

$$sin(x + iy) = sin(x)cosh(y) + icos(x)sinh(y)$$

18. Problema:

Mostrar que $f(z) = x^2 + iy^2$ es diferenciable en todos los puntos de la recta $y = x$ pero no es analítica en ningún punto

19. Problema:

Sea f(z) analitica tal que $f'(z) = 0$. Mostrar que f es constante.

20. Problema:

Mostrar que la serie de potencias

$$f(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$$

corresponde a e^z, mediante extensión de las propiedades de la función exponencial al plano complejo. Es decir, mostrar que f es tal que

- $f(z)f(w) = f(z + w)$
- $f(x) = e^x$
- $f(x) = cos(y) + isin(y)$

21. Problema:

Si $|a_n| < 1$ y $\lambda_n \geq 0$ para $n = 1, ..., N$ y $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n = 1$, entonces mostrar que

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \, a_n \right| < 1.$$

22. Problema:

Obtenga las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

23. Problema:

Muestre que: a) Si $\log(z) = \ln r + i\theta$, donde $z = re^{i\theta}$ con $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{9\pi}{4}$, entonces $\log(i^2) = 2\log(i)$.
b) Si $\log(z) = \ln r + i\theta$, donde $z = re^{i\theta}$ con $\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}$, entonces $\log(i^2) \neq 2\log(i)$.

24. Problema:

Definimos $z^c = e^{c\log(z)}$, con $z, c \in C$, la función potencia en el dominio $|z| > 0$ y $-\pi < \arg(z) < \pi$ donde $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$. Según esta definición, calcular el valor de

$$(i \cdot (i-1))^i \quad \text{y} \quad i^i \cdot (i-1)^i$$

compare los resultados.

25. Problema:

Determine todas las funciones $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que satisfacen simulataneamente las siguientes dos condiciones
i) $f(x + i0) = e^x$ (exponencial real)
ii) f es analítia en el plano complejo y $f'(z) = f(z) \quad \forall z \in C$.

26. Problema:

Considere la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica en el plano complejo y definamos las funciones

$$U(x, y) = e^{u(x,y)} \cos(v(x, y)) \quad \text{y} \quad V(x, y) = e^{u(x,y)} \sin(v(x, y)).$$

Considere las familias de curvas de nivel $U(x, y) = c_1$ y $V(x, y) = c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Pruebe que esas familias son ortogonales.

27. Problema:

Determine la región donde $f(z) = \sin(\overline{z})$ es analítica.