Series de Potencias

Una serie de potencias es aquella que tiene la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

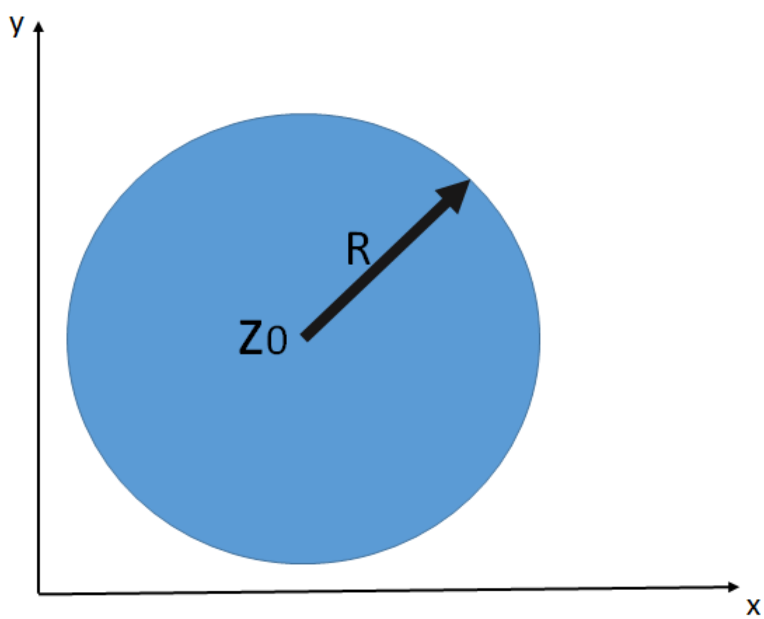
donde a_n y z_0 son numeros complejos fijos (constantes). Es importante notar que el dominio de analiticidad de la serie es el interior de un circulo centrado en z_0.

Convergencia de la serie de potencias

Para determinar la convergencia de una serie de potencias es necesario determinar el llamado radio de convergencia $R \geq 0$. y puede tomar también un valor $+\infty$.

- Si $|z - z_0| < R$ la serie converge absoluta y uniformemente.
- Si $|z - z_0| > R$ la serie diverge.
- Si $|z - z_0| = R$ nada se puede decir sobre la convergencia.

La serie converge solamente dentro del circulo centrado en z_0 y radio R.



Métodos practicos de calcular R usa las pruebas de la razón y de la raíz. La estrategía para determinar R tiene en cuenta la definición

$$R = \sup\{r \geq 0 \quad / \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \quad \text{converge}\}$$

Antes de dar una forma conveniente de calcular R, veamos algunos teoeremas necesarios para su calculo.

Lema de Abel-Weierstrass

En este se lema se supone implicitamente que la serie geométrica converge. Entonces comparando la serie de potencias con la serie geometrica se puede demostrar que la primera converge.

Suponga existe un $r_0 > 0$ tal que $|a_n| r_0^n \leq M \ \forall n \geq 0$, donde $M > 0$ es una constante. Entonces para $r < r_0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniforme y absolutamente en el disco $|z - z_0| \leq r$.

Demostración

Para un z tal que $|z - z_0| \leq r$, tenemos

$$|a_n (z - z_0)^n| \leq |a_n| r^n = |a_n| r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

Sea

$$M_n = M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

Ya que $r/r_0 < 1$, la serie $\sum M_n$ converge. Entonces por la prueba de Weierstrass concluimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge uniforme y absolutamente en el disco $|z - z_0| \leq r$.

Teorema

Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ es analítica dentro del círculo de convergencia.

Teorema

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

una función analítica definida sobre el interior de un círculo de convergencia de la serie de potencias dada. Entonces

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

también es una serie con el mismo círculo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Además los coeficientes estan dados por la expresión

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Notese que para f' se tiene que

$$n|a_n(z-z_0)^{n-1}| \leq |na_n|r^{n-1} = n|a_n|r_0^{n-1}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} \leq nM\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} = nM_{n-1}$$

es decir $|a_n(z-z_0)^{n-1}| \leq M_{n-1}$ y la serie $\sum M_{n-1}$ converge uniforme y absolutamente en el disco $|z-z_0| \leq r$.

Ya que $r/r_0 < 1$, entonces por la prueba de Weierstrass concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^n$ converge uniforme y absolutamente en el disco $|z-z_0| \leq r$.

Para identificar los coeficientes a_n imponemos el valor $z = z_0$, entonces

$$f(z_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_0-z_0)^n = a_0$$

$$f'(z_0) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n(z_0-z_0)^{n-1} = a_1$$

$$f''(z_0) = 2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)a_n(z_0-z_0)^{n-2} = 2a_2$$

$$f^{(m)}(z_0) = m!a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} m!a_n(z_0-z_0)^{n-m} = m!a_m$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}.$$

Teorema de Taylor

Sea f analítica en el dominio D. Sea $z_0 \in D$ tal que el disco $|z-z_0| < r$ contenido en D. Entonces para todo z en el disco $|z-z_0| < r$, la serie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

converge en el disco.

Demostración

Sea un contorno γ circular de radio $\sigma < r$ y centrado en z_0

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Ya que z esta dentro del círculo γ y ζ esta en la frontera, entonces la desigualdad

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$$

se satisface. Nótese que

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k.$$

Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k d\zeta$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Serie de Maclaurin

Cuando $z_0 = 0$, la serie de Taylor se reduce a la llamada serie de Maclaurin

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Definición de convergencia uniforme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (z - z_0)^n + R_N(z)$$

donde

$$R_N(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Nótese que $\lim_{N \to \infty} R_N(z) = 0$. Por tanto $\exists M$ entero tal que $|R_N(z)| < \varepsilon$ para $N \geq M = M(\varepsilon, z)$. En el caso de las series de potencias que convergen en un disco de radio de convergencia R, el número entero M no depende del valor de z, solo de ε, i.e $M = M(\varepsilon)$.