Teorema de Picard

Una función con una singularidad esencial asume todo número complejo, con una posible exepción, como valor en cualquier vecindad de esta singularidad. Esto implica que la función cerca de la singularidad esencial es altamente oscilante.

La demostración de este teorema esta más allá de las posibilidades de este curso, sin embargo, el siguiente ejemplo verifica este teorema.

Ejemplo: Verifique el resultado de Picard para $e^{1/z}$ en la vecindad de $z = 0$.

Obviamente la función $e^{1/z}$ nunca es cero. Sin embargo para un número complejo $c \neq 0$, se puede mostrar que $e^{1/z}$ toma ese valor c para un $|z| < \varepsilon$ donde ε es un valor positivo arbitrario. Sea $w = 1/z$. Como $\log c = \ln |c| i \arg c + 2n\pi i$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Podemos elejir un valor de n lo suficientemente grande tal que

$$e^{1/z} = e^{w} = e^{\log c} = c$$

con $|z| < \varepsilon$.

Entonces tres tipos singulariades han sido identificadas. Cuando una función es acotada, entonces la singularidad es removible, si la singularidad se aproxima a ∞ entonces es un polo, y cualquier otra cosa es una singularidad esencial.

Teoría del residuo

Recordar que:

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & m \neq -1 \\ 2\pi i & m = -1 \end{cases} .$$

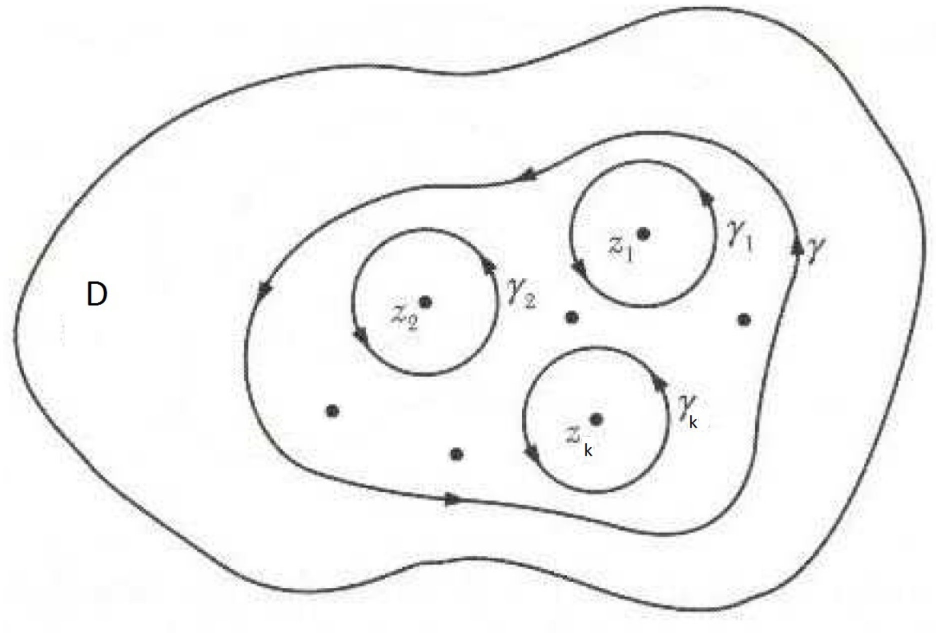
Consideremos la serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

donde b_1 es el residuo de la función f en z_0. Si integramos la serie de Laurent a lo largo de un círculo pequeño γ alrededor del punto z_0 vemos rápidamente que

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \operatorname{Res}(f; z_0).$$

Teorema de Cuachy



Sea γ un contorno simple cerrado y sea $f(z)$ analítica sobre γ y en el interior de γ excepto en un número finito de puntos finitos z_1, z_2, ..., z_k, contenidos en el interior de γ. Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \mathrm{Res}(f; z_n),$$

donde la integral a lo largo γ va en la dirección positiva. Es evidente que esta fórmula surge de una demostración muy similar a la hecha para contornos múltiplemente conexos, por tanto, se deja la demostración para el lector.

Teorema

Si f tiene un polo de orden m en z_0, entonces

$$\mathrm{Res}(f; z_n) = \lim_{z \to z_n} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_n)^m f(z)].$$

Demostración: Consideremos solo un polo: z_0

Si multiplicamos la serie de Laurent por $(z-z_0)^m$,

$$(z-z_0)^m f(z) = b_m + \cdots + b_2(z-z_0)^{m-2} + b_1(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots$$

y derivando $m-1$ veces obtenemos

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!b_1 + m!a_0(z-z_0) + \frac{(m+1)!}{2}a_1(z-z_0)^2 + \cdots$$

.

Por tanto

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!b_1 + 0,$$

por tanto

$$b_1 = \text{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

Generalizando a un número finito de polos se obtiene

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \text{Res}(f; z_n),$$

Ejemplo

Evaluar la integral

$$\int_C \frac{z^2-z+1}{(z-1)(z-4)(z+3)}dz$$

donde C es un círculo $|z| = 5$ en la dirección positiva.

Solución:

La función tiene tres polos simples: $z = 1$, $z = 4$ y $z = -3$. Usando la fórmula de los residuos obtenemos

$$\text{Res}(1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2-z+1}{(z-4)(z+3)} = -\frac{1}{12}$$

$$\text{Res}(4) = \lim_{z\to 4}(z-4)f(z) = \lim_{z\to 4} \frac{z^2-z+1}{(z-1)(z+3)} = \frac{13}{21}$$

$$\text{Res}(-3) = \lim_{z\to -3}(z+3)f(z) = \lim_{z\to -3} \frac{z^2-z+1}{(z-4)(z-1)} = \frac{13}{28}$$

$\text{Res}(1) + \text{Res}(4) + \text{Res}(-3) = 1$, por tanto

$$\int_{|z|=5} \frac{z^2-z+1}{(z-1)(z-4)(z+3)}dz = 2\pi i$$

Teorema

Sea $f(z) = p(z)/q(z)$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en z_0 y $p(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 si y solo si z_0 es un cero de orden m de la función $q(z)$. En particular, cuando $q(z)$ tiene un cero simple en z_0, entonces $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 y

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = p(z_0)/q'(z_0).$$

Demostración:

Suponga que z_0 es un cero de orden m de q(z), es decir

$$q(z) = (z - z_0)^m \lambda(z)$$

Entonces

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\lambda(z)} = \frac{p(z_0)}{\lambda(z_0)} \neq 0.$$

Para un polo simple ($m = 1$) se tiene

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{q(z)/(z - z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{\lambda(z)} = \frac{p(z_0)}{\lambda(z_0)} \neq 0.$$

Si expandimos en serie de Taylor $q(z)$ alrededor de z_0 obtenemos

$$q(z) = q'(z_0)(z - z_0) + \frac{q''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

Nótese que

$$\lambda(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{q(z)}{(z - z_0)} = \lim_{z \to z_0} \left(q'(z_0) + \frac{q''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \cdots \right) = q'(z_0)$$

Entonces

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \mathrm{Res}(f; z_0)$$

Ejemplo: Hallar los residuos de $f(z) = \tanh(z)$

Solución: Si $f(z) = p(z)/q(z)$ entonces $p(z) = \sinh(z)$ y $q(z) = \cosh(z)$. Los valores $z_n = (n + 1/2)\pi i$ son ceros simples de $q(z)$ pero no de $p(z)$.

Nótese que

$$\lim_{z \to z_n} \frac{q(z)}{z - z_n} = \lim_{z \to z_n} \frac{\cosh(z)}{z - z_n} \neq 0$$

luego z_n es un cero simple de $q(z)$.

$$\mathrm{Res}(f; z_n) = p(z_n)/q'(z_n) = \frac{\sinh(z)}{\sinh(z)} = 1.$$

Evaluación de integrales e ciertas funciones periodicas entre los límites 0 y 2π

$$I = \int_{0}^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta) d\theta$$

Realizar la sustitución $e^{i\theta} = z$ y luego usar algún método de integración complejo, como el de los residuos.