~~Ejercicios~~: Problema 1

• ~~Ej 13-20 de Derrick cap. II sección 1.1~~.

1. Probar que:

$Re(iz) = -Im\, z$.

sol:

Sea $z = x+iy$. tenemos que

$$iz = ix + i^2 y = -y + ix.$$

$$\Rightarrow Re(iz) = \frac{iz + \overline{(iz)}}{2} = \frac{-y+ix+(-y-ix)}{2}$$

$$\Rightarrow Re(iz) = \frac{-2y}{2} = -y.$$

Pero:

$$Im\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{\cancel{x}+iy-(\cancel{x}-iy)}{2i}$$

$$= \frac{2iy}{2i} = y.$$

$$\Rightarrow Re(iz) = -Im\, z.$$

2: Probar que si: $z = z_1 + z_2$ y $w = z_1 \cdot z_2$ son reales negativos, z_1 y z_2 son reales.

Sol:

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$.

Luego:

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$w = \underbrace{(x_1 \cdot x_2 - y_1 y_2)}_{(*)} + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Como $z, w \in \mathbb{R}^-$ se tiene:

$z \Rightarrow \quad y_1 = -y_2$.

$w \in \mathbb{R}^- \Rightarrow \quad x_1 y_2 + y_1 x_2 = 0$.

$$-(x_1 - x_2) y_1 = 0$$

si $y_1 \neq 0$ entonces necesariamente $x_1 = x_2$.

Pero eso implica, por (*), que

$$x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 = x_1^2 + y_1^2 < 0$$

Lo que es una contradicción.

$$\Rightarrow y_1 = 0 = y_0$$

necesariamente y $\Rightarrow z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

Problema 3:

1.- $$\left|\sum z_n\right| \leq \sum |z_n|.$$

<u>Dem:</u>

tenemos que

$$\sum z_n = z_1 + \cdots + z_n.$$

$$\left|\sum z_n\right| = |z_1 + \cdots + z_n|$$

la desigualdad triangular dice que:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

se puede extender facilmente a N terminos considerando

$$w_1 = z_2 + \cdots z_n$$
$$w_2 = z_3 + \cdots z_n$$
$$\vdots$$

$$|z_1 + w_1| \leq |z_1| + |w_1|$$
$$\leq |z_1| + |z_2| + |w_2|$$
$$\vdots$$
$$\leq |z_1| + |z_2| + \cdots |z_n|.$$

$$\Rightarrow \left|\sum z_n\right| \leq \sum |z_n|$$

2.- Dem $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$.

Dem:

Se tiene que

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(z_1 z_2) \cdot \overline{(z_1 z_2)}}$$

$$= \sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}$$

$$= \sqrt{z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

$$= \underbrace{\sqrt{z_1 \cdot \overline{z_1}}}_{|z_1|} \underbrace{\sqrt{z_2 \cdot \overline{z_2}}}_{|z_2|} = |z_1| \cdot |z_2|$$

luego $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$.

<u>Problema 3:</u>

1.- Dem

$$\left|\sum_{k=1}^{N} a_k b_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{N} |b_k|^2\right) - \sum_{1 \leq i < j \leq N} |a_i \overline{b}_j - a_j \overline{b}_i|.$$

Dem:

Sea $z = \sum_{k=1}^{N} a_k b_k$.

Luego:
$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}.$$

$$\Rightarrow |z|^2 = \left|\sum_{k=1} a_k b_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1} a_k b_k\right)\left(\overline{\sum_{k=1} a_k b_k}\right)$$

Como tomar conjugados es lineal se tiene:
$$\left|\sum_{k=1} a_k b_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1} a_k b_k\right)\left(\sum_{k=1} \overline{a_k}\,\overline{b_k}\right)$$

haciendo un cambio de indices mudos:
$$\left|\sum_{k=1} a_k b_k\right|^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_i b_i \overline{a_j}\,\overline{b_j} \qquad (1)$$

por otro lado, notar que:
$$|a_i \overline{b_j} - a_j \overline{b_i}| = (a_i \overline{b_j} - a_j \overline{b_i})(\overline{a_i} b_j - \overline{a_j} b_i)$$
$$= |a_i|^2 |b_j|^2 + |a_j|^2 |b_i|^2 - \underbrace{(a_i \overline{a_j}\,\overline{b_j} b_i + a_j \overline{a_i}\,\overline{b_i} b_j)}_{\circledast}$$

$$\circledast = 2\,\mathrm{Re}\, a_i \overline{a_j}\,\overline{b_j} b_i . \qquad (2)$$

Consideremos en (1) la suma como sobre los elementos de una matriz donde separemos la suma diagonal de los terminos no diagonales:

$$(1) = \sum_{i=j} a_i \overline{a_j} b_i \overline{b_j} + \underbrace{\sum_{i<j} a_i \overline{a_j} b_i \overline{b_j} + \sum_{j<i} a_i \overline{a_j} b_i \overline{b_j}}_{(**)}.$$

Además notar que

$$\sum_{i>j} b_i\bar{b}_j a_i\bar{a}_j = \sum_{i>j} \overline{a_i \overline{b_i} a_j b_j}$$

Luego la parte $(**)$ queda como:

$$(**) = \sum_{i<j} a_i\bar{a}_j b_i\bar{b}_j + \sum_{j<i} a_i\bar{a}_j b_i\bar{b}_j$$

$$= \sum_{i<j} a_i\bar{a}_j b_i\bar{b}_j + \sum_{j<i} \overline{\bar{a}_i a_j \bar{b}_i b_j}$$

Notar que al permutar los índices j e i en el segundo miembro se tiene:

$$\bar{a}_j a_i \bar{b}_j b_i = a_i\bar{a}_j b_i\bar{b}_j$$

$\therefore$ podemos cambiar los índices de orden y obtenemos

$$(**) = \sum_{i<j} \underbrace{\left(a_i\bar{a}_j b_i\bar{b}_j + \overline{a_i\bar{a}_j b_i\bar{b}_j}\right)}_{2\operatorname{Re} a_i\bar{a}_j b_i\bar{b}_j}$$

$$= -\sum_{i<j} |a_i\bar{b}_j - a_j\bar{b}_i| - |a_i|^2|b_j|^2 - |a_j|^2|b_i|^2$$

Luego la expresión completa queda como:

$$\Rightarrow = \sum_{i=j=1}^{N} a_i\bar{a}_j b_i\bar{b}_j + \sum_{i<j} a_i\bar{a}_i b_j\bar{b}_j + \sum_{j<i} a_j\bar{a}_j b_i\bar{b}_i$$

$$- \sum |a_i\bar{b}_j - a_j\bar{b}_i|.$$

Los primeros tres terminos los podemos volver a juntar

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_i \bar{a}_i b_j \bar{b}_j} - \sum_{i<j} |a_i \bar{b}_j - a_j \bar{b}_i|$$

$$\cancel{\sum |a_i|^2 |b_i|^2 + |a}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{N} |b_j|^2 \right) - \sum_{i<j} |a_i \bar{b}_j - a_j \bar{b}_i| \qquad \blacksquare$$

2.-

De la desigualdad de Lagrange:

$$\sum |a_k|^2 \sum |b_k|^2 - \left|\sum a_k b_k\right|^2 = \sum_{i,j} |a_i b_j - a_j b_i|$$

Para el lado derecho es ≥ 0.

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \sum |a_k|^2 \sum |b_k|^2 - \left|\sum a_k b_k\right|^2$$

$$\Rightarrow \quad \left|\sum a_k b_k\right|^2 \leq \sum |a_k|^2 \sum |b_k|^2$$

$\blacksquare$