Condiciones de Cauchy Riemann

Sea la función compleja

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

donde $u, v \in R$ y $x, y \in R$.

Teorema

Una condición necesaria para que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en un dominio D es que sus derivadas parciales $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$ existan y satisfagan en cada punto de D las condiciones de Cauchy Riemann:

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y, \qquad \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$$

.

Demostración:

Sea $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto fijo cualquiera en D. Ya que $f'(z_0)$ existe, la razón

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

debe tender de alguna manera a un valor determinado en la medida que $z \to z_0$.

Aproximando la operación a través de una línea paralela al eje x se obtiene que $z - z_0 = \Delta x$, por tanto

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x) - u(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x) - v(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(z_0) = \partial u/\partial x + i\partial v/\partial x$$

De la misma manera, aproximando la operación a través de una línea paralela al eje y se obtiene $z - z_0 = i\Delta y$, por tanto,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x) - u(x_0)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x) - v(x_0)}{i\Delta y}$$

$$f'(z_0) = -i\partial u/\partial y + \partial v/\partial y$$

Esto implica necesariamente que

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y, \qquad \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x.$$

Nótese que las condiciones de Cauchy-Riemann implican que la parte real e imaginaria de una función analítica $f(z) = u + iv$ no son arbitrarias. Esto significa que no se pueden especificar las funciones u and v en forma independiente y esperar que la función $f(z)$ sea analítica.

Ejemplo:

El siguiente ejemplo nuestra que las condiciones antes mencionadas no son suficientes para garantizar la analiticidad de una función $f(z)$.

Considere la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $z \neq 0$ y $f(0) = 0$ donde

$$u(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad v(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

Muestre que las condiciones de Cauchy-Riemann son satisfechas en el origen, pero la función $f'(z)$ no existe en el origen.

En este caso elejimos como punto fijo $z_0 = x_0 + iy_0 = 0$ por tanto $\Delta z = \Delta x = x - x_0 = x - 0 = x$ asi como $\Delta z = \Delta y = y - y_0 = y - 0 = y$. Con estas considereaciones se ve facilmente que

$$u_x(0, 0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{z - z_0}$$

$$u_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{u(x, 0)}{x} = 1$$

De la misma forma se puede mostrar que

$$u_y(0, 0) = -1, \quad v_x(0, 0) = 1, \quad v_y(0, 0) = 1.$$

Por tanto, las condiciones de Cauchy-Riemann son satisfechas en el origen, i.e

$$u_x(0, 0) = 1 = v_y(0, 0), \quad \text{y} \quad u_y(0, 0) = -1 = -v_x(0, 0).$$

En los pasos anteriores las derivadas fueron calculadas a lo largo del eje x y del eje y, sinembargo para que la función $f(z)$ sea analítica, es necesario que la definición de la derivada se cumpla en cualquier dirección del plano complejo. En el presente caso, si elejimos como dirección para derivar la trayectoría $x = y$ vemos rapidamente que la función $f(z)$ se transforma en

$$f(z) = u + iv = 0 + ix.$$

Por tanto, a lo largo de $x = y$

$$f'(0) \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x, x) - u(x_0, y_0)}{z - z_0}$$

$$f'(0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x, x) - u(0, 0)}{x + iy - x_0 - iy_0}$$

$$f'(0) \lim_{x \to 0} \frac{ix - 0}{x + ix} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

Este último valor no concuerda con los valores calculados a lo largo de los ejes x e y, por tanto la derivada $f'(0)$ no existe. En otras palabras las condiciones de Cauchy-Riemann por si solas no son suficientes para determinar la analiticadad de la función.

Teorema

Sea la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, una condición necesaria y suficiente para que una función $f(z)$ sea analítica en un dominio D es que las cuatro derivadas parciales $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$ existán, sean continuas, y satisfagan las condiciones de Cauchy Riemann en cada punto de D.

Demostración:

Sea z_0 un punto fijo cualquiera en D. Considerense las expresiones

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0),$$

$$\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0).$$

Debido a la continuidad de las derivadas parciales se tiene que

$$\Delta u = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y,$$

donde ε_i con $i = 1, 2, 3, 4$ son errores que se aproximan a cero cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Este tipo de funciones ε_i se pueden determinar facilmente usando por ejemplo la expansión de Taylor de funciones reales.

Sea $w = f(z)$, entonces

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Sustituyendo los valores de Δu y Δv en la última expresión y usando las condiciones de Cauchy se obiene que

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

Por otro lado, de la desigualdad triangular se obtiene que $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \leq 1$ y $\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq 1$. Por tanto, cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, se obtiene que

$$(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} \to 0$$

y

$$(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z} \to 0.$$

Consecuentemente, si $\Delta z \to 0$, se obtiene que

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Para satisfacer las condiciones mencionadas se requiere que las derivadas parciales $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$ sean continuas. En otras palabras, si $f(z)$ es analítica, entonces $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$ son continuas.

En conclusión una condición suficiente y necesaria para que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en el dominio D es que las cuatro derivadas $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$ existan, sean continuas, y satisfagan las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y, \qquad \partial u/\partial y = -\partial v/\partial x.$$

en cada punto de D.

De esta conclusión se obtiene que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ejercicio: Usando las condiciones de Cauchy-Riemann, muestre que $f(z) = z^3$ es analítica en todo el plano complejo mientras que la función $g(z) = |z|^2$ no es analítica en ningún dominio. **solución** $f(z) = z^3 = (x + iy)^3 = u + iv$, donde $u = x^3 - 3xy^2$ y $v = 3x^2y - y^3$. Por tanto,

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y \quad \text{y} \quad u_y = 6xy = -v_x$$

Esto significa que $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo.

Por otro lado para $g(z) = |z|^2$ se obtiene que $u = x^2 +^2$ y $v = 0$. Por tanto,

$$u_x = 2x, \quad v_y = 0, \quad u_y = 2y, \quad \text{y} \quad v_x = 0.$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann en este caso, solo se satisfacen para un solo punto, i.e. $z = 0$. Además no existe ninguna vecindad alrededor de $z = 0$ donde las condiciones se satisfagan, por tanto $g(z)$ no es analítica en ningún dominio.