Interrogación 2
FIZ0223 -Métodos de la Física Matematica 1
Facultad de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Noviembre 9, 2016

1. Problema: Lema de Abel-Weierstrass

El lema de Abel-Weierstrass nos dice que una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge en el disco $|z-z_0| \leq r$ si existe un $r_0 > 0$ tal que $|a_n| r_0^n \leq M$ para todo $n \geq 0$, donde M es una constante positiva, diferente de cero.

•Demuestre este teorema, con ayuda de la serie geométrica y suponiendo que $r < r_0$.
(En otras palabras, lo que se debe demostrar es que la serie de potencias converge)

Solución

Para un z tal que $|z-z_0| \leq r$, tenemos

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n .$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

Ya que $r/r_0 < 1$, entonces

$$\Rightarrow \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right| \leq \frac{M}{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)} < \infty$$

Concluimos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge en el disco $|z-z_0| \leq r$. $\blacksquare$ 1pt

2. Problema: Serie de Taylor

Sabemos que las fórmulas de Cauchy para integrales y derivadas de una función analítica $f(z)$ estan dadas por las expresiones

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad \text{y} \qquad f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

respectivamente. En estas fórmulas la coordenada muda ζ, dentro de las integrales, describe un contorno circular cerrado γ en el sentido positivo y con centro en un punto z_0. La variable z es punto cualquiera, diferente de z_0, en el interior del contorno circular γ. Muestre que en la región interior de γ la serie de Taylor,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k,$$

se puede obtener a partir de la fórmula integral de Cauchy.

Solución

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{(1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0})} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k.$$

Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^k d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{k!}\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k. \qquad \blacksquare \qquad \text{1pt}$$

3. Problema: Radios de convergencia

Determine los radios de convergencia de las siguientes series (muestre el procedimiento claramente)

$$(\mathbf{a}) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \quad (\mathbf{b}) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n^n)}{n!}z^n \qquad (\mathbf{c}) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!z^n}{n^n}$$

Solución a)

$$(\mathbf{a}) \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \quad \Rightarrow c_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Forma 1)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \exp\left((-n)\ln\left|1 - \frac{1}{n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{\ln\left|1-\frac{1}{n}\right|}{1/n}\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{n^2}}{1/n^2}\right) = e \quad \blacksquare$$

Forma 2)

$$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}} = \exp\left[n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - (n+1)^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \exp\left[n\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1/n} - (n+1)\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{1/(n+1)}\right]$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \exp\left[n\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1/n} - (n+1)\frac{\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{1/(n+1)}\right]$$

Usando Lópital obtenemos

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \exp\left[n \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1-1/n} - (n+1)\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1-1/(n+1)}\right]$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \exp\left[n(-1) - (n+1)(-1)\right] = e \quad \blacksquare$$

0.4pt

Solución b)

$$(\mathbf{b}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n^n)}{n!} z^n$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{\log(n^n)}{n!} = \frac{\log n}{(n-1)!}$$

En este caso solo hay una forma sencilla de solucionar el problema

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} n\frac{\log n}{\log(n+1)}$$

Usando Lópital obtenemos

$$R = \lim_{n\to\infty} n\frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \quad \blacksquare \qquad \textsf{0.3pt}$$

Solución c)

$$(\mathbf{c}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n} \Rightarrow c_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \frac{n!}{(n+1)!}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \exp\left\{n\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\} = \exp\left\{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}\right\}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}\right\}$$

Usando Lópital obtenemos

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}}\right\} = e \quad \blacksquare \qquad \textsf{0.3pt}$$

4. Problema: Serie de Laurent

(A) Considere la función $(z^2 - 3z + 2)^{-1}$. Encuentre su serie de Laurent en las regiones

$$\textbf{(i)} \quad 1 < |z| < 2, \quad \textbf{(ii)} \quad |z| < 1, \quad \textbf{(iii)} \quad |z| > 2 \quad \text{y} \quad \textbf{(iv)} \quad 0 < |z-1| < 1$$

SOLUCIÓN: (a) En el anillo $1 < |z| < 2$, al escribir

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

se pueden desarrollar las fracciones en la forma

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n,$$

ya que $|1/z| < 1$ y $|z/2| < 1$. Así,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

0.2pt

■

(b) Para $|z| < 1$, se desarrolla la expresión como

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \qquad |z| < 1.$$

0.2pt

■

(c) Aquí

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n, \qquad 2 < |z|.$$

0.2pt

$\blacksquare$

(d) En $0 < |z-1| < 1$, se obtiene

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)}$$

$$= -\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n.$$

Por tanto, en $0 < |z-1| < 1$,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

0.2pt

$\blacksquare$

(B) Considere la función $(z^2+z+1)z^{-1}$. Encuentre su serie de Laurent en las región $|z| < 1$

Solución B)

$$(z^2+z+1)z^{-1} = \frac{1}{z} + 1 + z \quad \blacksquare$$

0.2pt

5. Problema: Clasificación de singularidades

Encuentre y clasifique las singularidades de las funciones

$$(\mathbf{a}) \quad f(z) = \frac{z}{z^2+z}, \quad (\mathbf{b}) \quad g(z) = e^{-1/z^2}, \quad (\mathbf{c}) \quad h(z) = \csc(z)$$

$$\text{(a)} \quad f(z) = \frac{z}{z^2 + z},$$

(a) Las singularidades ocurren en los ceros del denominador: $z = 0, -1$. Como éstos son ceros simples y el numerador tiene un cero simple en $z = 0$, $f(z)$ tiene una singularidad removible en $z = 0$ y un polo simple en $z = -1$. 0.4pt

$$\text{(b)} \quad g(z) = e^{-1/z^2}$$

(b) Nótese que $g(z) \to 1$, puesto que $1/z^2 \to 0$ cuando $z \to \infty$, así que $g(z)$ tiene una singularidad removible en $z = \infty$. Pero

$$g(z) = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{z^4} - \ldots$$

es la serie de Laurent de $g(z)$, centrada en $z = 0$; por lo que $g(z)$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$. 0.3pt

$$\text{(c)} \quad h(z) = \csc z.$$

(c) Como

$$\operatorname{sen} z = (-1)^k \operatorname{sen}(z - \pi k) = (-1)^k \left[(z - \pi k) - \frac{(z - \pi k)^3}{3!} + \ldots \right],$$

$h(z)$ tiene un polo simple en $z = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 0.3pt

6. Problema: Teorema del residuo

Usando el teorema de los residuos evalue la integral

$$\int\limits_{|z-\frac{1}{2}|=1} \frac{e^z}{z^3 - z} dz$$

SOLUCIÓN: Las singularidades del integrando se presentan en $z = 0$, ± 1. Por tanto, sólo es necesario calcular los residuos 0 y 1 en los polos simples

$$\mathrm{Res}_0 \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} = \lim_{z \to 0} \frac{e^z}{z^2 - 1} = -1$$

y

$$\mathrm{Res}_1 \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} = \lim_{z \to 1} \frac{e^z}{z(z+1)} = \frac{e}{2}.$$

Así,

$$\int_{|z - \frac{1}{2}| = 1} \frac{e^z}{z^3 - z} dz = \pi i (e - 2).$$

0.5pt

■

Usando la trasnformación $e^{i\theta} = z$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ solucione la integral

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} \quad \text{con} \quad a^2 < 1.$$

Solución

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos\theta}, \qquad a^2 < 1.$$

$$1 + a\cos\theta = 1 + a\frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{a}{2z}(\frac{2z}{a} + z^2 + 1)$$

$$I = \int_C \frac{2dz}{ai(z^2 + 2z/a + 1)} = \int_C \frac{2dz}{ai(z - z_1)(z - z_2)},$$

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \quad \text{and} \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}.$$

El contorno C de integración es el círculo unitario $|z| = 1$. Como $a^2 < 0$, es evidente que $|z_2| > 1$ mientras que el polo $|z_1| < 1$. Es decir el contorno C encierra el polo z_1. Por tanto

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), z_1].$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_1] = \lim_{z \to z_1} (z - z_1)\, f(z) = \frac{2}{ai(z_1 - z_2)} = \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}}.$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}, \qquad a^2 < 1.$$

0.5pt

$\blacksquare$