No. 23 Mei 2024

Date:

Catherine V. Pang - 262220008

UTS Pengantar Model Linear

1. Regresi Linear Sederhana

Dari hasil penelitian & setelah disusun diperolehlah data berikut.

Tentukan: a. Var(b)

b. Var(a)

c. Var(Y) jika diketahui x = 20

• Tabel Statistik

X	X^2	Y	Y^2	XY
25	625	1,74	3,0276	43,50
31	961	6,32	39,9424	195,92
25	625	6,22	38,6884	155,50
38	1444	10,52	110,6704	399,76
18	324	1,19	1,4161	21,42
26	676	1,22	1,4884	31,72
26	676	4,10	16,8100	106,60
25	625	6,32	39,9424	158,00
32	1024	4,08	16,6464	130,56
25	625	4,15	17,2225	103,75
39	1521	10,15	103,0225	395,85
35	1225	1,72	2,9584	60,20
26	676	1,70	2,8900	44,20

• $\Sigma(X) = 371$

$\Sigma(n) = 13$

$\Sigma(Y) = 59,429$

$\Sigma(X^2) = 394,725$

$\Sigma(Y^2) = 11.027$

$\Sigma(XY) = 1.846,98$

$\bar{X} = \frac{\Sigma(X)}{\Sigma(n)} = \frac{371}{13} = 28,5384$

• Perhitungan ANOVA

1. $JK\ Regresi\ a = \frac{(\Sigma(Y))^2}{\Sigma n} = \frac{\cancel{59,429}}{13} = 4\cancel{,5714615384615}$ $\quad 3531,9249 = 271,6865307692306$

2. $JK\ Regresi\ b/a = b\left[\Sigma X \Sigma Y - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{n}\right]$

$= \left[\frac{n.\Sigma XY - \Sigma Y \Sigma X}{n \cdot \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}\right]\left[\Sigma X \Sigma Y - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{n}\right]$

$= \left[\frac{(13(1.846,98)) - ((59,429)(394,725))}{((13(394,725)) - (137.641))}\right]\left[((371)(59,429)) - \frac{((371)(59,429))}{13}\right]$

$= 0,344$

$= 51,923$

3. $JK\ Total = \Sigma(Y^2) = 11.027$

4. $JK\ Residu = JK\ Total - JK\ Regresi\ a - JK\ Regresi\ b/a$

$= 11.027 - \underset{271,686}{\cancel{\ldots}} - 51,923$

$= 71,116$

5. $RJK\ Regresi\ b/a = JK\ Regresi\ b/a$

$= 51,923$

6. $RJK\ Residu = JK\ Residu / (n-2)$

$= 71,116 / 11$

$= 6,465$

7. $DK\ Regresi\ b/a = 1$

8. $DK\ Residu = n - 2$

$= 13 - 2$

$= 11$

9. $DK\ Total = n - 1$

$= 13 - 1$

$= 12$

• Tabel ANOVA

Sumber	DK	JK	RJK
Regresi b/a	1	51,923	51,923
Residu (kekeliruan)	11	71,116	6,465
Total	12	394,726	-

a. $Var(b) = \frac{\sigma^2}{\Sigma(X_i - \bar{X})^2} = \frac{RJK\ Residu}{(\Sigma X - \Sigma\bar{X})^2} = \frac{6,465}{(371 - 28,5384)^2} = 5,5125210261888 38e^{-05}$

b. $Var(a) = \frac{((\sigma^2)(\Sigma X^2))}{n\Sigma(X - \bar{X})^2} = \frac{((RJK\ residu)(394,725))}{((13)(371 - 28,5384)^2)} = 0,047$

No.

Date:

$x = 20$

ⓒ $Var(Y) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{X})^2}{\Sigma(X - \bar{X})^2} \right]$

$= RJK\ Residu \left[\frac{1}{13} + \frac{(20 - 28{,}53..)^2}{(371 - 28{,}53..)^2} \right]$

$= 0{,}501$

2. a. Regresi Linear Berganda & Regresi Linear Sederhana

⟶ Regresi sendiri digunakan untuk memprediksi, pemahaman hubungan, pengendalian variabel lain, & validasi model yang sesuai.

☆ Regresi Linear Sederhana

▶ Adalah metode statistik untuk menjelaskan hubungan antara satu variabel independen (X) dan satu variabel dependen (Y).

▶ Tujuannya, untuk menentukan persamaan linear yg dapat memprediksi nilai Y berdasarkan nilai X. Persamaan umumnya adalah : $\boxed{Y = a + bX}$

- a = intersep (titik potong sb. Y)
- b = koefisien regresi (menunjukkan perubahan Y untuk setiap perubahan satu unit dalam var. X).

Contoh: Memprediksi berat badan orang (Y) berdasarkan tinggi badannya (X). Jika hasil analisis menghasilkan persamaan $Y = 30 + 0{,}5X$, ini berarti bahwa untuk setiap peningkatan tinggi badan sebesar 1 cm, berat badan diperkirakan akan meningkat 0,5 kg.

☆ Regresi Linear Berganda

▶ Adalah perluasan dari regresi linear sederhana yg melibatkan lebih dari satu variabel independen. Analisis ini dapat mengidentifikasi faktor penting a.k.a. mengidentifikasi var. independen mana yg berpengaruh signifikan thdp var. dependen. Jadi model ini berguna u/ mengevaluasi pengaruh beberapa var. independen terhadap satu var. dependen.

▶ Persamaan umum: $Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + ... + b_nX_n$

- a = intersep
- $b_1, b_2, .., b_n$ = koefisien regresi masing² var. independen.

▶ Contoh

Memprediksi harga rumah (Y) berdasar luas bangunan (X_1) dan jumlah kamar tidur (X_2). Jika hasil analisis regresi menghasilkan persamaan $Y = 50.000 + 30X_1 + 10000X_2$, ini berarti bahwa setiap peningkatan luas bangunan sebesar 300, & setiap tambahan kamar tidur akan meningkatkan harga sebesar 10.000.

b. Variabel Independen, Dependen, Koefisien Regresi

- Variabel Independen (X) : Variabel untuk memprediksi atau menjelaskan variabel dependen. Dalam regresi linear sederhana, hanya ada satu var. independen, sedangkan dalam regresi linear berganda, terdapat lebih dari satu. Var. independen = X. Contoh: tinggi badan dalam contoh regresi sederhana ~~dan~~ atau luas bangunan dan jumlah kamar tidur dalam contoh regresi berganda.

- Variabel Dependen (Y) : Variabel yang nilainya ingin diprediksi atau dijelaskan. Contohnya, berat badan atau harga rumah.

- Koefisien Regresi : Parameter dalam persamaan regresi yg menunjukkan besarnya pengaruh variabel independen thdp variabel dependen. Koefisien ini menunjukkan seberapa besar perubahan yg diharapkan dalam var. dependen untuk setiap satu unit perubahan dalam variabel independen. Dilambangkan dengan b. Contoh, pada persamaan regresi $Y = 30 + 0{,}5X$, koefisien regresi 0,5 menunjukkan bahwa setiap peningkatan 1 cm dalam tinggi badan diharapkan meningkatkan berat badan sebesar 0,5 kg.

No.

Date:

3. Regresi Linear Multiple

Diperoleh data sebagai berikut :

No	Y	X_1	X_2
1	3,5	3,1	30
2	3,2	3,4	25
3	3	3	20
4	2,9	3,2	30
5	4	3,9	40
6	2,5	2,8	25
7	2,3	2,2	30

• $(Y^TY) = \begin{bmatrix} 3{,}5 & 3{,}2 & 3 & 2{,}9 & 4 & 2{,}5 & 2{,}3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}2 \\ 3 \\ 2{,}9 \\ 4 \\ 2{,}5 \\ 2{,}3 \end{bmatrix}$

$= 67{,}44$ //

• $(X^TX) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3{,}1 & 3{,}4 & 3 & 3{,}2 & 3{,}9 & 2{,}8 & 2{,}2 \\ 30 & 25 & 20 & 30 & 40 & 25 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3{,}1 & 30 \\ 1 & 3{,}4 & 25 \\ 1 & 3 & 20 \\ 1 & 3{,}2 & 30 \\ 1 & 3{,}9 & 40 \\ 1 & 2{,}8 & 25 \\ 1 & 2{,}2 & 30 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7 & 21{,}6 & 200 \\ 21{,}6 & 68{,}3 & 626 \\ 200 & 626 & 5.950 \end{bmatrix}$

• $(X^TY) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3{,}1 & 3{,}4 & 3 & 3{,}2 & 3{,}9 & 2{,}8 & 2{,}2 \\ 30 & 25 & 20 & 30 & 40 & 25 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}2 \\ 3 \\ 2{,}9 \\ 4 \\ 2{,}5 \\ 2{,}3 \end{bmatrix}$

3x7 7x1

$= \begin{bmatrix} 21{,}4 \\ 67{,}67 \\ 623{,}5 \end{bmatrix}$

• $\beta = (X^TX)^{-1} \cdot (X^TY)$

$= \begin{bmatrix} 7 & 21{,}6 & 200 \\ 21{,}6 & 68{,}3 & 626 \\ 200 & 626 & \cancel{5.960}\ 5.950 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 21{,}4 \\ 67{,}67 \\ 623{,}5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6{,}68309535 & -1{,}52924919 & -6{,}37494242.e^{-2} \\ -1{,}52924919 & 7{,}60018425.e^{-1} & -2{,}85582681.e^{-2} \\ -6{,}37494242e^{-2} & -2{,}85582681.e^{-2} & -5{,}31552280.e^{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21{,}4 \\ 67{,}67 \\ 623{,}5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -0{,}21381852 \\ 0{,}8984359 \\ 0{,}01745279 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \beta_0 \\ \to \beta_1 \\ \to \beta_2 \end{matrix}$

a. Tentukan persamaan regresi multiple!

$\beta = \begin{bmatrix} -0{,}21381852 \\ 0{,}8984339 \\ 0{,}01745279 \end{bmatrix}$, dari hasil β didapatkan persamaan regresi linear multiple: $Y = -0{,}2138 + 0{,}898X_1 + 0{,}0174X_2$

b. Ujilah keberartian koefisien regresi (signifikansi)

– Menggunakan Uji F

i) Pasangan Hipotesis

$H_0 : \beta_j = 0$ (Variabel dependen tidak mempunyai hub. linear dgn variabel independen, artinya koefisien regresi tidak berarti)

H_1 : minimal $\beta_j \neq 0$ (Var. dependen mempunyai hub. linear dgn var independen, artinya koef. regresi berarti)

ii) Taraf Signifikansi (nyata)

$\alpha = 5\% = 0{,}05$

Date:

iii> Statistik Uji

a. Perhitungan ANOVA

• JK Regresi $\beta_1, \beta_2 = \beta^T (X_i^T Y_i) - \frac{(\Sigma Y_i)^2}{n}$

$= [-0{,}2138 \quad 0{,}898 \ldots \quad 0{,}017..] \times \begin{bmatrix} 21{,}4 \\ 67{,}67 \\ 623{,}5 \end{bmatrix} - \frac{(21{,}4)^2}{7}$

$= [-0{,}2138 \quad 0{,}898 \quad 0{,}017] \times \begin{bmatrix} 21{,}4 \\ 67{,}67 \\ 623{,}5 \end{bmatrix} - \frac{(457{,}95)}{7}$

$= 1{,}6802612357703879$

• RJK Regresi $\beta_1, \beta_2 = \frac{\text{JK Regresi}}{k} = \frac{1{,}680..}{2} = 0{,}8401306178851939$

• JK Kekeliruan $= (Y^T Y) - \beta^T (X^T Y)$

$= 67{,}44 - 67{,}10311837862754$

$= 0{,}33688162137 24557$

• RJK Kekeliruan $= \frac{\text{JK Kekeliruan}}{n-k-1}$

$= \frac{0{,}3368..}{7-2-1}$

$= 0{,}08422040534311392$

• JK Total $= (Y^T Y) - \frac{(\Sigma Y)^2}{n}$

$= 67{,}44 - 65{,}42285714$

$= 2{,}017142857$

F hitung $= \frac{\text{RJK Regresi } \beta_1, \beta_2}{\text{RJK Kekeliruan}} = \frac{0{,}8401..}{0{,}084..} = 9{,}975$

No.

Date:

Ftabel $= F_{\alpha; k; n-k-1}$

$= F_{0{,}05; 2; 4}$

$= 6{,}94$

iv> Kriteria Uji

F hitung > F tabel, tolak Ho & H1 diterima.

v> Kesimpulan

Dengan taraf nyata 5%, pengujian signifikansi (keberartian) keseluruhan model regresi menunjukkan hasil bahwa var. dependen (Y) memiliki hubungan linear dgn var. independen (X_1, X_2) maka koefisien regresi berarti / signifikan.

e. Apakah koefisien regresi memiliki arti (t tabel = 2,015)?

— Menggunakan uji T

i> Pasangan Hipotesis

$H_0 : \beta_1 = 0 \qquad H_0 : \beta_2 = 0$

$H_1 : \beta_1 \neq 0 \qquad H_1 : \beta_2 \neq 0$

ii> Taraf Nyata

$\alpha = 5\% = 0{,}05$

iii> Statistik Uji

T hitung → $t_1 = \frac{\beta_j}{\sqrt{C_{(j+1),(j+1)}}} = \frac{\beta_1}{\sqrt{C_{(2,2)}}} = \frac{0{,}898}{\sqrt{0{,}76601}} = 3{,}55112$

→ $t_2 = \frac{\beta_2}{\sqrt{C_{(3,3)}}} = \frac{0{,}017}{\sqrt{0{,}05315}} = 0{,}8248$

• Ttabel $= \alpha ; n-k-1$

$= 0{,}05 ; 4$

$= 2{,}132$

iv) Kriteria Uji

Thitung berbanding Ttabel

$t_1 = 3{,}5112 > T_{tabel} = 2{,}132 \rightarrow$ Ho ditolak

$t_2 = 0{,}8248 < T_{tabel} = 2{,}132$

$t_1 = 3{,}55112$; $-2{,}132 < 3{,}55112 > 2{,}132$; Ho ditolak

$t_2 = 0{,}8248$; $-2{,}132 \nless 0{,}8248 < 2{,}132$; Ho diterima

v) Kesimpulan

Koefisien regresi untuk $t_2 = \beta_2 = X_2$ tidak mempunyai arti sehingga model regresinya menjadi :

$\hat{Y} = -0{,}2138 + 0{,}8984 X_1$