

Домашнее задание №2

по курсу «Прикладная математика. Искусство и ремесло вычислений».

Профессор НИУ ВШЭ В.А.Гордин

Разослано 5 октября. На полный балл до 15 октября 23.59. На половинный – на неделю позже.

Выполненное задание посылать на адрес shadrin.dmitry2010@yandex.ru (с указанием автора работы) в обоих форматах WORD и PDF.

Не забудьте указать свою фамилию, группу m и номер k в списке группы.

Задача 2.1. Рассмотрите многочлен из ДЗ1.3. Постройте изолинии модуля и аргумента функции $Q(z)=1/P(z)$ на комплексной плоскости. Область нужно выбрать самостоятельно так, чтобы все характерные особенности функции Q были из рисунка понятны. Рисунок снабдить подробным комментарием.

Задача 2.2. На комплексной плоскости $z=x+iy$ рассмотрим прямую $y=(-1)^m kx$, где m – номер группы, k – Ваш номер в группе. Построить образ этой кривой при отображении Жуковского: $z \mapsto w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$. Определить точки (и показать их на картинке), в которых достигается локальный минимум $|w|$.

Задача 2.3. Рассмотрим на комплексной плоскости кривую γ , заданную уравнением: $y = \operatorname{Im}(z) = x^2 = [\operatorname{Re}(z)]^2, x \in [0,1]$. Вычислить интеграл $\int_{\gamma} P(z) dz$ по этой параболе. Для вычисления использовать простейшую квадратурную формулу: аппроксимируйте кривую ломаной из N отрезков. Пусть z_j – его вершины. Вычислите сумму $\sum_{j=1}^N P(z_j) [z_{j+1} - z_j]$.

Оцените, как меняется ответ с ростом числа N ? Постройте график зависимости оценки интеграла от N . Сравните точность с квадратурной формулой $\sum_{j=1}^N [P(z_{j+1}) + P(z_j)] [z_{j+1} - z_j] / 2$. Вычислите интеграл от той же функции, но по отрезку, соединяющем начало координат с точкой $1+i$. Сравните значения этих интегралов. Все вычисления снабжать подробным комментарием: что, зачем и как делаем.

Задача 2.4. Рассмотрим рациональную функцию $f(z) = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{1}{z}$. Вычислить интеграл $\oint f(z) dz$ по окружностям радиуса 0.1, 1, 10. Для вычисления использовать простейшую квадратурную формулу: аппроксимируйте окружность вписанным N -угольником. Пусть z_j – его вершины. Вычислите сумму $\sum_{j=1}^N f(z_j) [z_{j+1} - z_j]$, $z_{N+1} \equiv z_1$. Оцените, как меняется ответ с ростом числа N ? Константы: $a=2/k, b=2m, A=m, B=1$.