TEC | Tecnológico de Costa Rica

Área Académica de Ingeniería en Computadores

Análisis Numérico para Ingeniería – CE-3102

Tarea #2

Resumen

Estudiantes:

Yordi Brenes Roda

Gabriel Antonio Conejo Valerio

Ricardo Gatgens Rodríguez

Ignacio Morales Chang

Profesor:

Juan Pablo Soto Quirós

IS – 2022

Problema a resolver

Lo que se busca es aproximar un x de un sistema de ecuaciones no lineales que puede ser representado como $f(x) = 0$ donde $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ donde $f(x) = 0$ no representa un sistema de ecuaciones lineales y cada función es definida, continua y cuyas primeras derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existen en $c = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n\ para\ i, j = 1, \dots, n$.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Formulación matemática del método

Dado un valor inicial $x^{(0)}$, se tiene en general que $f\left(x^{(0)}\right) \neq 0$, por lo que es busca un $\Delta x^{(0)}$ tal que $f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) = 0$. Utilizando la serie de Taylor, esto se puede aproximar como:

$$f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) \approx f(x^{(0)}) + J^{(0)} \Delta x^{(0)}$$

Donde J es el Jacobiano $n \times n$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Entonces, como se busca que $f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) = 0$:

$$\Delta x^{(0)} \approx -[J^{(0)}]^{-1} f(x^{(0)})$$

En general, el vector x se actualiza de la siguiente manera:

$$x^{(v+1)} = x^{(v)} - [J^{(v)}]^{-1} f(x^{(v)})$$

Donde v es el contador de iteraciones.

Pseudocódigo

Algorithm 1 Solucion de Sistemas de Ecuaciones No Lineales Método de Newton-Raphson

Input: $F : \mathbf{R}^n \rightarrow R$, **x: variables del sistema,** $\mathbf{x}^{(0)} \in R^n, tol > 0, iterMax > 0$

Output: $x^{(k+1)} \in R^n, error > 0, k \in N$

procedure NEWTON RAPHSON($F, x, x^{(0)}, tol, iterMax$)

  $x^k = x^{(0)}$

  while $k < iterMax$ **do**

    $x^{(k+1)} = x^{(k)} - [J^{(k)}]^{-1} f(x^{(k)})$

    if $||f(x^{(k)})|| \leq tol$ **then**

      return $x^{(k+1)}, error, k$

    $k \leftarrow k + 1$