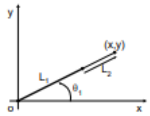
Cinemática direta

Cinemática Direta Robô RP

- Manipulador mecânico com dois graus de liberdade
  - um rotacional
  - um prismático
  - comprimento do elo 1 constante



- Equações da cinemática direta

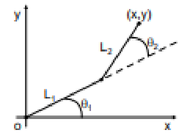
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_1 + L_2)C_1 \\ (L_1 + L_2)S_1 \end{bmatrix}$$

- Equações da cinemática inversa

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan_2\left(\frac{y}{x}\right) \\ \sqrt{x^2 + y^2} - L_1 \end{bmatrix}$$

Cinemática Direta Robô RR

- Manipulador mecânico com dois graus de liberdade rotacionais



- Equações da cinemática direta
- Só existe uma solução (x,y) para cada par de valores (θ_1, θ_2)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1.\cos(\theta_1) + L_2.\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1.\mathrm{sen}(\theta_1) + L_2.\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctan_2\left(\frac{y}{x}\right) - \arctan_2\left(\frac{L_2.\mathrm{sen}(\theta_2)}{L_1 + L_2\cos(\theta_2)}\right) \\ \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2.L_1.L_2}\right) \end{bmatrix}$$

Interpolação cúbica:

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$\dot\theta(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

$$\ddot\theta(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$

Coeficientes:

$$a_0 = \theta_0 \qquad a_1 = \dot\theta_0$$

$$a_2 = \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot\theta_0 - \frac{1}{t_f}\dot\theta_f$$

$$a_3 = -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f^2}(\dot\theta_f + \dot\theta_0)$$

Interpolacao 5 ordem

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5,$$

$$\theta_0 = a_0,$$

$$\theta_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5,$$

$$\dot\theta_0 = a_1,$$

$$\dot\theta_f = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4,$$

$$\ddot\theta_0 = 2a_2,$$

$$\ddot\theta_f = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3.$$

$$a_0 = \theta_0, \qquad a_1 = \dot\theta_0, \qquad a_2 = \frac{\ddot\theta_0}{2},$$

$$a_3 = \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot\theta_f + 12\dot\theta_0)t_f - (3\ddot\theta_0 - \ddot\theta_f)t_f^2}{2t_f^3},$$

$$a_4 = \frac{30\theta_0 - 30\theta_f + (14\dot\theta_f + 16\dot\theta_0)t_f + (3\ddot\theta_0 - 2\ddot\theta_f)t_f^2}{2t_f^4},$$

$$a_5 = \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot\theta_f + 6\dot\theta_0)t_f - (\ddot\theta_0 - \ddot\theta_f)t_f^2}{2t_f^5}.$$

Denavit-Hartenberg:

Eixos:

z_i : normalmente colocado na junta ou na direção no movimento linear.

o_i : origem é colocada onde a normal comuns aos eixos z_i e z_{i-1} interseta z_i.

x_i : ou fica na direção da normal comum aos eixos z_i e z_{i-1} ou na direção normal ao plano z_{i-1} - z_i (no caso de estes se intercetarem)

y_i : completa-se pela regra da mão direita

Contruir a tabela de

i	r_i	d_i	α_i	θ_i
1				
2				
n				

$$T_2^0 = A_1 \times A_2$$

$$T_n^0 = \prod_1^n A_n$$

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n\cos\alpha_n & \sin\theta_n\sin\alpha_n & r_n\cos\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n\cos\alpha_n & -\cos\theta_n\sin\alpha_n & r_n\sin\theta_n \\ 0 & \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

r_i - distância (ao longo de xi) desde a interseção do eixo xi com z_i-1 até ao centro o_i

d_i - distância (ao longo de z_{i-1}) desde o centro o_{i-1} até à interseção do eixo x_i com z_{i-1}

α_i - angulo de z_{i-1} para zi medido em torno de x_i

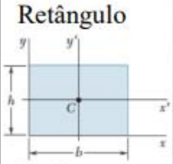
θ_i - angulo de x_{i-1} para x_i medido em torno de z_{i-1}

Se a junta i for prismática d_i é variável *

Se a junta i for rotacional θ_i é variável *

Inércia 2D

Retângulo



$\bar I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$

$\bar I_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$

$I_x = \frac{1}{3}bh^3$

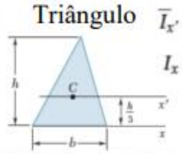
$I_y = \frac{1}{3}b^3h$

$J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$

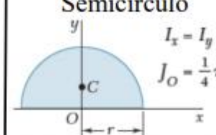
Triângulo

$\bar I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$

$I_x = \frac{1}{12}bh^3$



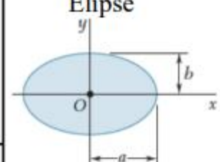
Semicírculo



$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$

$J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$

Elipse

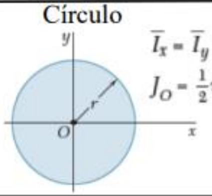


$\bar I_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$

$\bar I_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$

$J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

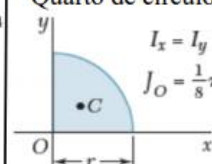
Círculo



$\bar I_x = \bar I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$

$J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$

Quarto de círculo

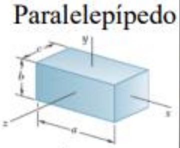


$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$

$J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$

Inércia 3D

Paralelepípedo

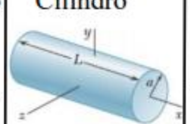


$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$

$I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$

$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

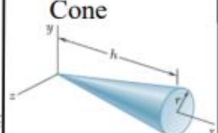
Cilindro



$I_x = \frac{1}{2}ma^2$

$I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$

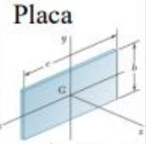
Cone



$I_x = \frac{3}{10}ma^2$

$I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$

Placa

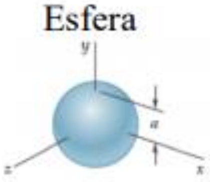


$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$

$I_y = \frac{1}{12}mc^2$

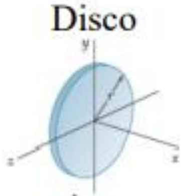
$I_z = \frac{1}{12}mb^2$

Esfera



$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$

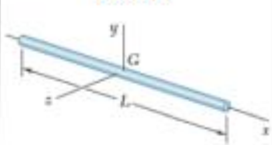
Disco



$I_x = \frac{1}{2}mr^2$

$I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$

Tubo



$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$

Volumes

Paralelepípedo: $V = c \times h \times l$

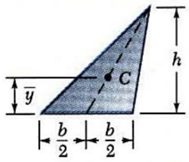
Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Cone: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$

Cilindro $V = \pi r^2 \times h$

Pirâmide: $V = \frac{1}{3}Ab \times h$

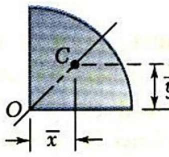
Centroides 2D



Triângulo

$\bar{y} = \frac{h}{3}$

$Area = \frac{bh}{2}$

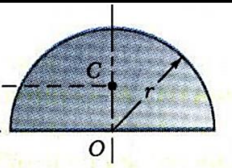


1/4 Circulo

$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$

$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

$Area = \frac{\pi r2}{4}$



1/2 Circulo

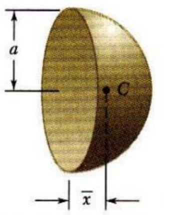
$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

$Area = \frac{\pi r2}{2}$

Centroides 3D

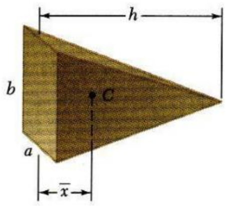
Semiesfera



Centroide | Volume

$\frac{3a}{8}$ | $\frac{2}{3}\pi a^3$

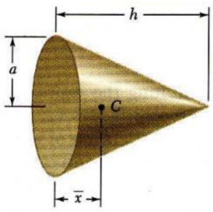
Pirâmide



Centroide | Volume

$\frac{h}{4}$ | $\frac{1}{3}abh$

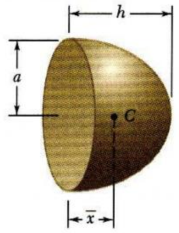
Cone



Centroide | Volume

$\frac{h}{4}$ | $\frac{1}{3}\pi a^2 h$

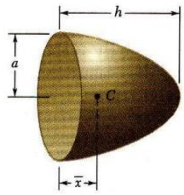
Semielipsoide



Centroide | Volume

$\frac{3h}{8}$ | $\frac{2}{3}\pi a^2 h$

Paraboloide



Centroide | Volume

$\frac{h}{3}$ | $\frac{1}{2}\pi a^2 h$

Centroide qualquer triângulo

$$C = \left(\frac{1}{3}(X_L + X_M + X_N)\,,\frac{1}{3}(Y_L + Y_M + Y_N)\right)$$

X_{LMN}: coordenadas dos vértices em X

Y_{LMN}: coordenadas dos vértices em Y

Teorema dos eixos paralelos

I **:** Inércia relativamente a um eixo A

$\bar{I}$ **:** Inércia relativamente a um eixo B

A : Área da forma (2D) / Massa (3D)

d : distância entre os eixos A e B

$$I = \bar{I} + Ad^2$$

Cálculo do momento de inércia de uma peça em relação a um eixo

1. Dividir a peça em partes.
2. Calcular o volume **V** das peças.
3. Calcular a massa **m** das peças.
4. Calcular as inércias $\mathbf{I_C}$ em relação ao centroide.
5. Calcular a distância **d** do centroide ao eixo pedido.
6. Calcular a inércia **I** das peças em relação ao eixo pedido.
7. Calcular a inércia total $\mathbf{I_T}$ somando as inércias de cada peça

(Inércias podem ser negativas se forem furos)

Cálculo do centro de gravidade de uma peça

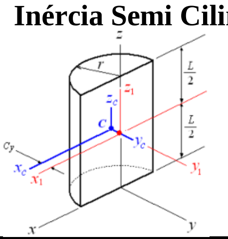
1. Dividir a peça em diferentes partes.
2. Calcular o volume de cada uma das peças.
3. Obter os centros de gravidade das peças.
4. Preencher a seguinte tabela:

Peça	V_i	x_i	y_i	z_i	$x_i V_i$	$y_i V_i$	$z_i V_i$
P_1							
P_2							
…							
P_i							
$\sum$	$\sum Vi$				$\sum XiVi$	$\sum YiVi$	$\sum ZiVi$

5. Calcular o centro de gravidade da peça:

$$X_G = \frac{\sum XiVi}{\sum Vi} \qquad Y_G = \frac{\sum YiVi}{\sum Vi} \qquad Z_G = \frac{\sum ZiVi}{\sum Vi}$$

Inércia Semi Cilindro em relação ao centroide



$$I_{XC} = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}mL^2$$

$$I_{YC} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mL^2$$

$$I_{XC} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$$