26/3/2018

8 ★★★

Un razzo viaggia a velocità $v = 0,60\ c$ e passa accanto a una stazione spaziale nella quale un dispositivo rileva il suo passaggio. Appena la coda passa davanti al dispositivo, questo emette un lampo di luce. La lunghezza del razzo, nel sistema di riferimento a esso solidale, è $L = 150$ m.

- Dopo quanto tempo la luce raggiunge la prua del razzo, nel sistema di riferimento solidale con il razzo?
- Dopo quanto tempo la luce raggiunge la prua del razzo, nel sistema di riferimento solidale con la stazione spaziale?
- A che distanza dalla stazione il raggio luminoso raggiunge la prua del razzo, nel sistema di riferimento solidale con la stazione spaziale?

[$5,0 \times 10^{-7}$ s; $1,0 \times 10^{-6}$ s; $3,0 \times 10^{2}$ m]

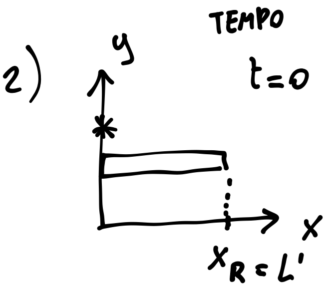
$v = 0,60\ c$

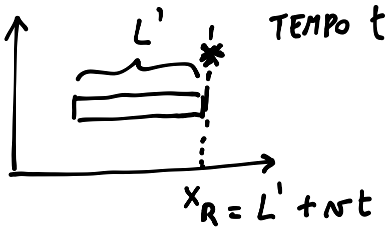
$L = 150\ m$

1) Nel sistema del razzo la luce viaggia a velocità c.
Il tempo è quello impiegato dalla luce per percorrere la lunghezza L

$$\Delta t = \frac{L}{c} = \frac{150\ m}{3,0 \times 10^8\ m/s} = 50 \times 10^{-8}\ s = \boxed{5,0 \times 10^{-7}\ s}$$

2)





$L' = \frac{L}{\gamma}$ lunghezza contratta

anche in questo riferimento la luce viaggia a velocità c

$$x_{LUCE} = ct$$

$$\begin{cases} x_R = L' + vt & \text{(legge di moto della prua)} \\ x_{LUCE} = ct & \text{(legge di moto della luce)} \end{cases} \Rightarrow L' + vt = ct \quad \text{e trovo } t$$

$$\Downarrow$$

$$ct - vt = \frac{L}{\gamma}$$

$$ct(1 - 0,60) = \frac{L}{\gamma}$$

$\beta = 0,60$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0,60^2}}$$

$$ct(1-0{,}60)=\frac{L}{\gamma}$$

$$t=\frac{L}{c\cdot 0{,}40\cdot \gamma}=$$

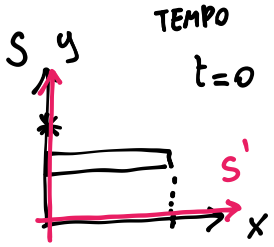
$$=\frac{150\,\cancel{m}\,\sqrt{1-0{,}60^2}}{3{,}0\times10^{8}\,\frac{\cancel{m}}{s}\cdot 0{,}40}=$$

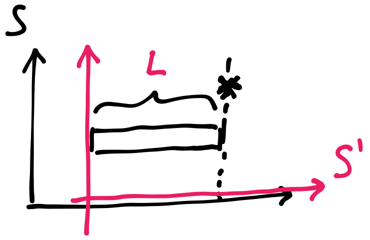
$$=100\times10^{-8}\,s=\boxed{1{,}0\times10^{-6}\,s}$$

CON LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

TEMPO

$t=0$





$v=0{,}60\,c$

$L=150\,m$

$t=0 \qquad x=L'$

$t'=0 \qquad x'=L$

$t'=5{,}0\times10^{-7} \qquad x'=L$

TRASFORMAZIONI INVERSE

(DIMOSTRAZ. ALLA FINE)

$$\begin{cases} x=\gamma\left(x'+v t'\right) \\ t=\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

$$t=\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}60^2}}\left(5{,}0\times10^{-7}+\frac{0{,}60}{\cancel{3{,}0}\times10^{8}}\cdot\overset{50}{\cancel{150}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}60^2}}\left(5{,}0+0{,}60\cdot5{,}0\right)\times10^{-7}=$$

$$=\frac{5{,}0\times1{,}60}{\sqrt{1-0{,}60^2}}\times10^{-7}\,s=10\times10^{-7}=$$

$$=\boxed{1{,}0\times10^{-6}\,s}$$

3)

POSIZIONE NEL SISTEMA DI RIF. S

$$x_R = L' + vt = \frac{L}{\gamma} + vt$$

$$= (150\ m)\sqrt{1-0{,}60^2} + 0{,}60 \times \left(3{,}0 \times 10^8\ \frac{m}{s}\right)\left(1{,}0 \times 10^{-6}\ s\right)$$

$$= 120\ m + 180\ m =$$

$$= 300\ m = \boxed{3{,}0 \times 10^2\ m}$$

DIMOSTRAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ INVERSE

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - v t) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \gamma(x' + v t') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c} x'\right) \end{cases}$$

se S' si muove con velocità v rispetto a S, allora S si muove con vel. $-v$ rispetto a S' $\Rightarrow$ cambio v con $-v$

Ma si può dimostrare anche algebricamente:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma x - \gamma v t \rightarrow \gamma x = x' + \gamma v t \\ t' = \gamma t - \frac{\gamma\beta}{c} x = \gamma t - \frac{\beta}{c}(x' + \gamma v t) = \end{cases}$$

$$= \gamma t - \frac{\beta}{c} x' - \beta^2 \gamma t =$$

$$= \gamma t \underbrace{(1-\beta^2)}_{\frac{1}{\gamma^2}} - \frac{\beta}{c} x' =$$

$$= \frac{t}{\gamma} - \frac{\beta}{c} x' \Rightarrow \frac{t}{\gamma} = t' + \frac{\beta}{c} x'$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c} x'\right)$$

$$\gamma x = x' + \gamma^2 v \left(t' + \frac{\beta}{c} x'\right) =$$

$$= x' + \gamma^2 v t' + \gamma^2 \beta^2 x' =$$

$$= \gamma^2 \left(\frac{x'}{\gamma^2} + v t' + \beta^2 x'\right) =$$

$$= \gamma^2 \left(x' \left(\underbrace{\frac{1}{\gamma^2}}_{1-\beta^2} + \beta^2\right) + v t'\right) =$$

$$= \gamma^2 (x' + v t')$$

$$\Downarrow$$

$$x = \gamma(x' + v t')$$