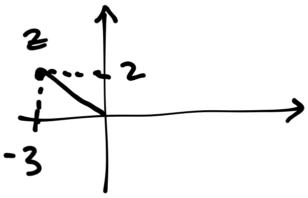
25/1/2019

Trasformare il numero $z = -3 + 2i$ in forma esponenziale



$$|z| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\vartheta = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi$$

$$z = \sqrt{13}\, e^{i\left[\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)+\pi\right]}$$

Come possiamo trovare il reciproco $z^{-1} = \dfrac{1}{-3+2i}$?

Usiamo le proprietà delle potenze:

$$z^{-1} = \left(\sqrt{13}\, e^{i\left[\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)+\pi\right]}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{13}}\, e^{-i\left[\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)+\pi\right]} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}\, e^{i\left[-\arctan\left(-\frac{2}{3}\right)-\pi\right]} = \frac{1}{\sqrt{13}}\, e^{i\overbrace{\left[\arctan\left(\frac{2}{3}\right)-\pi\right]}^{\vartheta}}$$

$\arctan(-x) = -\arctan x$ [per dimostrarlo basta applicare tan ad entrambi i membri]

In alternativa:

$$z^{-1} = \frac{1}{-3+2i} \cdot \frac{-3-2i}{-3-2i} = \frac{-3-2i}{9+4} = -\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$

Sono lo stesso numero? Sì. Trasformiamo $-\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ in forma esponenziale per vederlo:

$$\rho = |z^{-1}| = \sqrt{\frac{9}{13^2} + \frac{4}{13^2}} = \sqrt{\frac{13}{13^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\bar{\vartheta} = \arctan\frac{-\frac{2}{13}}{-\frac{3}{13}} + \pi = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) + \pi \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{\sqrt{13}}\, e^{i\left[\arctan\frac{2}{3}+\pi\right]}$$

quindi sono lo stesso numero perché $\bar{\vartheta} - \vartheta = 2\pi$.