13/1/2021 PUNTI DI MASSIMO E MINIMO RELATIVI

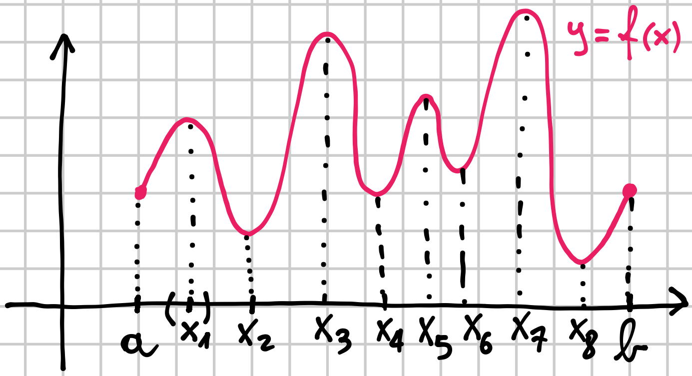
6.1. Definizione. *Siano A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$, $f: A \to \mathbf{R}$ una funzione e x_0 un punto di A. Diciamo che x_0 è un punto di massimo relativo, o di massimo locale, per f quando esiste un intorno J di x_0 tale che*

$$f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in J \cap A. \tag{6.1}$$

Diciamo che x_0 è un punto di minimo relativo, o di minimo locale, per f quando esiste un intorno J di x_0 tale che

$$f(x) \ge f(x_0) \quad \forall x \in J \cap A. \tag{6.2}$$

Diciamo che x_0 è un punto di estremo relativo, o di estremo locale, per f quando x_0 è un punto di massimo relativo oppure di minimo relativo per f.
Diciamo infine che un punto di massimo o di minimo è un punto di massimo stretto o di minimo stretto quando nella (6.1) o, rispettivamente, nella (6.2) vale la disuguaglianza stretta per $x \ne x_0$. □



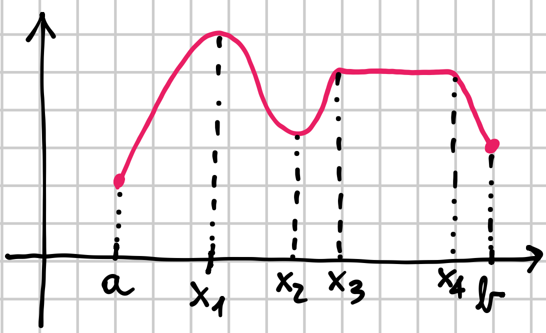
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$

x_1, x_3, x_5, x_7, b PUNTI DI MASSIMO RELATIVO

a, x_2, x_4, x_6, x_8 PUNTI DI MINIMO RELATIVO

x_7 = punto di MASSIMO ASSOLUTO

x_8 = punto di MINIMO ASSOLUTO



x_1 = punto di max relativo STRETTO

a, b, x_2 = punti di min relativo STRETTO

Tutti i punti dell'intervallo $]x_3, x_4[$ sono punti di max e min relativi (NON stretti)

Tutti i punti dell'intervallo $[x_3, x_4]$, dove la funzione è costante, sono tutti punti max relativo, ma NON stretto.

TEOREMA

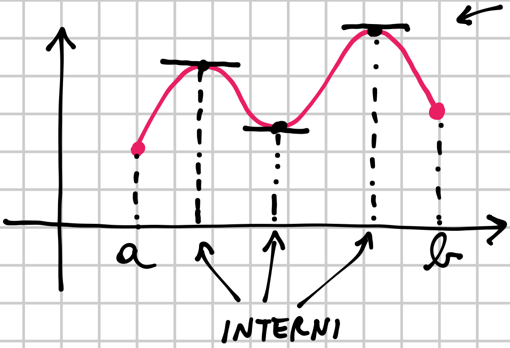
$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo $\quad x_0 \in I$ INTERNO

x_0 punto di max o min relativo

f derivabile in x_0

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$

tangente orizzontale (derivata nulla)



a, b sono due minimi, ma la derivata non si annulla (a, b estremi del dominio)

DIMOSTRAZIONE

Sia x_0 p.to di massimo interno (analogamente per il minimo)

$\forall h > 0$ tale che $x_0 + h \in$ intorno opportuno, si ha $f(x_0+h) \leq f(x_0)$

quindi $\quad f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$

$\underset{\text{passo al } \lim_{h \to 0^+}}{\Rightarrow} \quad f'_+(x_0) \leq 0$ per il TH. CONFRONTO

$\forall h < 0$ tale che $x_0 + h \in$ intorno opportuno, si ha $f(x_0+h) \leq f(x_0)$

quindi $\quad f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$

$\underset{\text{passo al } \lim_{h \to 0^-}}{\Rightarrow} \quad f'_-(x_0) \geq 0$ sempre per il TH. CONFRONTO

Siccome f è derivabile in x_0, si ha $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$ C.V.D.

TEOREMI DEL VALOR MEDIO

IPOTESI SULLE FUNZIONI IN GIOCO

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f \text{ DERIVABILE IN }]a,b[\\ f \text{ CONTINUA IN } [a,b] \end{array}\right\} (*)$$

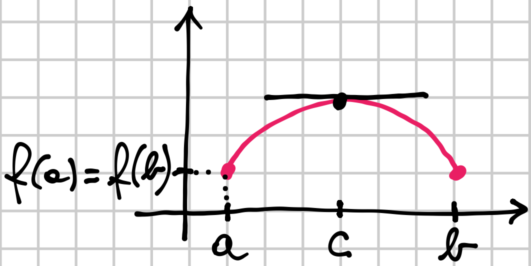
TEOREMA DI ROLLE

IPOTESI (*) per f

$f(a) = f(b)$

$\Longrightarrow \exists\, c \in]a,b[\;:\; f'(c) = 0$

(c INTERNO)

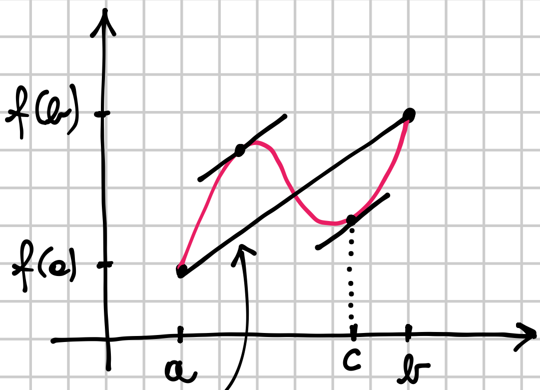


TEOREMA DI LAGRANGE

IPOTESI (*) per $f \Longrightarrow \exists\, c \in]a,b[\;:\; \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

(c INTERNO)

coeff. angolare è $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



TEOREMA DI CAUCHY

IPOTESI (*) per f

IPOTESI (*) per g, $g'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in]a,b[$

$\Longrightarrow \exists\, c \in]a,b[\;:\; \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

DIMOSTRAZIONI

$$\begin{tikzcd} R \arrow[dr, Rightarrow, "\boxed{3}"'] & & L \arrow[ll, Rightarrow, "\boxed{2}"'] \\ & C \arrow[ur, Rightarrow, "\boxed{1}"'] & \end{tikzcd}$$

$\boxed{1}$ Considero $g(x) = x$, prendo c dato dal TH. DI CAUCHY e trovo il TH. DI LAGRANGE

$\boxed{2}$ OVVIO

$\boxed{3}$ Considero $h(x) = \alpha f(x) - \beta g(x)$

con $\alpha = g(b) - g(a)$ e $\beta = f(b) - f(a)$

Si ha che $h(a) = h(b)$. Applico il TH. DI ROLLE e trovo il TH. DI CAUCHY

DIMOSTRIAMO IL TEOREMA PIÚ SEMPLICE: IL TEOREMA DI ROLLE

Distinguiamo 2 casi:

1° CASO) f costante in $[a,b] \Rightarrow f'$ è nulla ovunque

2° CASO) f NON costante in $[a,b]$

Applico il TH. WEIERSTRASS $\Rightarrow$ f ha x_1 punto di max e x_2 punto di min (assoluti) in $[a,b]$

Dico che almeno uno fra x_1 e x_2 è INTERNO ad $[a,b]$, cioè x_1 e x_2 non possono essere entrambi estremi dell'intervallo

$$\{x_1, x_2\} \neq \{a, b\}$$

perché se fossero entrambi estremi (ad es. $x_1 = a$ e $x_2 = b$), dato che per ipotesi $f(a) = f(b)$ sarebbe $f(x_1) = f(x_2)$, cioè $\min f = \max f$, dunque f sarebbe costante.

Prendo c uguale a uno di questi x_1 o x_2 che sia interno, cioè $c \in \,]a,b[$. Applico il teorema precedente e trovo che

$$f'(c) = 0$$

CVD

TEOREMA DELLA DERIVATA NULLA

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in I, I intervallo

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è costante

DIMOSTRAZIONE

Siano $x_1, x_2 \in I$. Applico il TH. DI LAGRANGE all'int. $[x_1, x_2]$. Trovo $f(x_1) = f(x_2)$