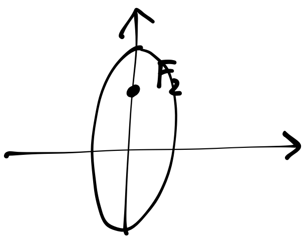
26/4/2018

191 Determina l'equazione dell'ellisse che ha un fuoco in $(0; 2\sqrt{2})$ e passa per $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}; 2\right)$.

$$\left[x^2 + \frac{y^2}{9} = 1\right]$$

$F_2(0, 2\sqrt{2})$ $\qquad c = 2\sqrt{2}$ $\qquad P\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, 2\right)$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

FUOCHI SU ASSE y

$\Downarrow$

$a^2 = b^2 - c^2$

PASSAGGIO PER P $\rightsquigarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}{a^2} + \dfrac{2^2}{b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 - (2\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5}{9a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 - 8 \end{cases}$$

$$\frac{5}{9(b^2-8)} + \frac{4}{b^2} = 1$$

$$5b^2 + 36(b^2-8) = 9b^2(b^2-8)$$

$\beta = b^2$

$$5\beta + 36\beta - 288 = 9\beta^2 - 72\beta$$

$$9\beta^2 - 113\beta + 288 = 0$$

$$\overset{b^2}{\overset{\shortparallel}{\beta}} = \frac{113 \pm \sqrt{113^2 - 36 \cdot 288}}{18} = \frac{113 \pm 49}{18} = \begin{cases} \dfrac{64}{18} \xrightarrow{\text{N.A.}} a^2 = \dfrac{64}{18} - 8 < 0 \\ \dfrac{162}{18} = 9 \rightarrow a^2 = 9 - 8 = 1 \end{cases}$$

$a^2 = b^2 - 8$

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 9 \end{cases}$$

$$\boxed{x^2 + \frac{y^2}{9} = 1}$$

203 Trova l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y, di eccentricità $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$, sapendo che passa per $(1; -\sqrt{3})$.

$\left[\frac{x^2}{3} + \frac{2y^2}{9} = 1\right]$

$$a^2 = b^2 - c^2 \qquad e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad P(1, -\sqrt{3})$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{3} b$$

$$c^2 = \frac{1}{3} b^2$$

$$a^2 = b^2 - \frac{1}{3} b^2 = \frac{2}{3} b^2$$

$$P \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \\ a^2 = \frac{2}{3} b^2 \end{cases} \rightsquigarrow \frac{3}{2b^2} + \frac{3}{b^2} = 1$$

$$\frac{3+6}{\cancel{2b^2}} = \frac{2b^2}{\cancel{2b^2}} \qquad b^2 = \frac{9}{2}$$

$$a^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} = 3$$

$$\boxed{\frac{x^2}{3} + \frac{2y^2}{9} = 1}$$

205 ●●
Determina l'equazione dell'ellisse che nel suo punto di coordinate $(1; \sqrt{2})$ ha per tangente la retta di equazione $y = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$.

$[2x^2 + y^2 = 4]$

1° CONDIZIONE $\Rightarrow$ $P(1, \sqrt{2}) \in$ ELLISSE

2° CONDIZIONE $\Rightarrow$ TANGENZA

anziché $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad Kx^2 + ty^2 = 1$

$K = \frac{1}{a^2} \quad t = \frac{1}{b^2}$

PASS. PER $P \Rightarrow$ $K + 2t = 1$ $\quad K = 1 - 2t$ lo usiamo subito!

TANGENZA $\xrightarrow[\Delta = 0]{}$ $\begin{cases} Kx^2 + ty^2 = 1 \\ \underbrace{y = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}}_{\text{RETTA TANGENTE}} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} (1-2t)x^2 + ty^2 = 1 \\ y = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} \end{cases}$

trovo l'eq. risolvente e impongo $\Delta = 0$

$(1-2t)x^2 + t(-\sqrt{2}x + 2\sqrt{2})^2 - 1 = 0$

$(1-2t)x^2 + t(2x^2 + 8 - 8x) - 1 = 0$

$(1-2t)x^2 + 2tx^2 + 8t - 8tx - 1 = 0$

$x^2 - \cancel{2tx^2} + \cancel{2tx^2} + 8t - 8tx - 1 = 0$

$x^2 - 8tx + 8t - 1 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad \beta = -4t \quad \beta^2 - ac \quad 16t^2 - (8t - 1) = 0 \quad 16t^2 - 8t + 1 = 0$

$(4t - 1)^2 = 0$

$t = \frac{1}{4}$

$K = 1 - 2t = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$kx^2 + ty^2 = 1$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1}$$