

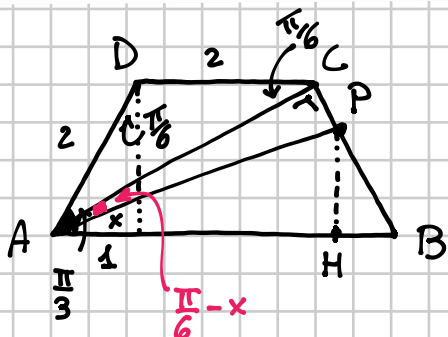
In un trapezio isoscele  $ABCD$  la base minore  $CD$  e i lati obliqui hanno lunghezza 2, gli angoli acuti hanno ampiezza  $\frac{\pi}{3}$ . Sia  $P$  un punto del lato obliquo  $BC$ ,  $H$  la sua proiezione su  $AB$ . Posto  $\widehat{PAB} = x$ :

a. esprimi la funzione  $f(x) = \frac{\overline{PC}}{\overline{PH}}$ ;

b. calcola per quale valore di  $x$  risulta  $\overline{PC} = \overline{PH}$ ;

c. indipendentemente dal problema geometrico studia il dominio e il segno della funzione  $f(x)$ .

[a)  $f(x) = \frac{1}{2}(\cot x - \sqrt{3})$ , con  $0 < x \leq \frac{\pi}{6}$ ; b)  $\frac{\pi}{12}$ ; c)  $x \neq k\pi$ ,  $f(x) \geq 0$  per  $k\pi < x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$ ]



$$0 < x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\overline{PC} = \overline{AC} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2\sqrt{3} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{PH} = \overline{AP} \cdot \sin x \quad \overline{AP} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \overline{AC} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{\overline{AC}}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}$$

$$\Rightarrow \overline{PH} = \overline{AC} \cdot \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}$$

$$a) f(x) = \frac{\overline{PC}}{\overline{PH}} = \frac{2\sqrt{3} \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{2\sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}} = \frac{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}}{\frac{\sin x}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin x}{\sin x} = \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin x}{\sin x} =$$

$$= \frac{1}{2} \cot x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} (\cot x - \sqrt{3}) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} (\cot x - \sqrt{3})$$

$$0 < x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$b) \overline{PC} = \overline{PH} \Rightarrow f(x) = 1$$

$$0 < x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{1}{2} (\cot x - \sqrt{3}) = 1$$

$$\cot x - \sqrt{3} = 2$$

$$\cot x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{12}$$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}(\cot x - \sqrt{3})$

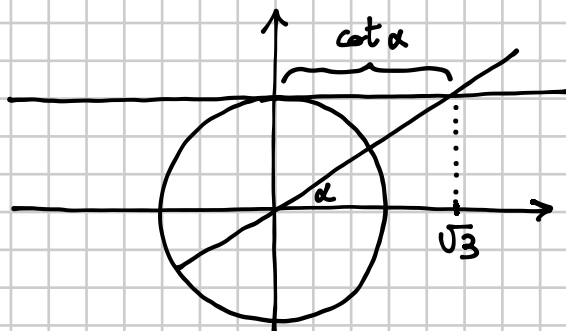
DOMINIO  $D = \{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

(indipendente dal problema geometrico)

la cotangente esiste quando  $\sin x \neq 0$

SEGNO

$$f(x) > 0 \quad \frac{1}{2}(\cot x - \sqrt{3}) > 0 \Rightarrow \cot x - \sqrt{3} > 0 \quad \cot x > \sqrt{3}$$



$$0 < x < \frac{\pi}{6}$$

con la periodicità

$$k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$$

ZERI

$$f(x) = 0 \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi$$