14/3/2019

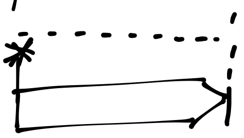
**8** ★★★

Un razzo viaggia a velocità $v = 0{,}60\ c$ e passa accanto a una stazione spaziale nella quale un dispositivo rileva il suo passaggio. Appena la coda passa davanti al dispositivo, questo emette un lampo di luce. La lunghezza del razzo, nel sistema di riferimento a esso solidale, è $L = 150$ m.

- ▶ Dopo quanto tempo la luce raggiunge la prua del razzo, nel sistema di riferimento solidale con il razzo?
- ▶ Dopo quanto tempo la luce raggiunge la prua del razzo, nel sistema di riferimento solidale con la stazione spaziale?
- ▶ A che distanza dalla stazione il raggio luminoso raggiunge la prua del razzo, nel sistema di riferimento solidale con la stazione spaziale?

[$5{,}0 \times 10^{-7}$ s; $1{,}0 \times 10^{-6}$ s; $3{,}0 \times 10^{2}$ m]

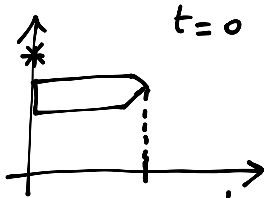
1) Nel S.R. del razzo la luce viaggia a velocità c.
Il tempo impiegato è quello della luce per percorrere la lunghezza L



$L = 150$ m

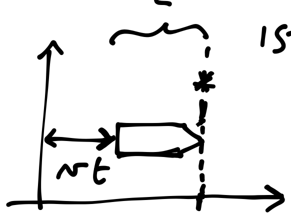
$$\Delta t = \frac{L}{c} = \frac{150\ m}{3{,}0 \times 10^{8}\ m/s} = 50 \times 10^{-8}\ s \simeq \boxed{5{,}0 \times 10^{-7}\ s}$$

2) $t = 0$



$x_L = 0$ $\quad x_R = \frac{L}{\gamma} = L'$ lunghezza contratta

$L'$ ISTANTE t (RICEZIONE)



$vt$

$x_L = x_R = L' + vt$

Anche in questo S.R. la luce viaggia a vel. c e all'istante t ha percorso una lunghezza ct

$$\begin{cases} x_L = ct \\ x_R = \frac{L}{\gamma} + vt \end{cases} \Rightarrow x_L = x_R \qquad ct = \frac{L}{\gamma} + vt$$

POSIZ. LUCE ALL'ISTANTE t

POSIZ. TESTA RAZZO ALL'ISTANTE t

posizione della luce = posizione testa razzo

$$ct = \frac{L}{\gamma} + vt \Rightarrow \quad (c-v)\,t = \frac{L}{\gamma}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}60)^2}} =$$

$$t = \frac{L}{\gamma(c-v)} = \frac{\sqrt{1-0{,}60^2}\;(150\ \text{m})}{0{,}40\cdot\left(3{,}0\times10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)} =$$

$$= 100\times10^{-8}\ \text{s} = \boxed{1{,}0\times10^{-6}\ \text{s}}$$

3) $x_R = L' + vt = \frac{L}{\gamma} + vt =$

POSIZ. NEL S.R. S

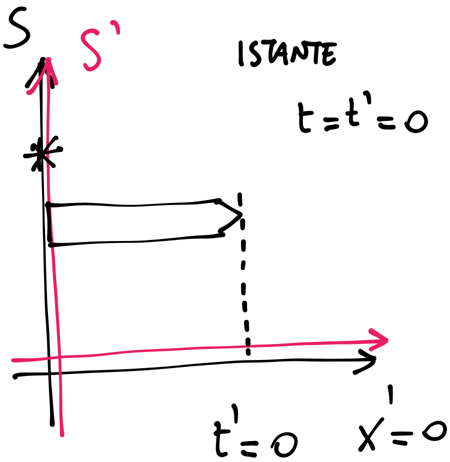
$$= \sqrt{1-0{,}60^2}\;(150\ \text{m}) + 0{,}60\left(3{,}0\times10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(1{,}0\times10^{-6}\ \text{s}\right) =$$

$$= 120\ \text{m} + 180\ \text{m} = 300\ \text{m} = \boxed{3{,}0\times10^{2}\ \text{m}}$$

oppure

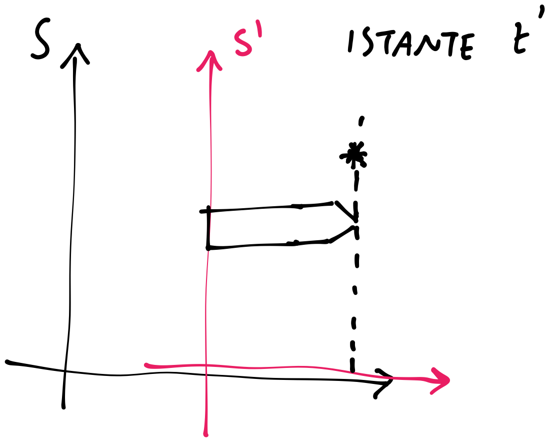
$$x_R = x_L = ct = \left(3{,}0\times10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(1{,}0\times10^{-6}\ \text{s}\right) = \boxed{3{,}0\times10^{2}\ \text{m}}$$

# CON LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ




$t'=0 \quad x'=0$

$t=0 \quad x=0$




$t'=5{,}0\times10^{-7}\,s \quad x'=150\,m$

$t=? \quad x=?$

$v=0{,}60\,c \quad \beta=0{,}60 \quad \gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}60^2}}$

$$\begin{cases} x=\gamma\left(x'+vt'\right) \\ t=\gamma\left(t'+\dfrac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

TRASF. INVERSE

$$x=\frac{150+0{,}60\left(3{,}0\times10^{8}\right)\left(5{,}0\times10^{-7}\right)}{\sqrt{1-0{,}60^2}}\,m$$

$$=300\,m=\boxed{3{,}0\times10^{2}\,m}$$

$$t=\frac{5{,}0\times10^{-7}+\dfrac{0{,}60}{3{,}0\times10^{8}}\,150}{\sqrt{1-0{,}60^2}}\,s=$$

$$=\frac{\left(5{,}0+\dfrac{0{,}60}{\cancel{30}}\cdot\overset{5}{\cancel{150}}\right)\times10^{-7}}{\sqrt{1-0{,}60^2}}\,s=\frac{8{,}0\times10^{-7}}{\sqrt{1-0{,}60^2}}\,s=10\times10^{-7}\,s$$

$$=\boxed{1{,}0\times10^{-6}\,s}$$

# TRASFORMAZIONI DI LORENTZ INVERSE (IN MODO ALGEBRICO)

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x' = \gamma x - v\gamma t$$

$$\gamma x = x' + v\gamma t$$

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt \underset{\text{sostituisco}}{\Rightarrow} \quad t' = \gamma\left[t - \frac{\beta}{c}\left(\frac{x'}{\gamma} + vt\right)\right] =$$

$$= \gamma t - \frac{\beta}{c}x' - \frac{\beta v}{c}\gamma t =$$

$$= \gamma t - \frac{\beta}{c}x' - \beta^2\gamma t$$

$$\gamma t(1 - \beta^2) = t' + \frac{\beta}{c}x'$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\gamma} t \cdot \frac{1}{\gamma^{\cancel{2}}} = t' + \frac{\beta}{c}x'$$

$$\boxed{t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \sqrt{1-\beta^2} &= \frac{1}{\gamma} \\ 1 - \beta^2 &= \frac{1}{\gamma^2} \end{aligned}}$$

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt = \frac{x'}{\gamma} + v\gamma t' + \overset{\beta^2}{\frac{v\beta}{c}}\gamma x' =$$

$$= \gamma x'\left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2\right) + v\gamma t' = \gamma x'\left(1 - \cancel{\beta^2} + \cancel{\beta^2}\right) + v\gamma t' =$$

$$= \gamma x' + v\gamma t' = \boxed{\gamma(x' + vt')}$$

**65** ★★★

Una particella si muove nel verso positivo della direzione $x$ con velocità costante nel sistema del laboratorio $S$. Un contatore per i raggi cosmici rileva il passaggio di una particella nella posizione $x_1 = 80$ cm all'istante $t_1 = 15$ ns. Il sistema di riferimento $S'$ si muove nel verso negativo dell'asse $x$ con velocità $-3c/5$. All'istante $t_0 = 0$ s, le origini dei due sistemi di riferimento $S$ e $S'$ coincidono.

▶ Calcola le coordinate della particella misurate in $S'$.

[4,4 m; $2{,}1 \times 10^{-8}$ s]

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - vt) \\ t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x\right) \end{cases}$$

$$v = -\frac{3}{5}c$$

$$\beta = -\frac{3}{5}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{5}{4}$$

$$x = 80 \times 10^{-2}\, m$$

$$t = 15 \times 10^{-9}\, s$$

$$x' = \frac{5}{4}\left(80 \times 10^{-2} + \frac{3}{5}(3{,}0 \times 10^{8})(15 \times 10^{-9})\right) m =$$

$$= \frac{5}{4}\left(8 + \frac{3}{\cancel{5}} \cdot (3{,}0)(\cancel{15}^{\,3})\right) \times 10^{-1}\, m = 4{,}375\, m \simeq \boxed{4{,}4\, m}$$

$$t' = \frac{5}{4}\left(15 \times 10^{-9} + \frac{3}{\cancel{5} \times 3\cancel{,0} \times 10^{8}} \cancel{80}^{\,16} \times 10^{-2}\right) s =$$

$$= \frac{5}{4}\left(15 \times 10^{-9} + 16 \times 10^{-10}\right) s = \frac{5}{4}(15 + 1{,}6) \times 10^{-9}\, s$$

$$= 20{,}75 \times 10^{-9}\, s \simeq \boxed{2{,}1 \times 10^{-8}\, s}$$

**16** ★★★ I muoni sono particelle elementari instabili che decadono in altre particelle, e hanno tempo di dimezzamento $\tau = 2{,}20\ \mu s$ nel sistema di riferimento in cui sono a riposo. I muoni vengono prodotti in abbondanza nelle regioni superiori dell'atmosfera dalla collisione tra i raggi cosmici (radiazione proveniente dallo spazio) e le molecole d'aria. Un muone è prodotto all'altezza $h = 12$ km dalla superficie terrestre, con velocità $v = 0{,}98\ c$ e diretto verso il suolo. Ad altezza $h' = 10$ km dal suolo è posto un rivelatore di muoni.

- Calcola la distanza percorsa in media dal muone prima di decadere, secondo le leggi della fisica classica.
- Calcola la distanza percorsa in media dal muone prima di decadere, nel sistema di riferimento della Terra, secondo le leggi della relatività ristretta.
- Il muone giunge al rivelatore?

[$6{,}5 \times 10^2$ m; $3{,}3 \times 10^3$ m; sì]

1) DISTANZA MEDIA PRIMA DEL DECADIMENTO (FISICA CLASSICA)

$$d = v \cdot \tau = (0{,}98\ c) \cdot (2{,}20\ \mu s) =$$
$$= 0{,}98 \cdot \left(3{,}0 \times 10^8\ \frac{m}{s}\right)\left(2{,}20 \times 10^{-6}\ s\right) =$$
$$= 6{,}468 \times 10^2\ m = \boxed{6{,}5 \times 10^2\ m}$$

2) $\tau$ = TEMPO PROPRIO (S.R. MUONE)

$$\underbrace{\Delta t'}_{\text{TEMPO DI VITA NEL S.R. TERRA}} = \gamma \tau$$

$$d' = v \cdot \Delta t' =$$
$$= v \gamma \tau =$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}98^2}}$$

$$= \frac{6{,}468 \times 10^2\ m}{\sqrt{1 - 0{,}98^2}} = 32{,}5029... \times 10^2\ m$$

$$\simeq \boxed{3{,}3 \times 10^3\ m}$$ DISTANZA MAGGIORE PERCORSA A CAUSA DELLA DILATAZIONE DEI TEMPI

3) SÌ, perché deve percorrere uno spazio pari a 2 km < d'

**17** ★★★ Considera nuovamente la situazione del problema precedente.

▶ Spiega il risultato relativistico, e in particolare il raggiungimento del rivelatore, mettendoti nel sistema di riferimento solidale con il muone.

Nel S.R. del muone, le lunghezze si contraggono, dunque la distanza dal rivelatore (che va incontro al muone a velocità 0,98c) è

$$d_R = \frac{2\ \text{Km}}{\gamma} = \sqrt{1-0{,}98^2}\,(2\ \text{Km}) = 0{,}3979\ldots \times 10^3\ \text{m} \simeq \boxed{4{,}0 \times 10^2\ \text{m}}$$

Il rivelatore, nel tempo di decadimento $\tau = 2{,}20\ \mu s$, percorre una distanza pari a

$$d = (0{,}98\ c)(2{,}20\ \mu s) = (0{,}98 \times 3{,}0 \times 10^8\ \text{m/s})(2{,}20 \times 10^{-6}\ s) =$$

$$= 6{,}468 \times 10^2\ \text{m} \simeq \boxed{6{,}5 \times 10^2\ \text{m}} < d_R$$

quindi incontra il muone prima che questo decada.