TEOREMA DELLA MEDIA

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

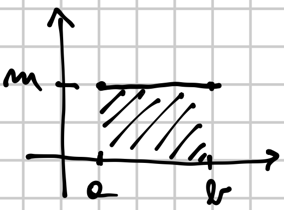
$\Rightarrow \exists\, c \in [a,b]$ tale che $\qquad f(c) = \underbrace{\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}_{\text{MEDIA INTEGRALE (o VALOR MEDIO) DI } f \text{ SU } [a,b]}$

DIMOSTRAZIONE (LEZIONE 19/11/2020)

f continua $\underset{\text{TH. WEIERSTRASS}}{\Longrightarrow}$ $\quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{VALORE MIN}}}{m} \le f(x) \le \underset{\substack{\downarrow \\ \text{VALORE MAX}}}{M} \qquad \forall x \in [a,b]$

$$\Downarrow$$

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$



$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

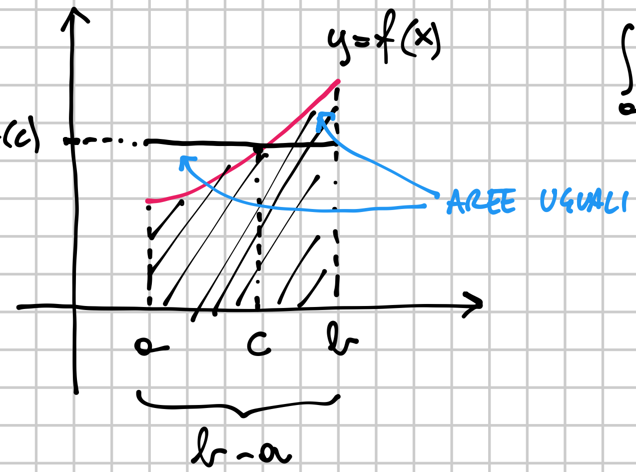
TH. VALORI INTERMEDI: la funzione f assume almeno una volta tutti i valori compresi m e M, quindi

$$\exists\, c \in [a,b] : \quad f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

C.V.D.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL TH. DELLA MEDIA

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c)$$



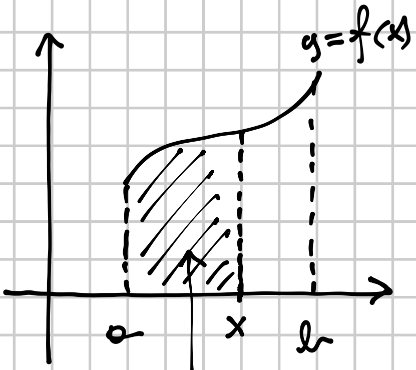
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

FUNZIONE INTEGRALE

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua $\qquad c\in[a,b]$ $\qquad$ (c può essere anche a)

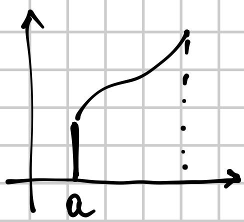
$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad x\in[a,b]$$

FUNZIONE INTEGRALE (DOMINIO $[a,b]$)

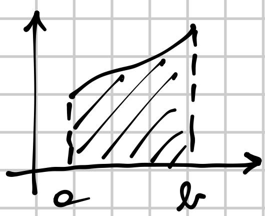


$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$



$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$



1° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\qquad c \in [a,b] \qquad F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow$ F è una primitiva di f, cioè F è derivabile in $[a,b]$ e

$$\forall x \in [a,b] \qquad F'(x) = f(x)$$

DIMOSTRAZIONE

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_c^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^c f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(c_h)$$

TH. MEDIA
ALL'INTERVALLO $[x, x+h]$

$\Downarrow$

TROVO $\quad x \leq c_h \leq x+h$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c_h) = f(x)$$

$h \to 0 \Rightarrow c_h \to x$

perché f è continua

C.V.D.

2° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua $\qquad$ F una qualsiasi primitiva di f in $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

[Se f' è continua in $[a,b]$, allora $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$]

DIMOSTRAZIONE

Una qualsiasi primitiva di f si può scrivere

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,dt + K$$

$$F(a)=\int_c^a f(t)\,dt + K \qquad F(b)=\int_c^b f(t)\,dt + K$$

$$F(b)-F(a)=\int_c^b f(t)\,dt + \cancel{K} - \int_c^a f(t)\,dt - \cancel{K} =$$

$$=\int_c^b f(t)\,dt + \int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

c.v.d.