Le equivalenze asintotiche e la somma di funzioni

Osservazioni didattiche

Riccardo Dossena

20 giugno 2021

Sommario

In questo contributo analizzeremo alcune questioni didattiche relative alle equivalenze asintotiche, che sono uno strumento vantaggioso per il calcolo dei limiti. Ci concentreremo in particolare sul loro possibile uso quando sono coinvolte somme di funzioni.

Abstract

In this paper we will analyze some didactic issues related to asymptotic analysis, which is an advantageous tool for calculating limits. We will focus in particular on its possible use when sums of functions are involved.

1 Premessa

Da qualche anno, nei libri di testo di matematica maggiormente adottati nei licei italiani (ad esempio in [1] e [4]) al termine della trattazione dei limiti notevoli viene proposto lo studio delle equivalenze asintotiche e degli ordini di infinito e infinitesimo, insieme alle relative proprietà. Personalmente trovo che questi argomenti, oltre a rendere più immediato il calcolo di alcuni limiti (che altrimenti dovrebbero essere risolti ricorrendo ai limiti notevoli, con passaggi a volte pesanti) abbiano un fascino particolare e che, se si decide di affrontarli, meritino un po' di tempo. Tuttavia, ho notato che l'applicazione di questi metodi da parte degli studenti è spesso causa di alcuni errori tipici, che quindi andrebbero evidenziati e possibilmente prevenuti. Oltre a questo, mi è capitato a volte di imbattermi in situazioni che hanno creato un po' di imbarazzo in fase di valutazione. Facciamo un esempio. In una verifica somministrata in una mia classe era richiesto di calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right).$$

Due studenti hanno svolto l'esercizio così:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}+x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-4x}-x}{\sqrt{x^2-4x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}-4x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-4x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}-x}$$

e a questo punto, anziché "portar fuori" $-x$ dalla radice e poi effettuare il raccoglimento, dato che per $x\to-\infty$ si ha che $\sqrt{x^2-4x}\sim -x$, hanno scritto

$$\frac{-4x}{\sqrt{x^2-4x}-x}\sim\frac{-4x}{-x-x}=\frac{-4x}{-2x}=2\qquad\text{per } x\to-\infty$$

da cui risulta che il limite cercato è 2.

Il risultato è corretto, ma il procedimento è accettabile? Infatti, è ben noto che se $f_1\sim f_2$ e $g_1\sim g_2$ per $x\to x_0$, allora $f_1g_1\sim f_2g_2$ e $f_1/g_1\sim f_2/g_2$, ma in generale *non* vale che $f_1+g_1\sim f_2+g_2$, come mostrano i seguenti controesempi.

a) Per $x\to0$ si ha che $x+x^2\sim x$ e $-x+x^2\sim -x+x^3$. Eppure, abbiamo che

$$x+x^2+(-x+x^2)=2x^2\nsim x^3=x+(-x+x^3)\qquad\text{per } x\to0.$$

b) Per $x \to 0$ si ha che $\ln(1+x) \sim x$, però si ha anche

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \ln(1+x)}{x^2} \neq \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(\cos x - 1)}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

dato che il primo limite vale $\dfrac{1}{2}$.

Come stanno le cose? Esistono delle condizioni secondo cui in una somma la sostituzione di una funzione con un'altra asintoticamente equivalente è lecita? Prima di rispondere, analizziamo i due esempi appena visti.

a) Poniamo $f_1(x) = x + x^2$, $f_2(x) = x$, $g_1(x) = -x + x^2$ e $g_2(x) = -x + x^3$. Per $x \to 0$ si ha $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$, ma anche $f_2 \sim -g_2$. Ciò significa che sostituendo $f_1 + g_1$ con $f_2 + g_2$ si rischia (e di fatto in questo caso si ha) una perdita di informazione essenziale sulla somma delle funzioni iniziali.

b) Allo stesso modo, notiamo che $x\cos x \sim x$ per $x \to 0$. Dunque anche qui abbiamo una differenza di funzioni asintoticamente equivalenti e, dopo la sostituzione, una conseguente perdita di informazione che compromette la riuscita del calcolo del limite.

Nell'esempio proposto all'inizio, in effetti, il calcolo va a buon fine proprio perché

$$\sqrt{x^2 - 4x} \nsim x \qquad \text{per } x \to -\infty.$$

2 Alcuni utili risultati teorici

La definizione di funzioni equivalenti asintoticamente a cui faremo riferimento nel seguito è la seguente (vedi [2]).

> Si dice che la funzione f è asintoticamente equivalente alla funzione g per x tendente a x_0 e si scrive
>
> $$f(x) \sim g(x) \qquad \text{per } x \to x_0$$
>
> quando esiste una funzione h tale che
>
> $$f = gh \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} h(x) = 1.$$

Osserviamo che secondo questa definizione la funzione identicamente nulla è equivalente solo a sé stessa. In altre parole, se $f \sim 0$ per $x \to x_0$, allora $f(x) = 0$ per ogni x dell'intorno di x_0 preso in considerazione (escluso al più x_0). Ciò sarà importante nel seguito.

Dimostreremo un utile risultato sull'equivalenza asintotica della somma di funzioni, cominciando con un lemma.

> **Lemma**
>
> Sia $f \sim g$ per $x \to x_0$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che esista $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L \neq -c$. Allora
>
> $$f + c \sim g + c \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste una funzione h tale che $f = gh$, con $\lim_{x\to x_0} h(x) = 1$. Per il teorema della permanenza del segno, si ha che $f(x) + c \neq 0$ e $g(x) + c \neq 0$ in un intorno di x_0 (escluso al più x_0). Allora si può scrivere, per ogni x di tale intorno:

$$f(x) + c = [g(x) + c] \cdot \frac{g(x)h(x) + c}{g(x) + c}.$$

Distinguiamo due casi.

a) Supponiamo dapprima L finito. Siccome $L + c \neq 0$, si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)h(x) + c}{g(x) + c} = \frac{L \cdot 1 + c}{L + c} = 1.$$

b) Sia ora $L = \pm\infty$. Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)h(x)+c}{g(x)+c} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{g(x)}\left(h(x)+\dfrac{c}{g(x)}\right)}{\cancel{g(x)}\left(1+\dfrac{c}{g(x)}\right)} = \frac{1+0}{1+0} = 1. \qquad \square$$

Questo lemma (con $L = 0$ e $c = 1$) consente di dedurre le seguenti formule, valide per $x \to 0$:

$$e^x - 1 \sim x \implies e^x \sim 1 + x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \implies (1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x.$$

Osserviamo che se $L = -c$, la tesi del lemma può essere falsa. Ad esempio si ha che

$$x^2 + x + 1 \sim 2x + 1 \qquad \text{per } x \to 0$$

ma

$$(x^2 + x + 1) - 1 \nsim (2x+1) - 1 \qquad \text{per } x \to 0$$

poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+1)}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema.

Teorema

Siano f, f_1, g funzioni che non si annullano in un intorno di x_0 (escluso al più x_0) tali che $f \sim f_1$ e $f \nsim -g$ per $x \to x_0$ ed esista il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}.$$

Allora

$$f + g \sim f_1 + g \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Dimostrazione. Osserviamo esplicitamente che $f \nsim -g$ se e solo se $f_1 \nsim -g$, dal momento che $\sim$ è una relazione di equivalenza. Assumendo le ipotesi dell'enunciato, abbiamo che

$$\frac{g}{f} \sim \frac{g}{f_1} \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Dato che $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) \neq -1$ (altrimenti sarebbe $f \sim -g$) possiamo applicare il lemma con $c = 1$ e ottenere

$$1 + \frac{g}{f} \sim 1 + \frac{g}{f_1} \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Allora si ha

$$\frac{f+g}{f_1+g} = \frac{f\left(1+\dfrac{g}{f}\right)}{f_1\left(1+\dfrac{g}{f_1}\right)} \sim 1 \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Si noti che $f_1 + g$ non si annulla in un intorno di x_0 (escluso al più x_0) perché f_1 e $1 + g/f_1$ non si annullano: la prima per ipotesi, la seconda per il teorema della permanenza del segno, poiché ammette limite (dato che $g/f_1 \sim g/f$) diverso da 0 (altrimenti sarebbe $\lim_{x\to x_0} g(x)/f_1(x) = -1 \implies f_1 \sim -g$). $\square$

In pratica, in una somma è possibile sostituire una funzione con un'altra equivalente se *tale somma non è composta da due funzioni l'una asintoticamente equivalente all'opposto dell'altra* (o, in altre parole, quando *non* si ha una differenza di due funzioni asintoticamente equivalenti). Nei casi che si presentano di solito, le altre ipotesi di non annullamento e di esistenza sono soddisfatte.

La condizione che abbiamo enunciato è più naturale di quanto possa sembrare: se in $f - g$, con $f \sim g$, potessimo sostituire f al posto di g mantenendo l'equivalenza, otterremmo per transitività che $f - g \sim 0$, da cui dedurremmo sistematicamente che $f - g$ è la funzione identicamente nulla, il che è assurdo.

Un esempio di applicazione è il calcolo del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+\tan x}}{x}.$$

Siccome per $x \to 0$ si ha che $e^x - 1 \sim x$ e $\sqrt{1+\tan x} - 1 \sim \dfrac{\tan x}{2} \sim \dfrac{x}{2}$, dunque $e^x - 1 \nsim \sqrt{1+\tan x} - 1$, risulta

$$e^x - \sqrt{1+\tan x} = (e^x - 1) - (\sqrt{1+\tan x} - 1) \sim x - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x \qquad \text{per } x \to 0$$

da cui si deduce che il limite di partenza è $1/2$.

Nel prossimo paragrafo mostreremo altri esempi che si prestano a osservazioni di tipo didattico.

3 Esempi e considerazioni didattiche

Come già detto, l'utilizzo delle equivalenze asintotiche conduce a una maggiore velocità e semplificazione dei calcoli che coinvolgono i limiti notevoli. D'altro canto gli studenti, anche se messi in guardia, tendono ad applicare con eccessiva leggerezza le sostituzioni di funzioni equivalenti in presenza di somme, rischiando di prendere solenni cantonate.

Un semplice rimedio potrebbe essere quello di vietare esplicitamente le sostituzioni di funzioni coinvolte in somme. Tuttavia, l'esperienza mostra che gli studenti lo fanno lo stesso. In questo caso, se il procedimento si rivelasse poi corretto, sarebbe giusto valutarlo come se non lo fosse?

Proviamo a immaginare alcune situazioni. Uno studente, di fronte al calcolo del limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^3} - x^2 + x^3}{x+1}$$

potrebbe, senza pensarci troppo, sostituire nel numeratore il termine $\sqrt{x^4 - x^3}$ con l'equivalente x^2 ottenendo così

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^3} - x^2 + x^3}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + x^3}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x+1} = +\infty.$$

Il risultato del limite è corretto e la sostituzione è lecita, poiché $\sqrt{x^4 - x^3} \nsim x^2 - x^3$ per $x \to +\infty$, dunque le ipotesi del teorema sono soddisfatte. Lo stesso studente, entusiasta per il successo conseguito, probabilmente affronterebbe allo stesso modo il limite (molto simile al precedente)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^3} - x^2 + x}{x+1}$$

ottenendo questa volta un risultato sbagliato

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

dato che il limite di partenza vale $1/2$.

Nel primo caso, ritengo che il procedimento sia da accettare purché venga giustificato (ad esempio mediante una frase del tipo "non si ha una differenza di funzioni equivalenti per $x \to +\infty$" o simili), in modo da suscitare maggiore consapevolezza di quello che si sta facendo. Inoltre, potrebbe essere l'occasione per osservare che comunque tutto ciò che nel numeratore precede il termine $+x^3$ è costituito da infiniti di ordine inferiore a 3 per $x \to +\infty$, che possono quindi essere trascurati nel calcolo del limite. Ciò non è più vero nel secondo caso, dove l'erronea eliminazione degli infiniti di ordine superiore compromette l'intero svolgimento.

Ancora, se il limite da calcolare fosse

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^3} - x^2}{x+1}$$

la sostituzione di $\sqrt{x^4 - x^3}$ con x^2 porterebbe a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{0}{x+1} = 0$$

che è decisamente scorretto, poiché il numeratore non può essere equivalente alla funzione nulla (il limite vale $-1/2$). Ogni volta che dopo la sostituzione risulta 0 si ricade inevitabilmente in questa situazione: ottenere 0 costituisce quindi un ottimo campanello d'allarme per rendersi conto della strada errata intrapresa.

È comunque da tenere presente che quando l'ipotesi $f \nsim -g$ (sufficiente, ma non necessaria) non vale, le cose possono andare bene come possono andare male e uno studente può casualmente ritrovarsi con un risultato corretto. Ad esempio, i seguenti passaggi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$$

(in cui $\sqrt{x^4-x}$ è equivalente a x^2+x e viene sostituito da x^2) sono effettivamente corretti: essi andrebbero perciò giustificati mostrando che il numeratore è di fatto equivalente a $-x$. Ma se sostituissimo a $\sqrt{x^4-x}$ proprio x^2+x, anziché x^2, il numeratore si annullerebbe facendoci ricadere nel caso della funzione nulla.

Allo stesso modo nel limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4-x}-x^2}{x+1}$$

la sostituzione di $\sqrt{x^4-x}$ con x^2 porterebbe a scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x^2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{0}{x+1} = 0.$$

Pur essendo il risultato corretto, il procedimento non lo è e non deve essere accettato, perché ancora il numeratore non può essere equivalente alla funzione nulla. Infatti, sostituendo a $\sqrt{x^4-x}$ un'altra funzione equivalente (ad esempio x^2+x), si otterrebbe un risultato ancora diverso.

4 Esempi proposti per prevenire errori

Un esempio semplice da proporre agli studenti per evidenziare le insidie della sostituzione di funzioni equivalenti nelle somme è il seguente. Siccome essi conoscono già il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

possono rendersi conto facilmente che se sostituissero a $\cos x$ l'equivalente 1 otterrebbero

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

che è evidentemente errato. Da notare che se al denominatore ci fosse x, il procedimento porterebbe sì al risultato corretto, ma per la solita questione dell'equivalenza con la funzione nulla sarebbe comunque erroneo e inaccettabile.

Tutti gli esempi del paragrafo precedente possono essere facilmente compresi dagli studenti, poiché il calcolo alternativo dei limiti non richiede strumenti avanzati. Potrebbe essere comunque interessante proporre anche un esempio un po' più complicato come il seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + x^3}{x^3}.$$

Il calcolo richiede strumenti più fini (ad esempio il teorema di De L'Hôpital), ma tale limite, che vale 5/6, può essere facilmente visualizzato disegnando il grafico della funzione con GeoGebra. Se si sostituisce x a $\sin x$ si ottiene però un risultato sbagliato:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - x + x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

Infatti, $\sin x \sim x - x^3$ per $x \to 0$ e quindi la sostituzione non è lecita. Invece, nel caso del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x + x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + x + x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + x^3}{x^3} = +\infty$$

il procedimento è corretto perché $\sin x \nsim -x - x^3$ per $x \to 0$.

In conclusione, penso che insegnare l'uso delle equivalenze asintotiche richieda conseguentemente l'analisi di varie situazioni come quelle viste qui, con l'obiettivo di evitare, per quanto possibile, che gli studenti si facciano prendere dalla forte tentazione di passaggi erronei. A questo punto la domanda è: vale la pena impiegare tempo ed energie per affrontare questi argomenti? Non lo so, ma ritengo che si tratti comunque di una stimolante sfida didattica. Come tutto, del resto.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Bergamini, G. Barozzi e A. Trifone. *Matematica.blu 2.0*, volume 5. Zanichelli, 3ª edizione, 2020.

[2] G. Gilardi. *Analisi uno*. McGraw-Hill, 2ª edizione, 1995.

[3] G. Goldoni. *Il professor Apotema insegna... I numeri iperreali*. Ilmiolibro, 2011.

[4] L. Sasso e C. Zanone. *Colori della Matematica*, volume 5αβ. Petrini, 1ª edizione, 2019.