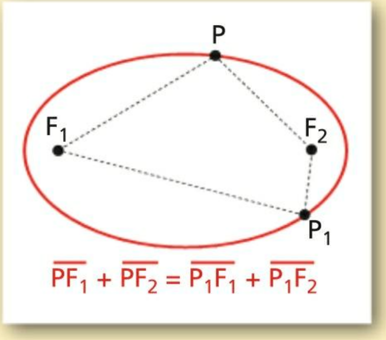
17/4/2018

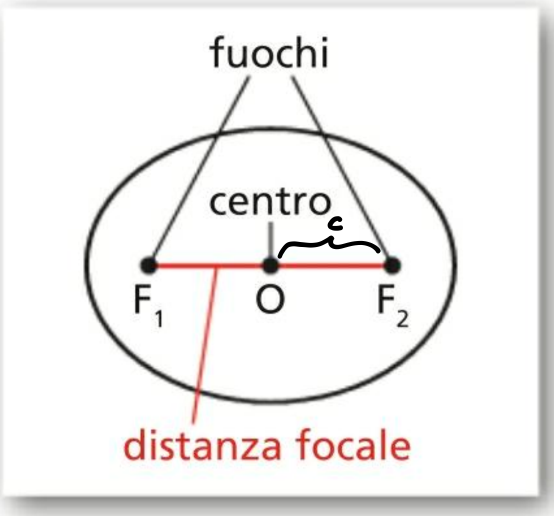
DEFINIZIONE

Assegnati nel piano due punti, F_1 e F_2, si chiama **ellisse** il luogo geometrico dei punti P del piano tali che sia costante la somma delle distanze di P da F_1 e da F_2:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \textbf{costante}.$$



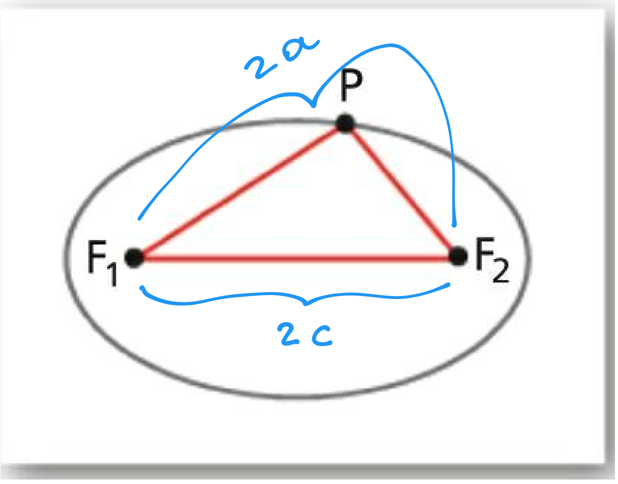
F_1, F_2 = FUOCHI DELL'ELLISSE



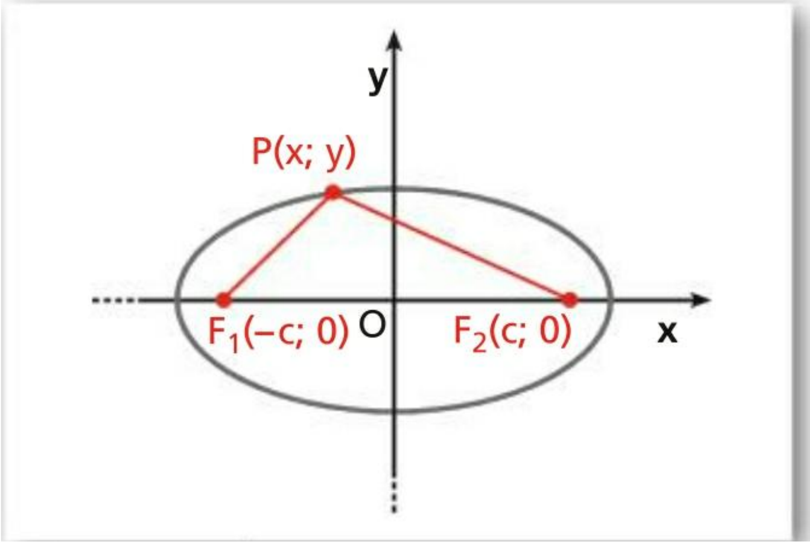
$\overline{F_1F_2}$ = DISTANZA FOCALE = $2c$

c = SEMIDISTANZA FOCALE

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ = COSTANTE = $2a$



$2a > 2c \implies \boxed{a > c}$



FUOCHI ASSEGNATI $\longrightarrow$ $c > 0$

$F_1(-c, 0) \quad F_2(c, 0)$

ASSEGNO a, TALE CHE $a > 0$

$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a}$$

$P(x,y)$ = generico punto dell'ellisse

$$\underbrace{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}_{\overline{PF_1}} + \underbrace{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}_{\overline{PF_2}} = 2a$$

elevo al quadrato

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{c^2} + 2cx + \cancel{y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} + \cancel{c^2} - 2cx + \cancel{y^2} - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\cancel{4}cx = \cancel{4}a^2 - \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

elevo al quadrato

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right] = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$$

$$a^2\left[x^2+c^2-2cx+y^2\right] = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 \cancel{- 2a^2cx} + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 \cancel{- 2a^2cx}$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}x^2 + a^2y^2 = a^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}$$

$a > c \quad (>0)$

$\downarrow$

$a^2 > c^2$

$a^2 - c^2 > 0$

$b^2 = a^2 - c^2$

$\uparrow$

DEFINIZIONE

$b > 0$ tale che

$b^2 = a^2 - c^2$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

divido per a^2b^2

$$\frac{\cancel{b^2}x^2}{a^2\cancel{b^2}} + \frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2} = \frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

EQUAZIONE DELL'ELLISSE

FUOCHI SULL'ASSE x

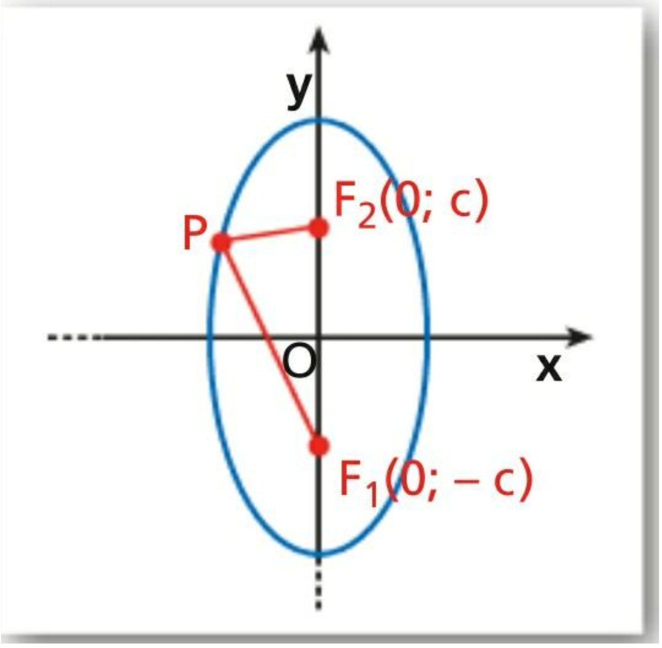
$F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$

$b^2 = a^2 - c^2$

$\downarrow$

$a > b$



FUOCHI SULL'ASSE y

$F_1(0,-c) \quad F_2(0,c)$

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2b \rightsquigarrow b > c$

⋮

$a^2 = b^2 - c^2$

$\hookrightarrow b > a$

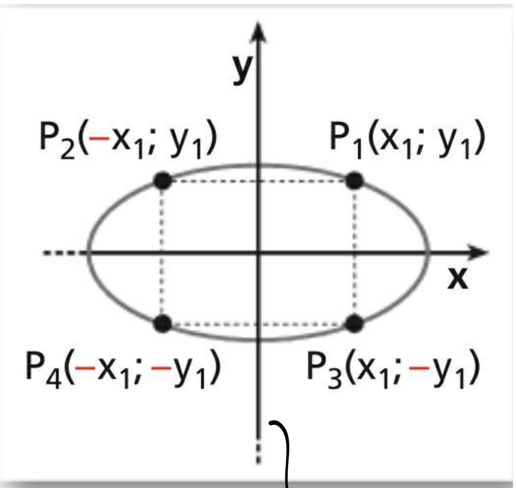
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

IN PRATICA

L'eq. dell'ellisse è sempre $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

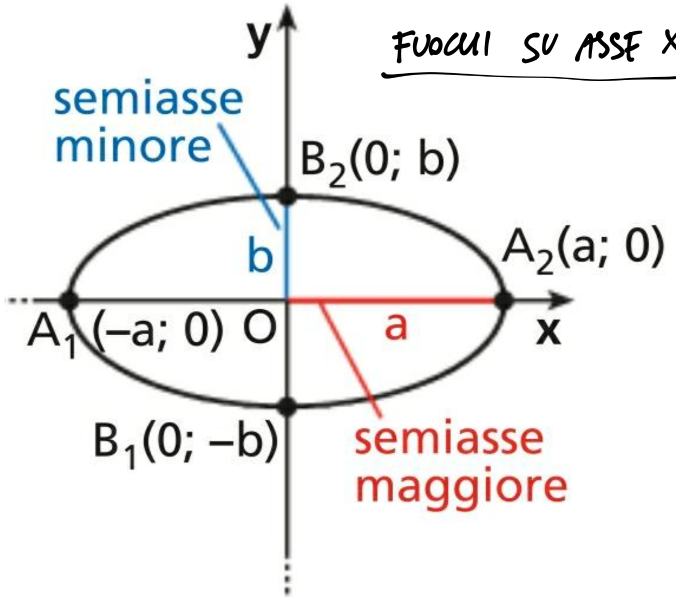
se $a^2 > b^2$
$(a > b)$
FUOCHI SONO SULL'ASSE x
$c^2 = a^2 - b^2$

se $b^2 > a^2$
$(b > a)$
FUOCHI SONO SULL'ASSE y
$c^2 = b^2 - a^2$



l'ellisse è simmetrica rispetto all'asse x e all'asse y

RIFERIMENTO CANONICO DELL'ELLISSE



FUOCHI SU ASSE X

Se i fuochi sono sull'asse $y \rightarrow$ b = SEMIASSE MAGGIORE

a = SEMIASSE MINORE

CASO PARTICOLARE $a = b$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightsquigarrow x^2 + y^2 = a^2$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = a^2$$

CIRCONFERENZA DI CENTRO $O(0,0)$
E RAGGIO a

$F_1 \equiv F_2 \equiv O$

12 $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 25$

$b^2 = 9$ $\rightarrow$ FUOCHI SU ASSE X

$\downarrow$

$a = 5$

$b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$

$c = 4$

FUOCHI $F_1(-4,0)$ $F_2(4,0)$

VERTICI $A_1(-5,0)$ $A_2(5,0)$ $B_1(0,-3)$ $B_2(0,3)$

16 $9x^2 + 4y^2 = 36$

$$\frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{9}} + \frac{y^2}{\frac{36}{4}} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a^2 < b^2$

$\downarrow$

FUOCHI SULL'ASSE y

$a = 2$ $c = \sqrt{5}$

$b = 3$

$c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$

FUOCHI $F_1(0,-\sqrt{5})$ $F_2(0,\sqrt{5})$ VERTICI $A_1(-2,0)$ $A_2(2,0)$

$B_1(0,-3)$ $B_2(0,3)$

ECCENTRICITÀ DELL'ELLISSE

FUOCHI SU ASSE X

$$e = \frac{c}{a}$$

FUOCHI SU ASSE Y

$$e = \frac{c}{b}$$

$$e = \frac{\text{SEMIDISTANZA FOCALE}}{\text{SEMIASSE MAGGIORE}}$$

$0 \leq e < 1$ ⟿ INDICA DI QUANTO L'ELLISSE SI DISCOSTA DALL'AVERE LA FORMA DI UNA CIRCONFERENZA

$e = 0$ CIRCONFERENZA

$e \simeq 0$ ASSOMIGLIA A UNA CIRCONF.

$e \simeq 1$ ELLISSE SCHIACCIATA

$\boxed{e = 1}$ CASO LIMITE ⟶ SEGMENTO