6/2/2018

POTENZE

$$a^{n}$$

ESPONENTE

BASE

$a \in \mathbb{R}^+$, cioè $a > 0$

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

INS. NUMERI REALI STRETTAMENTE POSITIVI

$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

• ESPONENTE NATURALE

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ FATTORI}}$$

$$a^1 = a \qquad a^0 = 1$$

DEFINIZIONE PIÙ RIGOROSA

$$a^n = \begin{cases} 1 & \text{SE } n = 0 \\ a^{n-1} \cdot a & \text{SE } n \geq 1 \end{cases}$$

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

DIMOSTRAZIONE

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ FATTORI}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ FATTORI}}}_{n+m \text{ FATTORI}} = a^{n+m}$$

PERCHÉ SI CONVIENE CHE $a^0 = 1$? Perché si vuole che le proprietà delle potenze valgano sempre!!

ESEMPIO

$$2^3 : 2^3 = 1 \quad \xrightarrow{\text{applicando le proprietà}} \quad 2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$$

0^0 É INDETERMINATO! Perché?

Se 0^0 fosse uguale a qualcosa, sarebbe o 0 o 1

$a^0 = 1$ per qualsiasi $a \neq 0$
$0^n = 0$ per qualsiasi $n \neq 0$

Sono 2 possibilità. Quale scegliamo?

Nessuna delle 2, perché l'esperienza ci dice che nessuna delle due scelte è così indispensabile....

• ESPONENTE INTERO

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad n \in \mathbb{N}$$

perché? Sempre per far valere le proprietà delle potenze!!

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$$

quindi $\frac{\cancel{a^n} \cdot a^{-n}}{\cancel{a^n}} = \frac{1}{a^n} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

• ESPONENTE RAZIONALE

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

perché? $3^{\frac{1}{2}} = ?$

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 3$$

qual è il numero che elevato al quadrato mi dà 3? RISPOSTA: $\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

ESEMPIO

$$3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

POTENZE A ESPONENTE IRRAZIONALE

ESEMPIO. Come dare un significato a

$$2^{\pi} \; ?$$

$\pi = 3{,}141592654\ldots$

$3 < \pi < 4 \qquad\qquad 2^3 < 2^{\pi} < 2^4$

$3{,}1 < \pi < 3{,}2 \qquad\qquad 2^{3,1} < 2^{\pi} < 2^{3,2}$

$2^{3,1} = 2^{\frac{31}{10}} = 8{,}57\ldots \qquad 2^{3,2} = 2^{\frac{32}{10}} = 9{,}18\ldots$

$3{,}14 < \pi < 3{,}15 \qquad\qquad 2^{3,14} < 2^{\pi} < 2^{3,15}$

$2^{3,14} = 8{,}815\ldots \qquad 2^{3,15} = 8{,}876\ldots$

$3{,}141 < \pi < 3{,}142 \qquad\qquad 2^{3,141} < 2^{\pi} < 2^{3,142}$

$2^{3,141} = 8{,}821\ldots \qquad 2^{3,142} = 8{,}827\ldots$

Si può dimostrare che questo procedimento (idealmente portato avanti all'infinito) determina un UNICO NUMERO BEN DETERMINATO!

Questo numero lo definisco 2^{π}

$2^{\pi} = 8{,}82\ldots$

[DA CALCOLATRICE $2^{\pi} = 8{,}82497\ldots$]

Si dimostra anche che questa definizione mantiene valide TUTTE le proprietà delle potenze. $2^{\pi} \cdot 2^{\sqrt{2}} = 2^{\pi + \sqrt{2}}$ ecc....

FUNZIONE ESPONENZIALE

La funzione esponenziale di base a (o in base a), dove $a \in \mathbb{R}^+$, è la funzione

$$\exp_a : \underset{\text{DOMINIO}}{\mathbb{R}} \to \underset{\text{CODOMINIO}}{\mathbb{R}^+}$$

definita da

$$\exp_a(x) = a^x$$

IN PRATICA

$y = a^x$

$x \in$ DOMINIO	a^x
2	a^2
3	a^3
$\vdots$	$\vdots$

ESEMPIO $\exp_2(x) = 2^x$

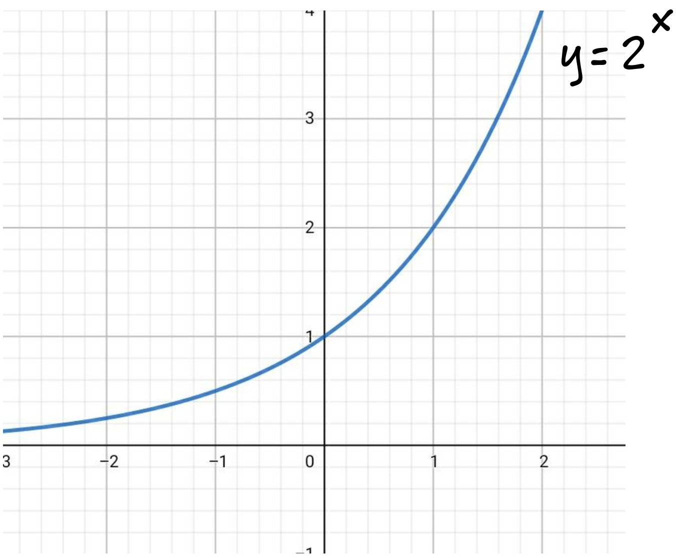
$y = 2^x$

$2 \mapsto 2^2$

$3 \mapsto 2^3$

$4 \mapsto 2^4$

$\vdots$



Cosa succede se considero $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(2^{-1}\right)^x = 2^{-x}$$

Cosa succede nel passaggio da 2^x a 2^{-x}?

$f(x) \rightsquigarrow f(-x)$ Cosa succede al grafico?

SIMMETRIA RISPETTO ALL'ASSE y