7. Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte? [22/64; 57/64]

Un possibile esito TCCTCC

Qual è la probabilità che in 6 lanci T esca <u>esattamente</u> 2 volte?

$$\underset{\substack{\uparrow \\ T\ 2\ \text{volte}}}{P(\text{successo 2 volte})} = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

<u>esattamente</u> 1 volta $\Longrightarrow$ $P(1\ \text{volta}) = \overbrace{\binom{6}{1}}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5$

CCTCCC

esattamente 0 volte $\Longrightarrow$ $P(0\ \text{volte}) = \underbrace{\binom{6}{0}}_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6$

CCCCCC

$$P_{\text{richiesta}} = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 =$$

$$= \left[\frac{6!}{2!\,4!} + 6 + 1\right]\frac{1}{2^6} = \left[\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 5\cdot\cancel{4!}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4!}} + 6 + 1\right]\frac{1}{2^6} =$$

$$= \frac{22}{64} = \frac{11}{32}$$

30/5/2018

3. Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:

   a) qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?

   b) descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99%.

X = numero di ammalati

$P(X=n)$ = probabilità di avere n ammalati

a) Almeno 3 ammalati $\Rightarrow$ 3 o più di 3 $\Rightarrow \underbrace{3,4,5,\dots,20}_{P(X>2)}$

Evento contrario $\overline{\text{Almeno 3 ammalati}}$

$$1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$$

$$P(X=0)=q^{20}=(0,85)^{20}$$

$p=0,15$ prob. ammalato

$q=1-p=0,85$ prob. non ammalato

$$P(X=1)=\binom{20}{1}p^1q^{19}=20\cdot 0,15\cdot(0,85)^{19}$$

$$P(X=2)=\binom{20}{2}p^2q^{18}=\frac{20!}{2!\,18!}\cdot(0,15)^2\cdot(0,85)^{18}$$

$$\frac{\overset{10}{\cancel{20}}\cdot 19\cdot\cancel{18!}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{18!}}$$

$$P=1-(0,85)^{20}-20\cdot 0,15\cdot(0,85)^{19}-190\cdot(0,15)^2\cdot(0,85)^{18}\cong$$

$$\cong 0,60$$

b) $$P(X>50)=1-P(X=0)-P(X=1)-\dots-P(X=50)$$

$$=1-\sum_{n=0}^{50}P(X=n)=1-\sum_{n=0}^{50}\binom{500}{n}(0,15)^n(0,85)^{500-n}$$

$$h(t) = a\cdot t\cdot e^{1-b\cdot t} + c$$

$$h(0) = 130 \implies c = 130$$

$$h(2) = 950 \implies 2a\,e^{1-2b} + 130 = 950$$

$$h'(2) = 0$$

$$h'(t) = a\left[e^{1-bt} + t\cdot e^{1-bt}(-b)\right] =$$

$$= a\,e^{1-bt}(1-bt)$$

$$h'(2) = a\,e^{1-2b}(1-2b) = 0$$

$$\begin{cases} \cancel{2}\,a\,e^{1-2b} = \overset{410}{\cancel{820}} \\ \cancel{a}\,\cancel{e^{1-2b}}(1-2b) = 0 \implies b = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 410 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$h(t) = 410\,t\,e^{1-\frac{t}{2}} + 130$$

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0 + 130 = 130$$

OSSERVAZIONE

$$\lim_{t\to+\infty} t^n e^{-t} = (+\infty)\cdot 0 \quad \text{F. I.}$$

$$= \boxed{0}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^n}{e^t} \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{n\,t^{n-1}}{e^t} \overset{H}{=} \dots \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{\overset{n!}{\boxed{\text{COSTANTE}}}}{e^t} = 0$$

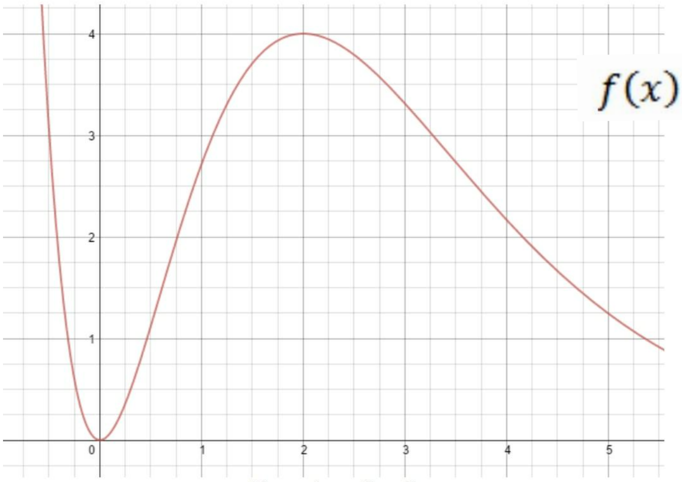


Figura 1: grafico G

$$f(x) = x^k \cdot e^{(k-x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}, k > 1$$

trovare K

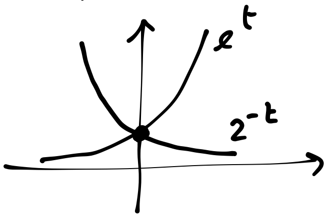
Passaggio per $(2,4)$

$$y = x^K \cdot e^{(K-x)}$$

$$2^K \cdot e^{K-2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{K-2} = \frac{4}{2^K} \Rightarrow e^{K-2} = 2^{2-K} \Rightarrow e^{K-2} = 2^{-(K-2)}$$

e^t e 2^{-t} quando sono uguali? Quando $t=0$



$$\Downarrow$$

$$K-2=0 \Rightarrow K=2$$

Quindi $\boxed{f(x) = x^2 e^{2-x}}$

ALTERNATIVA

$$e^{K-2} = 2^{2-K} \qquad K-2 = \ln(2^{2-K}) \qquad K-2 = (2-K)\ln 2$$

$$K-2 = 2\ln 2 - K\ln 2$$

$$K + K\ln 2 = 2 + 2\ln 2$$

$$K\cancel{(1+\ln 2)} = 2\cancel{(1+\ln 2)}$$

$$K=2$$

$f(x) = x^2 e^{2-x}$ ricerca FLESSI

$$f'(x) = 2x e^{2-x} + x^2 e^{2-x} \cdot (-1) = e^{2-x}(2x - x^2)$$

$$f''(x) = -e^{2-x}(2x - x^2) + e^{2-x}(2-2x) =$$

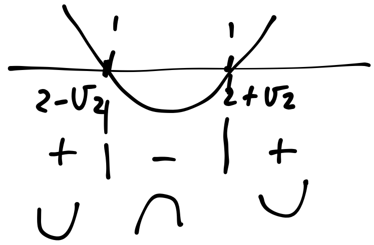
$$= e^{2-x}[-2x + x^2 + 2 - 2x] = \underbrace{e^{2-x}}_{} [x^2 - 4x + 2]$$

sempre > 0, quindi non influisce sugli zeri e nel segno

ZERI DI f''

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2}$$



$2 \pm \sqrt{2}$ SONO PUNTI DI FLESSO

RICERCA ASINTOTI

$x \to +\infty$ $$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{2-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x-2}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^{x-2}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^{x-2}} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$$

$y = 0$ È ASINTOTO ORIZZONTALE PER $x \to +\infty$

$x \to -\infty$ $$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} e^{2-x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to -\infty} x e^{2-x} =$$

$$= (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty \Rightarrow$$ Siccome ho trovato $-\infty$ NON CI SONO ASINTOTI OBLIQUI PER $x \to -\infty$

TANGENTE $y = f(x)$ derivabile in $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\int_0^2 x^2 e^{2-x}\,dx = (*)$$

$$\int x^2 e^{2-x}\,dx = x^2\left(-e^{2-x}\right) - \int 2x\left(-e^{2-x}\right)dx =$$

$$= -x^2 e^{2-x} + 2\int x e^{2-x}\,dx =$$

$$= -x^2 e^{2-x} + 2\left[x\left(-e^{2-x}\right) - \int\left(-e^{2-x}\right)dx\right] =$$

$$= -x^2 e^{2-x} - 2x e^{2-x} + 2\int e^{2-x}\,dx =$$

$$= -x^2 e^{2-x} - 2x e^{2-x} - 2e^{2-x} + C =$$

$$= -e^{2-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C$$

$$(*) = -e^{2-x}\left(x^2+2x+2\right)\Big|_0^2 = -e^0\left(4+4+2\right) + e^2\left(0+0+2\right) =$$

$$= -10 + 2e^2 = \boxed{2e^2 - 10}$$

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad x \in \mathbb{R}, \ a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

con $r(0) = f(0) = 0, \ r(2) = f(2) = 4, \ r'(0) = 0, \ r'(2) = 0;$

$r(0) = d = 0$

$r(2) = 8a + 4b + 2c = 4$

$r'(0) = c = 0$

$r'(2) = 12a + 4b = 0$

$r'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\begin{cases} 8a + 4b = 4 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$r(x) = -x^3 + 3x^2$

$$A_2 = \int_0^2 (-x^3 + 3x^2)\,dx = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \Big|_0^2 = -\frac{1}{4}\cdot 16 + 8 = -4 + 8 = 4$$

$A_1 = 2e^2 - 10 \simeq 4{,}77811\ldots$

$$\text{Errore}\% = \frac{2e^2 - 10 - 4}{2e^2 - 10} \cdot 100\% = 16{,}284\ldots\% \simeq \boxed{16{,}3\%}$$