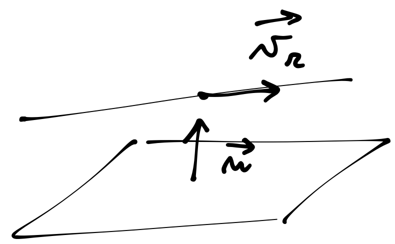
12/3/2019

30 Determina le equazioni cartesiane della retta passante per il punto $A\underbrace{(0; -1; 0)}^{(x_0, y_0, z_0)}$ e parallela ai piani di equazioni $y = 5$ e $2x + y - z - 1 = 0$.

$\left[\begin{cases} 2x = z \\ y = -1 \end{cases}\right]$

RETTA DA TROVARE $r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} = \begin{cases} x = 0 + lt \\ y = -1 + mt \\ z = 0 + nt \end{cases} = \begin{cases} x = lt \\ y = -1 + mt \\ z = nt \end{cases}$

$r \parallel y = 5 \rightarrow y - 5 = 0$



$\vec{v}_r = (l, m, n) \perp (0, 1, 0)$ (prodotto scalare 0)

VETTORE NORMALE DEL PIANO

$\Rightarrow (l, m, n) \cdot (0, 1, 0) = 0 \Rightarrow m = 0$

$r \parallel 2x + y - z - 1 = 0$

$\Rightarrow (l, m, n) \cdot (2, 1, -1) = 0 \Rightarrow 2l + m - n = 0$

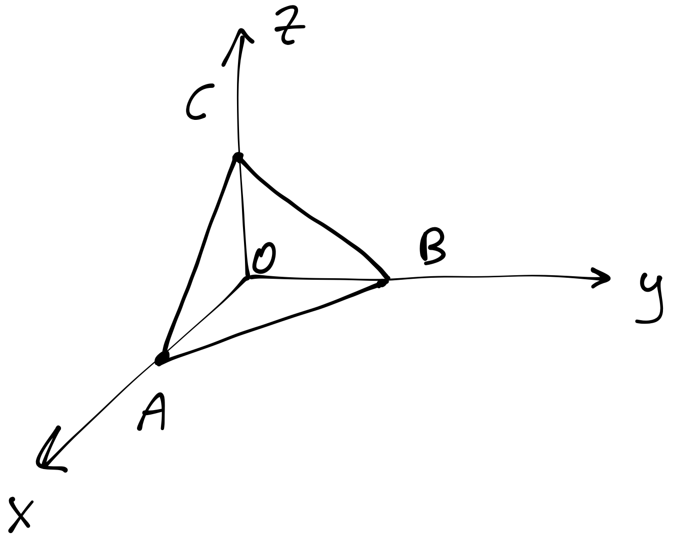
$\begin{cases} m = 0 \\ 2l + m - n = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} m = 0 \\ 2l - n = 0 \Rightarrow n = 2l \end{cases}$ $\begin{cases} m = 0 \\ l = 1 \leftarrow \text{scelgo} \\ n = 2 \end{cases}$ $\vec{v}_r = (l, m, n) = (1, 0, 2)$

$r: \begin{cases} x = lt \\ y = -1 + mt \\ z = nt \end{cases}$ $r: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y = -1 \\ z = 2x \end{cases}}$

per passare alle equazioni cartesiane elimino t

31 Calcola la superficie totale del ~~poligono~~ POLIEDRO formato dal piano di equazione $x - y + 4z - 8 = 0$ con i piani xy, xz e yz. $[24(2+\sqrt{2})]$



Troviamo A, B, C

A $\begin{cases} x - y + 4z - 8 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $A(8, 0, 0)$

B $\begin{cases} x - y + 4z - 8 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -8 \\ z = 0 \end{cases}$ $B(0, -8, 0)$

C $\begin{cases} x - y + 4z - 8 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ $C(0, 0, 2)$

AREA DI ABC (ISOSCELE)

M = PUNTO MEDIO DI AB $M(4, -4, 0)$

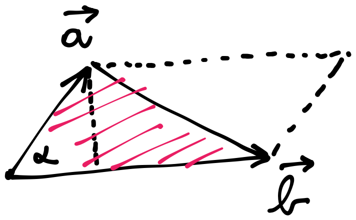
ALTEZZA $\overline{CM} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$ BASE $\overline{AB} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} 8\sqrt{2} \cdot 6 = 24\sqrt{2}$ $\mathcal{A}_{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8 = \mathcal{A}_{OBC}$

$\mathcal{A}_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32$ $\mathcal{A}_{TOT.} = 32 + 8 + 8 + 24\sqrt{2} = \boxed{24(2+\sqrt{2})}$

AREA DI UN TRIANGOLO

(METÀ DEL MODULO DEL PRODOTTO VETTORIALE)



$$\mathcal{A}_{\text{TRIANGOLO}} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2} a b \sin\alpha$$

$A(8,0,0) \qquad B(0,-8,0) \qquad C(0,0,2)$

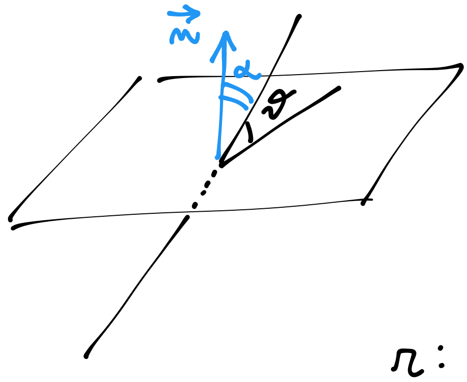
$\vec{AB} = (-8,-8,0) \qquad \vec{AC} = (-8,0,2)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + $$
$$+ (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -16\vec{i} - (-16)\vec{j} + (-64)\vec{k} =$$
$$= -16\vec{i} + 16\vec{j} - 64\vec{k}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2+16^2+64^2} = \frac{16}{2}\sqrt{1+1+4^2} =$$
$$= 8\sqrt{18} = \boxed{24\sqrt{2}}$$

33 Calcola l'ampiezza dell'angolo ϑ formato dal piano di equazione $2x + y + z - 4 = 0$ con la retta di equazioni $\begin{cases} 2x - z - 1 = 0 \\ 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$. [30°]



$\alpha = \frac{\pi}{2} - \vartheta$

$\vec{n}$ = NORMALE AL PIANO

$= (2, 1, 1)$

$$r: \begin{cases} 2x - z - 1 = 0 \\ 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ 2y \cancel{-1} + 2t \cancel{+1} = 0 \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \qquad \vec{v}_r = (1, -1, 2)$$

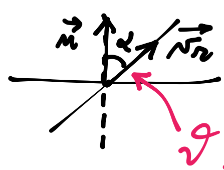
VETTORE DIREZIONALE DI r

PR. SCALARE

$$\vec{n} \cdot \vec{v}_r = n \, v_r \cdot \cos\alpha$$

$$\underbrace{(2,1,1) \cdot (1,-1,2)}_{2-1+2=3} = \underbrace{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}_{n} \cdot \underbrace{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}_{v_r} \cdot \cos\alpha$$

Il prodotto scalare è positivo. Significa che l'angolo più piccolo fra $\vec{n}$ e $\vec{v}_r$ è acuto.



$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin\vartheta$$

$$\Downarrow$$

$$2 - 1 + 2 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \sin\vartheta$$

$$3 = 6 \cdot \sin\vartheta \Rightarrow \sin\vartheta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\vartheta = 30°}$$