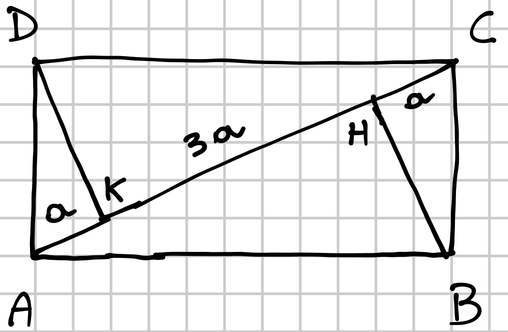
27/4/2021

74 Sia $ABCD$ un rettangolo. Siano H e K, rispettivamente, le proiezioni di B e D sulla diagonale AC del rettangolo. Sapendo che $\overline{HK} = 3a$ e che $\overline{AK} = \overline{CH} = a$, determina il perimetro e l'area del rettangolo.

[Perimetro $= 6a\sqrt{5}$; Area $= 10a^2$]



$\overline{HK} = 3a$

$\overline{AK} = \overline{CH} = a$

$\overline{AC} = \overline{AK} + \overline{KH} + \overline{HC} = a + 3a + a = 5a$ $\qquad$ $\overline{CK} = 3a + a = 4a$

PERIMETRO

$\overline{AD} = ?$

1° TH. EUCLIDE

$\overline{AC} : \overline{AD} = \overline{AD} : \overline{AK}$ $\qquad$ $\left(\overline{AD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AK}\right)$

$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{AK}} = \sqrt{5a \cdot a} = \sqrt{5}\,a$

$\overline{AC} : \overline{DC} = \overline{DC} : \overline{CK}$

$\overline{DC} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{CK}} = \sqrt{5a \cdot 4a} = \sqrt{20a^2} = 2\sqrt{5}\,a$

$2p_{ABCD} = \left(\sqrt{5}\,a + 2\sqrt{5}\,a\right) \cdot 2 = 6\sqrt{5}\,a$

AREA

2° TH. EUCLIDE

Basta calcolare $\mathcal{A} = \sqrt{5}a \cdot 2\sqrt{5}a = 10a^2$

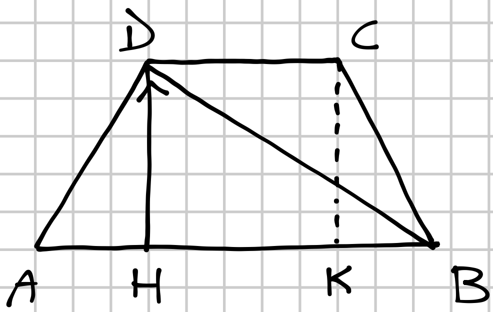
$\overline{KC} : \overline{DK} = \overline{DK} : \overline{AK}$

$\overline{DK} = \sqrt{\overline{KC} \cdot \overline{AK}} = \sqrt{4a \cdot a} = 2a$

calcolo l'area come 2 volte l'area del tr. ACD

$\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_{ACD} = 2 \cdot \frac{1}{2} 5a \cdot 2a = 10a^2$

76 In un trapezio isoscele ciascuna diagonale è perpendicolare al lato obliquo e ha lunghezza di 8 cm. Sapendo che l'altezza del trapezio è 4,8 cm, determina il perimetro del trapezio. [24,8 cm]



$\overline{DH} = 4,8$

$\overline{DB} = 8$

$2p_{ABCD} = ?$

TH. PITAGORA

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{DB}^2 - \overline{DH}^2} = \sqrt{8^2 - 4,8^2} = \sqrt{40,96} = 6,4$$

2° TH. EUCLIDE

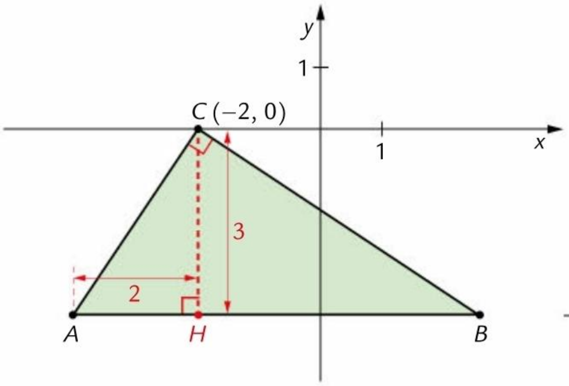
$$\overline{DH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{\overline{DH}^2}{\overline{HB}} = \frac{(4,8)^2}{6,4} = 3,6$$

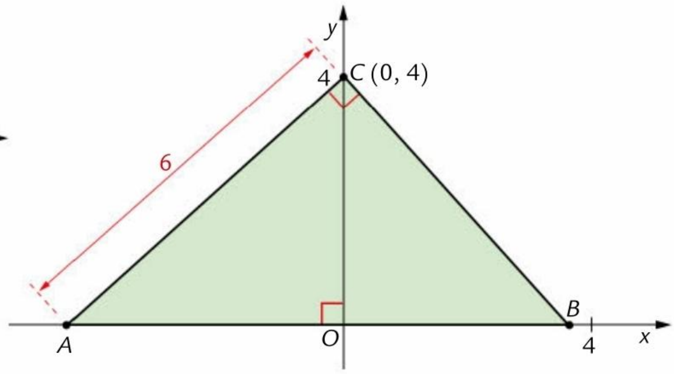
$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{4,8^2 + 3,6^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overline{DC} = \overline{HB} - \underbrace{\overline{KB}}_{=\overline{AH}} = 6,4 - 3,6 = 2,8$$

$$2p_{ABCD} = \underbrace{10}_{\overline{AB} = 6,4 + 3,6} + \overbrace{6 \cdot 2}^{\overline{AD} + \overline{CB}} + \underbrace{2,8}_{\overline{DC}} = 24,8 \Rightarrow \boxed{2p = 24,8 \text{ cm}}$$

67 In ciascuna delle figure, determina le coordinate dei vertici A e B.





$H(-2,-3)$

$\left[A(-4, -3) \text{ e } B\left(\frac{5}{2}, -3\right); A(-2\sqrt{5}, 0) \text{ e } B\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, 0\right)\right]$

$A(-4,-3)$ $\qquad$ $B(x_B,-3)$

DA CALCOLARE

$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$

$\overline{HB} = \frac{\overline{CH}^2}{\overline{AH}} = \frac{9}{2}$

$x_B = -2 + \frac{9}{2} = \frac{-4+9}{2} = \frac{5}{2}$

$B\left(\frac{5}{2}, -3\right)$

$\overline{CO} = 4 \qquad \overline{AC} = 6$

$\overline{AO} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

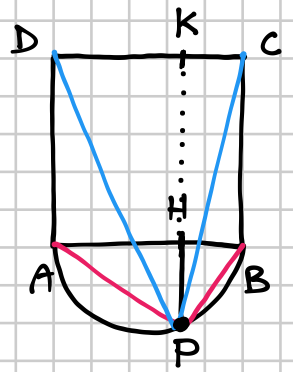
$A(-2\sqrt{5}, 0)$

2° TH. EUCLIDE

$\overline{BO} = \frac{\overline{CO}^2}{\overline{AO}} = \frac{16}{2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$

$B\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, 0\right)$

84 La misura del lato di un quadrato $ABCD$ è $2a$. Traccia la semicirconferenza di diametro AB esterna al quadrato e considera su di essa il punto P tale che, detta H la proiezione di P su AB, sia $\overline{HB} = \frac{1}{2}a$. Determina il valore della somma $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$. $[(16+4\sqrt{3})a^2]$



$$\overline{AB} = 2a$$

$$\overline{HB} = \frac{1}{2}a$$

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = ?$$

APB è un triangolo rettangolo poiché è inscritto in una semicirconferenza

1° TH. EUCLIDE

$$\overline{PB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{HB} \Rightarrow \overline{PB} = \sqrt{2a \cdot \frac{1}{2}a} = a \qquad \overline{PB}^2 = a^2$$

TH. PITAGORA

$$\overline{PA} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BP}^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}\,a \qquad \overline{PA}^2 = 3a^2$$

2° TH. EUCLIDE

$$\overline{PH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2}a\left(2a - \frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{4}a^2$$

$$\overline{PH} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\overline{PK} = \overline{PH} + \overline{HK} = \frac{\sqrt{3}}{2}a + 2a = \frac{\sqrt{3}+4}{2}a$$

$$\overline{PC} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+4}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3+16+8\sqrt{3}+1}{4}}\,a = \sqrt{\frac{20+8\sqrt{3}}{4}}\,a =$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{4}(5+2\sqrt{3})}{\cancel{4}}}\, a = \sqrt{5+2\sqrt{3}}\, a \Rightarrow \overline{PC}^2 = (5+2\sqrt{3})a^2$$

$$\overline{DK} = 2a - \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$$

$$\overline{PD} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+4}{2}a\right)^2 + \frac{9}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3+16+8\sqrt{3}+9}{4}}\, a =$$

$$= \sqrt{\frac{28+8\sqrt{3}}{4}}\, a = \sqrt{\frac{\cancel{4}(7+2\sqrt{3})}{\cancel{4}}}\, a = \sqrt{7+2\sqrt{3}}\, a$$

$$\overline{PD}^2 = (7+2\sqrt{3})a^2$$

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 3a^2 + a^2 + (5+2\sqrt{3})a^2 + (7+2\sqrt{3})a^2 =$$

$$= \boxed{(16+4\sqrt{3})a^2}$$