13/1/2021

294 Nel fascio improprio di rette avente come retta base la retta r: $y = 2x$, determina la retta che interseca gli assi cartesiani in due punti A e B, tali che il punto medio di AB appartenga alla retta di equazione $4x - 2y + 1 = 0$.

$\left[y = 2x + \frac{1}{2}\right]$

FASCIO IMPROPRIO $\quad y = 2x + q$

$A \begin{cases} y = 2x + q \\ x = 0 \quad (\text{ASSE } y) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = q \\ x = 0 \end{cases} \qquad A(0, q)$

$B \begin{cases} y = 2x + q \\ y = 0 \quad (\text{ASSE } x) \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 2x + q \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{q}{2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad B\left(-\frac{q}{2}, 0\right)$

$M_{AB} \qquad x_M = \dfrac{0 - \frac{q}{2}}{2} = -\frac{1}{4}q \qquad y_M = \dfrac{q + 0}{2} = \frac{1}{2}q$

$M_{AB}\left(-\frac{1}{4}q, \frac{1}{2}q\right) \in 4x - 2y + 1 = 0$

CONDIZIONE DI APPARTENENZA DI M_{AB} ALLA RETTA

$\Downarrow$

$4\left(-\frac{1}{4}q\right) - 2\left(\frac{1}{2}q\right) + 1 = 0$

$-q - q + 1 = 0 \qquad -2q = -1 \qquad \boxed{q = \frac{1}{2}}$

$\boxed{y = 2x + \frac{1}{2}}$

295 Nel fascio improprio di rette avente come retta base la retta di equazione $3x - y + 1 = 0$, determina la retta r che interseca l'asse x e l'asse y, rispettivamente, in due punti A e B, tali che il punto medio M di AB abbia ordinata 2. Sia O l'origine degli assi, detti N il punto medio di AO e Q il punto medio di BO, determina l'area del triangolo MNQ.

$\left[r\colon y = 3x + 4,\ \text{Area} = \frac{2}{3}\right]$

$3x - y + 1 = 0 \qquad y = 3x + 1$

FASCIO IMPROPRIO $\qquad y = 3x + q$

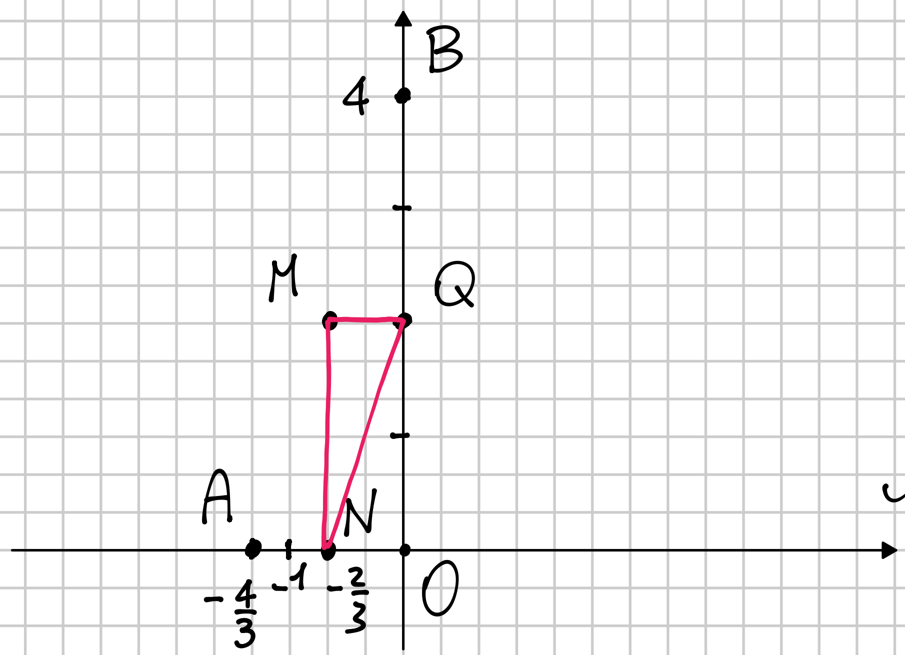
$A \begin{cases} y = 3x + q \\ y = 0 \ (\text{asse } x) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{3}q \\ y = 0 \end{cases} \qquad A\left(-\frac{1}{3}q, 0\right)$

$B \begin{cases} y = 3x + q \\ x = 0 \ (\text{asse } y) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = q \\ x = 0 \end{cases} \qquad B(0, q)$

$M_{AB}\left(\frac{-\frac{1}{3}q + 0}{2}, \frac{0 + q}{2}\right) = \left(-\frac{1}{6}q, \frac{1}{2}q\right)$

M_{AB} ha ordinata 2 $\Rightarrow y_{M_{AB}} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}q = 2 \Rightarrow q = 4$

$\boxed{y = 3x + 4}$



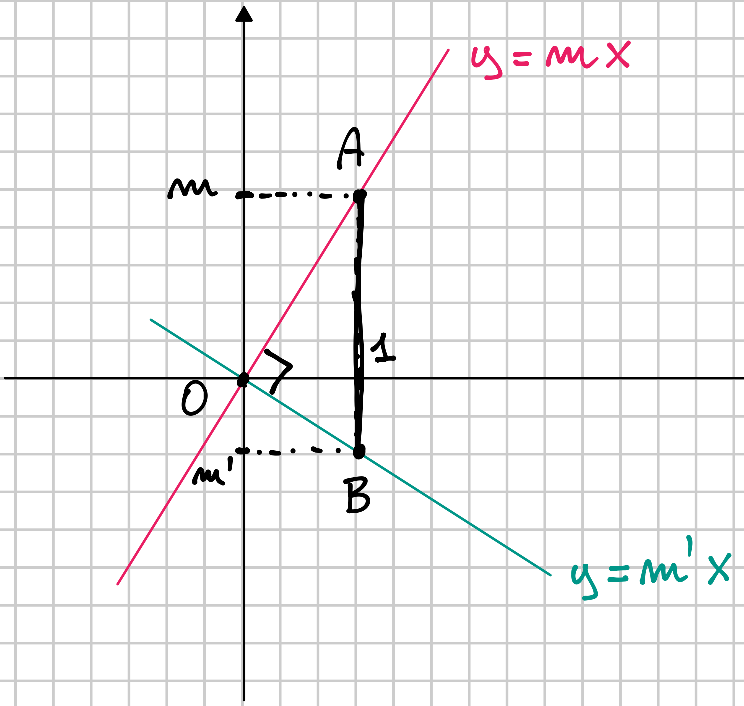
$M\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$

$N\left(-\frac{2}{3}, 0\right) \quad Q(0, 2)$

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\,\overline{MQ} \cdot \overline{MN} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \boxed{\frac{2}{3}}$

CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITÀ



Se anche mi limito a rette per l'origine, la condizione su m ed m' non cambia prendendo rette perpendicolari qualsiasi

AOB è rettangolo $\Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2$ (TH. PITAGORA)

$O(0,0) \quad A(1,m) \quad B(1,m')$

$\overline{OA}^2 = (1-0)^2 + (m-0)^2 =$

$= 1 + m^2$

$\overline{OB}^2 = (1-0)^2 + (m'-0)^2 =$

$= 1 + m'^2$

$\overline{AB}^2 = (1-1)^2 + (m'-m)^2 =$

$= (m'-m)^2$

$$\underbrace{(m'-m)^2}_{\overline{AB}^2} = \underbrace{1+m'^2}_{\overline{OB}^2} + \underbrace{1+m^2}_{\overline{OA}^2}$$

$$\cancel{m'^2} + \cancel{m^2} - 2m'm = 2 + \cancel{m'^2} + \cancel{m^2}$$

$$-2m'm = 2 \Rightarrow \boxed{m'm = -1} \qquad \boxed{m' = -\frac{1}{m}}$$

CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITÀ (FORMA ESPLICITA)