24/1/2018

38 ★★★ Il prodotto scalare tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è uguale a 19 e il modulo di $\vec{a}$ è 7.

- Quanto vale la componente di $\vec{b}$ lungo $\vec{a}$?
- Puoi determinare il modulo di $\vec{b}$?

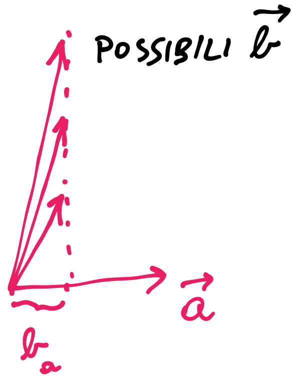
[2,7; no]

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 19$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b_a$$

$$19 = 7 \cdot b_a$$

$$b_a = \frac{19}{7} = 2,71\ldots \simeq 2,7$$



39 ★★★ I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno moduli $a = 6{,}82$ e $b = 9{,}47$ e formano tra loro un angolo di 45°.

- Quanto vale il prodotto scalare $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$?

[46]

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\,b\cos 45° = 6{,}82 \cdot 9{,}47 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 45{,}66\ldots$$

$$\simeq 46$$

44 ★★★ Dati i due vettori $\vec{v}_1 = -2\hat{x} + 3\hat{y}$ e $\vec{v}_2 = -2\hat{x} - 2\hat{y} + 4\hat{z}$, calcola:

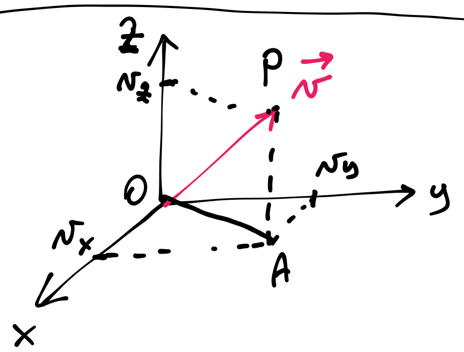
- il loro prodotto scalare;
- il loro modulo;
- l'angolo fra essi compreso.

$[-2; \sqrt{13}, 2\sqrt{6}; 97°]$

$$\vec{v}_1 = (-2, 3, 0) \qquad \vec{v}_2 = (-2, -2, 4)$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 = 4 - 6 = -2$$

$$v_1 = |\vec{v}_1| = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$



$$\overline{OA}^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$v^2 = \overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \underbrace{\overline{AP}^2}_{v_z^2} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\Downarrow$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

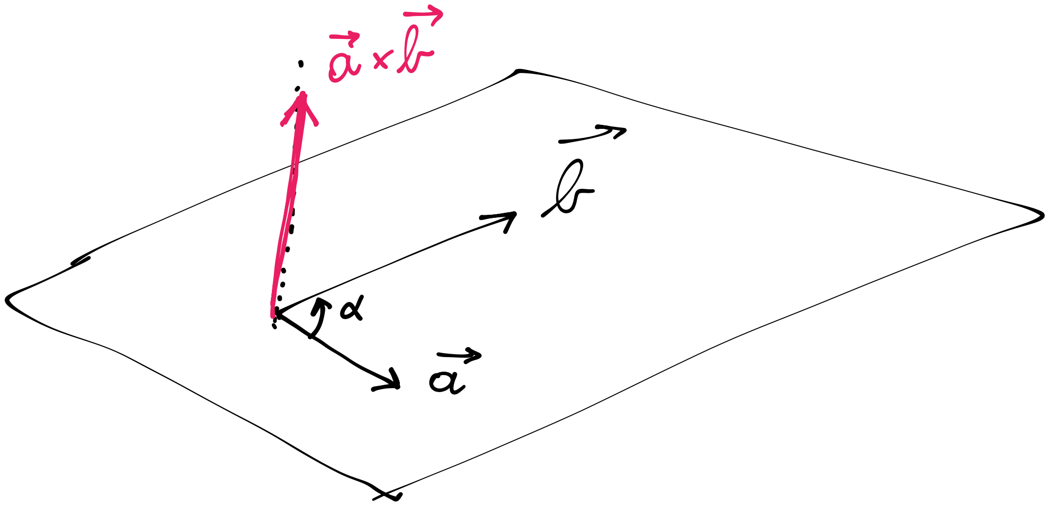
$$v_2 = |\vec{v}_2| = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

L'ANGOLO COMPRESO FRA $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 \cdot v_2 \cdot \cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{v_1 v_2} \implies$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{v_1 v_2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{6}}\right) = 96,501\ldots^{\circ} \simeq \boxed{97^{\circ}}$$

PRODOTTO VETTORIALE



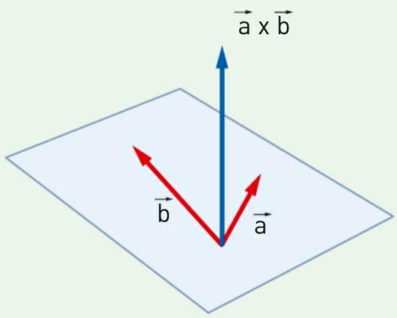
$\vec a \times \vec b$

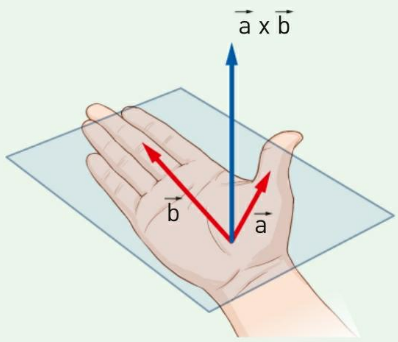
$\vec a$ VETTOR $\vec b$

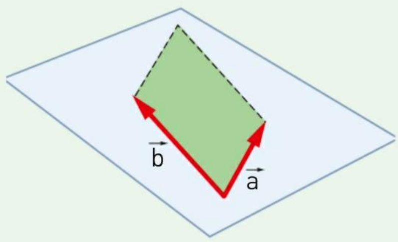
IL RISULTATO È UN VETTORE

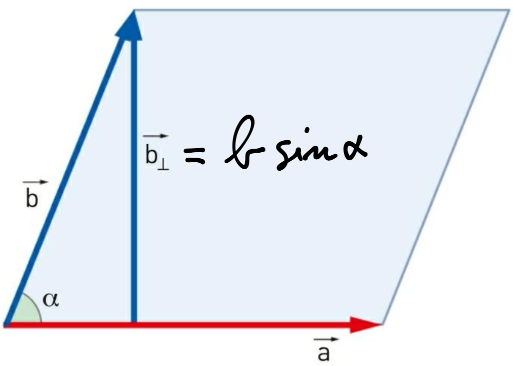
- DIREZIONE = perpendicolare al piano dei 2 vettori $\vec a$ e $\vec b$
- VERSO = secondo la REGOLA DELLA MANO DESTRA
- MODULO = $a b \sin\alpha$

- direzione perpendicolare al piano che contiene i vettori $\vec a$ e $\vec b$;
- verso dato dalla *regola della mano destra* (illustrata nella figura);
- modulo uguale all'area del parallelogramma generato dai vettori $\vec a$ e $\vec b$.









MODULO DI $\vec a \times \vec b$

$$|\vec a \times \vec b| = a b \sin\alpha$$

numericamente è uguale all'area del parallelogramma formato da $\vec a$ e $\vec b$

Il prodotto vettoriale non è commutativo perché

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \quad \text{(ANTICOMMUTATIVO)}$$

Il prodotto vettoriale di 2 vettori paralleli è $\vec{0}$ (vettore nullo)

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = a\, b \sin\alpha$$

se due vettori sono //, allora $\alpha = 0°$ oppure $\alpha = 180°$, ma

$$\sin 0° = \sin 180° = 0$$

quindi il modulo è 0, e il prodotto vettoriale è quindi nullo!

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) = -\vec{b} \times \vec{a}$$