9/5/2019

74 Si estraggono contemporaneamente tre carte da un mazzo da 40 carte. Calcola la probabilità che si presentino:

a. tre figure o tre carte di due semi fissati;

b. tre figure o tre re;

c. tre carte di due semi fissati o tre sette;

d. almeno due figure;

e. almeno una figura.

$\left[\text{a) } \frac{67}{494}; \text{ b) } \frac{11}{494}; \text{ c) } \frac{11}{95}; \text{ d) } \frac{517}{2470}; \text{ e) } \frac{127}{190}\right]$

a) $E_1 =$ "escono 3 figure" $\quad E_2 =$ "escono 3 carte di ♡ o ♢"

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) =$$

$$= \frac{\binom{12}{3}}{\binom{40}{3}} + \frac{\binom{20}{3}}{\binom{40}{3}} - \frac{\binom{6}{3}}{\binom{40}{3}} = \frac{\frac{12!}{3!\,9!} + \frac{20!}{3!\,17!} - \frac{6!}{3!\,3!}}{\frac{40!}{3!\,37!}} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{12}^{\,2} \cdot 11 \cdot 10}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} + \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18}^{\,3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} - \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}}}{\frac{\cancel{40}^{\,20} \cdot \cancel{39}^{\,13} \cdot 38}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}}} =$$

$$= \frac{11 \cdot \cancel{20} + \cancel{20} \cdot 57 - \cancel{20}}{\cancel{20} \cdot 13 \cdot 38} = \frac{11 + 57 - 1}{494} = \boxed{\frac{67}{494}}$$

b) $E_1 =$ "3 figure" $\quad E_2 =$ "3 re"

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) = \frac{11 \cdot \cancel{20}}{\cancel{20} \cdot 13 \cdot 38} = \boxed{\frac{11}{494}}$$

perché $E_2 \subset E_1$

c) $E_1 =$ "3 carte di $\clubsuit$ o $\spadesuit$" $\qquad E_2 =$ "3 sette"

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(\underbrace{E_1 \cap E_2}_{\substack{\text{EVENTO}\\ \text{IMPOSSIBILE}\\ \emptyset}}) = \frac{\binom{20}{3}}{\binom{40}{3}} + \frac{\binom{4}{3}}{\binom{40}{3}} - 0 =$$

$$= \frac{\frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18}^{\,3}}{\cancel{3 \cdot 2}} + 4}{20 \cdot 13 \cdot 38} =$$

$$= \frac{\overset{5}{\cancel{20}} \cdot 19 \cdot 3 + \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{5}{\cancel{20}} \cdot 13 \cdot 38} = \frac{286}{5 \cdot 13 \cdot 38} = \frac{\cancel{143}^{\,11}}{5 \cdot \cancel{13} \cdot 19} = \boxed{\frac{11}{95}}$$

d) $E_1 =$ "3 figure" $\qquad E_2 =$ "2 figure" $\qquad E_1 \cap E_2 = \emptyset$

ESATTAMENTE

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - \underbrace{P(E_1 \cap E_2)}_{0} =$$

$$= \frac{\binom{12}{3}}{\binom{40}{3}} + \frac{\binom{12}{2} \cdot \overbrace{28}^{\text{NON FIGURE}}}{\binom{40}{3}} = \frac{\frac{\overset{2}{\cancel{12}} \cdot 11 \cdot 10}{\cancel{3 \cdot 2}} + \frac{12 \cdot 11}{\cancel{2}} \cdot \cancel{28}^{\,14}}{20 \cdot 13 \cdot 38} =$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot 11 \cdot \overset{5}{\cancel{10}} + \overset{\cancel{6}\,3}{\cancel{12}} \cdot 11 \cdot 14}{\underset{\underset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{20}} \cdot 13 \cdot 38} = \boxed{\frac{517}{2470}}$$

e) $\bar{E}$ = "nessuna figura"

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{40}{3}} = 1 - \frac{\frac{\overset{14}{\cancel{28}} \cdot \overset{9}{\cancel{27}} \cdot 26}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}}}{20 \cdot 13 \cdot 38} =$$

$$= 1 - \frac{\overset{7}{\cancel{14}} \cdot 9 \cdot \overset{\cancel{2}}{\cancel{26}}}{\underset{10}{\cancel{26}} \cdot \cancel{13} \cdot \underset{19}{\cancel{38}}} = 1 - \frac{7 \cdot 9}{10 \cdot 19} = 1 - \frac{63}{190} = \boxed{\frac{127}{190}}$$

49 ●●

Un'urna contiene nove palline numerate da 1 a 9. Si estraggono consecutivamente due palline, senza rimettere la prima pallina estratta nell'urna. Calcola la probabilità che:

a. prima esca una pallina con un numero pari e poi una con un numero dispari;

b. le palline abbiano un numero pari e un numero dispari;

c. entrambe le palline abbiano un numero dispari.

$\left[a)\ \frac{5}{18};\ b)\ \frac{5}{9};\ c)\ \frac{5}{18}\right]$

a) CASI POSSIBILI

$$U = \{(1,2), (1,3), \ldots, (2,1), (2,3), \ldots, (8,7), (8,9)\}$$

$$|U| = D_{9,2} = 9 \cdot 8$$

CASI FAVOREVOLI

$$E = \{(2,1), (2,3), (2,5), \ldots, (8,5), (8,7), (8,9)\}$$

$$|E| = 4 \cdot 5$$

NUMERI PARI 2, 4, 6, 8

NUMERI DISPARI 1, 3, 5, 7, 9

$$P(E) = \frac{|E|}{|U|} = \frac{\cancel{4} \cdot 5}{9 \cdot \cancel{8}_2} = \boxed{\frac{5}{18}}$$

b) $E = \{(2,1),(2,3),(2,5),\dots,(8,5),(8,7),(8,9),$

$(1,2),(3,2),(5,2),\dots,(5,8),(7,8),(9,8)\}$

$|E| = 4\cdot 5 + 5\cdot 4 = 4\cdot 5\cdot 2$

$P(E) = \frac{\cancel{4}\cdot 5\cdot \cancel{2}}{9\cdot \cancel{8}} = \boxed{\frac{5}{9}}$

c) $E = \{(1,3),(1,5),(1,7),(1,9),(3,1),(3,5),\dots,(9,5),(9,7)\}$

$|E| = 5\cdot 4$

$P(E) = \frac{5\cdot \cancel{4}}{9\cdot \cancel{8}_2} = \boxed{\frac{5}{18}}$

52 ●●

Voglio prenotare due posti nella decima fila del cinema. Se la fila ha 20 posti numerati dall'81 al 100, calcola la probabilità che:

a. i due posti si trovino tra il numero 91 e il numero 100;

b. i due posti siano vicini. $\left[\text{a) } \frac{9}{38}; \text{ b) } \frac{1}{10}\right]$

a) $|U| = \binom{20}{2} = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

$|E| = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

$P(E) = \frac{45}{190} = \boxed{\frac{9}{38}}$

b) $E = \{\{81, 82\}, \{82, 83\}, \{83, 84\}, \dots, \{99, 100\}\}$

$|E| = 19$ $\qquad P(E) = \frac{19}{190} = \boxed{\frac{1}{10}}$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

DEFINIZIONE

Dati due eventi E_1 ed E_2, con $p(E_2) \neq 0$, si chiama **probabilità condizionata** di E_1 rispetto a E_2, e si indica con $p(E_1 | E_2)$, la probabilità che si verifichi E_1 nell'ipotesi che E_2 sia verificato.

Se $p(E_1 | E_2) = p(E_1)$, cioè le conoscenze ulteriori sul verificarsi di E_2 non modificano la probabilità di E_1, si dice che gli eventi sono **indipendenti**.
Se invece $p(E_1 | E_2) \neq p(E_1)$, cioè le conoscenze ulteriori sul verificarsi di E_2 modificano la probabilità di E_1, si dice che gli eventi sono **dipendenti**.

TEOREMA

La probabilità condizionata di un evento E_1 rispetto a un evento E_2, non impossibile, è:

$$p(E_1 | E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)},$$

con $p(E_2) \neq 0$.

$$\Rightarrow \quad P(E_1 \cap E_2) = P(E_2)\, P(E_1 | E_2)$$

[vale anche

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1)$$]

In particolare, se A e B sono <u>EVENTI INDIPENDENTI</u> (STOCASTICAMENTE) si ha

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>

Se A e B sono INDIPENDENTI, si ha $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$

ESEMPIO

Qual è la probabilità di ottenere TT in 2 lanci consecutivi di una moneta?

A = "T al 1° lancio" B = "T al 2° lancio"

A e B sono INDIPENDENTI $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$

$A \cap B$ = "T al 1° lancio e T al 2° lancio"

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

91 ●●

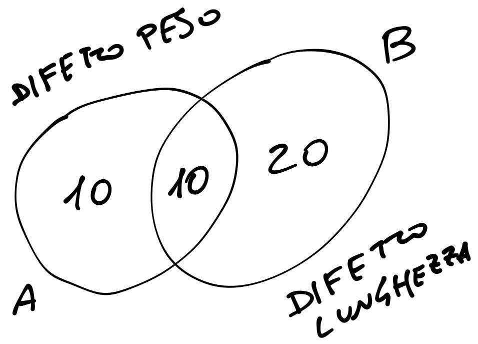
Una macchina produce pezzi meccanici e, su una produzione di 400 pezzi, 20 sono difettosi per peso, 30 per lunghezza e 360 sono perfetti. Calcola la probabilità che, prendendo a caso un pezzo:

a. sia difettoso;

b. abbia entrambi i difetti;

c. sia difettoso per peso, sapendo che anche la lunghezza non è corretta.

$\left[\text{a) } \frac{1}{10}; \text{ b) } \frac{1}{40}; \text{ c) } \frac{1}{3}\right]$



$$\overset{40}{|A \cup B|} = \overset{20}{|A|} + \overset{30}{|B|} - \overset{?}{|A \cap B|}$$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = 20 \\ |B| = 30 \\ |A \cup B| = 40 \end{array}\right| \Rightarrow |A \cap B| = 10$$

a) $P(E) = P(A \cup B) = \dfrac{|A \cup B|}{|U|} = \dfrac{40}{400} = \boxed{\dfrac{1}{10}}$

b) $P(E) = P(A \cap B) = \dfrac{|A \cap B|}{|U|} = \dfrac{10}{400} = \boxed{\dfrac{1}{40}}$

c) E_1 = "difettoso per peso"

E_2 = "difettoso per lunghezza"

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{30}{400}} = \frac{1}{\cancel{40}} \cdot \frac{\cancel{400}}{3\cancel{0}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

94 Calcola la probabilità che, lanciando quattro monete, la faccia testa esca due volte, sapendo che è uscita almeno una volta. $\left[\frac{2}{5}\right]$

$E_1 =$ "esce T esattamente 2 volte"

$E_2 =$ "esce T almeno 1 volta"

perché $E_1 \subset E_2$

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(E_1)}{P(E_2)}$$

$|U| = 2^4 \qquad U = \{TTTT, TTTC, CTCT, \dots\}$

$$|E_1| = P_4^{(2,2)} = \frac{4!}{2 \cdot 2} = 6 \implies P(E_1) = \frac{6}{2^4}$$

$$P(E_2) = 1 - P(\bar{E}_2) = 1 - \frac{1}{2^4} = \frac{2^4 - 1}{2^4}$$

UNICO CCCC

$$P(E_1|E_2) = \frac{\frac{6}{2^4}}{\frac{2^4-1}{2^4}} = \frac{6}{16-1} = \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{15}_{\,5}} = \boxed{\frac{2}{5}}$$