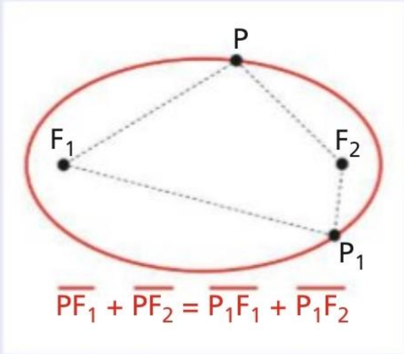
# ELLISSE NEL PIANO CARTESIANO

**DEFINIZIONE**

Assegnati nel piano due punti, $F_1$ e $F_2$, si chiama **ellisse** il luogo geometrico dei punti $P$ del piano tali che sia costante la somma delle distanze di $P$ da $F_1$ e da $F_2$:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \textbf{costante}.$$

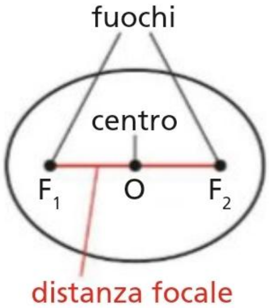


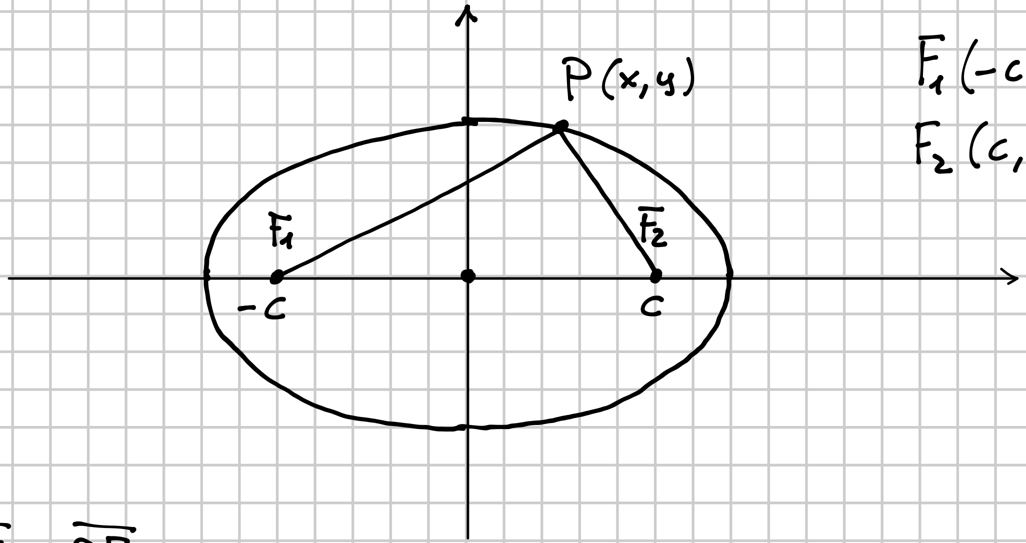

$F_1$ e $F_2$ sono i **fuochi** dell'ellisse.
Il punto medio del segmento $F_1F_2$ è il **centro** dell'ellisse.

Indichiamo con:

$2c$ la distanza tra $F_1$ e $F_2$, detta **distanza focale**;

$2a$ la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi.




$F_1(-c,0)$
$F_2(c,0)$

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

elevo al quadrato

$$\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+2cx+\cancel{y^2} = 4a^2+\cancel{x^2}+\cancel{c^2}-2cx+\cancel{y^2}-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \cancel{4}a^2 - \cancel{4}cx \Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

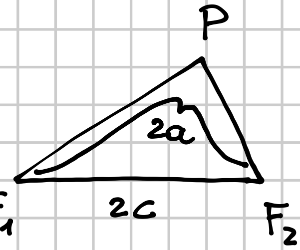
elevo al quadrato

$$a^2\left[x^2+c^2-2cx+y^2\right] = a^4+c^2x^2-2a^2cx$$

$$a^2x^2+a^2c^2-\cancel{2a^2cx}+a^2y^2 = a^4+c^2x^2-\cancel{2a^2cx}$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$




$2a > 2c$ perché in un triangolo la somma di 2 lati è maggiore del terzo lato

$$\Downarrow$$

$$a > c$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 > c^2$$

$$a^2 - c^2 > 0$$

PONGO $a^2-c^2 = b^2$

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

divido per $a^2b^2$

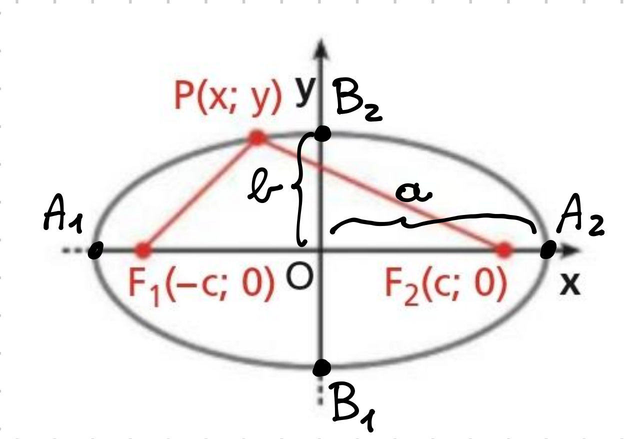
$$\frac{x^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}} + \frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2} = \frac{\cancel{a^2b^2}}{\cancel{a^2b^2}}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

EQUAZIONE CANONICA DELL'ELLISSE

## OSSERVAZIONE

Anche se abbiamo elevato al quadrato 2 volte, non si sono aggiunti punti, ovvero l'equazione ottenuta rappresenta proprio l'ellisse (si può dimostrare)




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$F_1(-c,0)$ FUOCHI SULL'ASSE X
$F_2(c,0)$

$$b^2=a^2-c^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} A_1(-a,0) & A_2(a,0) \\ B_1(0,-b) & B_2(0,b) \end{array}\right]\text{ VERTICI}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0 \quad \text{ASSE X}\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a \\ y=0\end{cases}$$

$a$ = SEMIASSE MAGGIORE

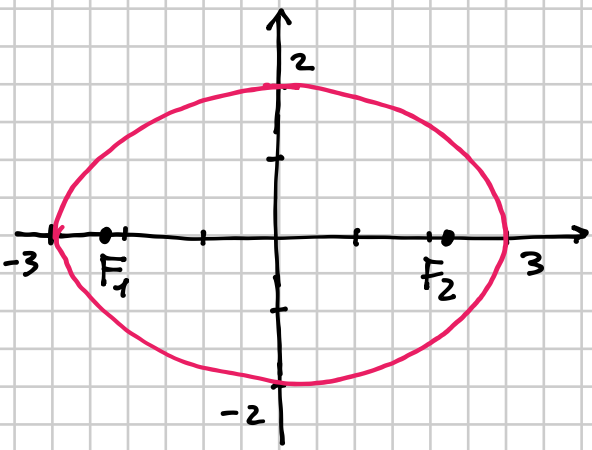
$b$ = SEMIASSE MINORE

ESEMPI

1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$a^2=9 \Rightarrow a=3$

$b^2=4 \Rightarrow b=2$

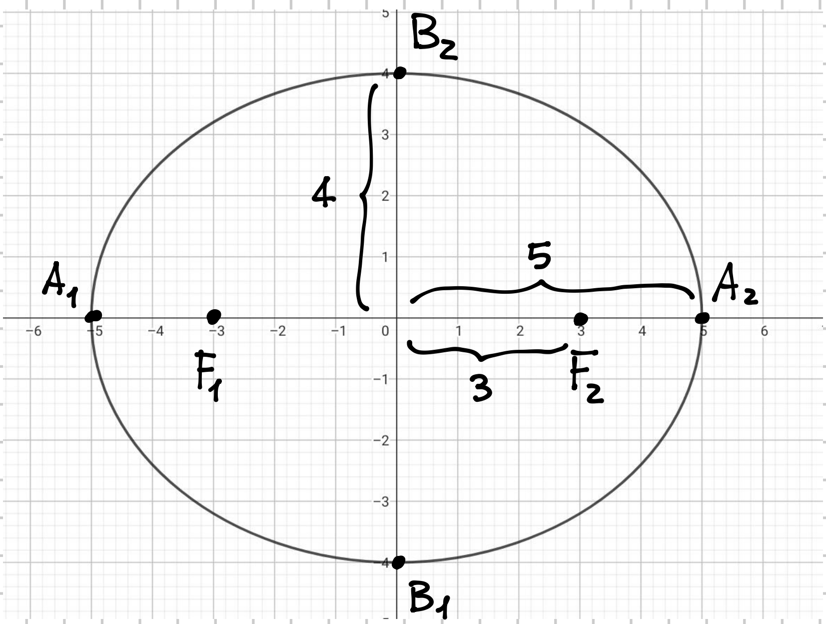



$c^2=a^2-b^2=$

$=9-4=5$

$c=\sqrt{5}$ $\quad F_1(-\sqrt{5},0)$ $\quad F_2(\sqrt{5},0)$

2)




$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

$a=5 \quad b=4$

$c=\sqrt{25-16}=3$

$A_1(-5,0)$ $A_2(5,0)$

$B_1(0,-4)$ $B_2(0,4)$

$F_1(-3,0)$ $F_2(3,0)$