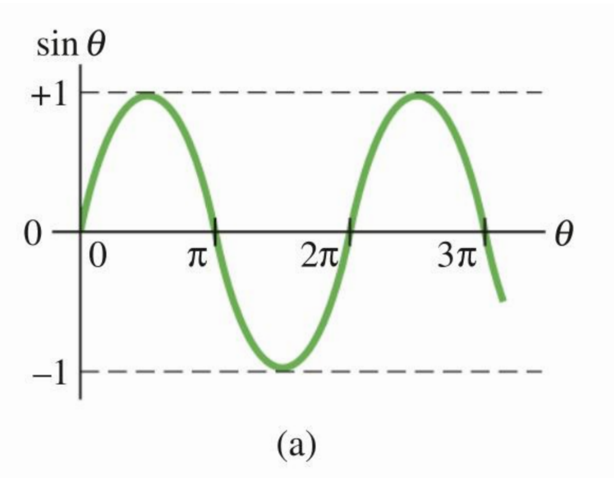
PUNTUALIZZAZIONI SU VALORE MEDIO E VALORE EFFICACE 28/11/2019

Dato una funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,b]$, si dice <u>VALOR MEDIO DI f SU $[a,b]$</u> il numero

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

che corrisponde al valore di una funzione costante che ha lo stesso integrale di f su $[a,b]$.



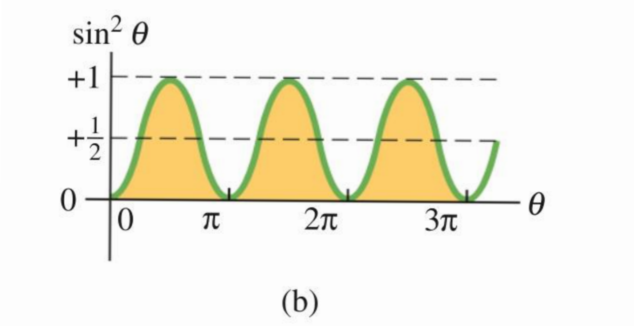


Figura 35.17 (a) Un grafico di $\sin\theta$ in funzione di θ. Il suo valore medio su un periodo è zero. (b) Un grafico di $\sin^2\theta$ in funzione di θ. Il suo valor medio su un periodo è $\frac{1}{2}$.

(Si noti in figura 35.17b come le parti ombreggiate della curva che giacciono sopra la linea orizzontale corrispondente a $\frac{1}{2}$ siano esattamente equivalenti agli spazi bianchi al di sotto della stessa linea.)

Se consideriamo la densità volumica di energia del campo elettrico:

$$w_{\vec{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$E = E(t)$, cioè E varia nel tempo, secondo una funzione sinusoidale

$$E = E_0 \sin[k(x-ct)]$$

dunque $w_{\vec{E}}$ è del tipo COSTANTE $\cdot \sin^2$, per cui il suo valor medio è COSTANTE $\cdot \frac{1}{2}$, cioè proprio $\boxed{\overline{w}_{\vec{E}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2}$

Dunque $\quad w_{\vec{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad$ e $\quad \overline{w}_{\vec{E}} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2$

Qual è il valore COSTANTE di E per cui $w_{\vec{E}} = \overline{w}_{\vec{E}}$?

Tale numero si chiama VALORE EFFICACE di E e corrisponde a

$$E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

infatti

$$w_{\vec{E}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{E_0}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 = \overline{w}_{\vec{E}}$$

E_{eff} è perciò il valore costante di un campo con la densità volumica di energia uguale a quella media.

2. Una lampadina ad incandescenza, alimentata con tensione alternata pari a 220 V, assorbe una potenza elettrica media pari a $1{,}0 \cdot 10^2\ W$ ed emette luce grazie al surriscaldamento di un filamento di tungsteno, con

$$\frac{Potenza\ media\ luminosa\ emessa}{Potenza\ media\ elettrica\ assorbita} = 2\%$$

Ipotizzando per semplicità che la lampadina sia una sorgente puntiforme che emette uniformemente in tutte le direzioni, e che la presenza dell'aria abbia un effetto trascurabile, calcolare ad una distanza $d = 2{,}0m$ dalla lampadina:

a) l'intensità media della luce; → IRRADIAMENTO

b) i valori efficaci del campo elettrico e del campo magnetico.

a) $$\frac{P_S}{P_{ASS.}} = 0{,}02$$

$$P_S = 0{,}02 \cdot P_{ASS.} = 0{,}02 \cdot 1{,}0 \times 10^2\ W = 2{,}0\ W$$

INTENSITÀ MEDIA (IRRADIAMENTO) $$E_R = \frac{P_S}{4\pi d^2} = \frac{2{,}0\ W}{4\pi\,(2{,}0\ m)^2} =$$

$$= 0{,}03978\ldots \frac{W}{m^2} \simeq \boxed{4{,}0 \times 10^{-2}\ \frac{W}{m^2}}$$

b) $$E_R = \frac{1}{2} c\,\varepsilon_0 E_0^2 \Rightarrow \frac{E_0^2}{2} = \frac{E_R}{c\,\varepsilon_0}$$

$$E_{eff.} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{E_R}{c\,\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{3{,}978\ldots \times 10^{-2}\ W/m^2}{\left(3{,}0 \times 10^8\ \frac{m}{s}\right)\left(8{,}854 \times 10^{-12}\ \frac{C^2}{N \cdot m^2}\right)}} =$$

$$= 0{,}3869\ldots \times 10^1\ \frac{N}{C} \simeq \boxed{3{,}9\ \frac{N}{C}}$$

$$B_{eff.} = \frac{E_{eff.}}{c} = \frac{3{,}869\ldots}{3{,}0 \times 10^8}\ T = 1{,}2899\ldots \times 10^{-8}\ T \simeq \boxed{1{,}3 \times 10^{-8}\ T}$$

35 ★★★

I laser ad alta potenza hanno applicazioni industriali per il taglio di diversi materiali, metalli o plastiche. Considera un laser che concentra in un fascio del ~~diametro~~ RAGGIO di 0,50 mm un'onda elettromagnetica la cui ampiezza massima del campo elettrico è $7{,}1 \times 10^5$ V/m.

▶ Quale potenza produce questo laser?

▶ Che intensità massima ha il campo magnetico prodotto?

[$5{,}3 \times 10^2$ W; $2{,}4 \times 10^{-3}$ T]

$$E_R = \frac{P_S}{A} \Rightarrow \qquad P_S = E_R \cdot A = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(3{,}0 \times 10^8 \frac{m}{s}\right)\left(8{,}854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}\right)\left(7{,}1 \times 10^5 \frac{V}{m}\right)^2 \left(0{,}50 \times 10^{-3} m\right)^2 \pi =$$

$$= 525{,}82 \text{ W} \simeq \boxed{5{,}3 \times 10^2 \text{ W}}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{7{,}1 \times 10^5 \text{ V/m}}{3{,}0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2{,}36\ldots \times 10^{-3} \text{ T} \simeq \boxed{2{,}4 \times 10^{-3} \text{ T}}$$

36 ★★★ All'istante $t = 0$ s il profilo di un'onda elettromagnetica è descritto dalla funzione seguente:

$$E = (20\ \mathrm{N/C}) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{x}{3{,}1 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}}\right).$$

▶ Quali sono l'ampiezza massima del campo elettrico e del campo magnetico dell'onda?

[20 N/C; 6,7 × 10⁻⁸ T]

$$E = E_0 \cos(k(x - c\underbrace{t}_{t=0}))$$

E_0: $20\ \frac{N}{C}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ← LUNGHEZZA D'ONDA

$\lambda = 3{,}1 \times 10^{-2}\ m$

(MICROONDE)

$$\boxed{E_0 = 20\ \frac{N}{C}}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{20\ N/C}{3{,}0 \times 10^8\ m/s} \simeq \boxed{6{,}7 \times 10^{-8}\ T}$$

38 ★★★ Un'antenna radio emette radiazioni elettromagnetiche alla potenza di 100 W.

▶ A partire da quale distanza dall'antenna il campo magnetico emesso ha ampiezza massima minore di 1,0 μT?

[26 cm]

$$E_R = \frac{P_S}{A} = \frac{P_S}{4\pi R^2}$$

$$E_R = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 c^2 B_0^2 = \frac{1}{2} c \cancel{\varepsilon_0} \frac{1}{\cancel{\varepsilon_0}\mu_0} B_0^2 = \frac{1}{2\mu_0} c B_0^2$$

$$\frac{P_S}{4\pi R^2} = \frac{1}{2\mu_0} c B_0^2$$

$$\Downarrow$$

$$B_0^2 = \frac{\cancel{2}\mu_0 P_S}{\underset{2}{\cancel{4}}\pi R^2 c} \Rightarrow B_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\mu_0 P_S}{2\pi c}} < 1{,}0\,\mu T$$

$$\Rightarrow R > \frac{1}{1{,}0 \times 10^{-6}\, T} \sqrt{\frac{\left(4\cancel{\pi} \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}\right)(100\, W)}{2\cancel{\pi}\left(3{,}00 \times 10^{8} \frac{m}{s}\right)}} =$$

$$= 2{,}5819\ldots \times 10^{-1}\, m \simeq 0{,}26\, m = \boxed{26\, cm}$$