TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

22/1/2019

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$P(z)$ POLINOMIO DI GRADO n A COEFFICIENTI IN $\mathbb{C}$

a COEFFICIENTE DI z^n IN $P(z)$

$\Rightarrow \exists\, z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tali che

$$P(z) = a(z - z_1)\cdot(z - z_2)\cdot\ldots\cdot(z - z_n)$$

EQUIVALENTEMENTE

$P(z)=0$

Ogni equazione algebrica di grado n in campo complesso ha n soluzioni, pur di contare ogni soluzione secondo la sua molteplicità.

COROLLARIO

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$P(z)$ POLINOMIO DI GRADO n A COEFFICIENTI IN $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Le soluzioni non reali dell'eq. $P(z)=0$ sono a 2 a 2 coniugate e 2 soluzioni coniugate hanno la stessa molteplicità

$\Rightarrow$ Ogni equazione algebrica di grado dispari ha almeno una soluzione reale

EQUAZIONI DI 2° GRADO

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{C} \quad a \neq 0$$

$$\Rightarrow \qquad z = \frac{-b + r}{2a} \quad \vee \quad z = \frac{-b - r}{2a}$$

dove r è uno delle due radici quadrate di $\Delta = b^2 - 4ac$

Nel caso in cui $a, b, c \in \mathbb{R}$ possiamo scrivere

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(ricordando che nel caso $\Delta < 0$ $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{|\Delta|}$)

ESERCIZI

Risolvere l'eq. in $\mathbb{C}$

$$z^2 + z + 1 = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad \vee \quad z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

PROVA

Sostituisco una delle 2 soluzioni nell'equazione

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + 1 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} i^2 + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} i - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} i + 1 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - 3 - 2 + 4}{4} = 0 \quad \text{ok!}$$