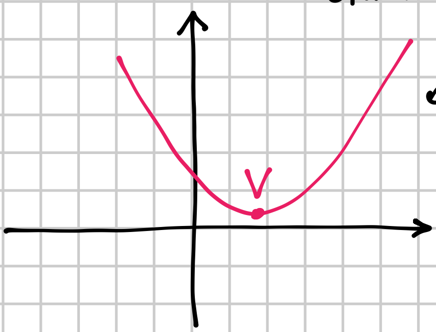
PARABOLA

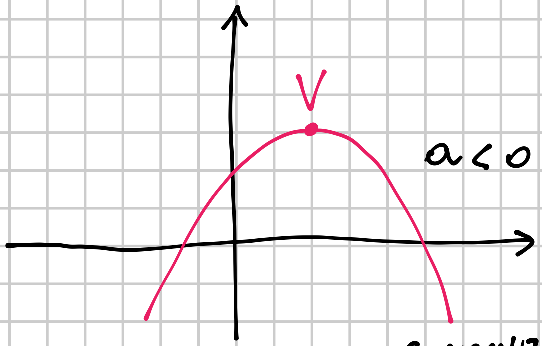
$y = ax^2 + bx + c$

VERTICE $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

CONCAVITÀ VERSO L'ALTO



$a > 0$



$a < 0$

CONCAVITÀ VERSO IL BASSO

Disegniamo la parabola $y = 2x^2 - x - 1$

$a = 2$

$b = -1$

$c = -1$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1+8}{8} = -\frac{9}{8}$$

VERTICE

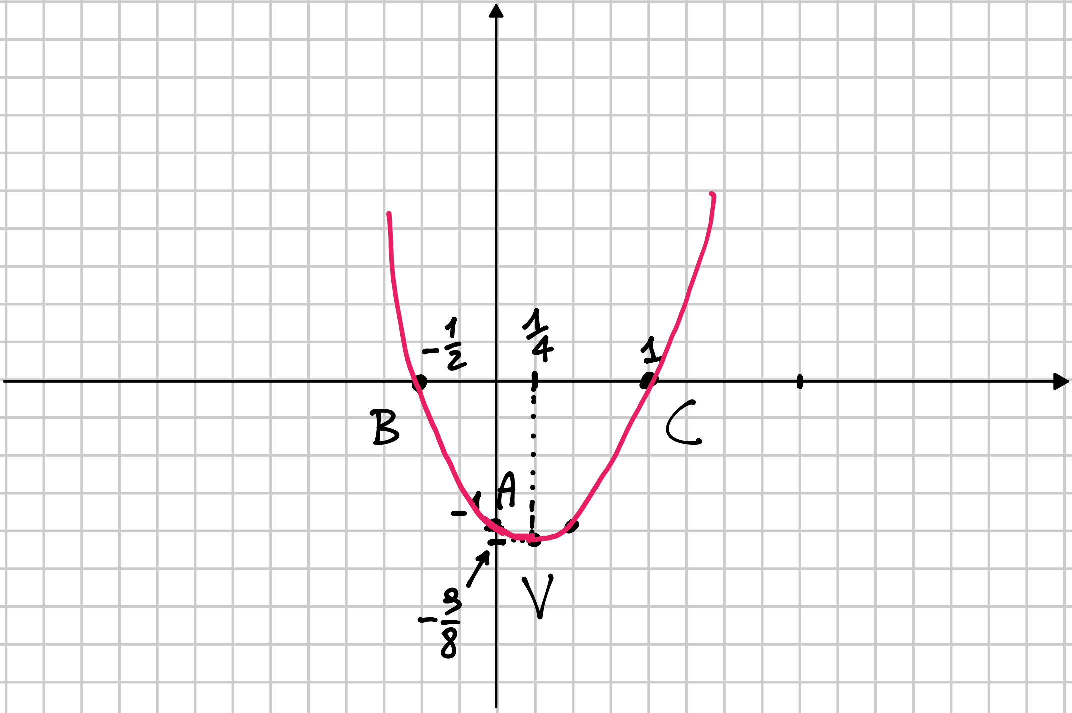
$V\left(\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

x	y
0	-1
$-\frac{1}{2}$	0
1	0

$2 \cdot 0^2 - 0 - 1$

$0 = 2x^2 - x - 1 \rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 9 \quad x = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$



$V\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}\right)$

$A(0,-1)$

$B\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$C(1,0)$

INTERPRETAZIONE GRAFICA DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

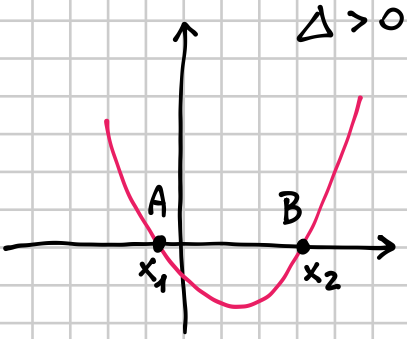
Consideriamo una equazione di 2° grado (in forma normale, con $a>0$)

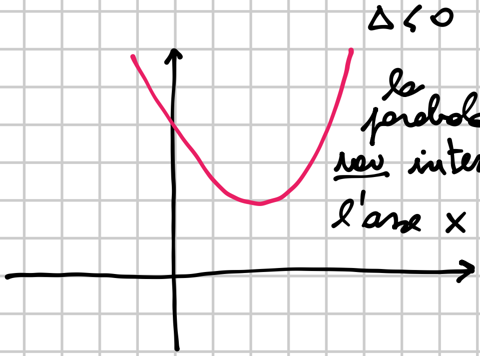
se non è $a>0$ cambiamo i segni

$$ax^2+bx+c=0$$

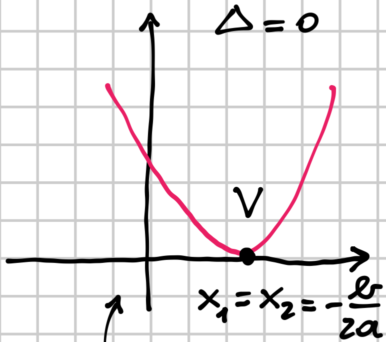
$$\Downarrow$$

consideriamo la corrispondente parabola $y=ax^2+bx+c$





la parabola **non** interseca l'asse x



$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

il vertice è sull'asse x

$A(x_1,0)$
$B(x_2,0)$

x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c=0$

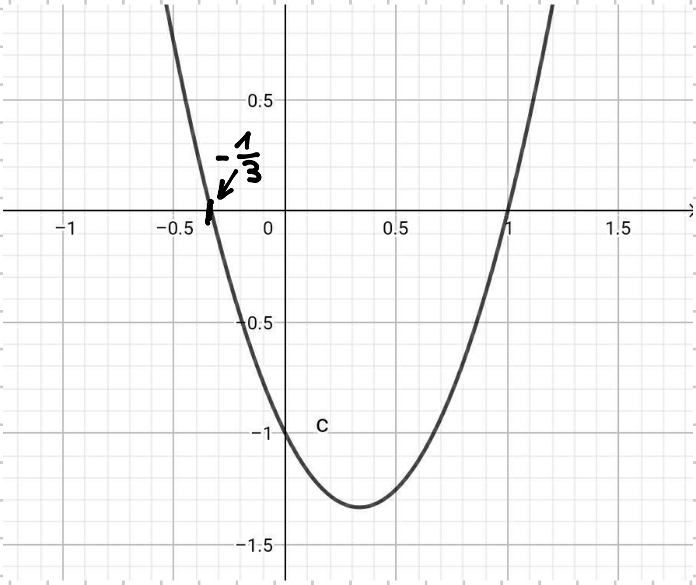
$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \quad \text{(eq. asse } x\text{)} \end{cases}$$

ESEMPI

1) $y = 3x^2 - 2x - 1$

$3x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 1 + 3 = 4$

$x = \frac{1 \pm 2}{3} = \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{cases}$

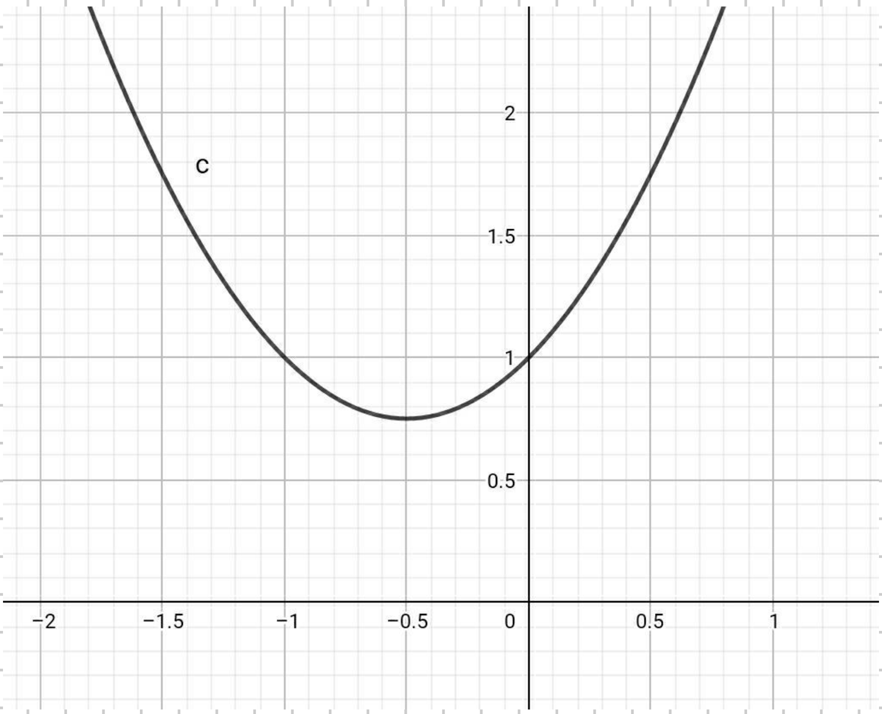


2) $y = x^2 + x + 1$

$x^2 + x + 1 = 0 \qquad \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

IMP.

non ci sono intersezioni
con l'asse x

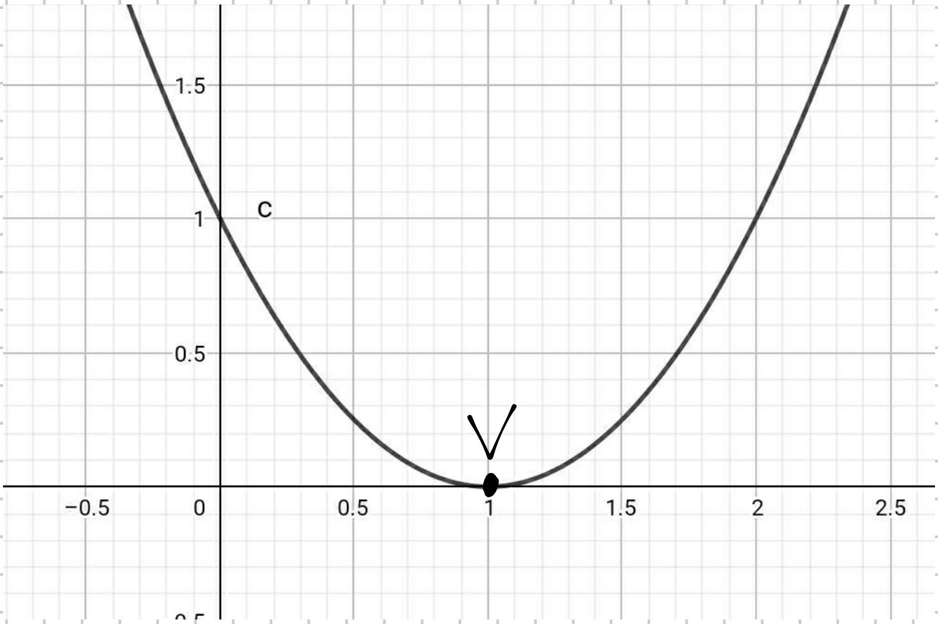


3) $y = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 1 - 1 = 0$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$

Il vertice è sull'asse x,
ed è il punto $V(1, 0)$



Consideriamo ora la disequazione

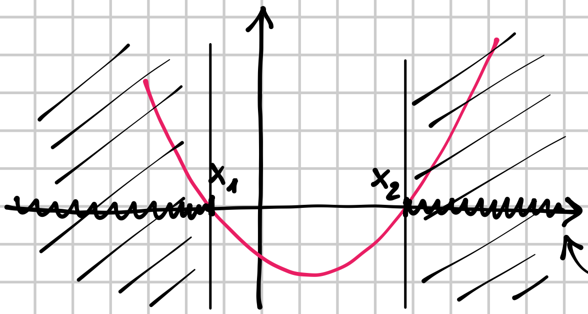
$$ax^2+bx+c>0 \qquad (a>0)$$

$\Delta>0$

Ci sono 2 radici $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

la soluzione della disequazione è

$$x<x_1 \quad \vee \quad x>x_2$$

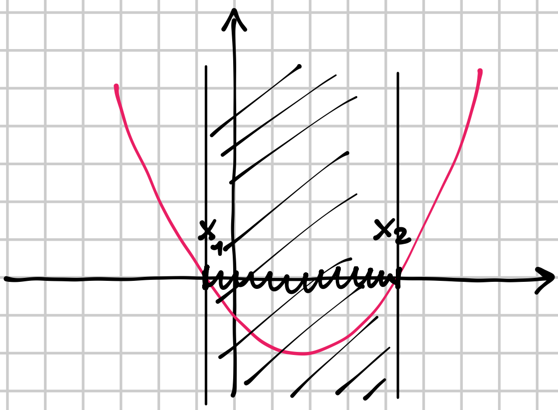


in corrispondenza della parte segnata la parabola sta sopra l'asse x, cioè è $y=ax^2+bx+c>0$

Se considero $ax^2+bx+c<0 \quad (a>0)$

$\Delta>0$ la soluzione è $x_1<x<x_2$

è la zona (intervallo) in cui la parabola sta sotto l'asse x (cioè è $y=ax^2+bx+c<0$)



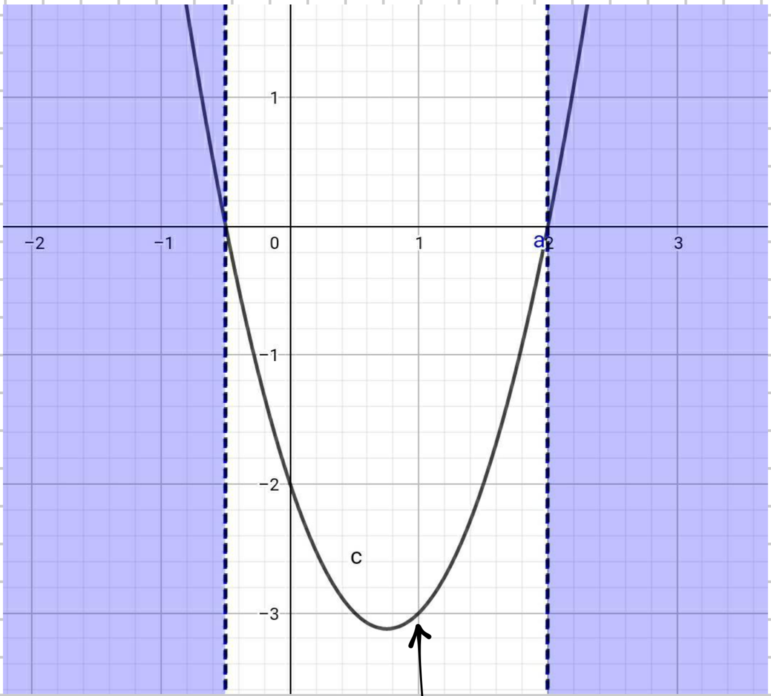
ESEMPI

1) $2x^2 - 3x - 2 > 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

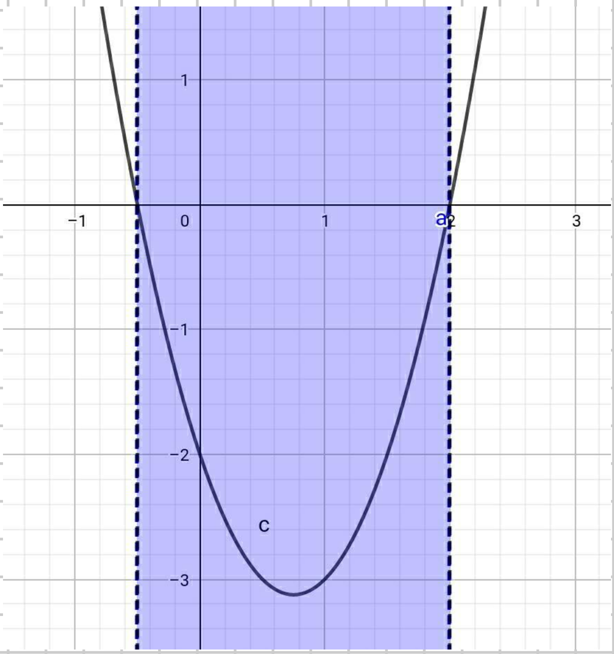
$$x = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{cases}$$

$x < -\frac{1}{2} \ \vee \ x > 2$



le zone viola corrispondono agli intervalli $x < -\frac{1}{2} \ \vee \ x > 2$ in cui la parabola sta sopra l'asse x

$y = 2x^2 - 3x - 2$



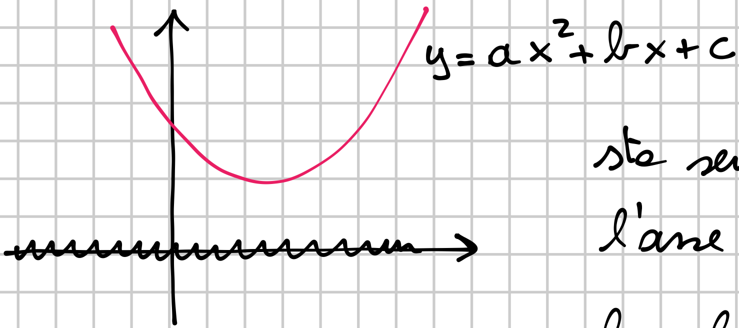
la zona viola corrisponde alla soluzione dell'equazione

$2x^2 - 3x - 2 < 0$

Se la disequazione è

$$ax^2+bx+c>0 \qquad (a>0)$$

con $\Delta<0$, la situazione è

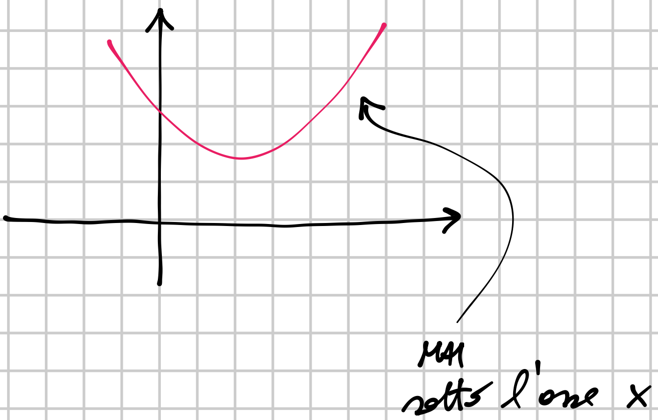


sta sempre sopra l'asse x, quindi la soluzione della disequazione è $\forall x \in \mathbb{R}$

Se la disequazione è

$$ax^2+bx+c<0 \qquad (a>0)$$

con $\Delta<0$

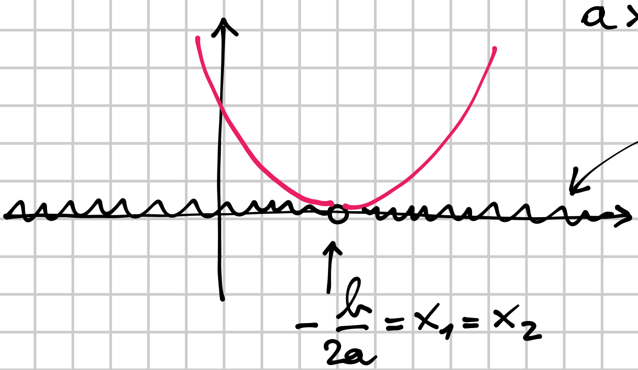


la soluzione è $\emptyset$ (IMPOSSIBILE): non esiste nessun x in corrispondenza del quale la parabola sta sotto l'asse x ($\nexists x$ tale che $y=ax^2+bx+c<0$)

Se $\Delta = 0$

$(a > 0)$

$ax^2+bx+c>0$

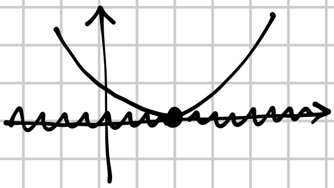


la parabola sta sopra l'asse x in corrispondenza di ogni x tale che

$x \neq -\frac{b}{2a}$

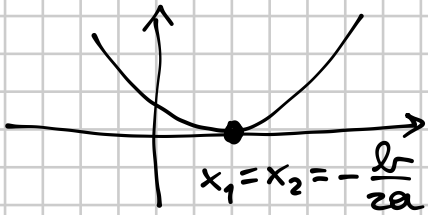
e quindi la diseq. $ax^2+bx+c<0$ è invece impossibile

$ax^2+bx+c \geq 0$



$\forall x \in \mathbb{R}$

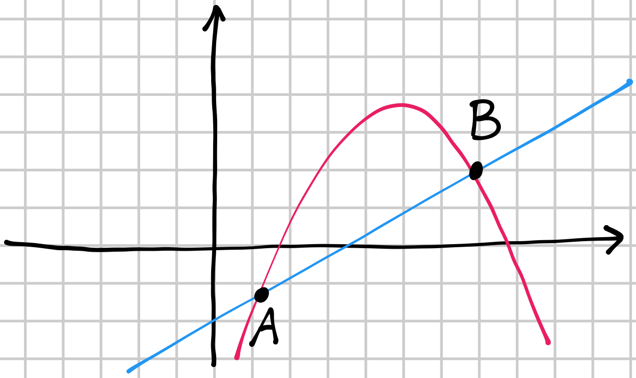
$ax^2+bx+c \leq 0$



$x = -\frac{b}{2a}$

$\Delta = 0$

INTERSEZIONI PARABOLA - RETTA



I punti di intersezione sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

ESEMPI

1) $y = x^2 - 3x + 2$ parabola $\qquad y = x - 1$ retta

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$ EQUAZIONE RISOLVENTE

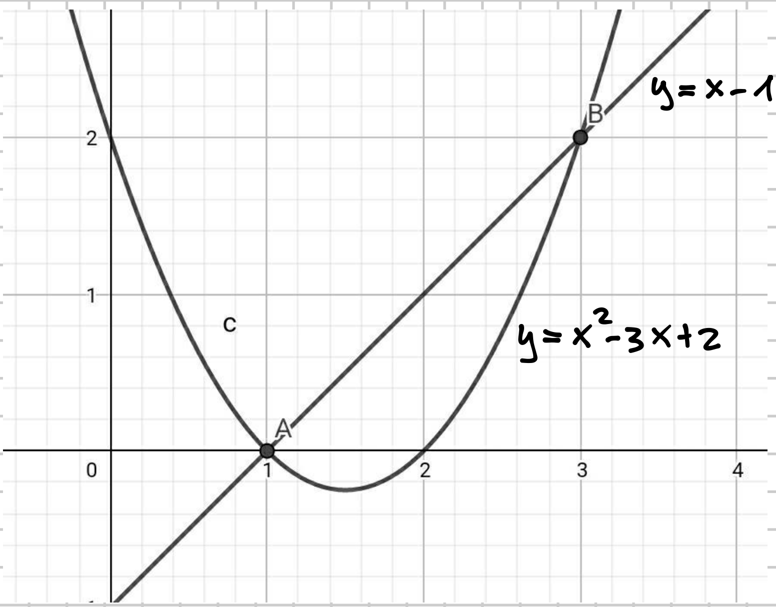
$$x^2 - 3x + 2 = x - 1$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1$$

$$x = 2 \pm 1 = \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

$A(1, 0) \qquad B(3, 2)$



Se $\Delta > 0$ nell'eq. risolvente, la retta interseca la parabola in 2 punti distinti

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = 3x - 7 \end{cases}$$

Cerchiamo le intersezioni tra la parabola e la retta

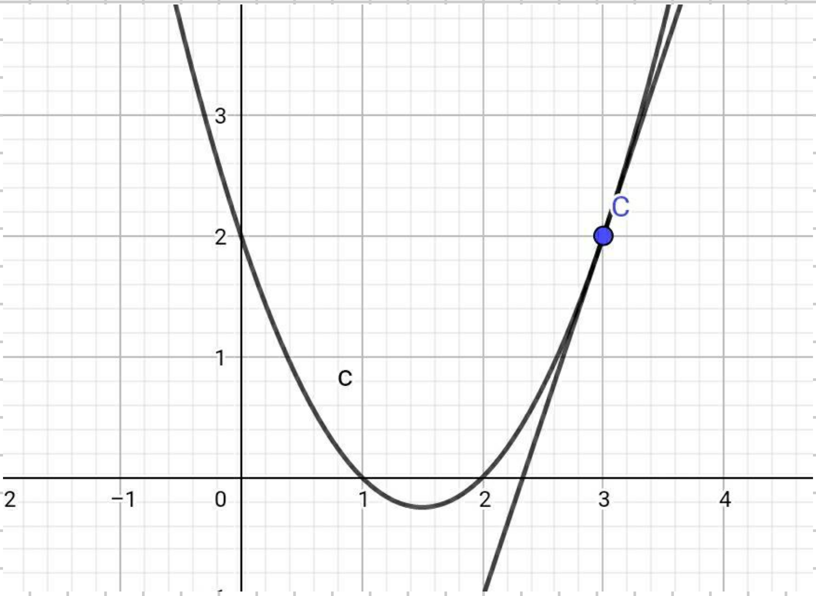
$$\frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 3x - 7 \\ y = 3x - 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ y = 3x - 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{6}{2} = 3 \\ y = 3 \cdot 3 - 7 = 2 \end{cases}$$

Ho trovato un solo punto di intersezione

$C(3, 2)$

Si dice che la retta è TANGENTE alla parabola nel punto C



$$\begin{cases} y = -x^2 + 1 \\ y = x + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2 + 1 = x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \qquad -x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

SISTEMA IMPOSSIBILE

$$\Downarrow$$

la retta e la parabola non si intersecano