10/2/2021

# TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

**Teorema di De L'Hôpital**

Siano $I$ un intervallo e $c \in [\inf I, \sup I]$. Supponiamo:

(1) $f, g \colon I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ derivabili

(2) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$

(3) $\forall x \in I \setminus \{c\} \quad g'(x) \neq 0$

(4) esiste $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

allora esiste

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## ESEMPI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

**329** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^x - 2 + e^{-x}} = \frac{0}{0}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

F.I.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^x - 2 + e^{-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - e^{-x}} = \frac{0}{0} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

**330** $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2x}-2}{(x-2)^2} = \frac{0}{0}$ $[+\infty]$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} + \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x}}}{2(x-2)} = \frac{\dfrac{1}{0^+}+\dfrac{1}{2}}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

**334** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x+\sin 3x}{x+\tan 5x} = \frac{0}{0}$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2+3\cos 3x}{1+(1+\tan^2 5x)\cdot 5} = \frac{2+3}{1+5} = \frac{5}{6}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>

Il teorema del limite della derivata discende dal teorema di de L'Hôpital:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-0}{1} =$$

$$= \lim_{h\to 0} f'(x_0+h) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

$x = x_0 + h$

ATTENZIONE : L'ipotesi (4) di esistenza del limite è fondamentale!

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$$

$$g(x) = x$$

TH. CARABINIERI

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \frac{0}{0}$$

Se semplifico

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

Calcoliamo il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) \text{ NON ESISTE}$$

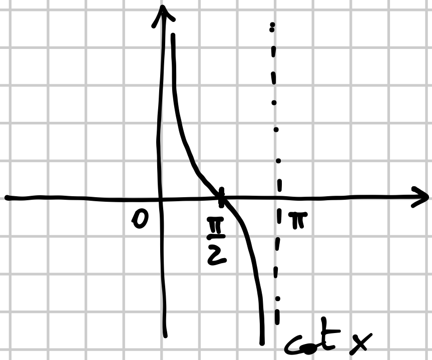
$$\Downarrow$$

NON SI PUÒ APPLICARE DE L'HÔPITAL !!

Non si può concludere nulla sul limite di partenza con de L'Hôpital.

Infatti il limite di partenza esiste e vale 0

**361** $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\cot x}{\ln 2x^3} = \frac{+\infty}{-\infty}$

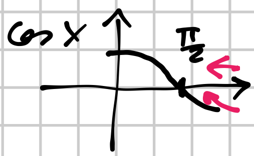


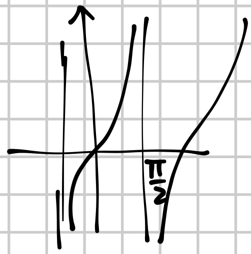

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{2x^3}\cdot 6x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{\sin x\cos x}}{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{3\sin x\cos x} = -\frac{1}{3}$$

1

**362** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{-\frac{1}{\cos x}}}{\tan x} = \frac{e^{-\frac{1}{0^-}}}{-\infty} =$




$$= \frac{e^{+\infty}}{-\infty} = \frac{+\infty}{-\infty}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{-\frac{1}{\cos x}}\cdot\left(-\frac{1}{\cos x}\right)'}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cancel{\cos^2 x}\cdot e^{-\frac{1}{\cos x}}\cdot\cancel{(\cos x)^{-2}}\cdot(-\sin x) =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} e^{-\frac{1}{\cos x}}\cdot(-\sin x) = +\infty\cdot(-1) = -\infty$$