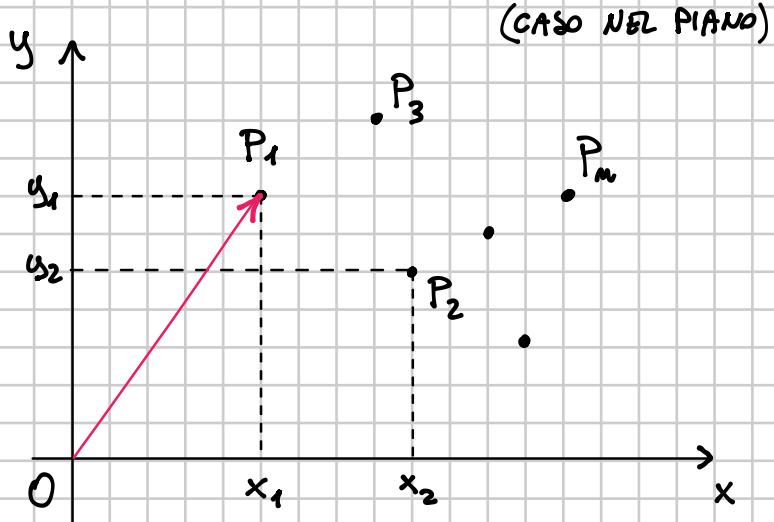


# CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA

## DI PUNTI MATERIALI



Ad ogni punto  $P_i \quad i=1, \dots, n$   
è associata la sua  
massa  $m_i$   
 $(P_1, m_1)$   
 $(P_2, m_2)$   
 $\vdots$   
 $(P_n, m_n)$

$$\vec{OP}_1 = \vec{r}_1 \text{ vettore posizione di } P_1$$

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$$

 $\vdots$ 

$$\vec{OP}_n = \vec{r}_n \text{ vettore posizione di } P_n$$

$$\begin{matrix} \vdots & \begin{matrix} \uparrow \\ \text{COMPONENTI} \\ \downarrow \\ \text{CARTESIANE} \end{matrix} \\ \vec{r}_n = (x_n, y_n) \end{matrix}$$

Il vettore posizione del CENTRO DI MASSA è per definizione

$$\vec{r}_{CM} = \vec{OC}_M = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Le componenti cartesiane di  $\vec{r}_{CM}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \\ y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \end{array} \right.$$

## ESEMPIO

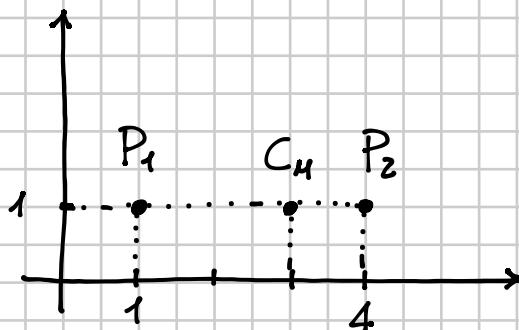
$$P_1 = (1, 1) \quad m_1 = 2 \text{ kg}$$

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{6} = 3$$

$$P_2 = (4, 1) \quad m_2 = 4 \text{ kg}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{6} = 1$$

$$C_M = (3, 1)$$



## PROPRIETÀ DEL CENTRO DI MASSA

Per semplicità considero un sistema di 2 punti materiali: tutto ciò che diremo è facilmente generalizzabile a  $n$  punti.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CM} &= \frac{\Delta \vec{r}_{CM}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{CM}(t + \Delta t) - \vec{r}_{CM}(t)}{\Delta t} = \\ &= \frac{m_1 \vec{r}_1(t + \Delta t) + m_2 \vec{r}_2(t + \Delta t)}{m_1 + m_2} - \frac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1 [\vec{r}_1(t + \Delta t) - \vec{r}_1(t)] + m_2 [\vec{r}_2(t + \Delta t) - \vec{r}_2(t)]}{\Delta t} = \\ &= \frac{m_1 \left[ \frac{\vec{r}_1(t + \Delta t) - \vec{r}_1(t)}{\Delta t} \right] + m_2 \left[ \frac{\vec{r}_2(t + \Delta t) - \vec{r}_2(t)}{\Delta t} \right]}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{P}_{TOT}}{M_{TOT}} \end{aligned}$$

Quindi

$$\vec{P}_{TOT} = m_{TOT} \vec{N}_{CM}$$

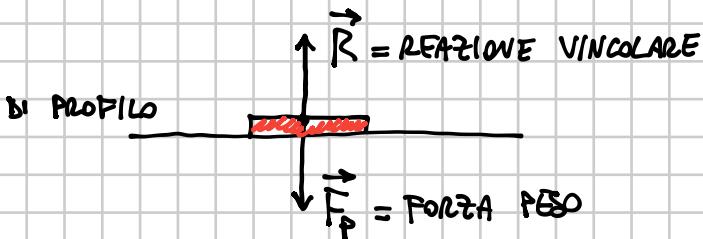
SE LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE È NULLA,  $\vec{P}_{TOT}$  SI CONSERVA,  
QUINDI  $\vec{N}_{CM}$  È COSTANTE, CIOÈ IL CENTRO DI MASSA SI MUOVE DI  
MOTO RETTILINEO UNIFORME

LE FORZE INTERNE NON CAMBIANO IL MOTO DEL CENTRO DI MASSA  
(SOLO LE FORZE ESTERNE POSSONO FARLO)

CHIAVE INGLESE LANCIATA SU UN TAVOLO (VISTA DALL'ALTO)

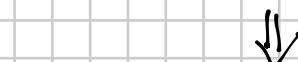


TRASCURSIAMO L'ATTRITO, LE FORZE ESTERNE SONO LA FORZA PESO E LA  
REAZIONE VINCOLARE DEL PIANO DI APPOGGIO



$$\vec{F}_p + \vec{R} = \vec{0}$$

SOMMA DUE FORZE ESTERNE NULLA

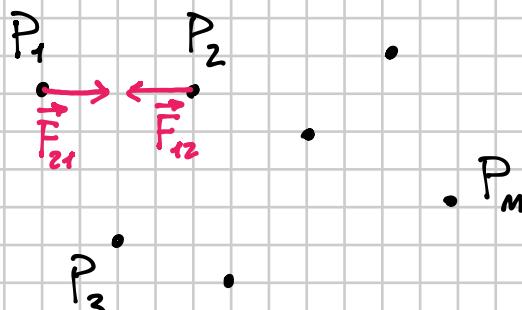


IL CENTRO DI MASSA SI MUOVE  
DI MOTO RETTILINEO UNIFORME

# PUNTUALIZZAZIONE SULLE FORZE INTERNE ED ESTERNE



FORZE CON CUI PUNTI  
DEL SISTEMA INTERAGISCONO  
CON ALTRI PUNTI DEL SISTEMA



## FORZE INTERNE

$\vec{F}_{12}$  = forza con cui  $P_1$   
 agisce su  $P_2$

$\vec{F}_{21}$  = forza con cui  $P_2$   
 agisce su  $P_1$

per il 3° principio della dinamica  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$  ( $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$ )

$$\Rightarrow \sum_{\text{SOMMA}} \vec{F}_{\text{INT}} = \vec{0} \quad \text{La somma di tutte le forze interne è } \vec{0}$$

Ora calcoliamo la variazione della quantità di moto totale del sistema:

$$\Delta \vec{P}_{\text{TOT}} = \vec{P}_{\text{TOT}}(\text{dopo}) - \vec{P}_{\text{TOT}}(\text{prima}) = \vec{P}_1(\text{dopo}) + \vec{P}_2(\text{dopo}) + \dots + \vec{P}_m(\text{dopo}) -$$

$$- \vec{P}_1(\text{prima}) - \vec{P}_2(\text{prima}) - \dots - \vec{P}_m(\text{prima}) = \Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2 + \dots + \Delta \vec{P}_m =$$

applich  
il TH. DELL'IMPULSO  
a ogni singolo punto

$$= \vec{F}_1 \Delta t + \vec{F}_2 \Delta t + \dots + \vec{F}_m \Delta t =$$

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_m$  forze totali  
su ogni  
singolo punto

$$= (\underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_m}_{\text{SOMMA DI TUTTE LE FORZE CHE AGISCONO SUL SISTEMA, INTERNE ED ESTERNE}}) \Delta t =$$

$$= \vec{F}_{\text{TOT. EST}} \Delta t$$

↗  
RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE

$$\vec{P}_{TOT} = m_{TOT} \vec{N}_{CM} \Rightarrow \Delta \vec{P}_{TOT} = m_{TOT} \Delta \vec{N}_{CM}$$

ma abbiamo appena visto che  $\Delta \vec{P}_{TOT} = \vec{F}_{TOT\ EST} \Delta t$

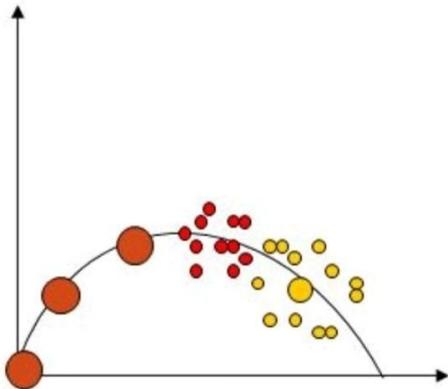
$$\Rightarrow \vec{F}_{TOT\ EST} \Delta t = m_{TOT} \Delta \vec{N}_{CM}$$

$$\vec{F}_{TOT\ EST} = m_{TOT} \frac{\Delta \vec{N}_{CM}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{F}_{TOT\ EST} = m_{TOT} \vec{a}_{CM}}$$

2° PRINCIPIO DELLA  
DINAMICA PER UN SISTEMA DI  
m PUNTI MATERIALI

SE LA FORZA ESTERNA TOTALE CHE AGISCE SUL SISTEMA È NON NULLA,  
IL CENTRO DI MASSA SI MUOVE COME UN PUNTO MATERIALE DI MASSA  $m_{TOT}$   
SOGGETTO ALLA FORZA  $\vec{F}_{TOT\ EST}$



Ad esempio, il moto del centro di massa  
di una palla di cannone che esplode a metà  
della sua traiettoria è sempre parabolico,  
anche dopo l'esplosione.