29/4/2021

182 Sia f una funzione definita e continua su $\mathbb{R}$. Determina a e b in modo che $\int_1^b f\left(\frac{x-2}{3}\right)dx = -3\int_1^a f(x)dx$.

$\left[a = -\frac{1}{3}, b = 5\right]$

$$t = \frac{x-2}{3} \Rightarrow x = 3t+2 \qquad dx = 3\,dt$$

$$x = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$$

$$x = b \Rightarrow t = \frac{b-2}{3}$$

$$\int_1^b f\left(\frac{x-2}{3}\right)dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{b-2}{3}} f(t)\,3\,dt = 3\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{b-2}{3}} f(t)\,dt$$

$$-3\int_1^a f(x)\,dx$$

devono essere uguali

$$3\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{b-2}{3}} f(x)\,dx = -3\int_1^a f(x)\,dx$$

$$\cancel{3}\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{b-2}{3}} f(x)\,dx = \cancel{3}\int_a^1 f(x)\,dx$$

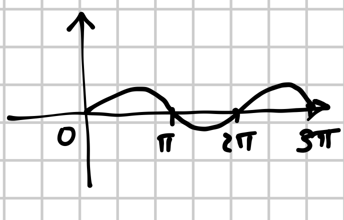
uguaglio gli estremi:

$$\frac{b-2}{3} = 1 \qquad -\frac{1}{3} = a \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{3} \quad b = 5$$

<u>OSSERVAZIONE</u>

Se gli estremi di integrazione sono uguali, certamente gli integrali sono uguali, ma se gli integrali sono uguali non necessariamente gli estremi sono uguali:

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \int_0^{3\pi} \sin x\,dx = 2$$



DERIVATA DI UNA FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$c \in [a,b]$

F è derivabile e

$\Rightarrow \quad F'(x) = f(x)$

210 $F(x) = \int_{-1}^{x} e^t\,dt$

$[a,b]$ con $-1 \in [a,b]$

$$F'(x) = e^x$$

214 $F(x) = \int_x^1 \frac{3}{t^2+1}\,dt = -\int_1^x \frac{3}{t^2+1}\,dt$

$$F'(x) = -\frac{3}{x^2+1}$$

215 $G(x) = \int_0^{3x} (t+4)\,dt$

$F(x) = \int_0^x (t+4)\,dt \qquad h(x) = 3x \qquad F'(x) = x+4$

$$G(x) = F(h(x)) = \int_0^{3x} (t+4)\,dt$$

$$G'(x) = F'(h(x)) \cdot h'(x) = (3x+4)\cdot 3 = 9x+12$$

225 $F(x) = \int_{x}^{x+2} \ln t \, dt, \qquad \text{con } x > 0.$

$$F(x) = \int_{x}^{1} \ln t \, dt + \int_{1}^{x+2} \ln t \, dt =$$

$$= -\int_{1}^{x} \ln t \, dt + \int_{1}^{x+2} \ln t \, dt$$

$$G(x) = \int_{1}^{x} \ln t \, dt$$

$$h(x) = x+2$$

$$G(h(x)) = \int_{1}^{x+2} \ln t \, dt$$

$$F'(x) = -\ln x + G'(h(x)) \cdot h'(x) =$$

$$= -\ln x + \ln(x+2) = \ln \frac{x+2}{x}$$