7/2/2019

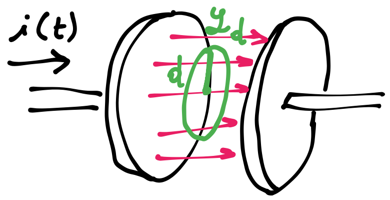
16 ★★★ **CON GLI INTEGRALI** Un condensatore ad armature piane circolari di raggio r , fra le quali c'è il vuoto, viene collegato a un circuito percorso da corrente alternata, di intensità $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$.

- Come varia nel tempo il campo magnetico dentro il condensatore a una distanza d dall'asse del condensatore (con $d < r$)?
- Con che legge varia il campo elettrico nel condensatore? All'istante $t = 0$ s il campo elettrico è nullo.

$$\left[B(t) = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi d} \cdot \cos(\omega t);\ E(t) = \frac{i_0}{\omega \varepsilon_0 \pi d^2} \cdot \operatorname{sen}(\omega t)\right]$$

$\mathcal{L}_d$ = circonferenza di raggio d e centro sull'asse del condensatore

$$\oint_{\mathcal{L}_d} \vec{B}(t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$



$$\Phi(\vec{E}) = E(t) \cdot \pi d^2 =$$

$$= \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \pi d^2 = \frac{Q(t)}{\cancel{\pi} r^2} \frac{\cancel{\pi} d^2}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t) d^2}{r^2 \varepsilon_0}$$

$$\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{d^2}{r^2 \varepsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{d^2}{r^2 \varepsilon_0} i(t) = \frac{d^2}{r^2 \varepsilon_0} i_0 \cos(\omega t)$$

$$\oint_{\mathcal{L}_d} B(t)\, dl = \mu_0 \cancel{\varepsilon_0} \frac{d^2}{r^2 \cancel{\varepsilon_0}} i_0 \cos(\omega t)$$

$$B(t)\, 2\pi \cancel{d} = \mu_0 \frac{d^{\cancel{2}}}{r^2} i_0 \cos(\omega t)$$

$$\boxed{B(t) = \frac{\mu_0 d}{2\pi r^2} i_0 \cos(\omega t)}$$

$$i(t) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left[E(t)\cdot S\right] =$$

$$= \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0 \pi r^2} i(t)$$

COSTANTE K

$$\frac{dE}{dt} = \frac{i_0}{\varepsilon_0 \pi r^2} \cos(\omega t)$$

$$dE = K \cos(\omega t)\, dt$$

$$\int dE = \int K \cos(\omega t)\, dt$$

$$\int dE = K \int \cos(\omega t)\, dt$$

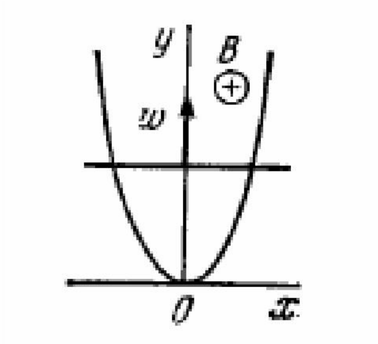
$$\int dE = K \int \frac{d}{\cancel{dt}}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right]\cancel{dt}$$

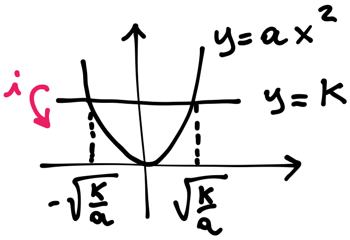
$$E(t) - \underbrace{E(0)}_{0} = K\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right]_0^t$$

$$E(t) = K\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{1}{\omega}\overbrace{\sin(0)}^{0}\right]$$

$$\boxed{E(t) = \frac{i_0}{\omega \varepsilon_0 \pi r^2}\sin(\omega t)}$$

1. Una spira a forma di parabola di equazione $y = ax^2$ è immersa in un campo magnetico uniforme B perpendicolare al piano xy della parabola. All'istante $t = 0$ una barretta inizia a traslare lungo la parabola partendo dal suo vertice con accelerazione costante come indicato in figura. Determinare la forza elettromotrice indotta sulla spira in funzione della y.





Area della spira $S = \frac{2}{3} K \cdot 2\sqrt{\frac{K}{a}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{K}{a}} \cdot K$

$$\Phi(\vec{B}) = B \cdot S = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{K}{a}} \cdot K \cdot B$$ (se orientiamo $\vec{S}$ come $\vec{B}$)

Scritto in funzione di $y = y(t)$

$$\Phi(\vec{B}) = \frac{4}{3} B y \sqrt{\frac{y}{a}} = \frac{4}{3}\frac{B}{\sqrt{a}} y^{\frac{3}{2}}$$

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{\overset{2}{\cancel{4}}B}{\cancel{3}\sqrt{a}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} y^{\frac{1}{2}} \cdot y' = \boxed{-\frac{2B}{\sqrt{a}}\sqrt{y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

La corrente indotta circola (guardando la figura) in senso ORARIO

Se w è l'accelerazione della sbarretta si ha $y = \frac{1}{2} w t^2$, da cui

$$\frac{dy}{dt} = wt \quad \text{e} \quad t = \sqrt{\frac{2y}{w}} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = w\sqrt{\frac{2y}{w}} = \sqrt{2wy}$$

$$f_{em} = -\frac{2B}{\sqrt{a}}\sqrt{y}\sqrt{2wy} = \boxed{-2B\sqrt{\frac{2w}{a}}\, y}$$

RISOLUZIONE AIF: https://www.aif.it/q1mf/