L'INERZIA DELL'ENERGIA

(EQUIVALENZA MASSA - ENERGIA)

$$\boxed{E_0 = mc^2}$$

EINSTEIN (1905) → L'INERZIA DI UN CORPO DIPENDE DAL SUO CONTENUTO DI ENERGIA?

Fornendo una quantità di energia ΔE a un corpo, senza che questo comporti una variazione della sua velocità, la sua massa varia di

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{\gamma c^2}$$

In particolare, se il corpo è fermo ($v = 0 \Rightarrow \gamma = 1$) $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$

↓

UN CORPO FERMO ACCRESCE LA SUA MASSA QUANDO ASSORBE ENERGIA RESTANDO FERMO

Possiamo quindi considerare la massa di un corpo come la misura del suo contenuto di energia → EQUIVALENZA MASSA-ENERGIA o INERZIA DELL'ENERGIA

$$\boxed{E = \gamma mc^2} \quad \underset{\substack{v=0 \\ \gamma=1}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{E_0 = mc^2}$$

ENERGIA TOTALE DI UN CORPO

E_0:
- ENERGIA A RIPOSO
- ENERGIA IN CONDIZIONI DI QUIETE
- ENERGIA "INTRINSECA" (EQUIVALENTE) DI UN CORPO DI MASSA m

m → MASSA INERZIALE NEWTONIANA

↓

INVARIANTE RELATIVISTICO (non cambia passando a un altro S.R.I.)

La massa può convertirsi in energia e viceversa (questo fatto non ha riscontro nella meccanica newtoniana). L'effetto è troppo piccolo per essere rilevabile nell'esperienza quotidiana, ma è importante a livello nucleare e subnucleare.

L'ENERGIA TOTALE DI UN SISTEMA ISOLATO SI CONSERVA

↓ CHE NON INTERAGISCE CON ALTRI SISTEMI

ENERGIA TOTALE $E = E_0 + K$

E_0 → EN. A RIPOSO

K → EN. CINETICA

ENERGIA CINETICA $K = E - E_0 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1) mc^2$

↓ per basse velocità $v \ll c$ diventa l'en. cinetica $\frac{1}{2}mv^2$

Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \Rightarrow \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha + h(x)$$

$h(x) \to 0$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + \underbrace{x\,h(x)}_{\to 0}$$

va a 0 più velocemente di αx, quindi è trascurabile

$$(1+x)^\alpha - 1 \simeq \alpha x \quad \text{per } x \to 0$$

$$\gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} - 1 = (1 + (-\beta^2))^{-\frac{1}{2}} - 1 = -\frac{1}{2}(-\beta^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\beta^2 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

$\beta = \frac{v}{c} \to 0$

$v \ll c$

$$K = (\gamma - 1) m c^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{\cancel{c^2}} m \cancel{c^2} = \frac{1}{2} m v^2$$ EN. CINETICA NEWTONIANA

$v \ll c$

ESEMPI E OSSERVAZIONI

LA MASSA DI UN SISTEMA COMPOSTO

(NEL S.R. DEL CENTRO DI MASSA)

$$\underbrace{M c^2}_{\text{en. a riposo del sistema composto}} = \sum_i \Big(m_i c^2 + \underbrace{K_i}_{\text{en. cinetiche}} + \underbrace{\sum_j U_{ij}}_{\text{en. potenziali}} \Big)$$

MASSA NON È ADDITIVA $\longrightarrow$ $$M_{\text{COMPOSTO}} = \sum (\text{masse costituenti}) + \frac{\sum (\text{energie dei costituenti})}{c^2}$$

1) Un corpo acquista massa (pesa di più) se viene riscaldato, perché aumenta l'en. cinetica del moto interno di agitazione termica e quindi il contenuto di energia del corpo.

2) La massa di un nucleo atomico è inferiore della somma delle masse dei protoni e neutroni costituenti (difetto di massa) perché include en. potenziale interna negativa

3) GAS CONTENUTO IN UN RECIPIENTE IMMOBILE

$$E_{0\,(GAS)} = \sum E_i = \sum \gamma_i m_i c^2$$

molecole non interagenti, quindi non teniamo conto dell'en. potenziale

$$M_{(GAS)} = \frac{E_{0\,(GAS)}}{c^2} = \sum \gamma_i m_i > \sum m_i$$

MASSA GAS > SOMMA DELLE MASSE COSTITUENTI

L'energia è additiva, la massa NO!

4) L'energia di un corpo può essere fatta aumentare

a) somministrandogli energia <u>senza fargli variare velocità</u>

(riscaldandolo, facendogli assorbire radiazione elettromagnetica ...)

↳ AUMENTA NECESSARIAMENTE ANCHE LA MASSA, dunque sia E_0 che K aumentano

b) tramite lavoro eseguito da forze applicate ad esso

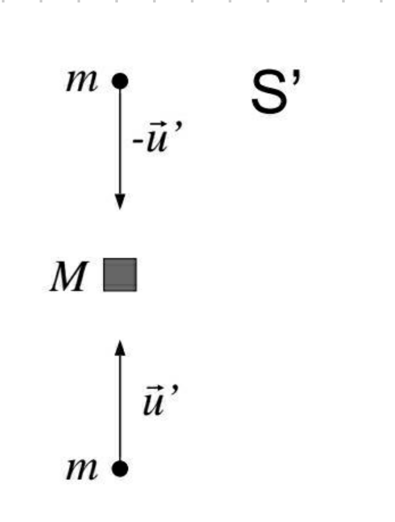
↳ MASSA RIMANE COSTANTE, cambia solo γ

DIMOSTRAZIONE DELL'INERZIA DELL'ENERGIA (EQUIVALENZA MASSA-ENERGIA)

Fornendo una quantità di energia ΔE a un corpo, senza che questo comporti una variazione della sua velocità, la sua massa M varia di

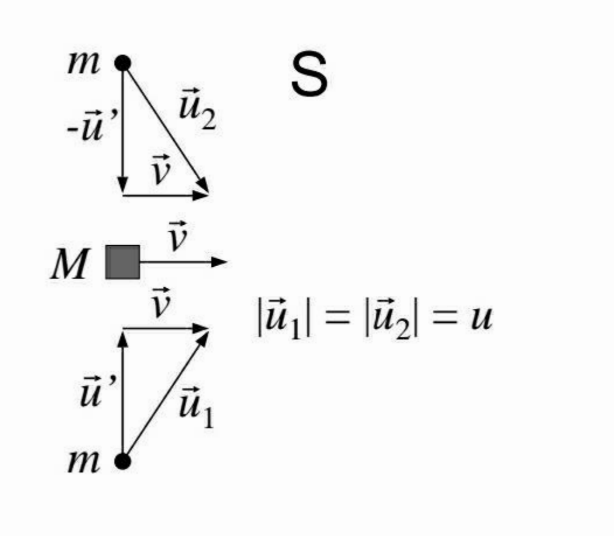
$$\Delta M = \frac{\Delta E}{\gamma c^2}$$

UN ESPERIMENTO COI PROIETTILI (URTO ANELASTICO) IN MECCANICA NEWTONIANA



- I proiettili arrivano al blocco M e rimangono incastrati;
- PRIMA DELL'URTO: il blocco è fermo e i proiettili hanno stessa massa e velocità opposte $\Rightarrow$ Q.DI MOTO NULLA
- DOPO L'URTO: Q.TÀ DI MOTO NULLA (conserv. della q. di moto)

$\Rightarrow$ BLOCCO FERMO e massa $M + 2m$



- M ha velocità v
- i proiettili hanno velocità oblique di modulo u, la cui componente verticale è $\pm u'$ e quella orizzontale v
- PRIMA DELL'URTO

$$\left.\begin{array}{l} \text{Q.MOTO DI } M = Mv \\ \text{Q.MOTO PROIETTILI} = 2mv \end{array}\right\} \text{orizzontali}$$

Q.MOTO VERTICALE DEI PROIETTILI = 0

Q.MOTO TOTALE = $(M+2m)v$

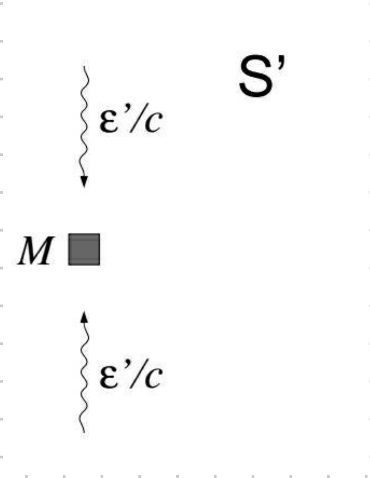
- DOPO L'URTO I proiettili si incastrano nel blocco:

$$\left.\begin{array}{l} \text{MASSA} = M+2m \\ \text{CONSERVAZIONE DELLA Q.MOTO} \end{array}\right| \Rightarrow v_{\text{FINALE}} = v$$

UN ESPERIMENTO CON LA RADIAZIONE

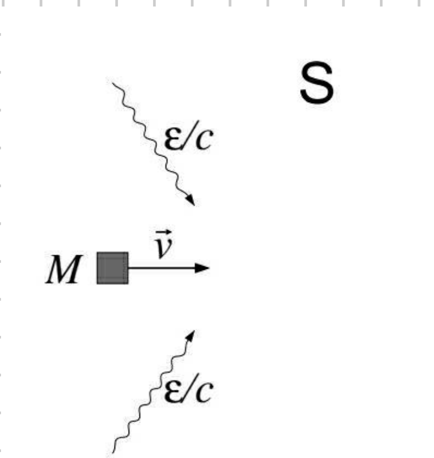
Anziché i proiettili, facciamo arrivare su M due pacchetti di radiazione e.m., ciascuno di energia ε'.
Supponiamo che M sia "nero", cioè che assorba completamente la radiazione.

Ricordiamo che a un'energia ε' della radiazione è associata una quantità di moto $\frac{\varepsilon'}{c}$

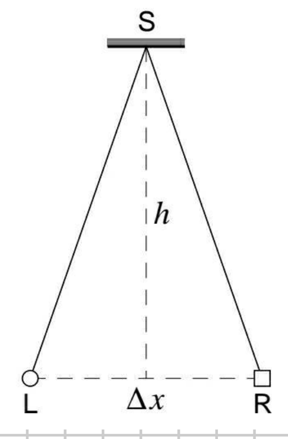


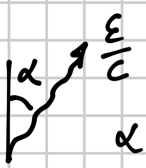
Come prima, la quantità di moto iniziale è nulla, e tale rimarrà anche dopo l'assorbimento delle due radiazioni da parte di M.

IL BLOCCO RESTA <u>FERMO</u> in S'



- M si muove con velocità v
- la direzione delle radiazioni è OBLIQUA (C.F.R. OROLOGIO A LUCE) ⟶
- l'energia della radiazione è ε e non ε', perché in questo S.R. può apparire diversa (ma la relazione fra ε' e ε non ci interessa)





α = angolo della radiazione con la verticale

Q. DI MOTO <u>ORIZZONTALE</u> DELLA RADIAZIONE $= \frac{\varepsilon}{c}\sin\alpha$

$\Rightarrow$ QUANTITÀ DI MOTO TOTALE $= M\gamma v + 2\frac{\varepsilon}{c}\sin\alpha$

$$\underbrace{M\gamma v + 2\frac{\varepsilon}{c}\sin\alpha}_{\text{Q. DI MOTO INIZIALE}} = \underbrace{M\gamma_{FIN}\, v_{FIN}}_{\text{Q. DI MOTO FINALE}} \qquad (*)$$

Se nel S.R. S' il blocco resta fermo, nel S.R. S si muoverà ancora con la velocità v di S' rispetto a S. Quindi deve essere

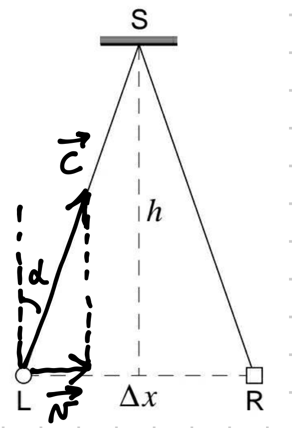
$$v_{FIN.} = v \qquad (e \ \ \gamma_{FIN.} = \gamma)$$

che contraddice la (*).

A meno che....

CAMBI LA MASSA !!

$$M\gamma v + 2\frac{\varepsilon}{c}\sin\alpha = M_{FIN}\,\gamma v \qquad M_{FIN} = \text{MASSA DOPO L'ASSORBIMENTO}$$



$$c\sin\alpha = v$$
$$\Downarrow$$
$$\sin\alpha = \frac{v}{c}$$

$$M\gamma\cancel{v} + \frac{2\varepsilon}{c^2}\cancel{v} = M_{FIN}\gamma\cancel{v}$$

$$\underbrace{M_{FIN} - M}_{\text{VARIAZIONE DI MASSA}} = \frac{\overbrace{2\varepsilon}^{\text{ENERGIA ASSORBITA } \Delta E}}{\gamma c^2}$$

$$\boxed{\Delta M = \frac{\Delta E}{\gamma c^2}}$$