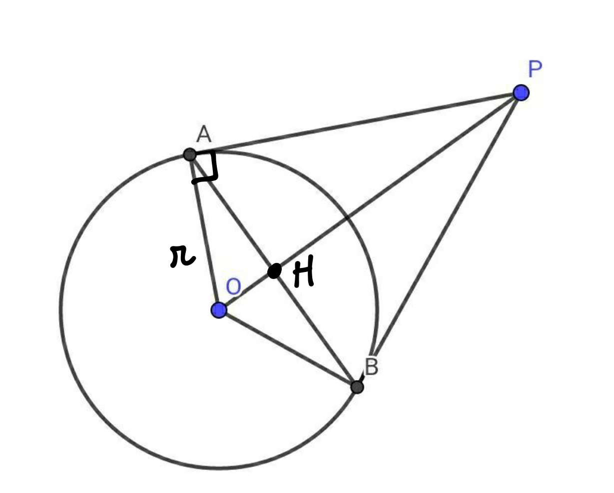
29/4/2021

83 Da un punto P, esterno a una circonferenza di raggio r, traccia le tangenti PA e PB alla circonferenza, essendo A e B i punti di contatto.
Determina le misure dei segmenti di tangenza PA e PB, sapendo che $\overline{AB} = \frac{6}{5} r$. $\left[\overline{PA} = \overline{PB} = \frac{3}{4} r\right]$



$O\hat{A}P = 90°$ è retto perché AP è tangente

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{\cancel{2}_{1}} \cdot \frac{\cancel{6}^{3}}{5} r = \frac{3}{5} r$$

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{9}{25}r^2} = \sqrt{\frac{16}{25}r^2} = \frac{4}{5} r$$

2° TH. EUCLIDE

$$\overline{AH}^2 = \overline{OH} \cdot \overline{HP} \Rightarrow \overline{HP} = \frac{\overline{AH}^2}{\overline{OH}} = \frac{\left(\frac{3}{5}r\right)^2}{\frac{4}{5}r} = \frac{9}{\cancel{25}_{5}} r^{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{4\cancel{r}} = \frac{9}{20} r$$

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{HP}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{\frac{81}{400}r^2 + \frac{9}{25}r^2} = \sqrt{\frac{81+144}{400}}\, r$$

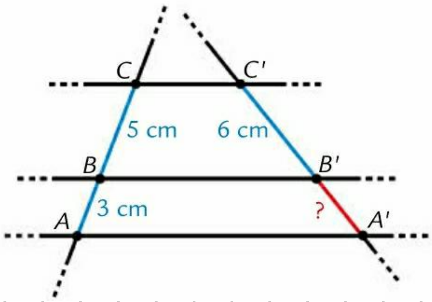
$$= \sqrt{\frac{225}{400}}\, r = \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{20}_{4}} r = \boxed{\frac{3}{4} r}$$

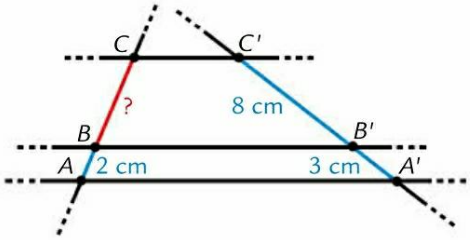
$\overline{AP} = \overline{PB}$

TEOREMA DI TALETE

18 Nelle seguenti figure si ha $AA' \parallel BB' \parallel CC'$; determina la lunghezza del segmento colorato in rosso.

$\left[\frac{18}{5}\text{ cm}; \frac{16}{3}\text{ cm}\right]$





$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{C'B'}}{B'A'}$$

$$\overline{B'A'} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{C'B'}}{\overline{CB}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 6}{5} = \frac{18}{5}$$

$$B'A' = \frac{18}{5}\text{ cm}$$

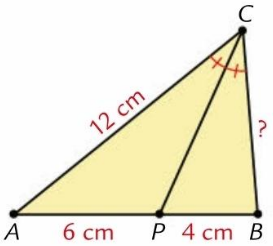
$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{B'A'}}$$

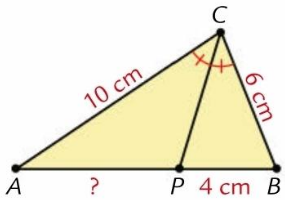
$$\overline{CB} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{B'A'}} \cdot \overline{BA} =$$

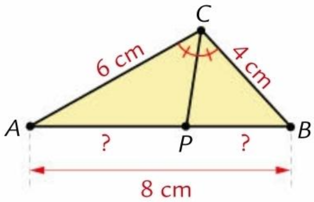
$$= \frac{8}{3} \cdot 2 = \frac{16}{3}$$

$$CB = \frac{16}{3}\text{ cm}$$

20 Nelle seguenti figure determina la lunghezza dei lati indicati con il punto interrogativo.







$\left[8 \text{ cm}; \frac{20}{3} \text{ cm}; \frac{24}{5} \text{ cm}; \frac{16}{5} \text{ cm}\right]$

$\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AC} : \overline{CB}$

$6 : 4 = 12 : \overline{CB}$

$\overline{CB} = \frac{4 \cdot 12}{6} = 8$

$CB = 8 \text{ cm}$

$\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AC} : \overline{CB}$

$\overline{AP} : 4 = 10 : 6$

$\overline{AP} = \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 10}{\cancel{6}_{3}} = \frac{20}{3}$

$AP = \frac{20}{3} \text{ cm}$

$\overline{AP} = x \qquad \overline{PB} = 8 - x$

$x : (8 - x) = 6 : 4$

$\frac{x}{8 - x} = \frac{3}{2} \qquad 0 < x < 8$

$2x = 3(8 - x)$

$2x = 24 - 3x$

$5x = 24 \qquad x = \frac{24}{5} = \overline{AP}$

$\overline{PB} = 8 - \frac{24}{5} = \frac{16}{5}$

$AP = \frac{24}{5} \text{ cm}$

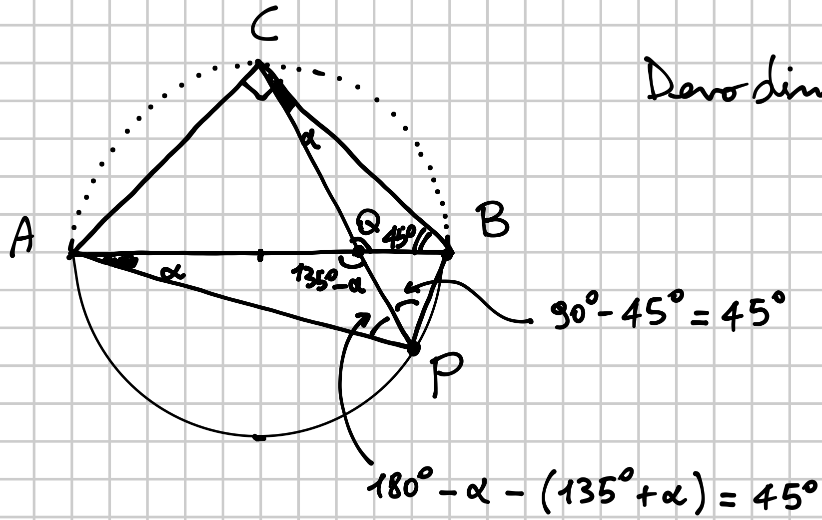
$PB = \frac{16}{5} \text{ cm}$

31 Sia ACB un triangolo rettangolo, isoscele sulla base AB. Nel semipiano avente come origine la retta AB cui non appartiene C, traccia la semicirconferenza di diametro AB. Considera un punto P sulla semicirconferenza e indica con Q il punto d'intersezione di AB e PC.

a. Dimostra che la semiretta PC è la bisettrice dell'angolo $A\widehat{P}B$.

b. Supposto che $\overline{AP} = 6a$ e $\overline{BP} = 8a$, determina le misure di AQ e QB nonché il perimetro e l'area del quadrilatero $ACBP$.

[b. $\overline{AQ} = \frac{30}{7}a$, $\overline{BQ} = \frac{40}{7}a$; Perimetro $= (14 + 10\sqrt{2}\ )a$, Area $= 49a^2$]



Devo dimostrare che $A\hat{P}C \cong C\hat{P}B$

a) $B\hat{C}P \cong B\hat{A}P$ poiché insistono sullo stesso arco (misura α)

$C\hat{Q}B = 180° - 45° - \alpha = 135° - \alpha$

$A\hat{Q}P = 135° - \alpha$ poiché opposti al vertice

$A\hat{P}C = 180° - \alpha - (135° + \alpha) = 45°$

$B\hat{P}A = 90°$ poiché BPA inscritto in una semicirconferenza

$C\hat{P}B = 90° - A\hat{P}C = 90° - 45° = 45° \Rightarrow C\hat{P}B \cong A\hat{P}C$

b) $\overline{QB} : \overline{QA} = \overline{BP} : \overline{PA} \Rightarrow \overline{QB} : \overline{QA} = 8a : 6a$

$\overline{AB} = \sqrt{(8a)^2 + (6a)^2} = \sqrt{64+36}\ a = 10a$

$\overline{QB} = x \Rightarrow \quad x : (10a - x) = 8a : 6a \quad \frac{x}{10a - x} = \frac{4}{3} \quad 3x = 40a - 4x$

$7x = 40a \Rightarrow x = \frac{40}{7}a \quad \overline{QB} = \frac{40}{7}a \quad \overline{QA} = 10a - \frac{40}{7}a = \frac{30}{7}a$

$$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}a$$

$$2P_{ABCD} = 2 \cdot 5\sqrt{2}a + 8a + 6a = \boxed{(10\sqrt{2} + 14)a}$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{2}a)^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{3}{\cancel{6}}a \cdot 8a =$$

$$= 25a^2 + 24a^2 = \boxed{49a^2}$$