4/4/2019

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

TEOREMA

Teorema di De L'Hospital

Dati un intorno I di un punto c e due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in I (escluso al più c), se:

- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in I (escluso al più c), con $g'(x) \neq 0$,
- le due funzioni tendono entrambe a 0 o entrambe a $+\infty$ o a $-\infty$ per $x \to c$,
- per $x \to c$ esiste il limite del rapporto $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ delle loro derivate,

allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni ed è:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ESEMPI

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ F.I.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ F.I.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ F.I.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2 \underset{\to 1}{\cos x} \underset{\to 0}{\sin x}}{1} = 0$$

$$[\cos^2 x]' = 2 \cos x \cdot (\cos x)' = -2 \cos x \sin x$$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{e^0 - 0 - 1}{0^2} = \frac{0}{0}$ F.I.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1-1}{2\cdot 0} = \frac{0}{0} \overset{F.I.}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

PAG. 1043 - CALCOLARE CON DE L'HÔPITAL

86 $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2-2} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\downarrow$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

109 $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3}$ $[+\infty]$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{3}e^{3x}}{\cancel{3}x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{9e^{3x}}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

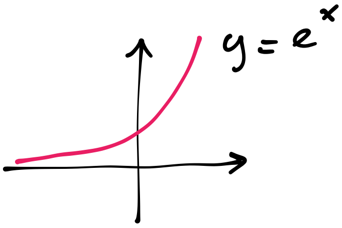
112 $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\ln x}{7x-2}$ $\left[\frac{3}{7}\right]$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\ln x}{7x-2} = \frac{+\infty+\infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{7} = \frac{3}{7}$$

$\frac{1}{x} \to 0$

125 $\lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x$ $[0]$



$$\lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x = (+\infty)\cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{-\infty}{-\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{+\infty} =$$

$$= 0$$

ATTENZIONE!!

SE AVESSI "PORTATO AL DENOMINATORE" x^2 ANZICHÉ e^x, AVREI PEGGIORATO LE COSE!!

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^{-2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{-2x^{-3}}$$

ESPONENTE PEGGIORE DI -2

ANCHE SE PROSEGUO NON ESCO DALLA FORMA INDETERMINATA!