15/5/2019

IL PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE

1 EVENTO CHE SI RIPETE n VOLTE NELLE STESSE CONDIZIONI

p = PROBABILITÀ CHE L'EVENTO SI VERIFICHI (SUCCESSO)

$q = 1 - p$ = PROBABILITÀ CHE L'EVENTO NON SI VERIFICHI (INSUCCESSO)

PROBLEMA: Qual è la probabilità di avere, in n prove, esattamente k successi? $(k \leq n)$

S = SUCCESSO
I = INSUCCESSO

$n = 7$
$k = 3$

SISSIII
SSIIIIS
ISISSII
⋮
SSSIIII

SONO IN NUMERO $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!}$

(anagrammi di 7 lettere con 3 e 4 ripetizioni)

la probabilità di ciascuno è $p^3 \cdot q^4$

$$P(\text{3 successi su 7 prove}) = \binom{7}{3} p^3 \cdot q^4$$

dove $q = 1 - p$
p = probabilità di 1 successo

In generale
$$\boxed{P(\text{k successi su n prove}) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}}$$

TEOREMA

Schema delle prove ripetute (o di Bernoulli)

Dato un esperimento aleatorio ripetuto nelle stesse condizioni n volte e indicato con E un evento che rappresenta il successo dell'esperimento e ha probabilità costante p di verificarsi e probabilità $q = 1 - p$ di non verificarsi, la probabilità di ottenere k successi su n prove è:

$$p_{(k,n)} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

133 Si lancia per 5 volte un dado. Calcola la probabilità che:

a. per 2 volte esca un numero maggiore di 4;

b. per 4 volte esca un numero pari.

$\left[\text{a) } \frac{80}{243}; \text{ b) } \frac{5}{32}\right]$

$n = 5$

a) $K = 2$ $\quad p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$$P(K=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-2} = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{2^3}{3^3} =$$

$$= \frac{5 \cdot 4}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{\cancel{8}\,4}{27} = \boxed{\frac{80}{243}}$$

b) $K = 4$ $\quad p = \frac{1}{2}$ $\quad q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$P(K=4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5!}{4!\,1!} \cdot \frac{1}{2^5} = \boxed{\frac{5}{32}}$$

135 ●○

Un'urna contiene 2 palline bianche e 3 nere. Calcola la probabilità che, estraendo per 7 volte consecutive una pallina, rimettendo quella estratta nell'urna, la pallina bianca si presenti:

a. solo la prima volta;

b. una volta;

c. 5 volte;

d. sempre;

e. mai;

f. almeno una volta.

$\left[\text{a) } \frac{2 \cdot 3^6}{5^7}; \text{ b) } \frac{14 \cdot 3^6}{5^7}; \text{ c) } \frac{6048}{5^7}; \text{ d) } \frac{2^7}{5^7}; \text{ e) } \frac{3^7}{5^7}; \text{ f) } \frac{5^7 - 3^7}{5^7}\right]$

a) $P(A) = \underbrace{\frac{2}{5}}_{1° \text{ SUCCESSO}} \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^6}_{6 \text{ INSUCCESSI DI SEGUITO}} = \boxed{\frac{2 \cdot 3^6}{5^7}}$

b) $P(K=1) = \binom{7}{1} \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3^6}{5^7} = \boxed{\frac{14 \cdot 3^6}{5^7}}$

$n = 7$

c) $P(K=5) = \binom{7}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7!}{5!\,2!} \cdot \frac{2^5}{5^5} \cdot \frac{3^2}{5^2} =$

$= \frac{7 \cdot \cancel{6}^{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{32 \cdot 9}{5^7} = \boxed{\frac{6048}{5^7}}$

d) $P(K=7) = \underbrace{\binom{7}{7}}_{1} \left(\frac{2}{5}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{7-7} = \boxed{\frac{2^7}{5^7}}$

e) $P(K=0) = \underbrace{\binom{7}{0}}_{1} \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^7 = \boxed{\frac{3^7}{5^7}}$

f) $P(\text{almeno 1 volta}) = 1 - P(K=0) = 1 - \frac{3^7}{5^7} = \boxed{\frac{5^7 - 3^7}{5^7}}$

OSSERVAZIONE

$$P(k=0)+P(k=1)+\ldots+P(k=n)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k\cdot q^{n-k}=(p+\underset{q=1-p}{q})^n=(\cancel{p}+1-\cancel{p})^n=1^n=1$$

FORMULA DI DISINTEGRAZIONE

$$P(E)=P(E_1)\cdot P(E|E_1)+P(E_2)\cdot P(E|E_2)+\ldots+P(E_n)\cdot P(E|E_n)$$

[E_i sono una PARTIZIONE di U]

142 Abbiamo due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 2 nere e la seconda 6 bianche e 4 nere. Si sceglie a caso un'urna estraendo una carta da un mazzo di 40. Se la carta estratta è una figura, si sceglie la prima urna, altrimenti la seconda. Dopo aver scelto l'urna si estrae una pallina. Calcola la probabilità di estrarre una pallina nera. $\left[\frac{19}{50}\right]$

URNA 1	URNA 2
4 B	6 B
2 N	4 N

E_1 = "scelta dell'urna 1" $\quad$ E_2 = "scelta dell'urna 2"

E = "estrazione di una pallina nera"

$P(E_1)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$ $\quad$ $P(E_2)=\frac{28}{40}=\frac{7}{10}$

$P(E|E_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $\quad$ $P(E|E_2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

$$P(E)=P(E_1)\cdot P(E|E_1)+P(E_2)\cdot P(E|E_2)=\frac{\cancel{3}}{10}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}+\frac{7}{\cancel{10}_{5}}\cdot\frac{\cancel{2}}{5}=\frac{5+14}{50}=\boxed{\frac{19}{50}}$$

150 ●●

Abbiamo due urne. La prima contiene 4 palline rosse e 6 bianche e la seconda 3 palline rosse e 2 bianche. Si lancia un dado e, se esce un numero minore di tre, si sceglie la prima urna, altrimenti la seconda. Calcola la probabilità che, estraendo contemporaneamente due palline, esse siano:

a. due rosse;

b. due bianche;

c. una rossa e una bianca.

$\left[\text{a) } \frac{11}{45}; \text{ b) } \frac{8}{45}; \text{ c) } \frac{26}{45}\right]$

URNA 1	URNA 2
4 R	3 R
6 B	2 B

$$P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(E_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

a) E = "2 R"

$$P(E|E_1) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{\frac{4!}{2!\,2!}}{\frac{10!}{2!\,8!}} = \frac{6}{45}$$

$$P(E|E_2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

$$P(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{45}_{\,15}} + \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{3}} \cdot \frac{3}{\cancel{10}_{\,5}} = \frac{2+9}{45} = \boxed{\frac{11}{45}}$$

b) E = "2 B"

$$P(E|E_1) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

$$P(E|E_2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$P(E) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{9} + \frac{1}{15} = \frac{5+3}{45} = \boxed{\frac{8}{45}}$$

c) $E =$ "1R e 1B"

$$P(E) = 1 - P(RR) - P(BB) =$$

$$= 1 - \frac{11}{45} - \frac{8}{45} = \frac{45-11-8}{45} = \boxed{\frac{26}{45}}$$

TEOREMA DI BAYES

155 Si hanno due urne. La prima contiene 5 palline bianche, 2 nere e 3 rosse e la seconda 4 bianche, 2 nere e 4 rosse. Si sceglie a caso un'urna lanciando un dado e quindi si estrae una pallina. Se viene una faccia con il numero minore di 3, si sceglie la prima urna, altrimenti la seconda. Viene estratta una pallina rossa. Calcola la probabilità che essa provenga dalla seconda urna.

$\left[\frac{8}{11}\right]$

URNA 1	URNA 2
5 B	4 B
2 N	2 N
3 R	4 R

$P(E_1) = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $P(E_2) = \frac{2}{3}$

$E =$ "estrazione di una pallina R"

$P(E_2|E) = ?$ DA CALCOLARE

$$P(E_2|E) = \frac{P(E|E_2)\cdot P(E_2)}{P(E)} = \frac{P(E|E_2)\cdot P(E_2)}{P(E|E_1)\cdot P(E_1) + P(E|E_2)\cdot P(E_2)} =$$

FORMULA DI DISINTEGRAZIONE

$$= \frac{\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{10}_{5}}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{\cancel{3}}{10}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} + \frac{4}{10}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{10}+\frac{8}{30}} = \frac{4}{\cancel{15}}\cdot\frac{\cancel{30}^{2}}{11} = \boxed{\frac{8}{11}}$$

159 ●●

Due macchine producono lo stesso pezzo meccanico. La prima produce il 40% di tutto il quantitativo e il 98% della sua produzione è senza difetti. La seconda macchina ha un tasso di difettosità del 7%. Avendo preso a caso un pezzo e avendo accertato che è difettoso, calcola la probabilità che esso provenga dalla seconda macchina.

[84%]

E_1 = "prodotto dalla 1°" E_2 = "prodotto dalla 2°"

$P(E_1) = 0,4$ $P(E_2) = 0,6$

E = "pezzo difettoso"

$P(E|E_1) = 0,02$ $P(E|E_2) = 0,07$

$$P(E_2|E) = \frac{P(E|E_2)\cdot P(E_2)}{P(E|E_1)\cdot P(E_1) + P(E|E_2)\cdot P(E_2)} =$$

$$= \frac{0,07 \cdot 0,6}{0,02 \cdot 0,4 + 0,07 \cdot 0,6} = 0,84 = \boxed{84\%}$$