SIMULAZIONE PROBLEMA ESAME DI STATO

Si consideri la famiglia di funzioni reali di variabile reale $f_k(x) = \frac{1}{x^2+k}$, per ogni $k \in \mathbb{R}^+$.

1. Verificare che, al variare di $k \in \mathbb{R}^+$, la funzione f_k ammette due punti di flesso che appartengono alla curva di equazione $y = \frac{1}{4x^2}$. Verificare, inoltre, che il grafico Γ_k della funzione f_k è tangente alla circonferenza α_k di equazione $x^2 + y^2 - \frac{y}{k} = 0$ e studiare il numero di intersezioni tra le due curve al variare di $k \in \mathbb{R}^+$.

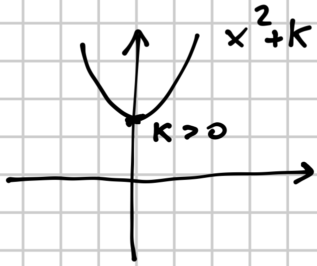
$$f_K(x) = \frac{1}{x^2+K} \qquad K>0$$

DOMINIO $= \mathbb{R}$

$f_K > 0$ (SEMPRE POSITIVA)

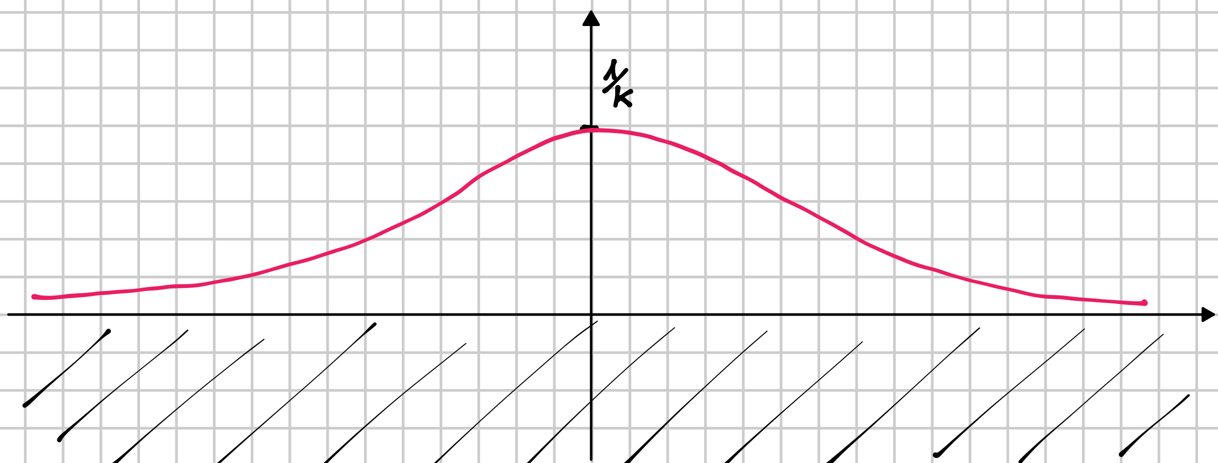
f_K È PARI

Se considero $x^2+K \longrightarrow$



Siccome x^2+K ha in 0 un punto di minimo di valore $K>0$, il reciproco $\frac{1}{x^2+K}$ ha in 0 un punto di massimo (di valore $\frac{1}{K}$).

$\lim_{x\to\pm\infty} f_K(x) = 0^+$. Dati gli intervalli di decrescenza e crescenza del denominatore, si ha che f_K cresce in $]-\infty, 0]$ e decresce in $[0,+\infty[$



$$f_K(x) = \frac{1}{x^2+K} = (x^2+K)^{-1}$$

$$f'_K(x) = -\frac{2x}{(x^2+K)^2} \qquad \left(f'_K(x) < 0 \text{ per } x > 0 \text{ e } f'_K(x) > 0 \text{ per } x < 0\right)$$

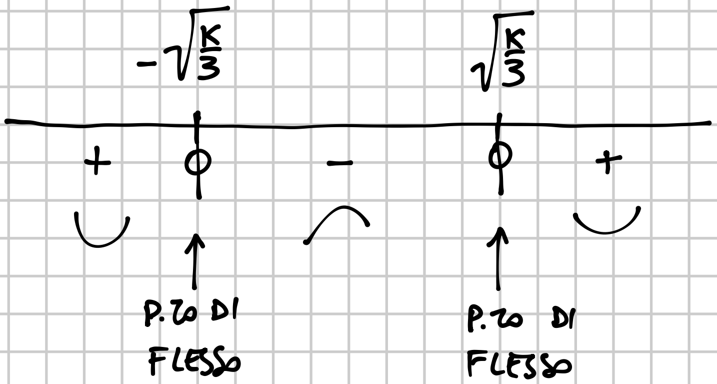
$$f''_K(x) = -\frac{2(x^2+K)^2 - 2(x^2+K)\cdot 2x \cdot 2x}{(x^2+K)^4} =$$

$$= -\frac{2\cancel{(x^2+K)}\left[x^2+K-4x^2\right]}{(x^2+K)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2(3x^2-K)}{(x^2+K)^3}$$

$$f''_K(x) = 0 \implies 3x^2 - K = 0 \implies x = \pm\sqrt{\frac{K}{3}}$$

$$f''_K(x) > 0 \implies 3x^2 - K > 0 \implies x < -\sqrt{\frac{K}{3}} \ \vee \ x > \sqrt{\frac{K}{3}}$$

f''_K



$\pm\sqrt{\frac{K}{3}}$ PUNTI DI FLESSO

$$f_K\left(\pm\sqrt{\frac{K}{3}}\right) = \frac{1}{\frac{K}{3}+K} = \frac{1}{\frac{K+3K}{3}} = \frac{3}{4K}$$

$$F_1\left(-\sqrt{\frac{K}{3}}, \frac{3}{4K}\right) \qquad F_2\left(\sqrt{\frac{K}{3}}, \frac{3}{4K}\right)$$

Per verificare che F_1 ed F_2 appartengano alla curva $y = \frac{1}{4x^2}$ sostituisco le coordinate

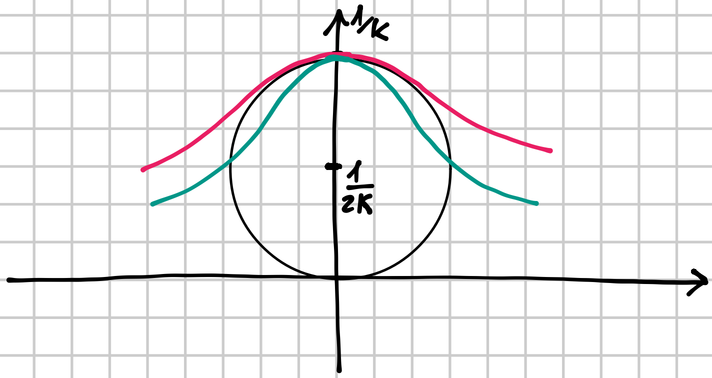
$$F_1 \rightsquigarrow \frac{3}{4K} = \frac{1}{4\left(-\sqrt{\frac{K}{3}}\right)^2}$$

$$\frac{3}{4K} = \frac{3}{4K} \quad \text{OK!}$$

(stessa cosa per F_2)

CIRCONFERENZA $\quad \alpha_K : \quad x^2+y^2-\frac{y}{K}=0$ ← passa per l'origine O

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2K}\right)$$



La circonferenza e la curva Γ_K si intersecano nel punto $\left(0, \frac{1}{K}\right)$, per ogni valore di K. In questo punto la tangente al grafico della circonferenza è $y=\frac{1}{K}$; questa è anche la tangente al grafico di Γ_K, infatti:

$f'_K(x) = -\frac{2x}{(x^2+K)^2}$ e $f'_K(0)=0$, dunque tangente orizzontale

$\Rightarrow$ α_K e Γ_K hanno la stessa tangente in $\left(0,\frac{1}{K}\right)$, dunque sono tangenti fra loro.

INTERSEZIONI:

$$\begin{cases} x^2+y^2-\frac{y}{K}=0 \\ y=\frac{1}{x^2+K} \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+\frac{1}{(x^2+K)^2}-\frac{1}{K(x^2+K)}=0$$

$$\frac{x^2K(x^2+K)^2+K-(x^2+K)}{\cancel{K(x^2+K)^2}}=0$$

$$\frac{x^2K(x^2+K)^2+K-(x^2+K)}{\cancel{K(x^2+K)^2}}=0$$

$$x^2K(x^4+K^2+2Kx^2)+\cancel{K}-x^2-\cancel{K}=0$$

$$x^2\left[Kx^4+K^3+2K^2x^2-1\right]=0 \Rightarrow x=0 \quad (\text{già trovato})$$

$$Kx^4+2K^2x^2+K^3-1=0$$

$$x^2=\frac{-K^2\pm\sqrt{K^4-K(K^3-1)}}{K}=\frac{-K^2\pm\sqrt{\cancel{K^4}-\cancel{K^4}+K}}{K}=$$

$$=\frac{-K^2\pm\sqrt{K}}{K}$$

Siccome $x^2\geq 0$ si ha che per avere altre soluzioni oltre a 0, deve essere

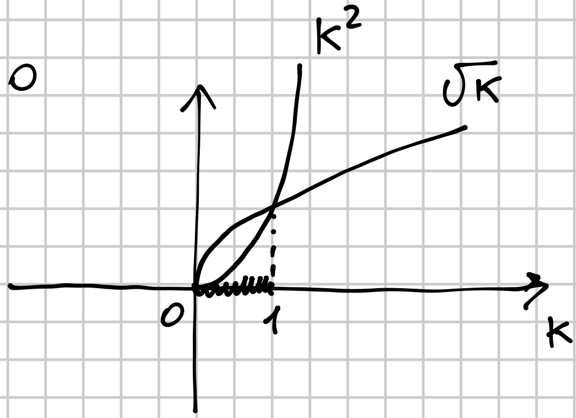
$$-K^2+\sqrt{K}\geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{K}\geq K^2$$

$$\Downarrow$$

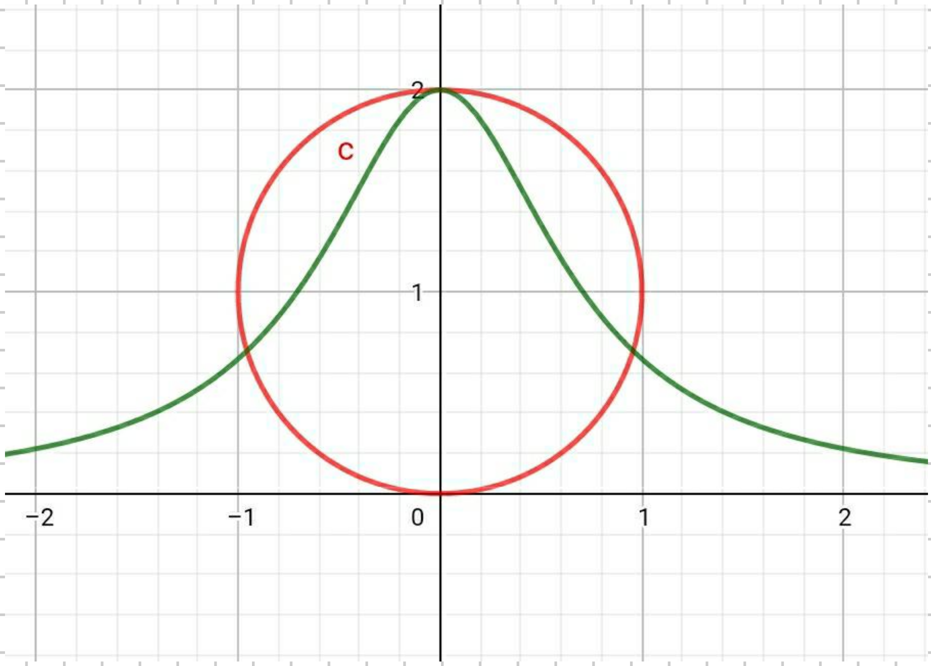
$$0<K\leq 1$$



CONCLUSIONE

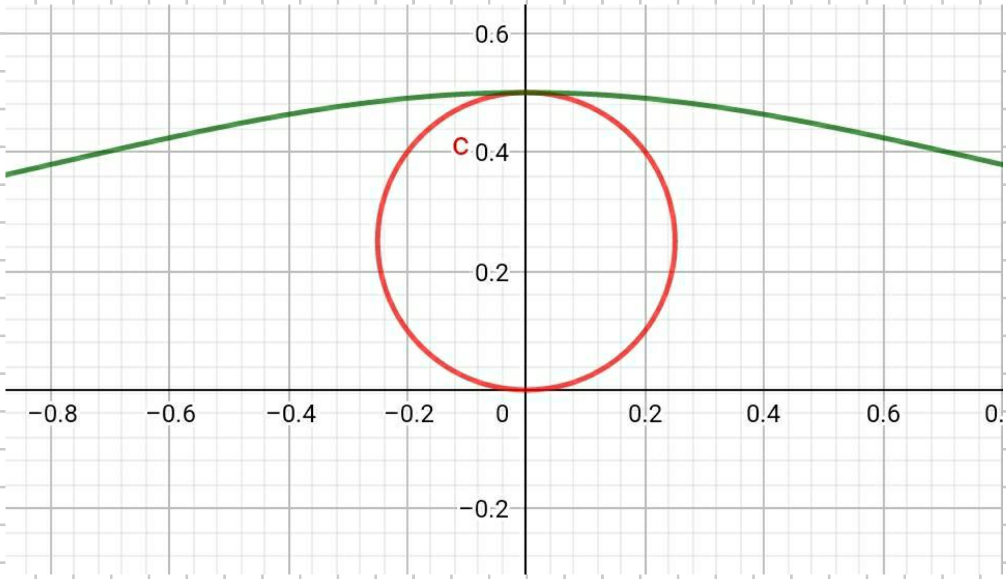
$0<K\leq 1 \Rightarrow$ 3 INTERSEZIONI FRA Γ_K E α_K $\left(x=0,\ x=\pm\sqrt{\frac{-K^2+\sqrt{K}}{K}}\right)$

$K>1 \Rightarrow$ 1 INTERSEZIONE " " $(x=0)$



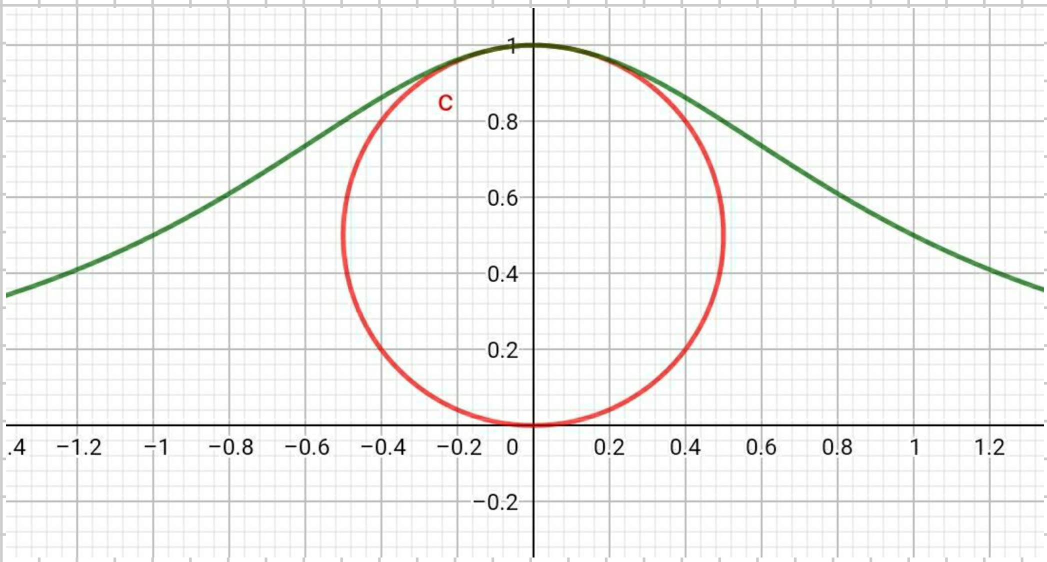
$K = \frac{1}{2}$

3 INTERSEZIONI



$K = 2$

1 INTERSEZIONE



$K = 1$

3 INTERSEZIONI
COINCIDENTI

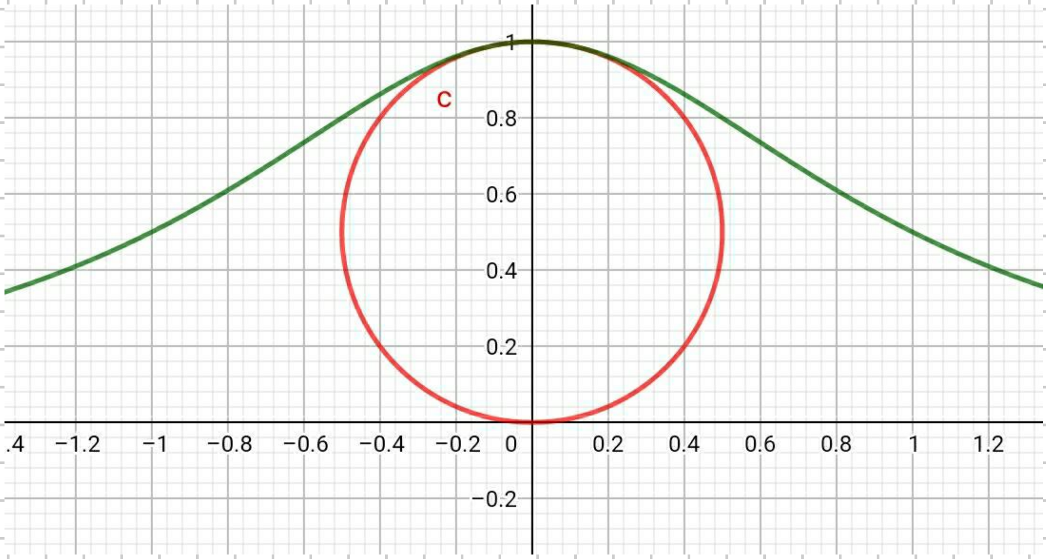
2. Dopo aver studiato la funzione $f_1(x)$, tracciarne il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale. Determinare per quale valore di b l'area sottesa al grafico della funzione $f_1(x)$ nell'intervallo $[0; b]$ è uguale a quella del cerchio α_1 di equazione $x^2 + y^2 - y \leq 0$.

STUDIO DI FUNZIONE $\rightarrow$ OVVIO

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\mathcal{A}_{\alpha_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{4}$$

$$r = \frac{1}{2}$$



$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$ equazione da risolvere

$$\left[\arctan x\right]_0^b = \frac{\pi}{4} \qquad \arctan b - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan b = \frac{\pi}{4} \qquad \boxed{b = 1}$$

Un conduttore sferico, di raggio $r = 1{,}00$ cm, viene caricato con una carica positiva Q. Il centro della sfera si trova nel punto $A(0; 1{,}00)$ di un riferimento cartesiano ortogonale, in cui le distanze sono misurate in metri.

3. Determinare la densità superficiale della distribuzione di carica, se il campo elettrico misurato nel punto $B(1{,}73; 0)$ vale $E = 2{,}00 \cdot 10^4$ V/m.

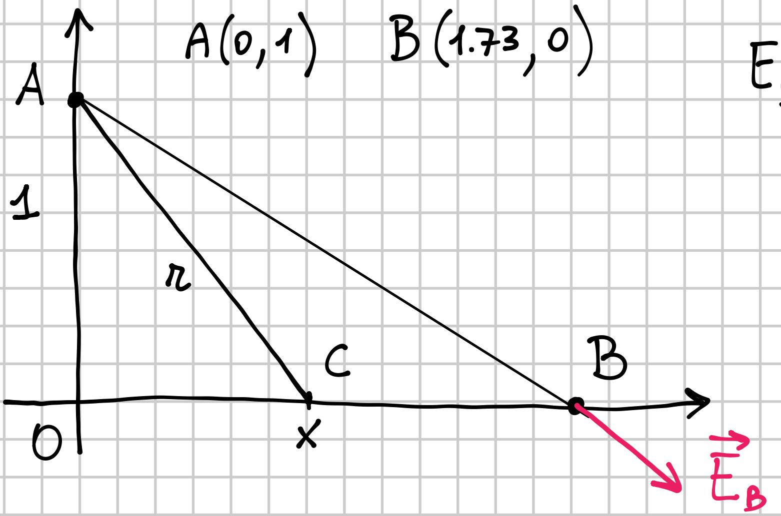
Verificare che il potenziale elettrico generato da Q in un punto $C(x; 0)$ dell'asse delle ascisse può essere espresso dalla funzione

$$V(x) = h \cdot \sqrt{f_1(x)},$$

dove h è una costante positiva e $f_1(x)$ è una funzione della famiglia f_k, con $k = 1{,}00$ m². Determinare le unità di misura di h.

Tracciare l'andamento probabile della funzione $V(x)$, basandosi sul grafico di $f_1(x)$.

$A(0,1) \quad B(1.73, 0)$



$$E_B = 2{,}00 \times 10^4 \ \frac{V}{m}$$

$$E_B = K_0 \frac{Q}{r_B^2} \qquad r_B^2 = 1^2 + (1.73)^2$$

$$\Rightarrow Q = \frac{E_B r_B^2}{K_0}$$

DENSITÀ SUPERFICIALE

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

R = raggio sfera

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{r_B^2 E_B}{K_0 4\pi R^2} = \frac{(1 + (1.73)^2)(2 \times 10^4)}{(8{,}988 \times 10^9) \cdot 4 \cdot \pi \cdot (1 \times 10^{-4})} \ \frac{C}{m^2} =$$

$$= 0{,}007070424 \ \frac{C}{m^2} \simeq \boxed{7{,}07 \times 10^{-3} \ \frac{C}{m^2}}$$

$$V(x) = K_0 \frac{Q}{r} \Rightarrow V(x) = K_0 Q \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \underbrace{K_0 Q}_{h} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} =$$

$r = r(x) = \sqrt{1+x^2}$

r DIPENDE DA x

$$= h \sqrt{f_1(x)}$$ quindi $V(x)$ ha la forma richiesta

$h = K_0 Q > 0$ perché $K_0 > 0$ e $Q > 0$

UNITÀ DI MISURA DI k:

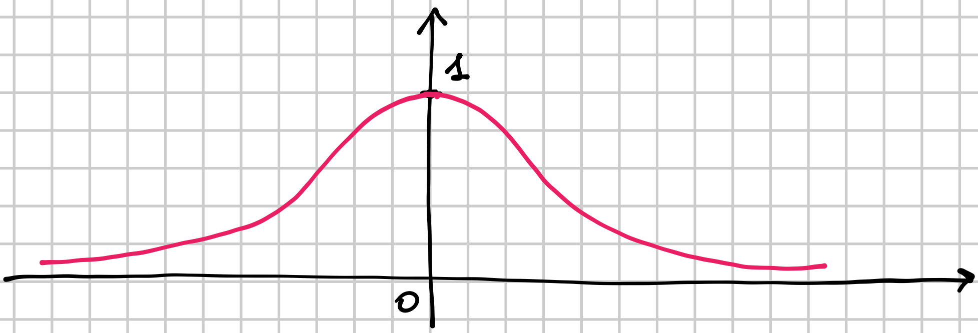
LEGGE DI COULOMB $F = k_0 \dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}$

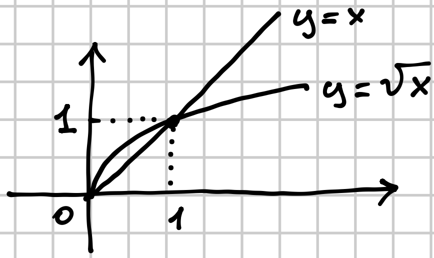
$$[k_0] = \frac{N \cdot m^2}{C^2} \qquad [k] = [k_0 Q] = \frac{N \cdot m^2}{C}$$

UNITÀ DI MISURA DI k (OPPURE ANCHE $V \cdot m$)

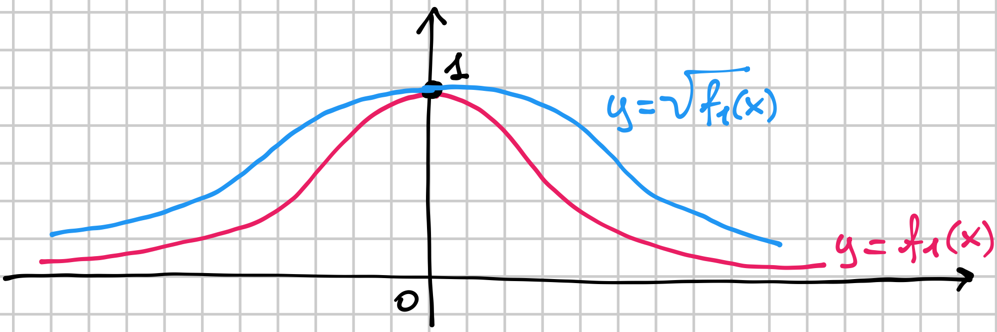
GRAFICO QUALITATIVO DI $y = k\sqrt{f_1(x)}$

$y = f_1(x)$

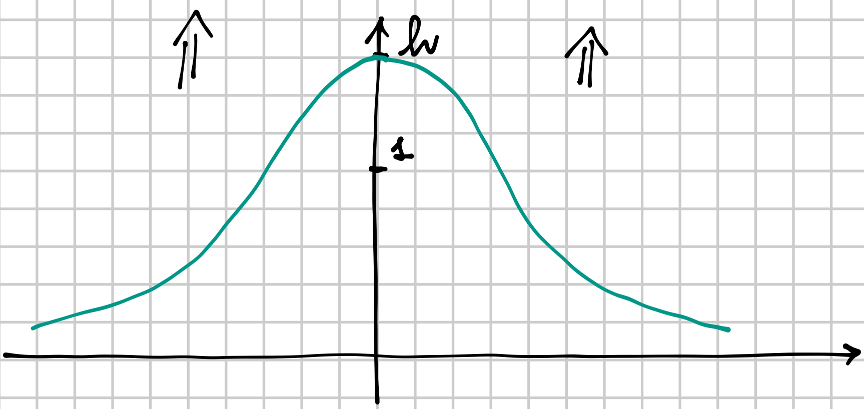


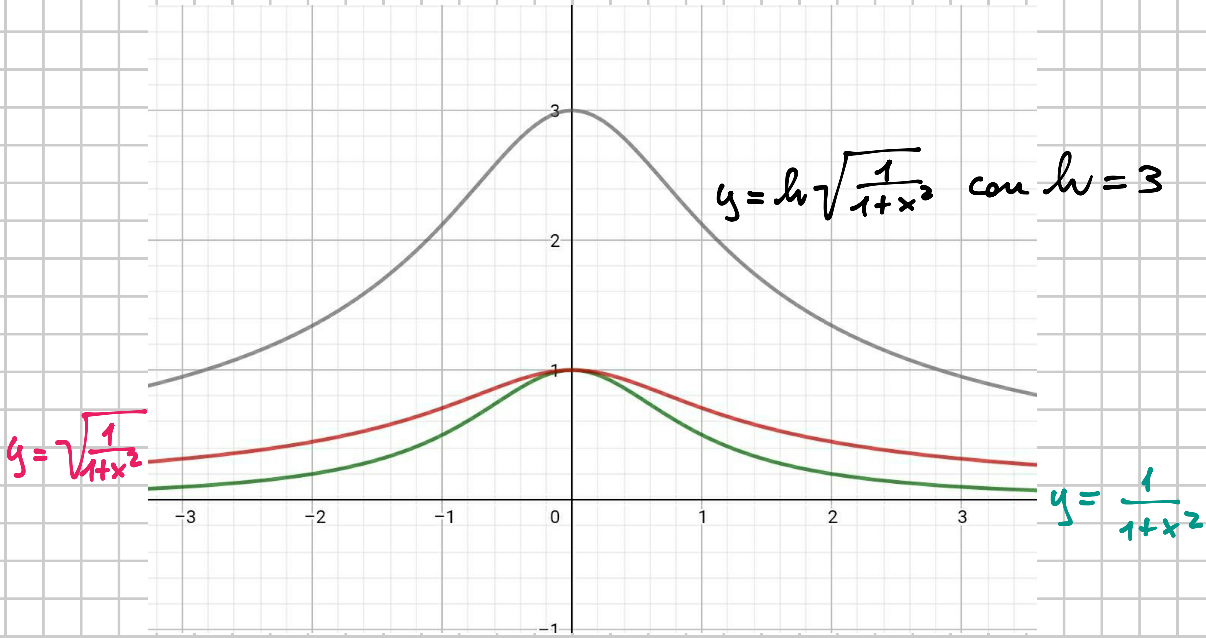


$y = \sqrt{f_1(x)}$



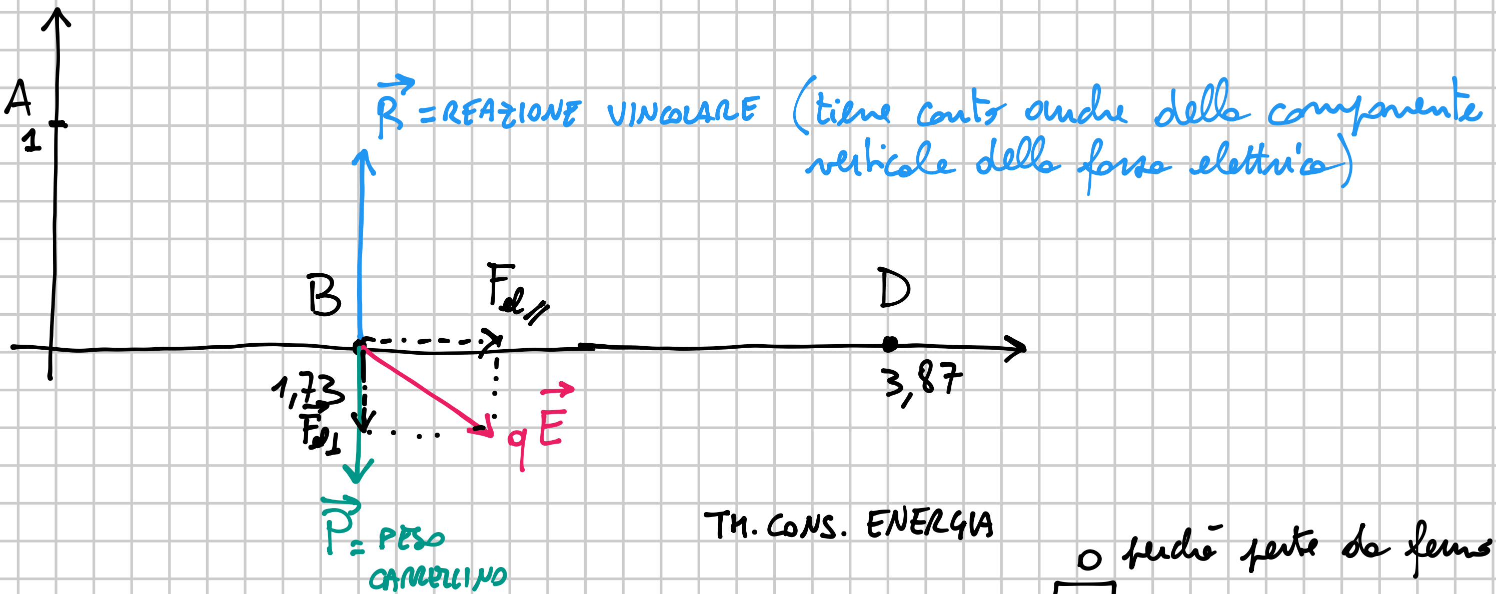
$y = k\sqrt{f_1(x)}$





4. Un carrellino metallico di massa $m = 50$ g, inizialmente scarico e di dimensioni trascurabili, viene posizionato in B su una guida metallica, sovrapposta all'asse x. Il carrellino, inizialmente fermo, è vincolato a scivolare sulla guida, con attrito trascurabile. In un certo istante sul carrellino viene depositata una carica $q = 1{,}00 \cdot 10^{-6}$ C. Determinare la velocità raggiunta dal carrellino quando passa per il punto $D(3{,}87; 0)$.

È vero che se si raddoppia la massa del carrellino, allora dimezza la sua velocità in D?



TH. CONS. ENERGIA

$$K_D + U_D = \overbrace{K_B}^{0 \text{ perché parte da fermo}} + U_B$$

$$K_D = U_B - U_D = qV_B - qV_D =$$

$$= q(V_B - V_A)$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = q\left(V_B - V_A\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{2q\left(V_B - V_A\right)}{m}}$$

$$V(x) = h \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{E_B \cdot r_B^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2\times 10^4 \times \left(1 + (1.73)^2\right)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$h = k_0 Q = E_B \cdot r_B^2$$

$$V_B = V(1.73) = \frac{2\times 10^4 \times (1+1.73^2)}{\sqrt{1+1.73^2}} = 3{,}996448 \ldots \times 10^4 \text{ V}$$

$$V_D = V(3.87) = \frac{2\times 10^4 \times (1+1.73^2)}{\sqrt{1+3.87^2}} = 1{,}99789 \ldots \times 10^4 \text{ V}$$

$$v = \sqrt{\frac{2q\left(V_B - V_A\right)}{m}} = \sqrt{\frac{2(10^{-6})(3{,}99\ldots - 1{,}99\ldots)\times 10^4}{50\times 10^{-3}}} \ \frac{m}{s}$$

$$= 0{,}89410 \ldots \ \frac{m}{s} \simeq \boxed{0{,}89 \ \frac{m}{s}}$$

$$v = \frac{\text{costante}}{\sqrt{m}}$$

Se raddoppio la massa

$$v_D' = \frac{\text{costante}}{\sqrt{2m}} = \frac{v_D}{\sqrt{2}}$$

La velocità <u>non</u> si dimezza, ma viene divisa per $\sqrt{2}$