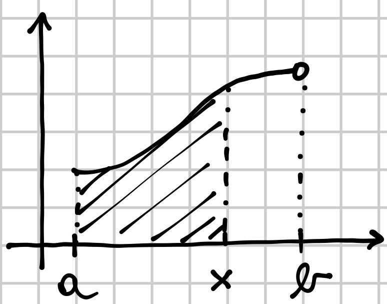
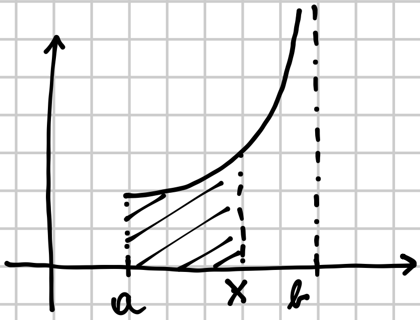
INTEGRALI IMPROPRI

PROBLEMA: dare senso a integrali di funzioni definite in intervalli del tipo $[a,b)$ o $[a,+\infty)$

1) $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ f continua





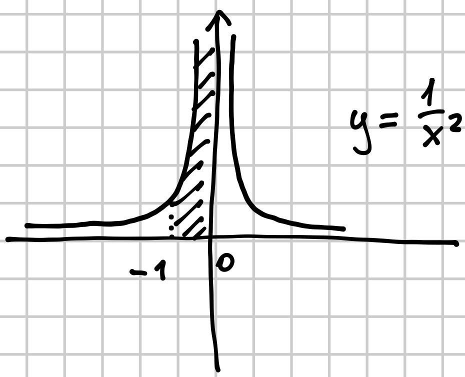
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,dt \quad (*)$$

DEFINIZIONE

$f:[a,b)\to\mathbb{R}$ continua è INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO IN $[a,b)$ se esiste finito il limite $(*)$. In tal caso $\int_a^b f(x)\,dx$ si dice INTEGRALE IMPROPRIO DI f in $[a,b)$

ESEMPIO 1

$$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}\,dx = ?$$



$$= \lim_{x\to 0^-}\int_{-1}^{x}\frac{1}{t^2}\,dt =$$

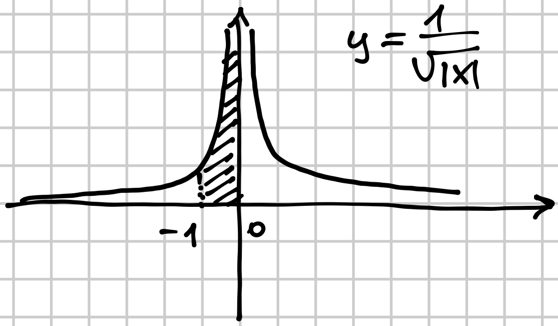
$$= \lim_{x\to 0^-}\int_{-1}^{x}\frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to 0^-}\left[-\frac{1}{t}\right]_{-1}^{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x}+1\right) = +\infty$$

AREA INFINITA DI UNA REGIONE ILLIMITATA

l'integrale DIVERGE

ESEMPIO 2

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx =$$



$$= \lim_{x \to 0^-} \int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{-t}}\,dt = \lim_{x \to 0^-} \left[-\int_{1}^{-x} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \right] = \lim_{x \to 0^-} \int_{-x}^{1} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du =$$

$$-t = u$$

$$-u = t \qquad dt = -du$$

$$= \lim_{x \to 0^-} 2 \int_{-x}^{1} \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \lim_{x \to 0^-} 2 \left[\sqrt{u} \right]_{-x}^{1} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} 2 \left[1 - \sqrt{-x} \right] = \lim_{x \to 0^-} 2 \left[1 - \sqrt{|x|} \right] = 2$$

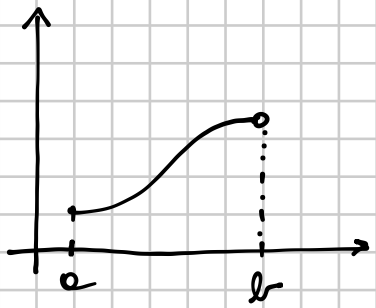
AREA FINITA

DI UNA

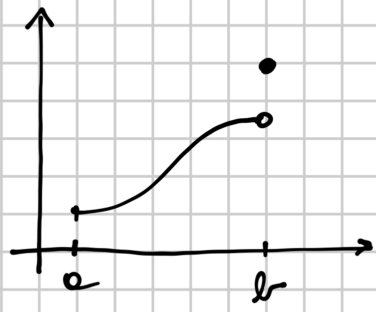
REGIONE ILLIMITATA

Se la funzione è definita e continua in $[a,b)$ e <u>LIMITATA</u>, possiamo distinguere i casi

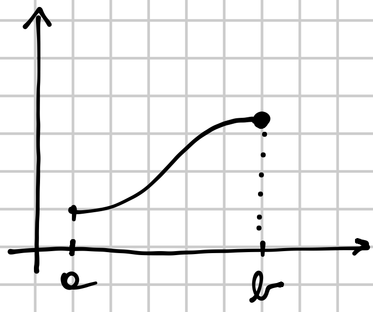
$\boxed{1}$



$\boxed{2}$



$\boxed{3}$

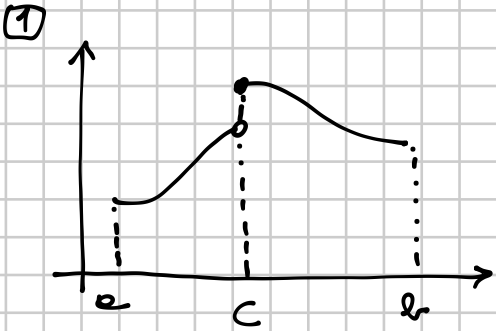


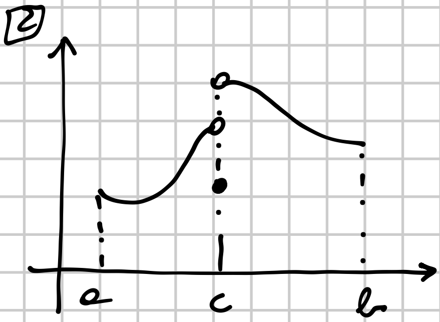
queste 2 funzioni estendono f su $[a,b]$, la 1° non è continua, la 2° sì.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$$

questo "nuovo" integrale coincide con la nozione vecchia nel caso $\boxed{3}$

Tutti e 3 i casi danno lo stesso risultato per $\int_a^b f(x)\,dx$, infatti $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ è la stessa per tutti e 3 i casi, dunque anche il suo limite è lo stesso





$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{\text{IMPROPRIO NEL CASO } \boxed{1} \text{ E NEL CASO } \boxed{2}} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{\text{IMPROPRIO SOLO NEL CASO } \boxed{2}}$$

(NEL CASO $\boxed{1}$ È L'INTEGRALE DI TIPO "VECCHIO")