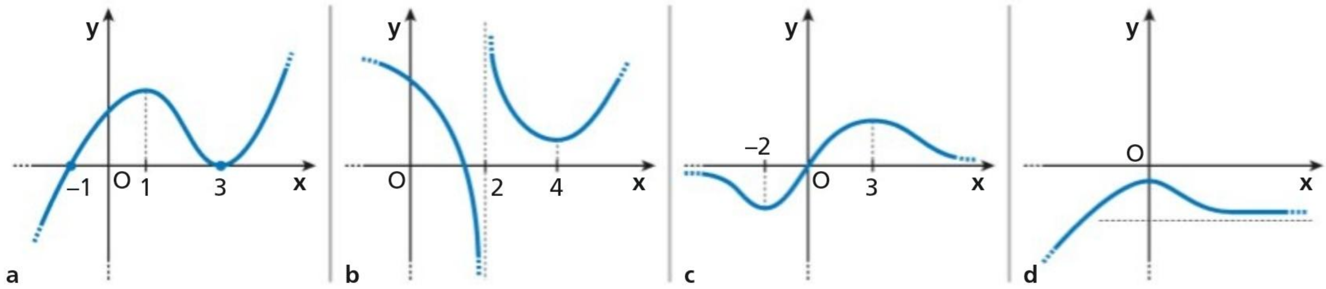
1/2/2021

182 **LEGGI IL GRAFICO** Dal grafico di $f(x)$ deduci il segno di $f'(x)$.



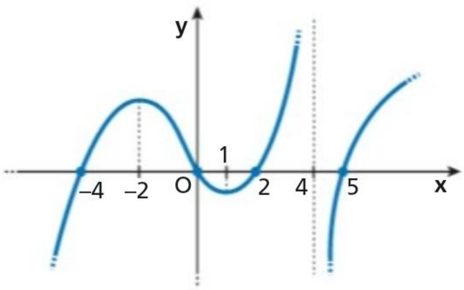
a) $f'(x) > 0$ in $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$, $f'(x) < 0$ in $]1, 3[$

b) $f'(x) > 0$ in $]4, +\infty[$, $f'(x) < 0$ in $]-\infty, 2[\cup]2, 4[$

c) $f'(x) > 0$ in $]-2, 3[$, $f'(x) < 0$ in $]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$

d) $f'(x) > 0$ in $]-\infty, 0[$, $f'(x) < 0$ in $]0, -\infty[$

183 **TEST** Solo una delle seguenti affermazioni che riguardano la funzione $f(x)$ è *falsa*. Quale?



A $f'(x) < 0$ in $]-2;1[$.

B $f'(x) \geq 0$ in $[1;4[$.

C $f(x)$ crescente in $]-\infty;-2]$.

~~D~~ $f(x)$ decrescente in $[0;2]$.

↓

$[0,1]$

240 $y = \cos^4 x - \cos^2 x + 2$

$$\left[\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right]$$

Trovare gli intervalli in cui f è strett. crescente e decrescente

$D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4\cos^3 x \cdot (-\sin x) - 2\cos x \cdot (-\sin x) =$$

$$= -4\cos^3 x \sin x + 2\cos x \sin x =$$

$$= 2\cos x \sin x \left(-2\cos^2 x + 1\right) =$$

$$= \sin 2x \cdot \left(1 - 2\cos^2 x\right) = -\sin 2x \cdot \cos 2x$$

$f'(x) > 0 \qquad -\sin 2x \cdot \cos 2x > 0$

$$\sin 2x \cdot \cos 2x < 0 \qquad 2x = t$$

$$\sin t \cdot \cos t < 0$$

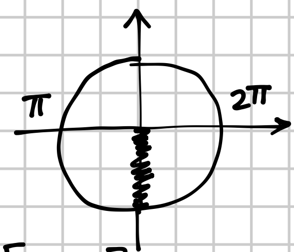
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$$\frac{1}{2}\sin 2t < 0$$

$$\sin 2t < 0$$

$$\sin 4x < 0$$



$$\Downarrow$$

$$\pi < 4x < 2\pi \quad \text{in } [0, 2\pi]$$

$$\Downarrow$$

$$\pi + 2k\pi < 4x < 2\pi + 2k\pi$$

$$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$$

f è strett. crescente negli intervalli del tipo

$$\left]\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right[$$

241 $y = xe^{-\frac{1}{x+2}}$ $\qquad [x < -4 \vee x > -1]$

Intervalli di cresc. e decr.

$D =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

$\left[-(x+2)^{-1}\right]'$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x+2}} + x \cdot e^{-\frac{1}{x+2}} \cdot \left(-\frac{1}{x+2}\right)' =$$

$$= e^{-\frac{1}{x+2}} + x \cdot e^{-\frac{1}{x+2}} \cdot (x+2)^{-2} =$$

$$= e^{-\frac{1}{x+2}} \left(1 + \frac{x}{(x+2)^2}\right)$$

$$f'(x) > 0 \implies 1 + \frac{x}{(x+2)^2} > 0 \qquad \frac{x^2+4+4x+x}{(x+2)^2} > 0$$

$$\frac{x^2+5x+4}{(x+2)^2} > 0 \qquad \frac{(x+4)(x+1)}{(x+2)^2} > 0$$

1 $x+4>0 \qquad x>-4$

2 $x+1>0 \qquad x>-1$

3 $(x+2)^2>0 \qquad x \neq -2$

		-4		-2		-1	
1	$-$	0	$+$		$+$		$+$
2	$-$		$-$		$-$	0	$+$
3	$+$		$+$	$\nexists$	$+$		$+$
	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
	$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$	MIN	$\nearrow$

Strett. crescente in $]-\infty, -4[$ e in $]-1, +\infty[$

Strett. decrescente in $]-4, -2[$ e in $]-2, -1[$

-4 = p.to di max relativo

-1 = p.to di min relativo

260 Dimostra che la funzione $y = 4x + e^x$ è invertibile in tutto $\mathbb{R}$. Detta $g(y)$ la funzione inversa, calcola $g(1)$ e $g'(1)$.

$\left[g(1) = 0;\ g'(1) = \frac{1}{5}\right]$

$f(x) = 4x + e^x \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Per essere invertibile, f deve essere INIETTIVA, cioè strettamente crescente oppure strettamente decrescente.

$f'(x) = 4 + e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi f è strettamente crescente

$\Downarrow$

INVERTIBILE

Chiamiamo g la funzione inversa, cioè $g = f^{-1}$

$$f(x) = 1 \iff x = f^{-1}(1) = g(1)$$

$$4x + e^x = 1 \iff x = 0 \text{, dunque } g(1) = 0$$

Vale la formula

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{, dunque } g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} =$$

$$= \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4+1} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tale che f sia continua e derivabile in $\mathbb{R}$

46 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2-1}{x+b} & \text{se } x \leq 1 \\ \ln x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$[a = 0, b = -2]$

$b \neq -1$, altrimenti f non sarebbe definita in 1

CONTINUITÀ

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{ax^2-1}{x+b} = \frac{a-1}{1+b} \qquad \lim_{x \to 1^+} (\ln x + 1) = 1$$

$$(b \neq -1) \qquad \frac{a-1}{b+1} = 1 \Rightarrow a = b+2$$

DERIVABILITÀ

$$\left(\frac{ax^2-1}{x+b}\right)' = \frac{2ax(x+b)-(ax^2-1)}{(x+b)^2} = \frac{2ax^2+2abx-ax^2+1}{(x+b)^2} =$$

$$= \frac{ax^2+2abx+1}{(x+b)^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2+2abx+1}{(x+b)^2} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

"lontano" da 1

Per avere derivabilità in tutto $\mathbb{R}$ applichiamo il teorema del limite della derivata

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{ax^2+2abx+1}{(x+b)^2} = \frac{a+2ab+1}{(b+1)^2} \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{a+2ab+1}{(b+1)^2} = 1 \\ \\ a = b+2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+2ab\cancel{+1} = b^2\cancel{+1}+2b \\ \\ a = b+2 \end{cases}$$

$$b+2+2(b+2)b-b^2-2b=0$$

$$b+2+2b^2+4b-b^2-2b=0$$

$$b^2+3b+2=0 \qquad (b+2)(b+1)=0 \Rightarrow b=-2 \vee \underset{\text{NON ACCETTABILE}}{b=-1}$$

$$\boxed{\begin{cases} a=0 \\ b=-2 \end{cases}}$$