17/3/2021

INTEGRALI INDEFINITI

DEFINIZIONE : PRIMITIVA o ANTIDERIVATA

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Si chiama PRIMITIVA di f in I ogni funzione F derivabile in I tale che

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

TH. DERIVATA NULLA

$$\left.\begin{array}{ll} f: I \to \mathbb{R} & f \text{ derivabile in } I \\ I \text{ intervallo} & f'(x) = 0 \ \forall x \in I \end{array}\right| \Rightarrow f(x) = \text{COSTANTE IN } I$$

Se F e G sono due primitive di f in I:

$$[F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

$\Rightarrow F(x) - G(x) = \text{COSTANTE} \Rightarrow$ F-G è costante in I

TEOREMINO

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo

- F è una primitiva di f $\Rightarrow$ $F + \overset{\text{COSTANTE}}{c}$ è una primitiva di f
- F, G primitive di f $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$: $\underbrace{F = G + c}_{F(x) = G(x) + c \quad \forall x \in I}$

Da adesso in poi consideriamo solo funzioni $f: I \to \mathbb{R}$ CONTINUE in I (I intervallo)

TEOREMA

Se f è continua in I, allora f ha una primitiva in I

FUNZIONE (f)	PRIMITIVA F (una fra le infinite)
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
e^x	e^x
$\frac{\sin x}{x}$	?
e^{-x^2}	?

NON SONO FUNZIONI ELEMENTARI

Non sempre si riescono a scrivere esplicitamente le primitive di funzioni di "ordinaria amministrazione" come combinazioni di funzioni elementari.

DEFINIZIONE (INTEGRALE INDEFINITO)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f CONTINUA in I. L'insieme delle primitive di f si chiama INTEGRALE INDEFINITO DI f e si denota con

$$\int f(x)\,dx$$

ESEMPI

1) $$\int 4x^3\,dx = \underbrace{x^4 + c}$$

$I = \mathbb{R}$

denota l'insieme delle funzioni del tipo $x^4 + c$ con $c \in \mathbb{R}$

2) $$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

3) $$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

4) $$\int (-\sin x)\,dx = \cos x + c$$

5) $$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

6) $$\int e^x\,dx = e^x + c$$

IN PARTICOLARE

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

Inoltre

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad \text{con } F'(x) = f(x)$$

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = F'(x) = f(x)$$

In questo senso (impreciso!) si dice che l'integrazione indefinita e la derivazione sono operazioni inverse.

TEOREMA DI LINEARITÀ

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$c \in \mathbb{R} \qquad \int c f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$$

NON VALE !!! $$\cancel{\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\left(\int g(x)\,dx\right)}$$

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
$\cos x$	$-\sin x$
.....	.....

$\longleftarrow$

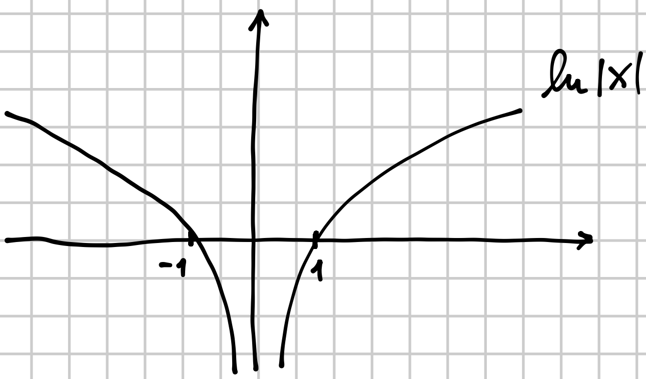
Bisogna leggere la tabella delle derivate in senso opposto

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$n \neq -1$

$n = -1 \Rightarrow \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$ I intervallo che non contiene 0

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot |x|' = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sign}(x) = \frac{1}{x}$$



Se considero $\frac{1}{x}$ non in un intervallo ma in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, non è più vero che le primitive di $\frac{1}{x}$ sono del tipo $\ln|x| + c$. Ad esempio

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + 1 & x > 0 \\ \ln|x| + 2 & x < 0 \end{cases}$$

è ancora una funzione che derivata dà f, cioè $F'(x) = \frac{1}{x}$, ma non è del tipo $\ln|x| + c$.

47 $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx;$

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$$

$\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq -1$

$$\int \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int 3x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{-\frac{2}{3}+1} x^{-\frac{2}{3}+1} + c =$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + c = 9x^{\frac{1}{3}} + c = \boxed{9\sqrt[3]{x} + c}$$

55 $\displaystyle\int (x^3 - 3x^2 - 8)\,dx$

$$\int (x^3 - 3x^2 - 8)\,dx = \int x^3 dx - \int 3x^2 dx - 8\int dx =$$

$$= \boxed{\frac{x^4}{4} - x^3 - 8x + c}$$

71 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(x-\sqrt{x\sqrt{x}}\right)dx \quad \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+c\right]$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(x-\left(x\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(x-\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(x-x^{\frac{3}{4}}\right)dx=\int\left[x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}\right]dx=$$

$$=\int x^{\frac{1}{2}}dx-\int x^{\frac{1}{4}}dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}-\frac{1}{\frac{1}{4}+1}x^{\frac{1}{4}+1}+c=$$

$$=\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\frac{5}{4}}x^{\frac{5}{4}}+c=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+c=$$

$$=\boxed{\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+c}$$