

$$y = mx + q$$

$$y = m'x + q'$$

$m = m'$ CONDIZ. DI PARALLELISMO

$m \cdot m' = -1$ CONDIZ. DI PERPENDICOLARITÀ

$$m' = -\frac{1}{m}$$

ANTIRECIPROCO DI m' (opposto del reciproco)

ESEMPI

1) $y = 3x + 7 \parallel y = 3x + 9$

2) $y = 2x - 2 \perp y = -\frac{1}{2}x + 5$ infatti $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

308 Scrivi l'equazione della retta passante per l'origine e perpendicolare alla retta di equazione $y = -\frac{2}{3}x - 1$.

$$\left[y = \frac{3}{2}x \right]$$

- RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE: $q = 0 \Rightarrow y = mx$

- RETTA $\perp y = -\frac{2}{3}x - 1 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$ antireciproco di $-\frac{2}{3}$

DA TROVARE

$$\boxed{y = \frac{3}{2}x}$$

314 Determina per quali valori di k la retta di equazione $2x - (k-2)y + 2 = 0$ è:

- parallela alla retta di equazione $y = 2x + 1$;
- perpendicolare alla retta di equazione $y = \frac{1}{3}x$.

$$\left[\text{a. } k = 3; \text{ b. } k = \frac{4}{3} \right]$$

a) $2x - (k-2)y + 2 = 0 \quad \downarrow \text{trasformiamo in forme esplicate}$

$$-(k-2)y = -2x - 2 \quad k \neq 2$$

$$y = \frac{2}{k-2}x + \frac{2}{k-2} \quad // \quad y = 2x + 1$$

$$\frac{2}{k-2} = 2$$

$$2 = 2k - 4 \quad 2k = 6$$

$$k = 3$$

La retta cercata è $2x - (3-2)y + 2 = 0$
sostituisco $k=3$

$$2x - y + 2 = 0$$

$$y = 2x + 2$$

b) $y = \frac{2}{k-2}x + \frac{2}{k-2} \perp y = \frac{1}{3}x$

$$k \neq 2$$

$$\frac{2}{k-2} = -3$$

↑
antreciproco
di $\frac{1}{3}$

$$2 = -3k + 6$$

$$3k = 4$$

$$k = \frac{4}{3}$$

La retta è $y = \frac{2}{\frac{4}{3}-2}x + \frac{2}{\frac{4}{3}-2}$

$$y = \frac{2}{-\frac{2}{3}}x + \frac{2}{-\frac{2}{3}} \quad y = -3x - 3$$

FASCIO PROPRIO DI RETTE

DI CENTRO UN PUNTO DATO

(PASSANTI PER UN PUNTO DATO)

Prendiamo il punto $P(2, 1)$

se $y = mx + q$ passa per P deve essere che

$$1 = 2m + q \quad (\text{deve soddisfare l'equazione})$$

↓

$$q = -2m + 1$$

$$y = mx - 2m + 1$$

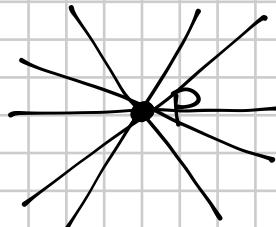
$$y - 1 = m(x - 2)$$

In generale se $P(x_0, y_0)$ ← punto fisso

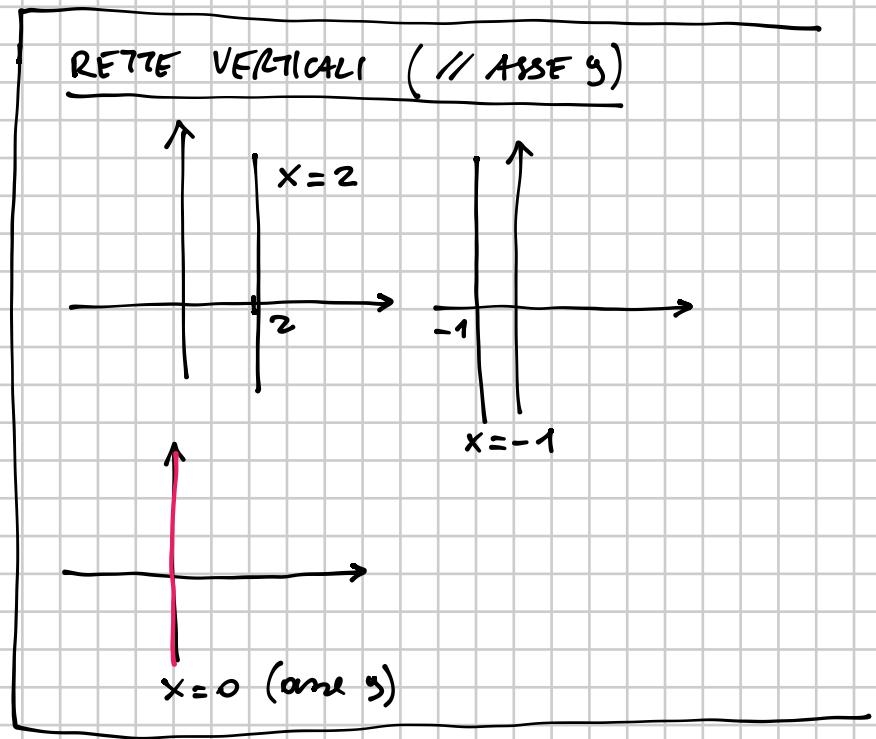
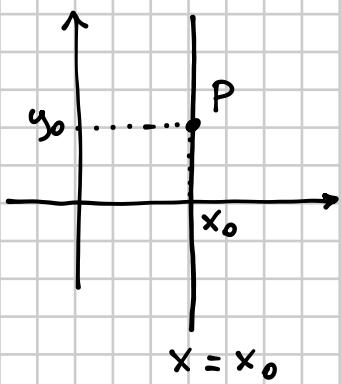
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

EQUAZIONE DEL
FASCIO PROPRIO DI
RETTE PASSANTI PER
 $P(x_0, y_0)$ (DI CENTRO P)

Ogni volta che dà un valore a m ottengi l'equazione
di una retta passante per P



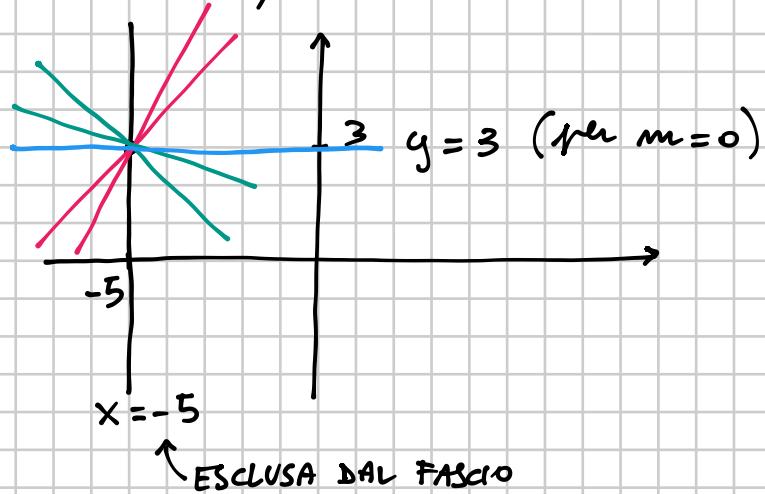
$y - y_0 = m(x - x_0)$ rappresenta, al variare di m , tutte le rette passanti per $P(x_0, y_0)$,
tranne quelle parallele all'asse y ,
cioè



Ad es.

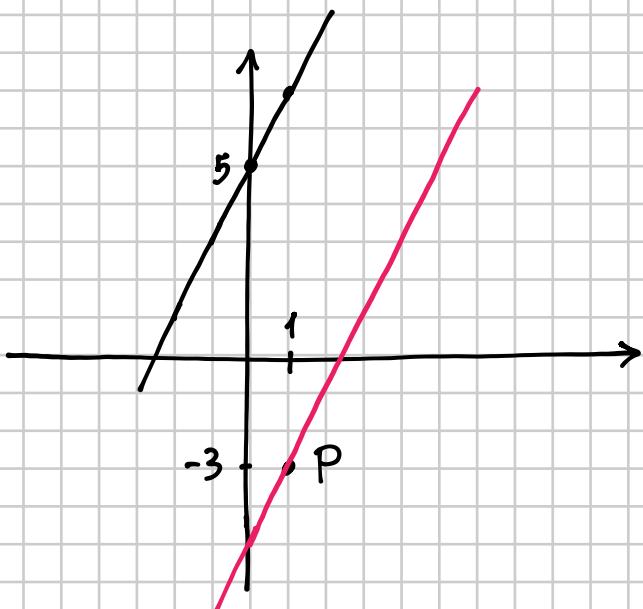
$$y - 3 = m(x + 5)$$

representa il fascio proprio di rette di centro $P(-5, 3)$, cioè l'insieme di tutte le rette passanti per $P(-5, 3)$ tranne quella verticale, ovvero $x = -5$.



ESERCIZI CLASSICI

- 1) Trovare la retta per $P(1, -3)$ parallela alla retta $y = 2x + 5$



FASCIO DI RETTE PER $P(1, -3)$

$$y + 3 = m(x - 1)$$

↓
Siccome cerco la parallela
a $y = 2x + 5$, prendo $m = 2$

$$y + 3 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2 - 3$$

$$\boxed{y = 2x - 5}$$

2) Trovare la retta per $P(-7, \frac{1}{2})$ perpendicolare
alla retta $y = \frac{3}{2}x + 24$

- trova il fascio proprio di rette per P

$$y - \frac{1}{2} = m(x + 7)$$

- prendo $m = -\frac{2}{3}$

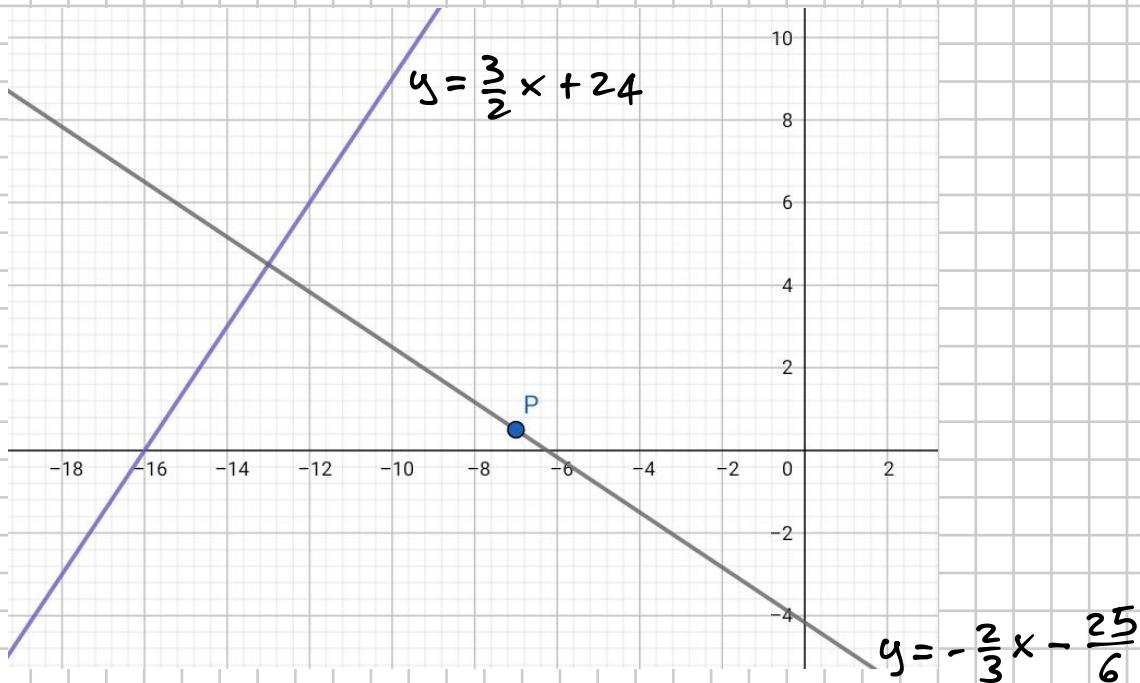
$$y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}(x + 7)$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{14}{3} + \frac{1}{2}$$

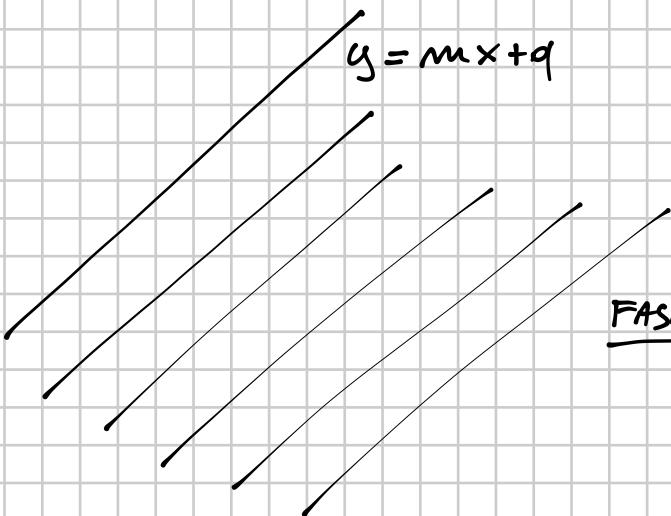
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{-28+3}{6}$$

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{25}{6}$$

retta per P
perpend. a $y = \frac{3}{2}x + 24$



FASCIO IMPROPPIO DI RETTE



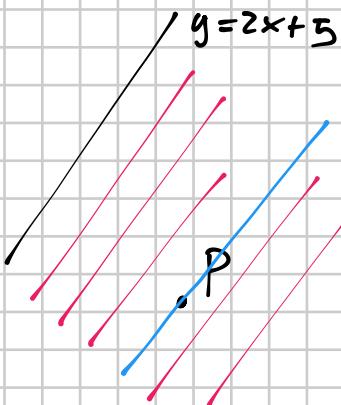
FASCIO IMPROPPIO = insieme di rette parallele a una retta data

Se ad esempio assumiamo la retta $y = 2x + 5$ come RETTA BASE, l'insieme delle rette parallele ad essa è rappresentato dall'equazione

$$y = 2x + q \quad (\text{con } q \text{ che varia})$$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE

Trovare la retta parallela a $y = 2x + 5$ passante per $P(1, -3)$.



- Considera il fascio improprio $y = 2x + q$
- Scelta fra le le rette del fascio quella che passa per $P(1, -3)$

$$y = 2x + q$$

$$-3 = 2 \cdot 1 + q \Rightarrow q = -5$$

$y = 2x - 5$

Trovare l'eq. della retta per P parallela ad r

330 $P(1, 3)$

$$r: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$r: \frac{y}{3} = -\frac{x}{2} + 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$y - 3 = m(x - 1) \quad (\text{fascio proprio})$$

$$m = -\frac{3}{2} \Rightarrow y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 1)$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + 3$$

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$$

Trovare la retta per P perpendicolare a r

344 $P(-1, 1)$ $r: x + 4y - 1 = 0$ $[y = 4x + 5]$

$$r: 4y = -x + 1 \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

ANTIRECIPICO

$$y - 1 = m(x + 1) \quad \text{fascio proprio per P}$$

$$m = 4$$

$$y - 1 = 4(x + 1)$$

$$y = 4x + 4 + 1$$

$$y = 4x + 5$$

318 Determina per quali valori di k la retta di equazione $(k-2)x - 2y + 1 = 0$:

- passa per il punto $P(1, -1)$;
- è parallela all'asse x ;
- è parallela all'asse y ;
- è parallela alla retta di equazione $y = -2x$;
- è perpendicolare alla retta di equazione $x + y + 3 = 0$.

[a. $k = -1$; b. $k = 2$; c. impossibile; d. $k = -2$; e. $k = 4$]

a) Sostituisco $P(1, -1)$ $(k-2) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1 = 0$

$$k - 2 + 2 + 1 = 0 \quad k = -1$$

(per avere l'eq. della retta sostituisco il valore di k trovato)

b) Nell'equazione deve compare solo la y , perché deve essere del tipo $y = -1, y = 2, y = 7, \text{ ecc...}$
e ciò avviene se il coeff. della x è 0

$$k-2=0 \Rightarrow k=2$$

c) Deve essere 0 il coeff. della y . Ma questo è $-2 \neq 0$
IMPOSSIBILE

d) $(k-2)x - 2y + 1 = 0 \quad // \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{k-2}{2}$

$$2y = (k-2)x + 1$$

$$y = \frac{k-2}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$\frac{k-2}{2} = -2$$

$$k-2 = -4$$

$$\boxed{k = -2}$$

e) $(k-2)x - 2y + 1 = 0 \quad \perp \quad x + y + 3 = 0$

$$y = \frac{k-2}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -x - 3$$

$$\frac{k-2}{2} = 1$$

$$\boxed{k = 4}$$

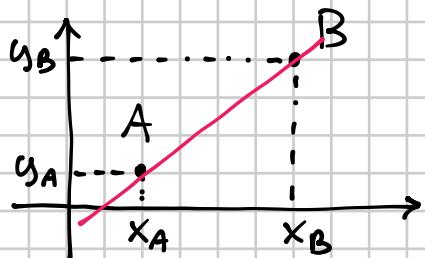
ANTIRECIPROCO = +1

RETTA PER 2 PUNTI

$A(x_A, y_A)$

$B(x_B, y_B)$

CASO 1 : i due punti A e B non stanno né nella stessa orizzontale né nella stessa verticale



$$x_A \neq x_B \quad y_A \neq y_B$$

$y = mx + q$ equazione generale

m e q DA TROVARE!

$$\text{forneggi per } A(x_A, y_A) \Rightarrow \begin{cases} y_A = mx_A + q \end{cases}$$

$$\text{forneggi per } B(x_B, y_B) \Rightarrow \begin{cases} -y_B = -mx_B + q \end{cases}$$

sistema nelle
incognite m e q

$$y_A - y_B = m(x_A - x_B)$$



$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

$$y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x_A + q$$

$$q = y_A - \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x_A$$

$$y = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x + y_A - \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x_A$$

$$y - y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x - \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} x_A$$

$$y - y_A = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} (x - x_A) \Rightarrow \frac{y - y_A}{y_A - y_B} = \frac{x - x_A}{x_A - x_B}$$

$$\boxed{\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}}$$

ESEMPIO

Rette per $A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$

$$\frac{y - 2}{3 - 2} = \frac{x - 1}{-2 - 1}$$

$$y - 2 = \frac{x - 1}{-3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 2$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}}$$