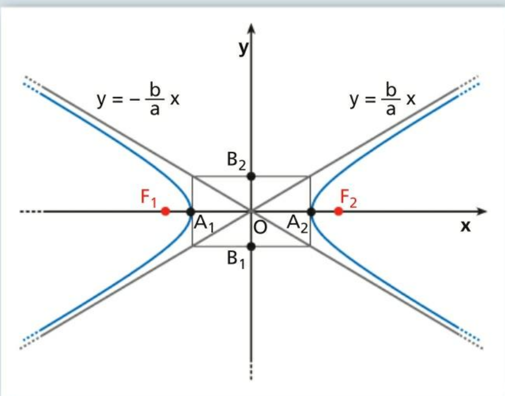
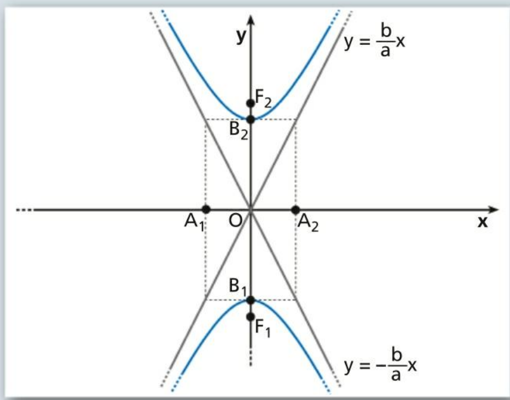
15/5/2018

## Iperbole

| Iperbole con i fuochi sull'asse *x* | Iperbole con i fuochi sull'asse *y* |
|---|---|
|   |   |
| **Equazione:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. | **Equazione:** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$. |
| **Asintoti:** $y = -\frac{b}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$. | **Asintoti:** $y = -\frac{b}{a}x$, $y = \frac{b}{a}x$. |
| **Fuochi:** $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, con $c = \sqrt{a^2+b^2}$. | **Fuochi:** $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, con $c = \sqrt{a^2+b^2}$. |
| **Eccentricità:** $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$. | **Eccentricità:** $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$. |

**17** $3x^2 - 2y^2 = -12$

$$\frac{3x^2}{12} - \frac{2y^2}{12} = -\frac{12}{12}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = -1$$

FUOCHI SU ASSE y

$a = 2$ $b = \sqrt{6}$ SEMIASSE TRASVERSO

$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{10}$

VERTICI $A_1(-2, 0)$ $A_2(2, 0)$

$B_1(0, -\sqrt{6})$ $B_2(0, \sqrt{6})$

FUOCHI $F_1(0, -\sqrt{10})$ $F_2(0, \sqrt{10})$

ECCENTRICITÀ $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

ASINTOTI $y = \pm \frac{b}{a} x$ $y = -\frac{\sqrt{6}}{2} x$ $y = \frac{\sqrt{6}}{2} x$

**28** $4x^2 - 9y^2 = 9$

$$\frac{4x^2}{9} - y^2 = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{9}{4}} - y^2 = 1 \qquad a = \frac{3}{2} \quad b = 1$$

FUOCHI SU ASSE x

$$c = \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$A_1\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ $A_2\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$B_1(0, -1)$ $B_2(0, 1)$

$F_1\left(-\frac{\sqrt{13}}{2}, 0\right)$ $F_2\left(\frac{\sqrt{13}}{2}, 0\right)$

ECC. $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

ASINTOTI $y = -\frac{2}{3}x \qquad y = \frac{2}{3}x$

**174** Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un vertice e un fuoco rispettivamente in (5; 0) e (−6; 0).

$$\left[\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1\right]$$

$A_2(5, 0)$ $F_1(-6, 0)$ fuochi su asse x

$a = 5$ $c = 6$ $c^2 = a^2 + b^2$ $b^2 = c^2 - a^2$

$= 36 - 25 = 11$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$$

**170** Scrivi l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $5x^2 - y^2 = 3$ nel suo punto di intersezione con la retta di equazione $y + \sqrt{2}\,x = 0$ che si trova nel secondo quadrante. $[5x + \sqrt{2}\,y + 3 = 0]$

$$\begin{cases} 5x^2 - y^2 = 3 \\ y + \sqrt{2}x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x^2 - 2x^2 = 3 \\ y = -\sqrt{2}x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ \phantom{y} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 1 \\ \phantom{y} \end{cases}$$

trovo i punti di intersezione

$$\boxed{A \begin{cases} x = -1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases}} \qquad B \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

II quadrante

Trovo la tangente all'iperbole in $A$

$$y - \sqrt{2} = m(x+1)$$

$$\begin{cases} y = mx + m + \sqrt{2} \\ 5x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

$$5x^2 - m^2x^2 - m^2 - 2 - 2m^2x - 2\sqrt{2}mx - 2\sqrt{2}m - 3 = 0$$

$$(5 - m^2)x^2 - 2(m^2 + \sqrt{2}m)x - m^2 - 2\sqrt{2}m - 5 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \implies (m^2 + \sqrt{2}m)^2 - (5 - m^2)(-m^2 - 2\sqrt{2}m - 5) = 0$$

$$\cancel{m^4} + 2m^2 + \cancel{2\sqrt{2}m^3} + \cancel{5m^2} + 10\sqrt{2}m + 25 - \cancel{m^4} - \cancel{2\sqrt{2}m^3} - \cancel{5m^2} = 0$$

$$2m^2 + 10\sqrt{2}m + 25 = 0 \qquad (\sqrt{2}m + 5)^2 = 0$$

$$m = -\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$y = -\frac{5}{\sqrt{2}}x - \frac{5}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}y = -5x - 5 + 2 \qquad \boxed{5x + \sqrt{2}y + 3 = 0}$$

**185** Scrivi l'equazione dell'iperbole avente un fuoco in $(-5;0)$ e un asintoto di equazione $y=\sqrt{\frac{2}{3}}x$.

$[2x^2-3y^2=30]$

fuochi su asse x

$c=5$

$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\hookrightarrow b=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$25=a^2+\frac{2}{3}a^2$$

$$25=\frac{5}{3}a^2 \qquad a^2=15$$

$$b^2=\frac{2}{3}a^2=\frac{2}{3}\cdot 15=10$$

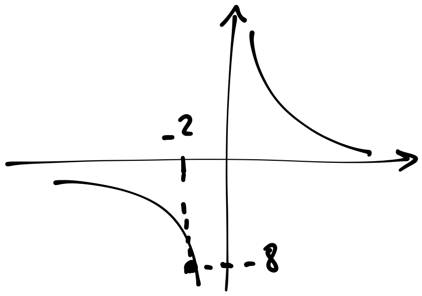
$$\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{10}=1$$

$$\hookrightarrow 10x^2-15y^2=150$$

$$\boxed{2x^2-3y^2=30}$$

# IPERBOLE EQUILATERA

**305** Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli asintoti, passante per $(-2; -8)$, e, dopo aver calcolato le coordinate dei suoi vertici, rappresentala graficamente. $[xy = 16; (-4; -4), (4; 4)]$




$xy = k$ con $k > 0$

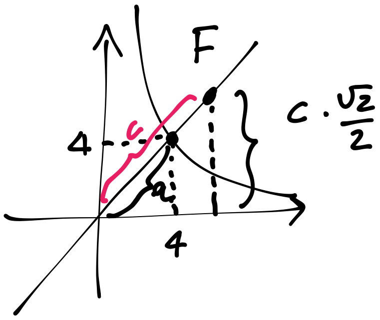
Se passa per $P(-2, -8)$

$(-2)(-8) = k \Rightarrow k = 16$

$$\boxed{xy = 16}$$

vertici $\begin{cases} xy = 16 \\ y = x \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 16 \\ y = x \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases}$




$A_1(-4, -4)$ $A_2(4, 4)$

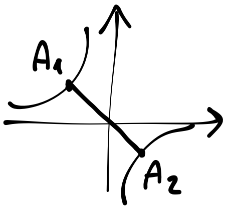
$a = 4\sqrt{2}$ $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} =$

$= \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$

$x_F = y_F = c\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

$F_1(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ $F_2(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

**311** Un'iperbole equilatera riferita agli asintoti ha i vertici nel secondo e quarto quadrante e la loro distanza è 8. Scrivi l'equazione dell'iperbole e le coordinate dei fuochi. [$xy = -8$; $F_1(-4; 4)$, $F_2(4; -4)$]




$$xy = -K \qquad K > 0$$

$$\overline{A_1A_2} = 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$\boxed{xy = -8}$$

$$K = \frac{a^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$c = \sqrt{2} \cdot a = 4\sqrt{2} \qquad x_F = \frac{c}{\sqrt{2}} = 4$$

$$y_F = -4$$

$$\boxed{F_1(-4, 4) \quad F_2(4, -4)}$$

**224** Calcola l'equazione dell'iperbole di eccentricità $e = 2$, avente centro di simmetria $O'(1; -3)$ e i fuochi su una retta parallela all'asse $x$, distanti fra loro 4. $\left[(x-1)^2 - \frac{(y+3)^2}{3} = 1\right]$

$$e = \frac{c}{a} \qquad 2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$\Downarrow$$

$$2 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 1 \qquad b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$\boxed{(x-1)^2 - \frac{(y+3)^2}{3} = 1}$$

**225** Trova e rappresenta l'equazione dell'iperbole con assi paralleli agli assi cartesiani, con i fuochi $F_1(-4; -4)$, $F_2(-4; 6)$ e semiasse trasverso di lunghezza 4.

$$\left[\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = -1\right]$$

fuochi su retta // asse y $\Rightarrow$ $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2} = -1$

semiasse trasverso $= b = 4$

Centro di simmetria = punto medio dei due fuochi!

$$C\left(\frac{-4-4}{2}, \frac{-4+6}{2}\right) = (-4, 1)$$

$$2c = \overline{F_1F_2} = |-4-6| = 10$$

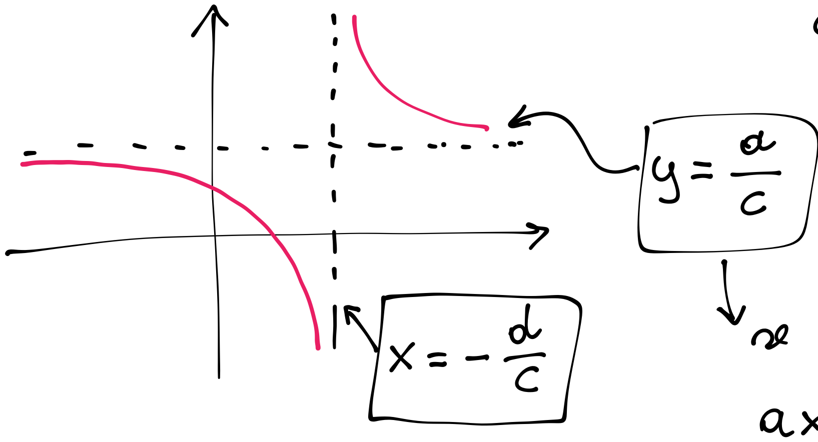
$c = 5 \qquad a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$

$$\boxed{\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = -1}$$

# FUNZIONE OMOGRAFICA

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightsquigarrow$$ GRAFICO È UN'IPERBOLE EQUILATERA

$c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$




se $x \to +\infty$ ($x$ TENDE A $+\infty$)

$ax + b \sim ax$

$cx + d \sim cx$

$$\frac{ax+b}{cx+d} \sim \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$$

$c \neq 0$, altrimenti sarebbe una retta

$ad - bc \neq 0$, altrimenti $ad = bc \Longrightarrow y = \frac{ax+b}{cx+d}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$y = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} =$$

$$= \frac{a\cancel{\left(x + \frac{b}{a}\right)}}{c\cancel{\left(x + \frac{b}{a}\right)}} = \frac{a}{c}$$ NON SAREBBE UN'IPERBOLE