69 Stabilisci per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{k+1} - \frac{y^2}{9} = 1$ rappresenta:

a. un'iperbole; **b.** un'iperbole con un vertice nel punto $A(4; 0)$. [a) $k > -1$; b) $k = 15$]

a) $K + 1 > 0$ $\boxed{K > -1}$ IP. CON FUOCHI SULL' ASSE X (perché ... $= 1$)

b) VERTICE $(4, 0) \Rightarrow a = 4 \Rightarrow K + 1 = 16 \Rightarrow \boxed{K = 15}$

73 Trova per quali valori di k l'equazione $\frac{x^2}{4k^2 - 1} - \frac{y^2}{k - 3} = 1$ rappresenta:

a. un'ellisse;

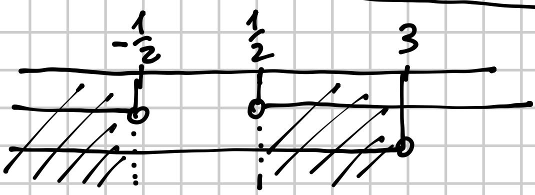
b. un'iperbole;

c. un'iperbole con i fuochi sull'asse y;

d. un'iperbole con i fuochi sull'asse y che ha distanza focale uguale a 4.

[a) $k < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < k < 3$; b) $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2} \vee k > 3$; c) $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$; d) $k = 0, k = -\frac{1}{4}$]

a) $\begin{cases} 4k^2 - 1 > 0 \\ K - 3 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} K < -\frac{1}{2} \vee K > \frac{1}{2} \\ K < 3 \end{cases}$ $\boxed{K < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < K < 3}$



b) $\begin{cases} 4K^2 - 1 > 0 \\ K - 3 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4k^2 - 1 < 0 \\ K - 3 < 0 \end{cases}$

IPERBOLE CON FUOCHI SU ASSE X

IPERBOLE CON FUOCHI SU ASSE y

$\begin{cases} K < -\frac{1}{2} \vee K > \frac{1}{2} \\ K > 3 \end{cases} \vee \begin{cases} -\frac{1}{2} < K < \frac{1}{2} \\ K < 3 \end{cases}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\boxed{K > 3 \quad \vee \quad -\frac{1}{2} < K < \frac{1}{2}}$

c) $\boxed{-\frac{1}{2} < K < \frac{1}{2}}$

d) $\begin{cases} -\frac{1}{2} < K < \frac{1}{2} \\ \sqrt{-4K^2 - K + 4} = 2 \end{cases}$

$2c = 4$

$\Updownarrow$

$c = 2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{-4K^2 + 1 - K + 3}$

l'equazione è $\dfrac{x^2}{4K^2-1} - \dfrac{y^2}{K-3} = 1$

Affinché abbia i fuochi sull'asse y deve essere nella forma

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\underbrace{-a^2}_{4K^2-1}} - \dfrac{y^2}{\underbrace{-b^2}_{K-3}} = 1$

$\begin{cases} -\frac{1}{2} < K < \frac{1}{2} \\ -4K^2 - K + \cancel{4} = \cancel{4} \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{1}{2} < K < \frac{1}{2} \\ K(-4K - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow K = 0 \quad \vee \quad K = -\frac{1}{4}$ ACCETTABILI ENTRAMBE

75 Determina i valori di k per cui l'equazione $(k+2)x^2-(1-k^2)y^2+1=0$ rappresenta un'iperbole:

a. con i fuochi sull'asse x;

b. passante per il punto $(3; 1)$;

c. con un vertice di coordinate $(1; 0)$.

[a) $k<-2$; b) $k=-6 \vee k=-3$; c) $k=-3$]

a) $(k+2)x^2-(1-k^2)y^2=-1$

FUOCHI SU ASSE X

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

affinché sia IPERBOLE

FUOCHI SU ASSE Y

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \iff \alpha x^2-\beta y^2=1$$

$$\alpha=\frac{1}{a^2} \quad \beta=\frac{1}{b^2} \quad (\alpha,\beta)>0$$

CAMBIO SEGNI

$$-(k+2)x^2+(1-k^2)y^2=1$$

$$-(k+2)x^2-[k^2-1]y^2=1$$

$$\alpha x^2-\beta y^2=1$$

$$\begin{cases}-(k+2)>0\\ 1-k^2<0\end{cases} \qquad \begin{cases}k<-2\\ k<-1 \vee k>1\end{cases}$$

IP. CON FUOCHI SU ASSE X

$$\Downarrow$$

$$\boxed{k<-2}$$

b) $k<-2$ (iperbole fuochi asse x)

$$\begin{cases}k+2>0\\ 1-k^2>0\end{cases} \text{(iperbole fuochi asse } y\text{)} \qquad \begin{cases}k>-2\\ -1<k<1\end{cases} \Rightarrow -1<k<1$$

Affinché sia un'iperbole deve essere $k<-2 \vee -1<k<1$

fuochi su asse x — fuochi su asse y

$(k+2)x^2-(1-k^2)y^2=-1$ passaggio per $(3,1)$

$$9(k+2)-(1-k^2)=-1$$

$$9k+18-\cancel{1}+k^2=\cancel{-1}$$

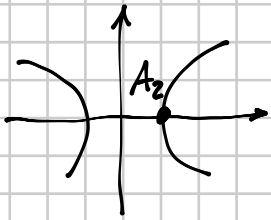
$$k^2+9k+18=0$$

$$(k+3)(k+6)=0$$

$$\boxed{k=-3 \vee k=-6}$$

entrambe accettabile

c) Se $(1,0)$ è un vertice dell'iperbole, significa che i fuochi sono sull'asse x



quindi siamo nel caso $k<-2$ e l'equazione è del tipo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$-(k+2)x^2+(1-k^2)y^2=1$$

$$\frac{x^2}{\underbrace{-\frac{1}{k+2}}_{a^2}}-\frac{y^2}{\frac{1}{k^2-1}}=1$$

Se $a^2=1$, allora $k+2=-1 \Rightarrow \boxed{k=-3}$

18 $3x^2-2y^2=-12$

Trovare tutte le caratteristiche e i punti fondamentali

$$\frac{3}{12}x^2-\frac{2}{12}y^2=-1$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=-1 \quad \text{fuochi su asse } y$$

$a^2=4 \Rightarrow a=2$

$b^2=6 \Rightarrow b=\sqrt{6}$

$c=\sqrt{4+6}=\sqrt{10}$

$y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$ ASINTOTI

FUOCHI $F_1(0,-\sqrt{10})$ $F_2(0,\sqrt{10})$

ECCENTRICITÀ $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{5}{3}}$

VERTICI $B_1(0,-\sqrt{6})$ $B_2(0,\sqrt{6})$