7/1/2021

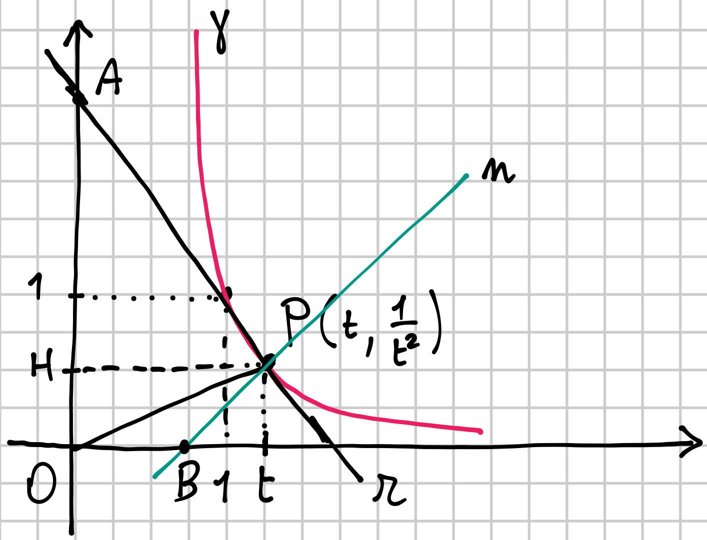
703 Data nel piano Oxy la curva γ di equazione $y = \frac{1}{x^2}$, sia P un punto di γ di ascissa $t > 0$ e sia r la retta tangente a γ nel punto P.

a. Esprimi in funzione di t l'area S_1 del triangolo OPA, essendo A l'intersezione di r con l'asse y.

b. Detta n la normale a γ per P, esprimi in funzione di t l'area S_2 del triangolo OPB, essendo B l'intersezione di n con l'asse x.

c. Calcola il limite $\lim_{t \to +\infty} \frac{S_1}{S_2}$.

$\left[\text{a) } S_1(t) = \frac{3}{2t}; \text{ b) } S_2(t) = \frac{t^6 - 2}{2t^7}; \text{ c) } 3\right]$



e) $t > 0$

$\mathcal{A}_{OPA}(t) = ?$

$= \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{PH}$

$P\left(t, \frac{1}{t^2}\right)$

$\overline{PH} = t$

a) $f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ $\quad f'(t) = -\frac{2}{t^3}$ coeff. angolare di r

TANGENTE / ASSE y $\begin{cases} y - \frac{1}{t^2} = -\frac{2}{t^3}(x - t) \\ x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow y - \frac{1}{t^2} = \frac{2}{t^2}$

$A\left(0, \frac{3}{t^2}\right) \leftarrow y = \frac{3}{t^2}$

$\Rightarrow \overline{OA} = \frac{3}{t^2}$

$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{t^2} \cdot t = \frac{3}{2t} \leadsto S_1(t) = \frac{3}{2t}$ (NOTAZIONE LIBRO)

b) coeff. angolare della normale $n \leadsto -\frac{1}{f'(t)} = \frac{t^3}{2}$

$n: \quad y - \frac{1}{t^2} = \frac{t^3}{2}(x - t)$

NORMALE
ASSE X
$$\begin{cases} y - \frac{1}{t^2} = \frac{t^3}{2}(x-t) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad -\frac{1}{t^2} = \frac{t^3}{2}(x-t)$$

$$\Rightarrow x - t = -\frac{2}{t^5} \qquad x = t - \frac{2}{t^5} \qquad B\left(t - \frac{2}{t^5}, 0\right)$$

$$S_2(t) = \frac{1}{2}\overline{OB} \cdot \overline{OH} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{2}{t^5}\right) \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{1}{2}\frac{t^6-2}{t^5} \cdot \frac{1}{t^2} =$$

$$= \frac{t^6-2}{2t^7}$$

c) $$\lim_{t\to+\infty} \frac{S_1}{S_2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{3}{2t}}{\frac{t^6-2}{2t^7}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{3t^6}{t^6-2} = 3$$

796 Un carrello scende lungo una rampa, inclinata di un angolo α costante rispetto al piano orizzontale, seguendo la legge oraria $s(t) = \frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha$, dove g è l'accelerazione di gravità.

a. Trova la velocità e l'accelerazione in funzione del tempo.

b. Se l'accelerazione è 4,9 m/s², calcola la lunghezza della rampa, sapendo che il carrello lasciato cadere dal punto più alto del piano arriva a terra con velocità di 19,6 m/s. [a) $v(t) = gt \sin\alpha$, $a(t) = g \sin\alpha$; b) $s = 39$ m]

a) $v(t) = \frac{ds}{dt} = gt \sin\alpha$

$$s(t) = \underbrace{\left(\frac{1}{2} g \sin\alpha\right)}_{\text{COSTANTE}} t^2$$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = g \sin\alpha$

b) $a = 4{,}9 \ \frac{m}{s^2}$ $\quad v = (g \sin\alpha)\, t = \left(4{,}9 \ \frac{m}{s^2}\right) t$

Istante t in cui il carrello giunge a terra ($v_f = 19{,}6 \ \frac{m}{s}$)

$$t = \frac{19{,}6 \ \frac{m}{s}}{4{,}9 \ \frac{m}{s^2}} = 4{,}0 \ s$$

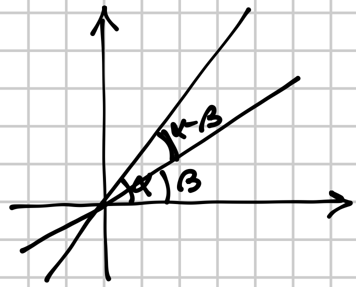
LUNGHEZZA RAMPA

$$s(t) = s(4{,}0 \ s) = \frac{1}{2} g \sin\alpha \,(4{,}0 \ s)^2 = \frac{1}{2}\left(4{,}9 \ \frac{m}{s^2}\right)(4{,}0 \ s)^2 =$$

$$= 39{,}2 \ m \simeq \boxed{39 \ m}$$

757 Calcola i valori di a e b in modo che le curve di equazione $y=-x^2+ax+b$ e $y=\ln\frac{x}{2}+2$ formino nel loro punto comune di ascissa 2 un angolo di 45°. $[a=7, b=-8]$

$$\tan\gamma = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$



$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Le 2 curve si incontrano nel punto di ascissa 2

$$f(x)=\ln\frac{x}{2}+2 \Rightarrow f(2)=\ln 1+2=2$$

PONGO

$$g(x)=-x^2+ax+b \Rightarrow g(2)=-4+2a+b=2$$

$$\Downarrow$$

$$b=6-2a$$

$$g(x)=-x^2+ax+6-2a$$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{x} \qquad g'(x)=-2x+a$$

$$m_1=f'(2)=\frac{1}{2} \qquad m_2=g'(2)=-4+a$$

$$\underbrace{\tan 45^\circ}_{1}=\left|\frac{\frac{1}{2}-(-4+a)}{1+\frac{1}{2}(-4+a)}\right|$$

$$\frac{\left|\frac{1}{2}+4-a\right|}{\left|1-2+\frac{1}{2}a\right|}=1 \qquad \left|\frac{9}{2}-a\right|=\left|\frac{1}{2}a-1\right|$$

$$\left|\frac{9}{2}-a\right| = \left|\frac{1}{2}a-1\right|$$

$$\frac{9}{2}-a = \pm\left(\frac{1}{2}a-1\right)$$

1) $\frac{9}{2}-a = \frac{1}{2}a-1$

$$\frac{1}{2}a+a = \frac{9}{2}+1$$

$$3a = 11$$

$$a = \frac{11}{3}$$

$$b = 6-\frac{22}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$y = -x^2+\frac{11}{3}x-\frac{4}{3}$$

2) $\frac{9}{2}-a = -\frac{1}{2}a+1$

$$\frac{1}{2}a-a = 1-\frac{9}{2}$$

$$-\frac{1}{2}a = -\frac{7}{2}$$

$$a = 7$$

$$b = 6-2a = 6-14 = -8$$

$$y = -x^2+7x-8$$

ENTRAMBE ACCETTABILI