20/5/2019

166 **Borgo Allegro** Nel paese di montagna Borgo Allegro l'approvvigionamento di acqua potabile è garantito da differenti sorgenti naturali, a seconda delle diverse zone del paese (centro C, zona a monte M, zona a valle V, frazioni F). La tabella mostra la concentrazione delle abitazioni nelle diverse zone del paese e la percentuale di acqua incanalata in ogni zona con residuo fisso inferiore ai 24 mg/L.

Zona	Abitazioni	Acqua con residuo fisso inferiore a 24 mg/L
C	30%	70%
M	25%	60%
V	22%	55%
F	23%	45%

Se dal rubinetto di un'abitazione di Borgo Allegro esce acqua con un residuo fisso superiore a 24 mg/L, qual è la probabilità che l'abitazione si trovi nella parte a valle del paese?

E = "esce acqua con r.f. > 24 mg/L"

$$P(V|E) = \frac{P(E|V)P(V)}{P(E|C)P(C) + P(E|M)P(M) + P(E|V)P(V) + P(E|F)P(F)} =$$

$$= \frac{0,45 \cdot 0,22}{0,30 \cdot 0,30 + 0,40 \cdot 0,25 + 0,45 \cdot 0,22 + 0,55 \cdot 0,23} =$$

$$= 0,238\ldots \simeq \boxed{24\%}$$

200 Un'urna contiene 4 palline gialle e 6 rosse. Si estraggono contemporaneamente 5 palline. Calcola la probabilità che:

a. due siano gialle e tre rosse;
b. siano tutte rosse;
c. non siano tutte gialle;
d. non siano tutte rosse.

$\left[\text{a) } \frac{10}{21}; \text{ b) } \frac{1}{42}; \text{ c) } 1; \text{ d) } \frac{41}{42}\right]$

4 G   6 R

$$a)\ P(E_a) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{4!}{2!\,2!}\cdot\frac{6!}{3!\,3!}}{\frac{10!}{5!\,5!}} = \frac{\cancel{2}\cdot 3\cdot 5\cdot 4}{\cancel{2}\,\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{5}\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}}} =$$

$$= \frac{\cancel{3}\cdot 5\cdot \cancel{4}^{\,2}}{\frac{3\,\cancel{9}\cdot \cancel{8}^{\,2}\cdot 7}{\cancel{4}}} = \boxed{\frac{10}{21}}$$

$$b)\ P(E_b) = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{6}{\frac{2\,\cancel{10}\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{6}^{\,2}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}} = \frac{\cancel{6}^{\,2}}{2\cdot \cancel{9}_{3}\cdot 7\cdot \cancel{2}} = \boxed{\frac{1}{42}}$$

c) $P(E_c) = 1$ perché l'evento "tutte gialle" è impossibile

d) $P(E_d) = 1 - P(E_b) = \boxed{\frac{41}{42}}$

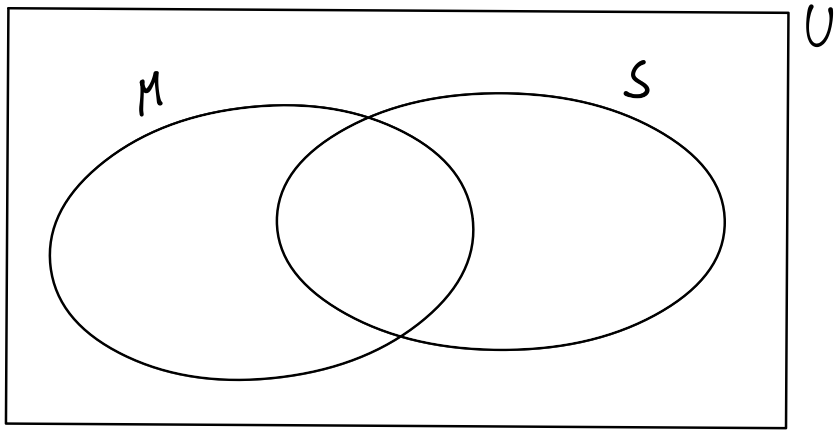
201 Da un'indagine di mercato si è rilevato che il 24% usa l'ammorbidente «Stella» e il 40% l'ammorbidente «Morby». Si è anche rilevato che il 54% usa il primo o il secondo. Calcola la probabilità che, prendendo una persona a caso, questa usi:

a. il primo e il secondo prodotto;

b. il prodotto «Stella» sapendo che usa anche «Morby»;

c. il prodotto «Stella» e non usi il prodotto «Morby».

[a) 10%; b) 25%; c) 14%]



$|M \cup S| = 54 \qquad |S| = 24 \qquad |M| = 40 \qquad |U| = 100$

$|M \cup S| = |M| + |S| - |M \cap S| \Rightarrow |M \cap S| = 40 + 24 - 54 = 10$

a) $P(M \cap S) = \frac{10}{100} = 0{,}1 = \boxed{10\%}$

b) $P(S|M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{40}{100}} = \frac{1}{4} = \boxed{25\%}$

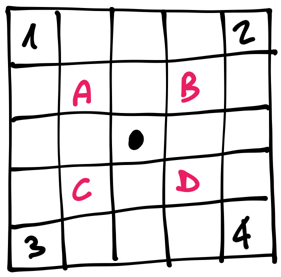
c) $P(S \cap \bar{M}) = \frac{|S \setminus M|}{|U|} = \frac{|S| - |M \cap S|}{|U|} =$

$= \frac{24 - 10}{100} = \frac{14}{100} = \boxed{14\%}$

202 ●● **EUREKA!** Una pedina si trova inizialmente sulla casella centrale di una scacchiera 5×5. Un passo della pedina consiste nello spostarsi in una casella scelta a caso fra quelle che hanno *esattamente un vertice* in comune con la casella su cui si trova. Qual è la probabilità che dopo 12 passi la pedina si trovi in uno qualunque degli angoli della scacchiera?

A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{4}{25}$ **C** $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{4}{13}$ **E** $\frac{1}{4}$

(*Olimpiadi di matematica, Gara di febbraio*, 2015)



Dopo un numero dispari di passi, ci si ritrova comunque in una delle caselle contrassegnate con A, B, C, D.

Da ciascuna di esse, si ha probabilità $\frac{1}{4}$ di arrivare all'angolo più vicino.

Quindi la probabilità vale $\frac{1}{4}$

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{4} \quad \text{(dopo 11 passi)}$$

$$P(1 \cup 2 \cup 3 \cup 4) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) =$$

$$= P(1|A) \cdot P(A) + P(2|B)P(B) + P(3|C)P(C) + P(4|D)P(D) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 4 \cdot \frac{1}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

MATURITÀ 2006

Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 0{,}99$ di colpirlo almeno una volta?

SOLUZIONE

$$P(\underbrace{0 \text{ successi}}_{n \text{ tentativi}}) = (0{,}7)^n \qquad P(\text{almeno 1 successo}) = 1 - (0{,}7)^n$$

$$1 - (0{,}7)^n \geq 0{,}99$$

$$-(0{,}7)^n \geq -0{,}01 \qquad (0{,}7)^n \leq 0{,}01$$

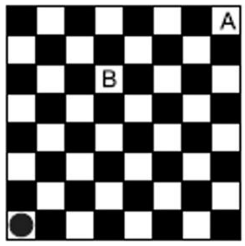
$\Downarrow$ perché $0{,}7 < 1$

$$n \geq \log_{0{,}7} 0{,}01 =$$

$$= \frac{\operatorname{Log} 0{,}01}{\operatorname{Log} 0{,}7} = 12{,}911\ldots \Rightarrow \boxed{n \geq 13}$$

MATURITÀ 2016

Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



I percorsi che portano ad A sono tutti e soli i percorsi con 7 mosse verso destra (→) e 7 verso l'alto (↑). Ogni percorso si può vedere come un anagramma di 15 lettere con 7 e 8 ripetizioni. Il numero è

$$\frac{14!}{7!\cdot 7!} = \frac{\overset{2}{\cancel{14}}\cdot 13\cdot \cancel{12}\cdot 11\cdot \cancel{10}\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot 8}{\cancel{7}\cdot \underset{3}{\cancel{6}}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}} = 13\cdot 11\cdot 3\cdot 8$$

I percorsi che passano per B hanno una prima parte formata da 3→ e 5↑, e una seconda parte formata da 4→ e 2↑. Sono in numero

$$\frac{8!}{3!\ 5!}\cdot\frac{6!}{4!\ 2!} =$$

$$= \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{3\cdot \cancel{2}}\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 5}{\cancel{2}} = 8\cdot 7\cdot 3\cdot 5$$

Quindi la probabilità richiesta vale

$$P = \frac{\cancel{8}\cdot 7\cdot \cancel{3}\cdot 5}{13\cdot 11\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{8}} = \boxed{\frac{35}{143}}$$