11/1/2021

IL DIFFERENZIALE DI UNA FUNZIONE

Data una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in I$

si chiama DIFFERENZIALE di f (relativo all'incremento Δx)

$$dy = df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

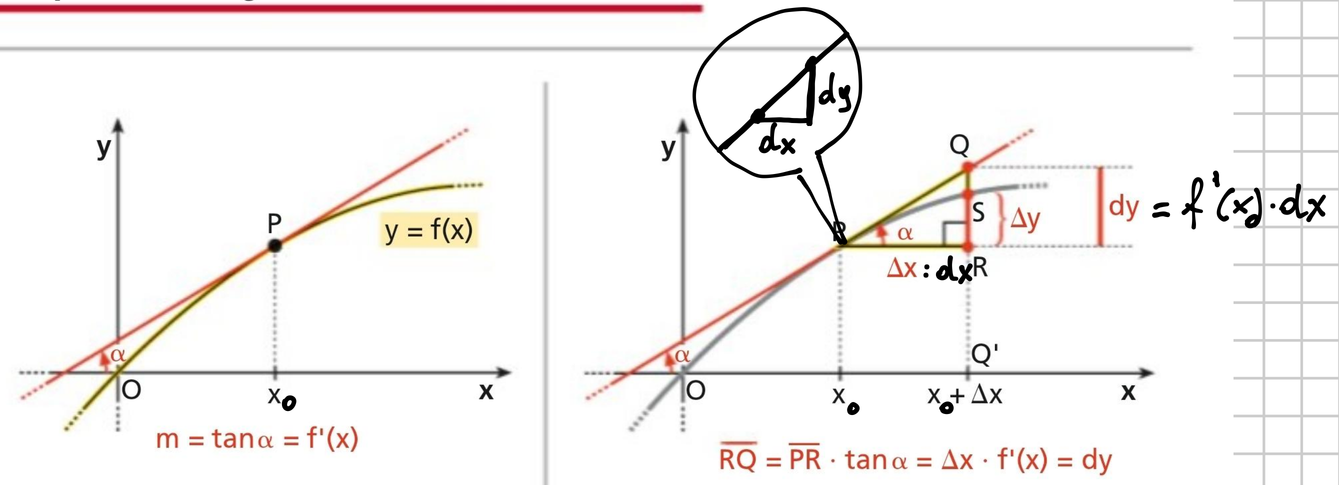
DIFFERENZIALE DELLA VARIABILE DIPENDENTE

$$dx = \Delta x$$

DIFFERENZIALE DELLA VARIABILE INDIPENDENTE

$$dx \neq 0 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x_0) \cdot \Delta x}{dx} = \frac{f'(x_0) \cdot \cancel{dx}}{\cancel{dx}} = f'(x_0) \Rightarrow dy = f'(x) \cdot dx$$

Interpretazione geometrica del differenziale



a. Consideriamo il grafico della funzione $y = f(x)$ e la retta tangente nel punto P, di ascissa x.

b. In corrispondenza del punto Q' di ascissa $x + \Delta x$, tracciamo i punti R, S e Q. Il triangolo PRQ è rettangolo in R.

ESEMPI

1) $f(x) = 3x^4$

$$dy = f'(x)\,dx$$

$$dy = 12x^3\,dx$$

2) $f(x) = \ln(1+x^2)$

$$dy = \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$$

Quando $\Delta x = dx \simeq 0$ (molto "piccolo")

si ha $\Delta y \simeq dy$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right] = 0$$, quindi $h(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$

tende a 0 per $\Delta x \to 0$

$$\Delta y - dy = \Delta y - f'(x_0)\,\Delta x = \underbrace{h(\Delta x) \cdot \Delta x}_{\xrightarrow{\text{per } \Delta x \to 0}\ 0}$$

più velocemente rispetto a Δx,

cioè è una funzione

infinitesima di ordine

superiore rispetto a Δx

Calcola il differenziale *dy* delle seguenti funzioni.

808 $y = x^2 + \sin x;$ $y = \frac{x^4+1}{x}.$ $\left[dy = (2x + \cos x)dx;\ dy = \frac{3x^4 - 1}{x^2}dx\right]$

$y' = 2x + \cos x$

$dy = (2x + \cos x)\, dx$

$y = x^3 + x^{-1}$

$y' = 3x^2 - x^{-2} =$

$= 3x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^4 - 1}{x^2}$

$dy = \frac{3x^4 - 1}{x^2}\, dx$