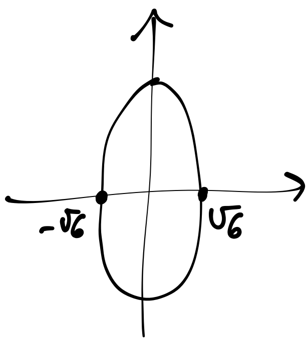
24/2/2018

130 Trova per quale valore di a l'ellisse di equazione $ax^2 + \frac{y^2}{27} = 1$ ha un vertice in $(-\sqrt{6}; 0)$ e determina il perimetro del rettangolo inscritto nell'ellisse che ha un lato sulla retta di equazione $x = 2$.

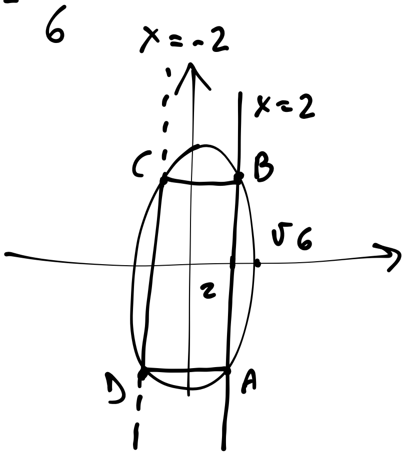
$\left[a = \frac{1}{6}; 20\right]$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{a}} + \frac{y^2}{27} = 1$$

$$\frac{1}{a} = 6 \quad \Downarrow \quad a = \frac{1}{6}$$



$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{27} = 1$$



$\overline{CB} = 4$

Per trovare $\overline{AB}$ calcolo A e B

$$\begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{27} = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{6} + \frac{y^2}{27} = 1 \qquad \frac{y^2}{27} = \frac{1}{3} \qquad y^2 = 9 \qquad y = \pm 3$$

$$A(2,-3) \quad B(2,3) \longrightarrow \overline{AB} = 6$$

$$2p_{ABCD} = 2(4+6) = \boxed{20}$$

155 Scrivi le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 9$, condotte da $P\left(3; \frac{3}{2}\right)$.

$[x - 3 = 0; x + 4y - 9 = 0]$

$$\begin{cases} y - \frac{3}{2} = m(x-3) \rightsquigarrow y = mx - 3m + \frac{3}{2} \\ x^2 + 2y^2 = 9 \qquad x^2 + 2\left(mx - 3m + \frac{3}{2}\right)^2 = 9 \end{cases}$$

$$x^2 + 2\left(m^2x^2 + 9m^2 + \frac{9}{4} - 6m^2x + 3mx - 9m\right) - 9 = 0$$

$$x^2 + 2m^2x^2 + 18m^2 + \frac{9}{2} - 12m^2x + 6mx - 18m - 9 = 0$$

$$(1 + 2m^2)x^2 - 2(6m^2 - 3m)x + 18m^2 - 18m - \frac{9}{2} = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow b^2 - ac = 0$$

$$(6m^2 - 3m)^2 - (1 + 2m^2)\left(18m^2 - 18m - \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$\cancel{36m^4} + \cancel{9m^2} - \cancel{36m^3} - \cancel{18m^2} + 18m + \frac{9}{2} - \cancel{36m^4} + \cancel{36m^3} + \cancel{9m^2} = 0$$

$$18m = -\frac{9}{2}$$

$$2m = -\frac{1}{2} \qquad m = -\frac{1}{4}$$

DATO CHE QUESTA EQUAZIONE È DI 1° GRADO E NON DI 2° GRADO, UNA TANGENTE È LA RETTA VERTICALE PASSANTE PER P (ESCLUSA DAL FASCIO)

$$\boxed{x = 3}$$

$$y - \frac{3}{2} = m(x-3)$$

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}(x-3)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} + \frac{3}{2}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}}$$

158 Trova il valore di k affinché l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{k+6}+\frac{y^2}{1-k}=1$ sia tangente alla retta di equazione $y=-2x+4$. [$k=-3$]

$$\begin{cases} k+6>0 \\ 1-k>0 \end{cases} \quad \begin{cases} k>-6 \\ k<1 \end{cases} \rightarrow -6<k<1$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{k+6}+\frac{y^2}{1-k}=1 \\ y=-2x+4 \end{cases} \qquad \frac{x^2}{k+6}+\frac{(-2x+4)^2}{1-k}=1$$

$$(1-k)x^2+(k+6)(4x^2+16-16x)=(k+6)(1-k)$$

$$(1-k)x^2+4(k+6)x^2+16(k+6)-16(k+6)x-(k+6)(1-k)=0$$

$$[1-k+4k+24]x^2-2(8k+48)x+(k+6)[16-1+k]=0$$

$$(25+3k)x^2-2(8k+48)x+(k+6)(15+k)=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0 \qquad (8k+48)^2-(25+3k)(k+6)(15+k)=0$$

$$64k^2+2304+768k-(25k+150+3k^2+18k)(15+k)=0$$

$$64k^2+2304+768k-(43k+3k^2+150)(15+k)=0$$

$$64k^2+2304+768k-645k-43k^2-45k^2-3k^3-2250-150k=0$$

$$-3k^3-24k^2-27k+54=0$$

$$k^3+8k^2+9k-18=0 \rightsquigarrow \text{RUFFINI} \quad k=1$$

$$1+8+9-18=0 \quad \text{ok!}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 8 & 9 & -18 \\ 1 & & 1 & 9 & 18 \\ \hline & 1 & 9 & 18 & // \end{array}$$

$$(k-1)(k^2+9k+18)=0$$

$$K^2 + 9K + 18 = 0$$

$$\Delta = 81 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$$

$$K = \frac{-9 \pm 3}{2} = \begin{cases} -\frac{12}{2} = -6 \\ -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

Le radici del polinomio (le soluzioni dell'equazione) sono 1, −3, −6

CONDIZIONI

$-6 < K < 1$

$K = 1 \lor K = -3 \lor K = -6$

N.ACC.

$$\boxed{K = -3}$$ UNICO VALORE ACCETTABILE

175 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente un vertice in $(0; -3)$ e semiasse sull'asse x di misura $2\sqrt{3}$.

$[9x^2 + 12y^2 = 108]$

leggo il valore di b

$a = 2\sqrt{3}$

$b = 3$

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1}$$

176 Trova l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y che ha distanza focale 3 e un vertice in $(-2; 0)$.

$\left[\frac{x^2}{4} + \frac{4}{25}y^2 = 1\right]$

DISTANZA FOCALE

$2c = 3$

$c = \frac{3}{2}$

leggo che $a = 2$

FUOCHI SONO SULL'ASSE y $\Longrightarrow$ $a^2 = b^2 - c^2$

$\Downarrow$

$b^2 = a^2 + c^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \qquad \boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{4y^2}{25} = 1}$$

Trovare l'eq. dell'ellisse (nel rif. canonico) passante per A e B

183 $A\left(-1; \frac{8}{3}\right), B\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}; 2\right).$ $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\right]$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{1}{a^2}=t \qquad \frac{1}{b^2}=K$$

$$\searrow \quad tx^2+Ky^2=1$$

$A\left(-1, \frac{8}{3}\right) \rightsquigarrow$
$B\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, 2\right) \rightsquigarrow$

$$\begin{cases} t+\frac{64}{9}K=1 \\ \frac{9}{2}t+4K=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=1-\frac{64}{9}K \\ \frac{9}{2}\left(1-\frac{64}{9}K\right)+4K=1 \end{cases}$$

$$\frac{9}{2}-32K+4K=1 \qquad -\cancel{28}^{4}K=-\frac{\cancel{7}^{1}}{2}$$

$$K=\frac{1}{8}$$

$$t=1-\frac{\cancel{64}^{8}}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{8}y^2=1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1}$$