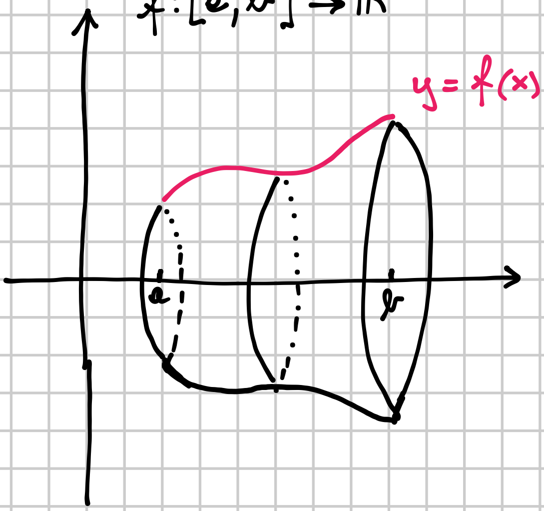
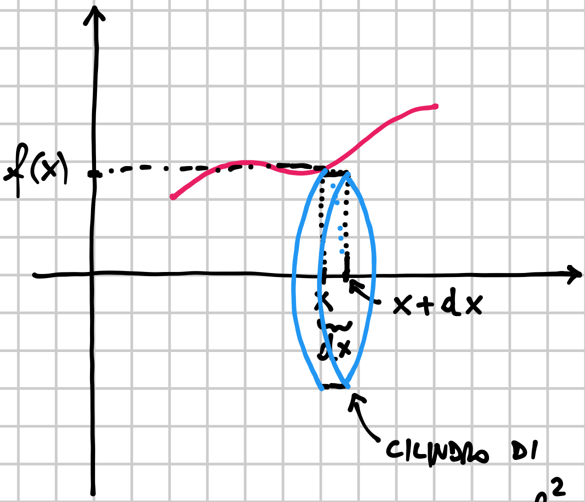
3/5/2021

VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

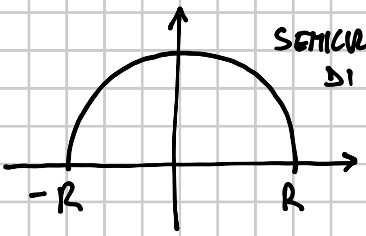




CILINDRO DI VOLUME $= \underbrace{f^2(x)\,\pi}_{\text{area di base}}\ \overset{\text{altezza}}{dx}$

VOLUME DEL SOLIDO DI ROTAZIONE $= V = \int_a^b f^2(x)\,\pi\,dx = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

VOLUME DELLA SFERA



SEMICIRCONFERENZA DI RAGGIO R $\quad f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$

$x^2+y^2=R^2$

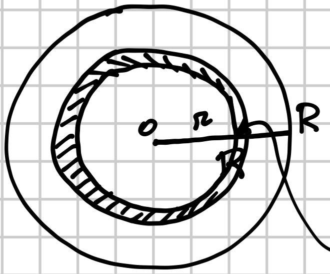
$y^2=R^2-x^2$

$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$

$V_{\text{SFERA DI RAGGIO } R} = \pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx = \pi\left[R^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R} =$

$= \pi\left[R^3-\frac{1}{3}R^3+R^3-\frac{1}{3}R^3\right] = \pi\left[2R^3-\frac{2}{3}R^3\right] = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$

AREA DELLA SUPERFICIE SFERICA



$$V(R) = \sum$$ VOLUMI DEI GUSCI SFERICI INTERNI

r = raggio del guscio

dr = SPESSORE del guscio

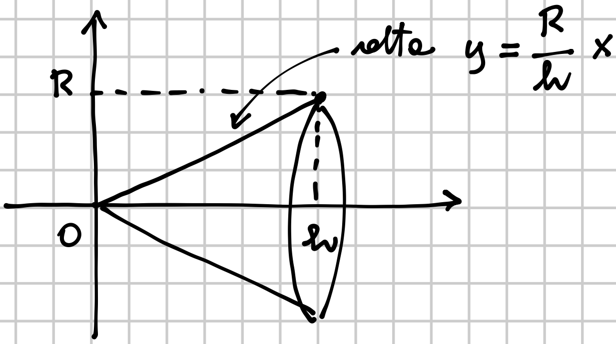
$$V(R) = \int_0^R \underbrace{\overbrace{S(r) \cdot dr}^{\text{volume del guscio sferico di raggio } r \text{ e spessore } dr}}_{\text{area della superficie sferica interna del guscio}}$$

1° TH. FOND. CALCOLO $\Longrightarrow \quad V'(R) = S(R)$

So che $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, dunque $S(R) = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = \boxed{4\pi R^2}$

VOLUME DEL CONO

RAGGIO $= R$ ALTEZZA $= h$



$$\text{VOLUME} = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2} x^2 \, dx =$$

$$= \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h \left[\frac{1}{3} x^3 \right]' dx =$$

$$= \pi \frac{R^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^h =$$

$$= \pi \frac{R^2}{\cancel{h^2}} \frac{1}{3} h^{\cancel{3}} = \frac{1}{3} R^2 \pi h$$

385 Trova il volume del solido ottenuto ruotando di 360° attorno all'asse x il trapezoide definito dalla funzione $y = \frac{x}{2-x}$ nell'intervallo $[0; 1]$. $[\pi(3 - 4\ln 2)]$

$$V = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{(2-x)^2} dx = \pi \int_0^1 \frac{(2-t)^2}{t^2} (-dt) =$$

$x = 0 \Rightarrow t = 2$

$x = 1 \Rightarrow t = 1$

$2 - x = t$

$x = 2 - t$

$dx = -dt$

$$= -\pi \int_2^1 \frac{4 + t^2 - 4t}{t^2} dt =$$

$$= -\pi \left[\int_2^1 \frac{4}{t^2} dt + \int_2^1 dt - 4 \int_2^1 \frac{1}{t} \right] =$$

$$= -\pi \left[4 \left[-\frac{1}{t} \right]_2^1 + \left[t \right]_2^1 - 4 \left[\ln t \right]_2^1 \right] =$$

$$= -\pi \left(4 \left(-1 + \frac{1}{2} \right) + (1 - 2) - 4 (\ln 1 - \ln 2) \right] =$$

$$= -\pi (-2 - 1 + 4 \ln 2) = \boxed{\pi (3 - 4 \ln 2)}$$

388 Dopo aver studiato la funzione di equazione

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}},$$

determina il volume del solido generato da una rotazione di 360° attorno all'asse x della regione finita di piano delimitata dal grafico della funzione e dalle rette di equazioni $x = 3$ e $x = 4$. $[\pi + 3\pi \ln 2]$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

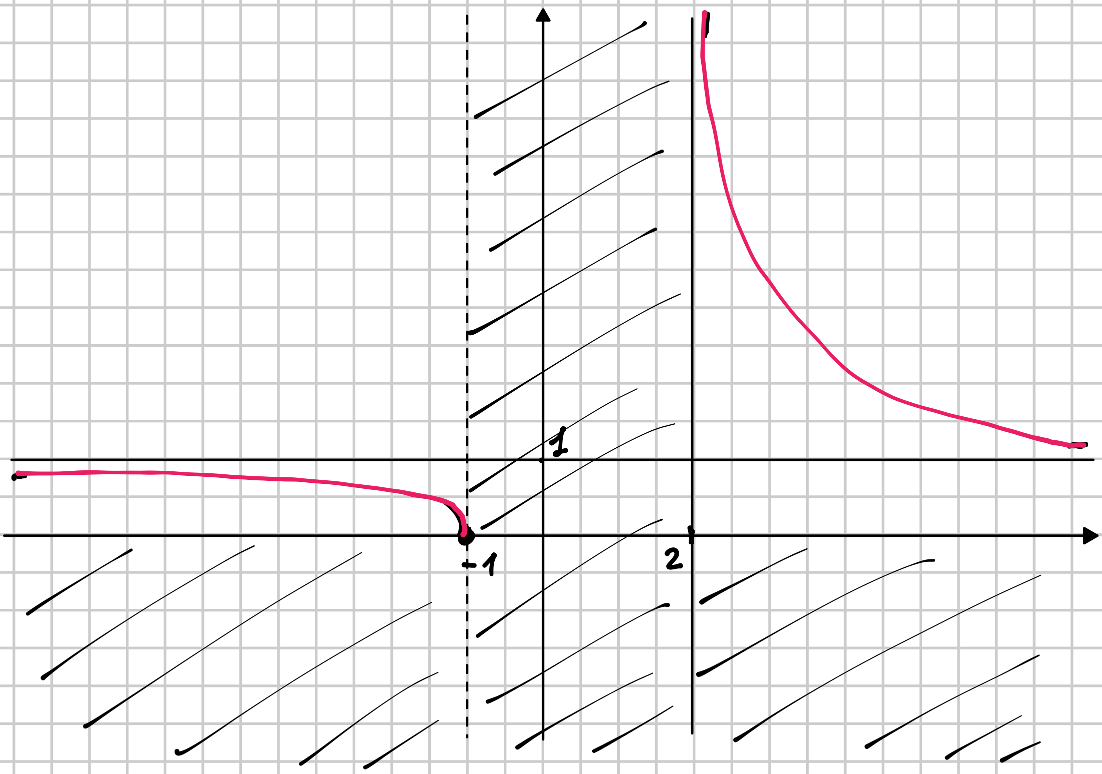
DOMINIO $\quad \frac{x+1}{x-2} \geq 0$

$x > -1$

$x > 2$

		-1		2	
	−	0	+		+
	−		−	∄	+
	+	0	−	∄	+

$$D =]-\infty, -1] \cup]2, +\infty[$$



$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = 1 \qquad y = 1 \text{ ASINTOTO ORIZZONTALE}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = +\infty \qquad x = 2 \text{ ASINTOTO VERTICALE}$$

DERIVATA PRIMA

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}\cdot\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\cdot\frac{\cancel{x}-2-\cancel{x}-1}{(x-2)^2}=$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}\qquad \text{per } x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]2,+\infty[$$

$$(x\neq -1)$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}f'(x)=-\infty$$

$$f'(x)<0\quad \forall x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]2,+\infty[$$

f è decrescente in $]-\infty,-1[$ e in $]2,+\infty[$

DERIVATA SECONDA

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right)' \cdot \frac{1}{(x-2)^2} + \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\left(-2(x-2)^{-3}\right)\right] =$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+2}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} + \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\,\frac{-2}{(x-2)^3}\right] =$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2(x-2)^2} - 2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\,\frac{1}{(x-2)^3}\right] =$$

$$= -\frac{3}{2(x-2)^2}\left[\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - 2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x-2)}\right]$$

$$f''(x) > 0 \implies \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} < 2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \frac{1}{x-2}$$

moltiplico per $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{x-2} \cdot \frac{1}{(x+1)^{\cancel{2}}} < \frac{2}{x-2}$$

$$\frac{3}{2(x-2)(x+1)} - \frac{2}{x-2} < 0 \qquad \frac{3-4(x+1)}{\cancel{2}(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\frac{3-4x-4}{\underbrace{(x-2)(x+1)}_{>0 \text{ nel DOMINIO}}} < 0 \implies -1-4x < 0 \qquad 4x > -1 \qquad \begin{cases} x > -\frac{1}{4} \\ \text{DOMINIO} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x > 2}$$

$f''(x) > 0$ per $x > 2 \implies$ CONC. VERSO L'ALTO

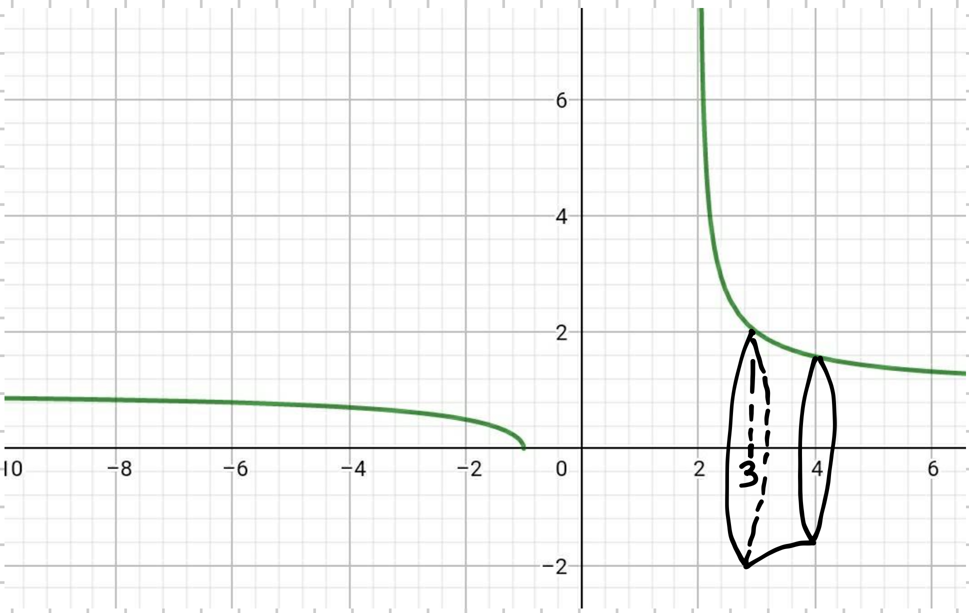
$f''(x) < 0$ per $x < -1 \implies$ CONC. VERSO IL BASSO

VOLUME DEL SOLIDO DI ROTAZIONE TRA 3 E 4

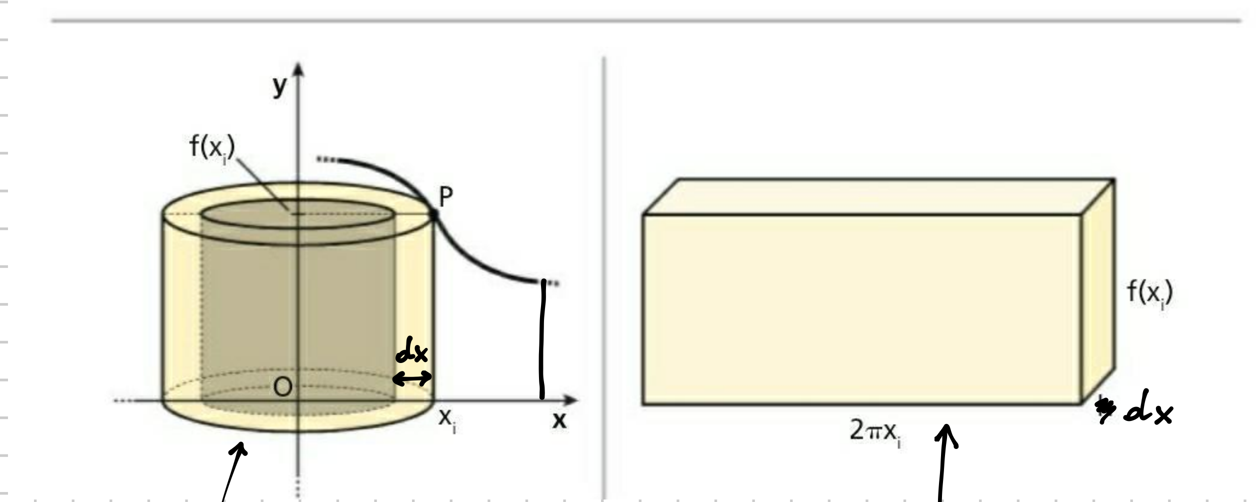
$$V = \pi \int_3^4 \frac{x+1}{x-2}\,dx = \pi \int_3^4 \frac{x-2+3}{x-2}\,dx =$$

$$= \pi \int_3^4 \left(1 + \frac{3}{x-2}\right) dx = \pi \left[x + 3\ln|x-2| \right]_3^4 =$$

$$= \pi \left(4 + 3\ln 2 - 3 - 3\underbrace{\ln 1}_{0}\right) = \pi\,(1 + 3\ln 2)$$



SE LA ROTAZIONE AVVIENE ATTORNO ALL'ASSE y :



VOLUME DEL GUSCIO È INDISTINGUIBILE DAL

VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO

CHE È $\quad dV = 2\pi x f(x) dx$

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$