24/1/2019

438 È data l'equazione $z^5 - z^4 + 9z - 9 = 0$, dove $z \in \mathbb{C}$. Verifica che $z = 1$ è una radice e dopo avere abbassato il grado dell'equazione determina le restanti radici. Rappresenta le soluzioni nel piano di Gauss.

$$\left[\frac{\sqrt{6}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{6}}{2}(-1+i), \frac{\sqrt{6}}{2}(-1-i), \frac{\sqrt{6}}{2}(1-i)\right]$$

$$P(z) = z^5 - z^4 + 9z - 9$$

$P(1) = 1^5 - 1^4 + 9 - 9 = 0$ quindi 1 è soluzione di $P(z) = 0$

$$z^5 - z^4 + 9z - 9 = 0$$

$$z^4(z-1) + 9(z-1) = 0$$

$$(z-1)(z^4+9) = 0$$

$z^4 = -9 \rightsquigarrow$ trovo le 4 radici 4° di -9 $\quad \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$

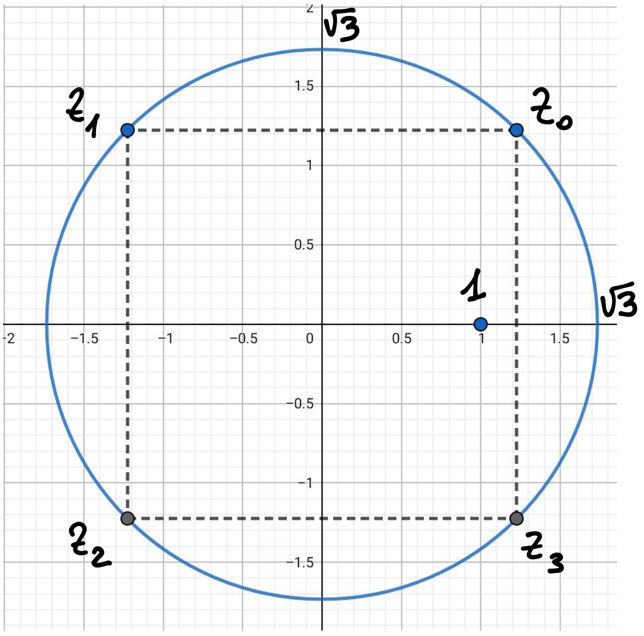
$$z^4 = 9(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$z_0 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}(1+i)$$

$$z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}(-1+i)$$

$\downarrow$ le altre due sono coniugate di queste

$$z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}(-1-i) \qquad z_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}(1-i)$$



Risolvere $\quad z^2+(1-i)z-i=0$

$$\Delta = b^2-4ac = (1-i)^2+4i = \cancel{1}+\cancel{i^2}-2i+4i = 2i$$

$$\Delta = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Delta_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$$

una delle 2 radici quadrate di Δ

$$z = \frac{-b\pm\Delta_0}{2a} = \frac{-1+i\pm(1+i)}{2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-\cancel{1}+i+\cancel{1}+i}{2} = \dfrac{2i}{2} = i \\[2ex] \dfrac{-1+\cancel{i}-1-\cancel{i}}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{z=i \quad \vee \quad z=-1}$$

OSSERVAZIONE

$$z^2+(1-i)z-i = z^2+z-iz-i =$$

$$= z(z+1)-i(z+1) =$$

$$= (z+1)(z-i)$$

leggo subito le soluzioni dell'equazione

$$z=-1 \quad \vee \quad z=i$$

FORMA ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

DEFINIZIONE

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ $\quad [z = x + iy]$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad \underline{\text{ESPONENZIALE COMPLESSO}}$$

In particolare

per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta}$$

Quindi ogni numero complesso z si può scrivere

$$z = \rho e^{i\vartheta} \qquad \rho = |z| \text{ modulo di } z$$

Si ha:

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

FORMULA PIÙ BELLA DELLA MATEMATICA

$\downarrow$

COMPAIONO I CINQUE NUMERI FONDAMENTALI $e, i, \pi, 1, 0$ E

LE RELAZIONI $+, =$

TEOREMA

Per ogni coppia di numeri complessi z_1, z_2 si ha

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

OSSERVAZIONI

1) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, dunque l'esponenziale complesso NON SI ANNULLA MAI

2) $e^{z_1} = e^{z_2}$ se e solo se $z_1 - z_2 = 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$

3) $z^n = (\rho e^{i\vartheta})^n = \rho^n e^{in\vartheta}$

ESEMPIO PUNTO 2)

$z_1 = 3 + 5i$

$z_2 = 3 + (5 + 2\pi)i$

$\uparrow$

$z_1 \neq z_2$

$e^{z_1} = e^3 \cdot e^{5i} = e^3(\cos 5 + i \sin 5)$

$e^{z_2} = e^3 \cdot e^{(5+2\pi)i} = e^3(\cos(5+2\pi) + i \sin(5+2\pi))$

$\uparrow$

$e^{z_1} = e^{z_2}$

Formule di Eulero

Consideriamo le uguaglianze $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ed $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$.

- Sommiamo membro a membro:

$$\begin{array}{rl} + & e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ & e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \\ \hline & e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha \quad \rightarrow \end{array}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

- Sottraiamo membro a membro:

$$\begin{array}{rl} - & e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \\ & e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha \\ \hline & e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin\alpha \quad \rightarrow \end{array}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Le quattro formule evidenziate sono dette **formule di Eulero**.

Per $\alpha = \pi$ la prima formula è $e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$: $\boldsymbol{e^{\pi i} + 1 = 0}$, dove compaiono insieme cinque numeri importanti: 1, 0, e, π, i.