

# EQUAZIONI DI 2° GRADO

## ESEMPI

1)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

↓ SCOMPONENDO

$$(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Applico la} \\ \text{LEGE DI} \\ \text{ANNULAMENTO} \\ \text{DEL PRODOTTO} \end{array}$$

$$x-2=0 \quad \vee \quad x-1=0$$

$$x=2 \quad \vee \quad x=1$$

L'insieme soluzione è  $S = \{1, 2\}$

2)  $2x^2 - 8 = 0$

$$2(x^2 - 4) = 0$$

$$2(x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \vee \quad x = 2 \quad \begin{array}{l} \text{che} \\ \text{abbordiamo} \\ \text{con} \end{array}$$

$$x = \pm 2$$

## LEGE DI ANNULAMENTO DEL PRODOTTO

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \quad \vee \quad b = 0$$

Se ciò dimostra che

$$a \cdot b = 0 \quad e \quad a \neq 0 \Rightarrow b = 0$$

Si potranno risolvere anche così:

$$2x^2 - 8 = 0 \quad 2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4 \quad x = \pm \sqrt{4} = \pm 2$$

$$3) \quad x^2 = 5 \quad x = \pm \sqrt{5}$$

$$4) \quad x^2 + 8 = 0 \quad x^2 = -8 \quad \text{IMPOSSIBILE IN } \mathbb{R}$$

$$5) \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$\xrightarrow{\text{legge di A.P.}}$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

Rifatti è come se  $(x-1)(x-1)=0$

$\Downarrow$  legge A.P.

$$x-1=0 \vee x-1=0$$

$$x=1 \quad x=1$$

Quata soluzione è  
contata 2 volte, si dice  
che ha MOLTEPLICITÀ 2  
o che è una soluzione DOPPIA

è come avere due  
soluzioni uguali (COINCIDENTI)

$$6) \quad x^2 - 7x = 0$$

$$x(x-7) = 0 \Rightarrow x=0 \vee x-7=0$$

legge A.P.

$x=0 \vee x=7$

Un'equazione di  $2^{\circ}$  grado si presenta (ridotta in forma NORMA) così:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a \neq 0$$

1) CASO  $b = 0$

$(a, c \neq 0)$   $ax^2 + c = 0$  EQ. DI  $2^{\circ}$  GRADO PURA

$$ax^2 = -c \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Un'equazione pura ha soluzioni reali se  $c/a$  hanno segni opposti, altrimenti  $-\frac{c}{a}$  è negativo.

### ESEMPI

$$\bullet \quad 3x^2 - 1 = 0 \quad 3x^2 = 1 \quad x^2 = \frac{1}{3} \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \quad \left( x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

risolandando il den.

$$\bullet \quad 3x^2 + 1 = 0 \quad 3x^2 = -1$$

$\uparrow$   
IMPOSSIBILE IN  $\mathbb{R}$

2) CASO C = 0

$$(a, b \neq 0) \quad ax^2 + bx = 0 \quad \text{EQ. DI 2° GRADO SPURIA}$$

$$x(ax + b) = 0$$



$$x = 0 \quad \vee \quad ax + b = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{b}{a}$$

Un'eq. spuria ha sempre due soluzioni reali, una delle quali è 0.

$$\bullet \quad 7x^2 - 5x = 0 \quad x(7x - 5) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{5}{7}$$

$$\bullet \quad 4x^2 + 8x = 0 \quad x(4x + 8) = 0 \quad [\text{oppure } 4x(x+2)]$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

3) CASO  $a, b, c \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{EQ. DI 2^{\circ} GRADO COMPLETA}$$

1^{\circ} PASSO Si guarda il DISCRIMINANTE (DELTA)  $\Delta = b^2 - 4ac$

2^{\circ} PASSO

$$\Delta > 0$$

2 SOLUZIONI DISTINTE

$$\Delta = 0$$

2 SOLUZIONI COINCIDENTI

(DI FATTO 1 SOLUZ.)

$$\Delta < 0$$

IMPOSSIBILE IN  $\mathbb{R}$

(NESSUNA SOLUZ. REALE)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

ESEMPI

$$1) \quad 2x^2 - x - 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$a = 2 \quad b = -1 \quad c = -1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1+3}{4} = 1 \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad x = 1$$

Infatti

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1^2 - 1 - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$$

$$2) \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$$

2 SOL. COINCIDENTI

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Infatti  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{4}{4} - 2 + 1 = 0$

$$3) \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

NESSUNA SOLUB. REALE

Cioè non esiste nessun numero reale che al posto di  $x$  renda l'equazione  $x^2 + x + 1 = 0$  vera.

Infatti  $x^2 + x + 1 = \underbrace{x^2 + x + \frac{1}{4}}_{(x + \frac{1}{2})^2} - \frac{1}{4} + 1 = \underbrace{(x + \frac{1}{2})^2}_{\geq 0} + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Dimostriamo} \quad a \neq 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Delta \geq 0$$

↓

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \neq 0 \quad \cancel{a}(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0 \quad \text{aggiungere e togliere}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$2|a| = \begin{cases} 2a & a > 0 \\ -2a & a < 0 \end{cases}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

con il  $\pm$  davanti  
dovendo

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Risovi le seguenti equazioni.

156  $2x^2 + 3x = -1$

$$\left[ -\frac{1}{2}; -1 \right]$$

157  $-x^2 = x - 12$

$$[-4; 3]$$

158  $2x^2 - 5 = -4x$

$$\left[ \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2} \right]$$

156  $2x^2 + 3x = -1$

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$$

$$a=2 \quad b=3 \quad c=1$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{4} = \begin{cases} -\frac{4}{4} = -1 \\ -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{x = -1 \vee x = -\frac{1}{2}}$$

157  $-x^2 = x - 12$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48 = 49$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} -\frac{8}{2} = -4 \\ \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{x = -4 \vee x = 3}$$

158

$$2x^2 - 5 = -4x$$

$$2x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\Delta = 16 + 40 = 56$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{56}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot 14}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{14}}{4} =$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}}$$

184

$$\frac{x+1}{2} - \frac{(x+1)^2}{4} = \frac{1}{3}x - 3$$

devo portare  
l'equaz. in  
forma NORMALE

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{6(x+1) - 3(x+1)^2}{12} = \frac{4x - 36}{12}$$

$$6x + 6 - 3(x^2 + 2x + 1) - 4x + 36 = 0$$

~~$$6x + 6 - 3x^2 - 6x - 3 - 4x + 36 = 0$$~~

$$-3x^2 - 4x + 39 = 0$$

$$3x^2 + 4x - 39 = 0$$

$$\Delta = 16 + 4 \cdot 3 \cdot 39 = 16 + 468 =$$

$$= 484 = 22^2$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{484}}{6} = \frac{-4 \pm 22}{6} = \begin{cases} -\frac{26}{6} = -\frac{13}{3} \\ \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

$$x = -\frac{13}{3} \quad \vee \quad x = 3$$