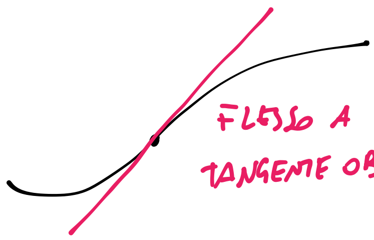
5/3/2018

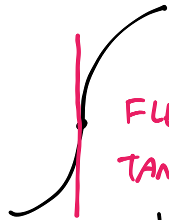
$f: I \to \mathbb{R}$ $\qquad$ I intervallo e derivabile 2 volte

$f'' > 0 \Rightarrow f$ ha la concavità rivolta verso l'alto $\cup$

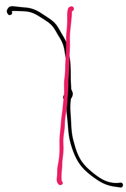
$f'' < 0 \Rightarrow f$ ha la concavità rivolta verso il basso $\cap$

Un punto di flesso è un punto in cui <u>esiste la derivata prima</u> e in cui la tangente attraversa il grafico della funzione





$f'(x_0) = +\infty$



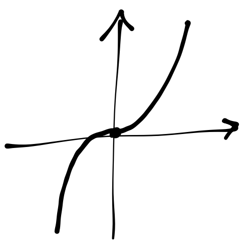
$f'(x_0) = -\infty$

I flessi si ricercano generalmente fra gli zeri della derivata seconda, ma poi va studiato anche il segno della derivata seconda....

<u>ESEMPIO SEMPLICE</u>

$f(x) = x^3$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f'(x) = 3x^2$

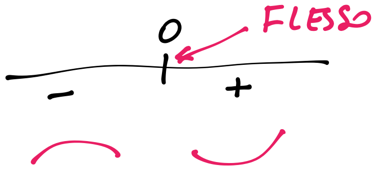
$f''(x) = 6x$

<u>ZERI DI f''</u>

$6x = 0 \Rightarrow x = 0$ $\qquad$ <u>CANDIDATO FLESSO</u>

<u>SEGNO DI f''</u>

$6x > 0 \Rightarrow x > 0$



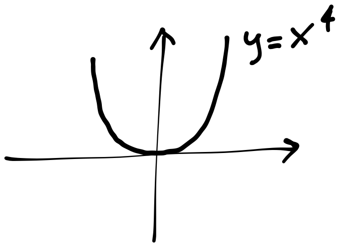
ATTENZIONE!

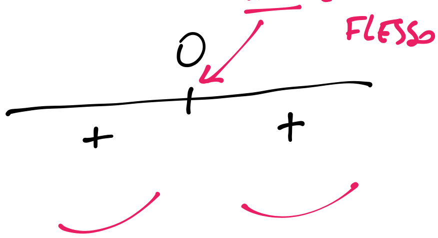
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x)=x^4$

$f'(x)=4x^3$

$f''(x)=12x^2 \qquad 12x^2=0 \Rightarrow x=0$

$12x^2>0 \Rightarrow \forall x\neq 0$

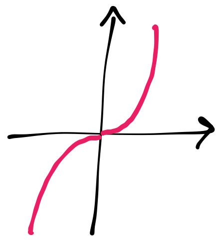




In un flesso, attenzione che può succedere che la derivata seconda non esista!

$f(x)=x|x| \rightsquigarrow f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x<0 \end{cases}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{se } x>0 \\ -2x & \text{se } x<0 \end{cases}$

$f'(0)=\lim_{x\to 0} 2x = \lim_{x\to 0}(-2x)=0$

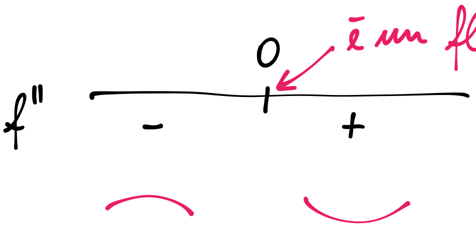
alternativa

$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h|h|-0}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}|h|}{\cancel{h}}=0=f'(0)$

In 0 è derivabile

$f''(x)=\begin{cases} 2 & \text{se } x>0 \\ -2 & \text{se } x<0 \end{cases}$

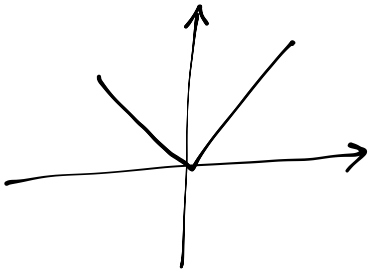


è un flesso, ma la $f''(0)$ NON ESISTE!

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Studiare la derivata prima (in particolare in $x=0$)

$f(x) = |x|$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



DERIVATA DESTRA IN 0

$|h| = h$ per $h \to 0^+$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

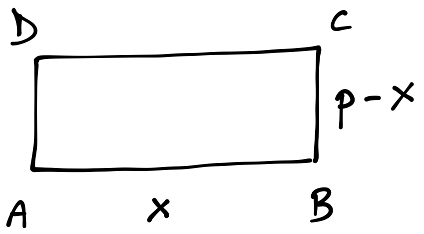
DERIVATA SINISTRA IN 0

$|h| = -h$ per $h \to 0^-$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

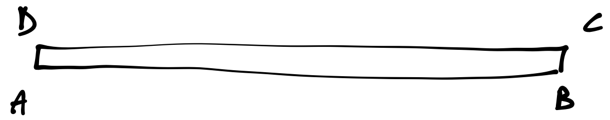
$f'(0)$ NON ESISTE! $|x|$ non è derivabile in 0, dove ha un PUNTO ANGOLOSO

Fra tutti i rettangoli di perimetro $2p$ fissato, stabilire qual è quello di area massima.



$\overline{AB} + \overline{BC} = p$

$\overline{AB} = x \qquad \overline{BC} = p - x$



$0 \leq x \leq p$

costruisco la funzione Area dipendente da x

$$\mathcal{A}(x) = \text{area}_{ABCD} = x(p-x) \qquad \mathcal{A}:[0,p]\to\mathbb{R}$$

↑ TROVARE MAX DI $\mathcal{A}$

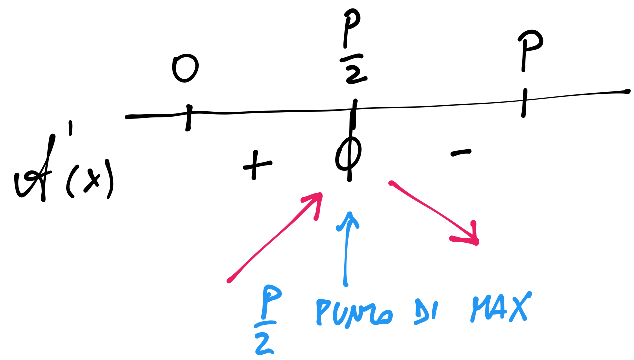
$\mathcal{A}(x) = xp - x^2$

$\mathcal{A}'(x) = p - 2x$

ZERO DI $\mathcal{A}'$ $\quad p - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{2}$

SEGNO DI $\mathcal{A}'$

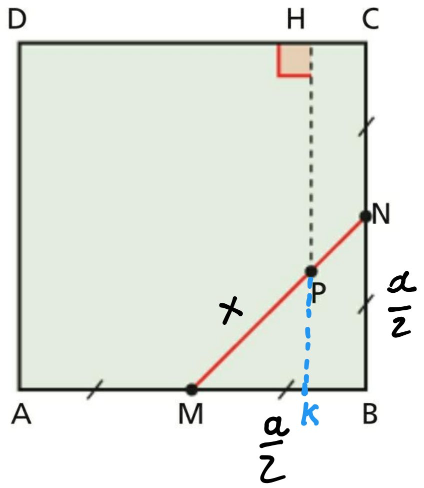
$\mathcal{A}'(x) > 0 \quad p - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{p}{2}$



Quindi il rettangolo di area max è quello corrispondente a $x = \frac{p}{2}$, cioè il quadrato.

483 Sia $ABCD$ un quadrato di lato a. Determina un punto P sul segmento MN che congiunge i punti medi M e N rispettivamente dei segmenti AB e CB in modo che sia minima la somma $\overline{PH}^2 + \overline{PM}^2$.

$\left[\overline{PM} = \frac{\sqrt{2}}{3}a\right]$



$\overline{NM} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\overline{PM} = x$

$f(x) = \overline{PH}^2 + \overline{PM}^2$ DA MINIMIZZARE

$\overline{PM}^2 \rightarrow x^2$ (lo abbiamo)

$\overline{PH}^2 \rightarrow$ da trovare $\overline{PH}$ in funzione di x

$$\overline{PK} = x\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \overline{PH} = a - \overline{PK} = a - \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$f(x) = \left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + x^2 \qquad f: \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \cancel{2}\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) + 2x =$$

$$= -\sqrt{2}a + x + 2x = 3x - \sqrt{2}a$$

ZERI

$$f'(x) = 0 \qquad 3x - \sqrt{2}a = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{3}a$$

SEGNO

$$f'(x) > 0 \qquad 3x - \sqrt{2}a > 0 \Rightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{3}a$$

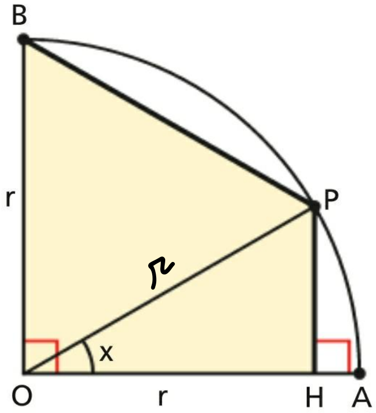
	0		$\frac{\sqrt{2}}{3}a$		$\frac{\sqrt{2}}{2}a$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

MINIMO CERCATO

MINIMO PER

$$\boxed{\overline{PM} = \frac{\sqrt{2}}{3}a}$$

493 Considera il punto P sull'arco $\widehat{AB}$ in figura.



$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

Determina la posizione di P che rende massima l'area del quadrilatero $OHPB$. $\left[x = \frac{\pi}{6}\right]$

$$\mathcal{A}_{OHPB} = \frac{(\overline{OB} + \overline{PH})\,\overline{OH}}{2}$$

$\overline{OB} = r$

$\overline{PH} = r\sin x$

$\overline{OH} = r\cos x$

$$\mathcal{A}(x) = \frac{(r + r\sin x)\,r\cos x}{2} = \frac{1}{2}r^2(1+\sin x)\cos x \qquad \mathcal{A}: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$$

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{r^2}{2}\left[\cos^2 x + (1+\sin x)(-\sin x)\right] = \frac{r^2}{2}\left[\cos^2 x - \sin x - \sin^2 x\right] =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left[1 - \sin^2 x - \sin x - \sin^2 x\right] = \frac{r^2}{2}\left[1 - \sin x - 2\sin^2 x\right]$$

ZERI

$\mathcal{A}'(x) = 0 \qquad 1 - \sin x - 2\sin^2 x = 0$

$-2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$

$$\sin x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} -1 & \text{N.A. perché fuori dal dominio} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\sin x = \frac{1}{2} \rightsquigarrow x = \frac{\pi}{6}$

SEGNO

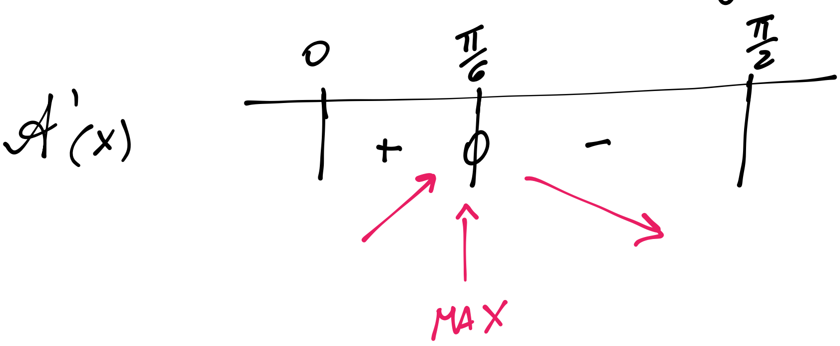
$\mathcal{A}'(x) > 0 \qquad -2\sin^2 x - \sin x + 1 > 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad -1 < \sin x < \frac{1}{2}$

$\downarrow$

$0 < \sin x < \frac{1}{2}$

$$0 < \sin x < \frac{1}{2} \implies 0 < x < \frac{\pi}{6}$$



$x = \frac{\pi}{6}$ è un punto di max

ESERCIZIO Studiare la derivabilità della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Iniziamo a vedere se f è continua in $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$ ok è CONTINUA

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-x^2} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \le \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^2} \qquad \text{perché } -1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

0 per il TH. DEI 2 CARABINIERI

Controlliamo se esiste (e quanto vale) la derivata in $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\cancel{2}} \sin \frac{1}{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

quindi in $x=0$ la derivata esiste e vale 0

$f'(0) = 0 \to f$ è DERIVABILE in 0

Nei punti diversi da 0 non ci sono problemi, si calcola con le regole di derivazione

$$x \neq 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

In definitiva f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to \pm\infty} \cos(x)$ NON ESISTE!

$\lim_{x \to \pm\infty} \sin(x)$ NON ESISTE!

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cos(x)$ ESISTE E VALE 0

Se prendo

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

g è continua

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \sin \frac{1}{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{h} \nexists$$

NON È DERIVABILE

IN 0