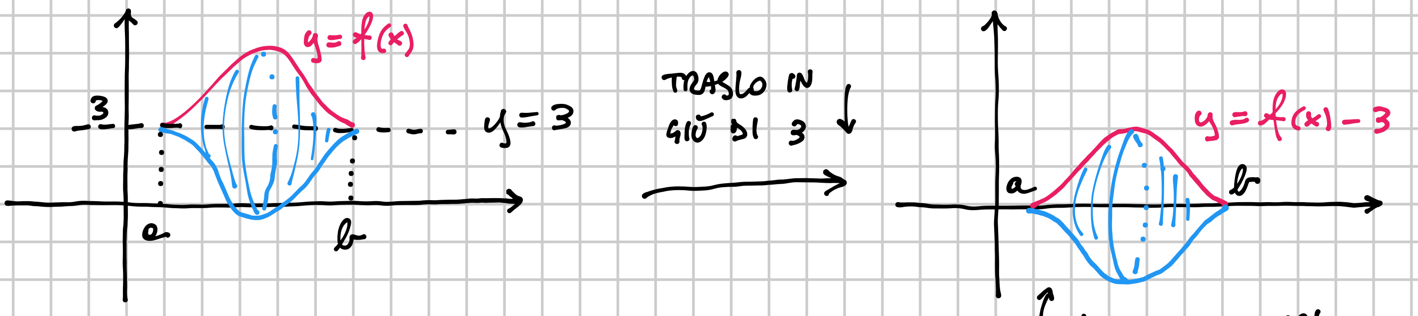
392 Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y = 3$ della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x^3 - 3x + 3$ e dalla retta stessa.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria*, 2015, *quesito* 1)

$\left[\frac{144}{35}\sqrt{3}\,\pi\right]$



ruoto attorno all'asse x
e il volume del solido
è lo stesso

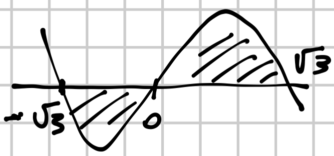
Trovo gli estremi di integrazione a e b

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x + 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$x^3 - 3x + \cancel{3} = \cancel{3}$$

$$x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$



$$\Downarrow$$

$$a = -\sqrt{3} \qquad b = \sqrt{3}$$

Faccio ruotare $y = x^3 - 3x$ attorno all'asse x tra $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$

$$\hookrightarrow V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)^2 \, dx = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^6 + 9x^2 - 6x^4) \, dx =$$

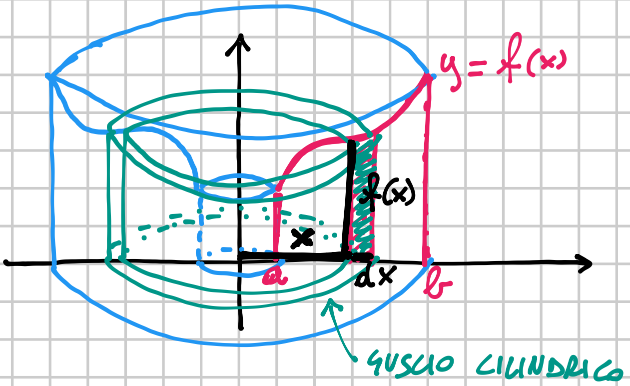
$$= \pi \left[\frac{1}{7} x^7 + 3x^3 - \frac{6}{5} x^5 \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \pi \left[\frac{1}{7} \sqrt{3}^7 + 3\sqrt{3}^3 - \frac{6}{5} \sqrt{3}^5 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{7}\sqrt{3}^7 + 3\sqrt{3}^3 - \frac{6}{5}\sqrt{3}^5 \right] =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{7} \cdot 3^3 \sqrt{3} + 9\sqrt{3} - \frac{6}{5} \cdot 3^2 \sqrt{3} \right] = 2\pi \left[\frac{27}{7}\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - \frac{54}{5}\sqrt{3} \right] =$$

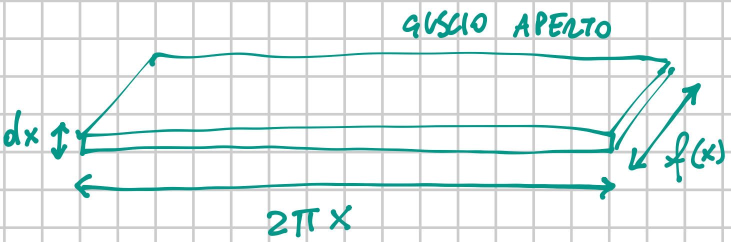
$$= 2\pi\sqrt{3} \cdot \frac{135 + 315 - 378}{35} = \boxed{\frac{144\sqrt{3}\,\pi}{35}}$$

VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE y



VOLUME GUSCIO

$$dV = 2\pi x \cdot f(x) \cdot dx$$



$$V = \int_a^b dV = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$

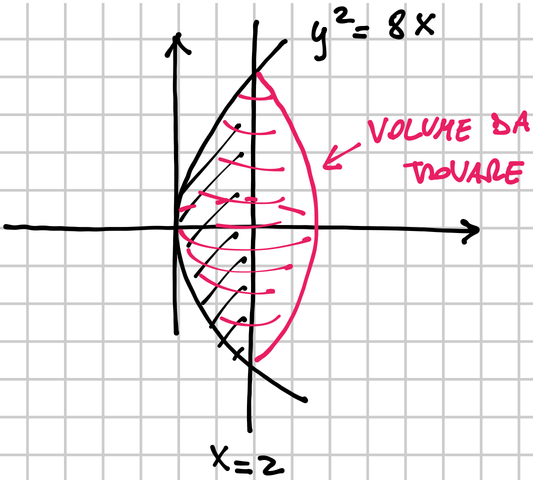
$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx}$$

VOLUME DEL SOLIDO (ROT. ATTORNO ALL'ASSE y)

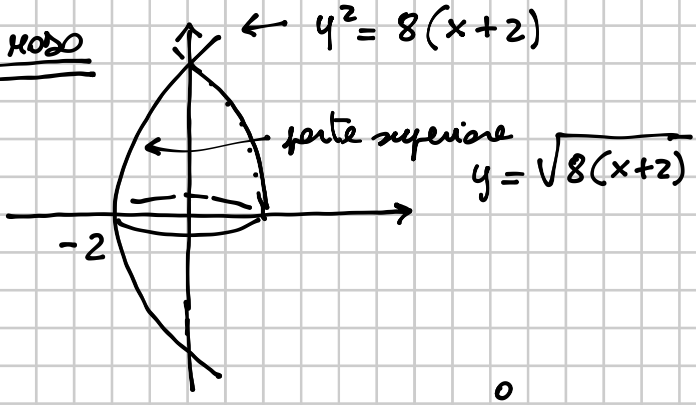
413 **EUREKA!** Determinare il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 2$ della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y^2 = 8x$ e dalla retta stessa.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva*, 2015, *quesito* 5)

$\left[\frac{256\pi}{15}\right]$



1° MODO



$$\text{VOLUME} = 2 \cdot \text{VOLUME GENERATO DALLA ROTAZIONE DELLA PARTE SUPERIORE} = 2 \cdot 2\pi \int_{-2}^{0} x\, f(x)\, dx =$$

$$= 4\pi \int_{-2}^{0} x \sqrt{8x+16}\, dx$$

DA PRENDERE IN MODULO

$$V = \left| 4\pi \int_{-2}^{0} x\sqrt{8x+16}\, dx \right| = (**)$$

$$\int x\sqrt{8x+16}\, dx = \int \left(\frac{1}{8}t - 2\right)\sqrt{t} \cdot \frac{1}{8}\, dt = (*)$$

$$t = 8x+16 \qquad x = \frac{1}{8}(t-16) = \frac{1}{8}t - 2 \qquad dx = \frac{1}{8}\, dt$$

$$(*) = \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{8}t\sqrt{t} - 2\sqrt{t}\right)dt = \frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{8}t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}+1}t^{\frac{3}{2}+1} - 2\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}\right] + c =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{\cancel{8}_{4}}\cdot\frac{\cancel{2}}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right] + c = \frac{1}{160}t^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}} + c =$$

$$= \frac{1}{160}(8x+16)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(8x+16)^{\frac{3}{2}} + c$$

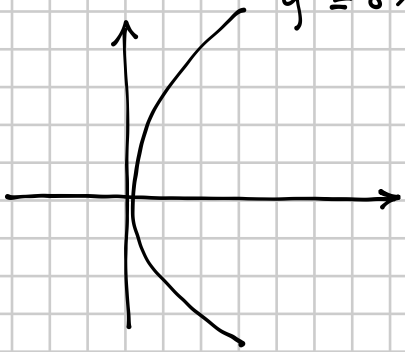
$$V = 4\pi\left|\left[\frac{1}{160}(8x+16)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(8x+16)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{0}\right| =$$

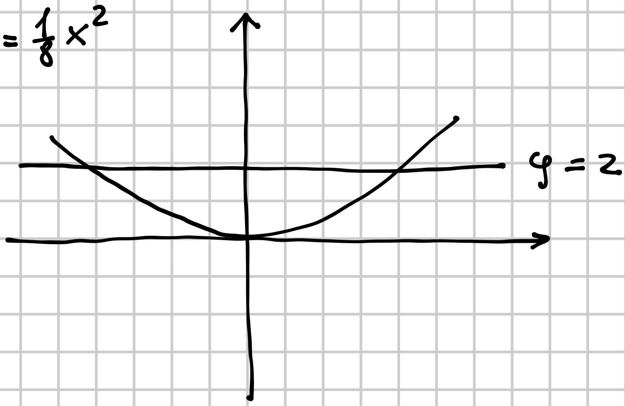
$$= 4\pi\left|\left[\frac{1}{160}\cdot 16^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}\cdot 16^{\frac{3}{2}}\right]\right| = 4\pi\left|\left[\frac{\cancel{1024}^{\cancel{64}\ 32}}{\cancel{160}_{\cancel{10}\ 5}} - \frac{\cancel{64}^{32}}{\cancel{6}_{3}}\right]\right| =$$

$$= 4\pi\left|\left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}\right)\right| = 4\pi\left|\frac{96-160}{15}\right| = 4\pi\cdot\frac{64}{15} = \boxed{\frac{256}{15}\pi}$$

2° MODO

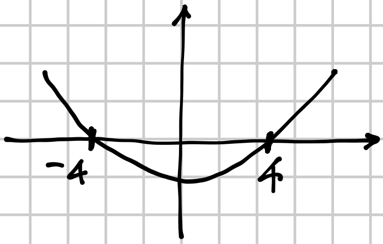
$$y^2 = 8x \rightsquigarrow x = \frac{1}{8}y^2 \rightsquigarrow y = \frac{1}{8}x^2$$





TRASLO IN GIÙ DI 2

$y = \frac{1}{8}x^2 - 2$ da far ruotare attorno all'asse x



$$\frac{1}{8}x^2 - 2 = 0 \qquad \frac{1}{8}x^2 = 2 \qquad x^2 = 16 \qquad x = \pm 4$$

$$V = \pi \int_{-4}^{4} \left(\frac{1}{8}x^2 - 2\right)^2 dx = \pi \int_{-4}^{4} \left(\frac{1}{64}x^4 + 4 - \frac{1}{2}x^2\right) dx =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{64 \cdot 5}x^5 + 4x - \frac{1}{6}x^3\right]_{-4}^{4} = 2\pi \left[\frac{1}{320}x^5 + 4x - \frac{1}{6}x^3\right]_{0}^{4} =$$

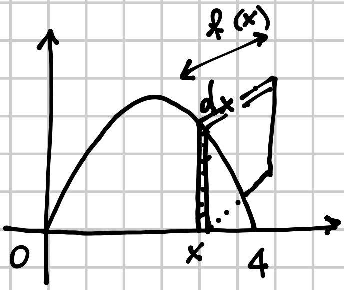
perché la funzione tra parentesi è dispari

$$= 2\pi \left(\frac{4^5}{320} + 16 - \frac{64}{6}\right) = 2\pi \left(\frac{\overset{16}{\cancel{1024}}}{\underset{5}{\cancel{320}}} + 16 - \frac{32}{3}\right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{16}{5} + 16 - \frac{32}{3}\right) = 2\pi \, \frac{48 + 240 - 160}{15} = \boxed{\frac{256}{15}\pi}$$

Calcola il volume dei solidi che hanno come base le regioni finite di piano delimitate dalle curve di equazioni assegnate e dall'asse x negli intervalli indicati a fianco e come sezioni perpendicolari all'asse x quelle scritte.

440 $y = -2x^2 + 8x$, $[0; 4]$; sezioni: quadrati. $\left[\frac{2048}{15}\right]$



$$V = \int_0^4 \underbrace{(-2x^2+8x)}_{\text{ALTEZZA}} \underbrace{(-2x^2+8x)}_{\text{BASE}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{SPESSORE}} = \int_0^4 (-2x^2+8x)^2 dx =$$

$$= \int_0^4 (4x^4 + 64x^2 - 32x^3)\, dx = \left[\frac{4}{5}x^5 + \frac{64}{3}x^3 - \frac{\cancel{32}^{\,8}}{\cancel{4}}x^4\right]_0^4 =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot 4^5 + \frac{64}{3}\cdot 4^3 - 8\cdot 4^4 = \frac{4096}{5} + \frac{4096}{3} - 2048 =$$

$$= \frac{12288 + 20480 - 30720}{15} = \boxed{\frac{2048}{15}}$$