12/4/2019

262 Quante distinte stringhe di 5 lettere dell'alfabeto inglese (con possibile ripetizione) contengono esattamente tre lettere distinte?
[Nota: l'alfabeto inglese è composto da 26 lettere.]

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*)
[390 000]

3 lettere ci devono essere, quindi le stringhe sono del tipo:

1) AAABC (1 lettera ripetuta 3 volte)
2) AABBC (2 lettere ripetute 2 volte)

1) La sequenza di 3 lettere ABC, a cui è associata AA|ABC, può essere scelta in $26 \cdot 25 \cdot 24$ modi; poi considero gli anagrammi con 1 lettera ripetuta 3 volte (ABACA, AACBA, ...); devo però dividere per 2 perché il problema è simmetrico in B e C (cioè, considerando AAABC e AAACB e successivamente gli anagrammi, conterei ogni stringa 2 volte)

$$\frac{\overset{13}{\cancel{26}} \cdot 25 \cdot 24}{\cancel{2}} \cdot \frac{5!}{3!} = 13 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 5 \cdot 4 = 156'000$$

2) La sequenza di 3 lettere ABC, cui è associata AA|BB|C, può essere scelta in $26 \cdot 25 \cdot 24$ modi; poi considero gli anagrammi con 2 lettere ripetute 2 volte; divido per 2 perché il problema è simmetrico in A e B

$$\frac{\overset{13}{\cancel{26}} \cdot 25 \cdot \overset{\overset{6}{\cancel{12}}}{\cancel{24}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{5!}{\cancel{2!}\,\cancel{2!}} = 13 \cdot 25 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 234'000$$

$$156'000 + 234'000 = \boxed{390'000}$$

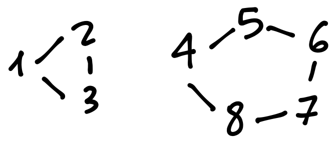
264 Otto celebrità si incontrano a un party. Succede così che ciascuna celebrità stringe la mano esattamente ad altre due. Un ammiratore tiene una lista di tutte le coppie (non ordinate) di celebrità che si sono strette la mano. Se l'ordine non conta, quante diverse liste sono possibili?

(USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*)

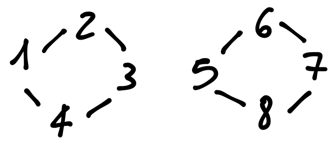
[3507]

Le possibili configurazioni di strette di mano sono solo le seguenti:

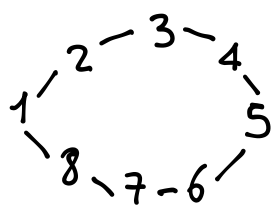
$\boxed{1\ 2\ 3}\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \Rightarrow$



$\boxed{1\ 2\ 3\ 4}\ 5\ 6\ 7\ 8 \Rightarrow$



$\boxed{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8} \Rightarrow$



come il problema delle perline !!

POSSIBILI SCELTE DEI 3 CHE SI DANNO LA MANO

$$\binom{8}{3}\frac{3!}{3\cdot 2}\cdot\frac{5!}{5\cdot 2}+\binom{8}{4}\frac{4!}{4\cdot 2}\cdot\frac{4!}{4\cdot 2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{8!}{8\cdot 2}=$$

$$=\frac{8!}{3!\,5!}\cdot\frac{5!}{5\cdot 2}+\frac{8!}{4!\,4!}\cdot\frac{3!}{2}\cdot\frac{3!}{2\cdot 2}+\frac{7!}{2}=$$

$$=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5}\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{2}}+\frac{8!}{4\cdot 4\cdot 2\cdot 2\cdot 2}+\frac{7!}{2}=$$

$$=8\cdot 7\cdot 6\cdot 2+\frac{\cancel{8}\cdot 7\cdot \overset{3}{\cancel{6}}\cdot 5\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}+7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=$$

$$=672+315+2520=\boxed{3507}$$

265 ●●

Adrian insegna in una classe di sei coppie di gemelli. Vuole formare delle squadre per una gara, ma vuole evitare che ci sia una coppia di gemelli nella stessa squadra. Stando a queste condizioni:

a. In quanti modi Adrian può dividerli in due squadre da sei?

b. In quanti modi Adrian può dividerli in tre squadre da quattro?

(GB *British Mathematical Olympiads*)

[a) 32; b) 960]

a)

A B C D E F
A' B' C' D' E' F'

Partiamo scegliendo A,

poi scegliamo uno fra B e B' → 2

poi uno fra C e C' → 2

" " D e D' → 2

" " E e E' → 2

" " F e F' → 2

$2^5 = \boxed{32}$

NOTA

Quando una squadra è formata, anche l'altra è completamente determinata! Quindi non si devono contare 2^6 stringhe (o se si vuole, poi si deve dividere per 2)

b)

A B C D | E F
A' B' C' D' | E' F'

Inizio a formare la 1° squadra scegliendo 4 coppie di gemelli in $\binom{6}{4}$ modi; da ciascuna coppia scelgo un elemento, ad es. $AB'C'D$, in modo che rimangano $A'BCD'EE'FF'$. La 2° squadra deve contenere necessariamente EF oppure EF', altrimenti una squadra conterebbe EE' oppure FF'. Quindi la 2° squadra deve contenere 2 fra gli elementi rimasti $A'BCD'$, da scegliere in $\binom{4}{2}$ modi, a cui associamo uno fra EE' e uno fra FF':

$$\frac{\binom{6}{4}\cdot 2^4\cdot\binom{4}{2}\cdot 2^2}{3!} =$$

(l'ultima squadra è completamente determinata)

$$= \frac{6\cdot 5}{\cancel{2}}\cdot 2^4\cdot\frac{4\cdot 3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2^2}\cdot\frac{1}{\cancel{6}} = \boxed{960}$$

ogni configurazione delle 3 squadre si ripete 3! volte.

1° 2° 3°

261 ●● **YOU & MATHS** A sequence of letters rolls off the tongue if the following two conditions are met.

1. The sequence does not begin or end with two consecutive consonants.
2. No three consecutive letters are all consonants.

How many permutations of MATHEMATICS roll off the tongue?

(USA *Rice University Mathematics Tournament*)

[$15 \cdot 7! = 75{,}600$]

M A T H E M A T I C S

4 vocali (V)
7 consonanti (C)

1) Sicuramente una vocale deve essere alla 1° o 2° lettera

V _ | C V C C V C C | _ _

qui ci va sicuramente una vocale

qui sicuramente una vocale

| V C C V C _ _ | _ _

NON AMMESSA

Quindi, se l'iniziale è una vocale

V C | C V C C V C C | V C

non ci sono altre possibilità

Se invece

C V | C C V C C V C | _ _

C V

V C

oppure

C V | C C V C V C C | V C

C V C V C C V C C V C

e non ci sono altre possibilità

configurazioni possibili

V C | C V C C V C C | V C

C V | C C V C C V C | C V

SIMMETRICHE

C V | C C V C C V C | V C

C V | C C V C V C C | V C ← SIMMETRICA

C V | C V C C V C C | V C

SIMMETRICHE

V C C V C C V C C V C

$$\frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} \cdot 5 =$$

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 7! \cdot 15 = \boxed{75.600}$$