25/1/2021

169 $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2+3} & \text{se } x \le 1 \\ b \ln x + (2a+1)x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, $[-2; 3]$.

Determinare a, b in modo che sia applicabile il TH. LAGRANGE in $[-2, 3]$

$$f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2+3} & -2 \le x \le 1 \\ b \ln x + (2a+1)x & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

• f continua in $[-2, 3]$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left[a + \sqrt{x^2+3}\right] = a + 2$$

$=$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left[b \ln x + (2a+1)x\right] = 2a + 1$$

$$a + 2 = 2a + 1 \implies a = 1$$

• f derivabile in $]-2, 3[$

"lontano" da 1 $\quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+3}} & -2 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x} + 3 & 1 < x \le 3 \end{cases}$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{b}{x} + 3\right) = b + 3$$

$=$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{2}$$

$$b + 3 = \frac{1}{2} \implies b = -\frac{5}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -\frac{5}{2} \end{aligned}}$$

171 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax & \text{se } -2 \le x \le 0 \\ -x^2 - ax + 3b & \text{se } 0 < x \le 4 \end{cases}$ determina per quali valori dei parametri a e b essa verifica le ipotesi del teorema di Lagrange in $[-2; 4]$. Trova poi le coordinate dei punti la cui esistenza è garantita dal teorema.

$\left[a = 0, b = 0; A\left(-\frac{7}{9}; \frac{49}{27}\right), B\left(\frac{7}{3}; -\frac{49}{9}\right)\right]$

• CONTINUITÀ IN $[-2, 4]$

$$\lim_{x \to 0^-} (3x^2 + 2ax) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^+} (-x^2 - ax + 3b) = 3b$$

$$3b = 0 \Rightarrow b = 0$$

• DERIVABILITÀ IN $]-2, 4[$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x + 2a & -2 \le x < 0 \\ -2x - a & 0 < x \le 4 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} (6x + 2a) = 2a \qquad f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} (-2x - a) = -a$$

$$2a = -a \Rightarrow a = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & -2 \le x \le 0 \\ -x^2 & 0 < x \le 4 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 6x & -2 \le x \le 0 \\ -2x & 0 < x \le 4 \end{cases}$$

Dobbiamo trovare per quali $c \in]-2, 4[$ $\quad f'(c) = \dfrac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \dfrac{-16 - 12}{6} = -\dfrac{28}{6} = -\dfrac{14}{3}$

Risolvo $f'(c) = -\dfrac{14}{3}$ nell'incognita c

$$\begin{cases} 6c = -\frac{14}{3} \\ -2 \le c \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = -\frac{7}{9} \\ -2 \le c \le 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -\frac{7}{9} \quad A\left(-\frac{7}{9}, \frac{49}{27}\right)$$

$$\begin{cases} -2c = -\frac{14}{3} \\ 0 < c \le 4 \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{7}{3} \\ 0 < c \le 4 \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{7}{3} \quad B\left(\frac{7}{3}, -\frac{49}{9}\right)$$

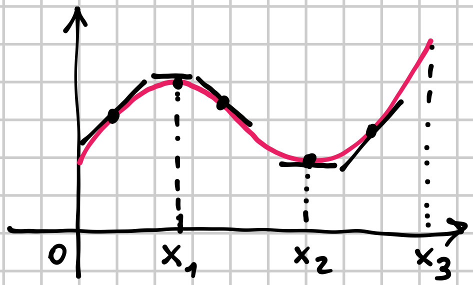
CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI LAGRANGE

TEOREMA

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo $\quad f$ derivabile in I

- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f$ è STRETTAMENTE CRESCENTE in I
- $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \implies f$ è STRETTAMENTE DECRESCENTE in I.

ESEMPIO GRAFICO

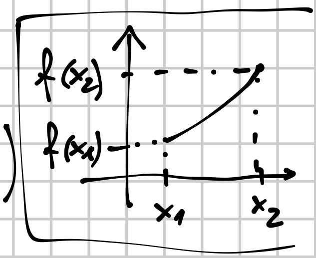


- $f'(x) > 0$ negli intervalli in cui f è strett. crescente, cioè in $[0, x_1]$ e in $[x_2, x_3]$;
- $f'(x) < 0$ negli intervalli in cui f è strett. decrescente, cioè in $[x_1, x_2]$;
- $f'(x) = 0$ in x_1 e x_2, che sono un max relativo e un min relativo.

DIMOSTRAZIONE

Ricordiamo che $f: I \to \mathbb{R}$ è strett. crescente (decrescente) in I se:

$$\forall x_1, x_2 \in I \qquad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$
$$(f(x_1) > f(x_2))$$



Sia $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$

Prendo $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$ e applico il th. di Lagrange a f in $[x_1, x_2]$. Trovo $c \in]x_1, x_2[$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0 \implies f(x_2) - f(x_1) > 0 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Il caso $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$ è analogo.

CVD

197 $y = x^3 - 3x^2$

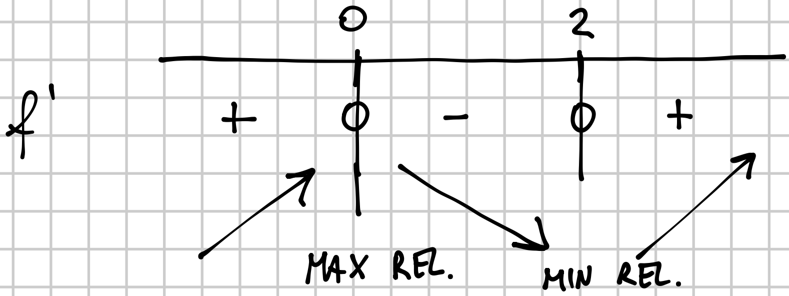
Trovare gli intervalli in cui f è strett. crescente e strett. decrescente

$$y' = 3x^2 - 6x$$

Studio il segno della derivata:

$3x^2 - 6x > 0 \qquad 3x(x-2) > 0 \qquad x < 0 \vee x > 2$

La derivata è positiva in $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$



La funzione è strett. crescente in $]-\infty, 0[$ e in $]2, +\infty[$; è strett. decrescente in $]0, 2[$; 0 è un max relativo e 2 è un min relativo

DOMANDA: Sarebbe corretto dire che la funzione è strett. crescente in $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$?

RISPOSTA: ASSOLUTAMENTE NO! La funzione è strett. crescente separatamente nei due intervalli $]-\infty, 0[$ e $]2, +\infty[$, ma non nella loro unione!