45 **REALTÀ E MODELLI** **Ellisse romana** In questa foto aerea del Colosseo si vede l'impianto di forma ellittica, così come la struttura a ellissi concentriche dei vari ordini di gradinate. La massima lunghezza (asse maggiore) dell'anfiteatro è di circa 188 m, mentre la sua massima larghezza (asse minore) è di circa 156 m.

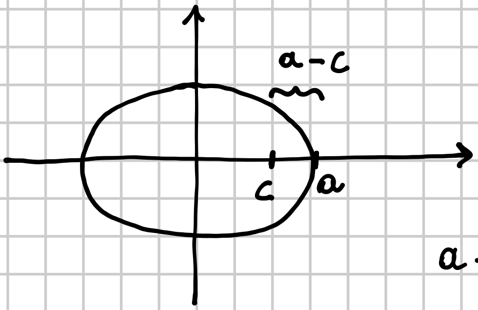
a. Ricava l'equazione dell'ellisse che rappresenta il contorno esterno dell'edificio, scelto un riferimento cartesiano Oxy, con O nel centro dell'ellisse e asse x contenente il semiasse maggiore.

b. A quale distanza dai vertici dell'asse maggiore si trovano i fuochi di tale ellisse?

$\left[\text{a) } \frac{x^2}{8836} + \frac{y^2}{6084} = 1;\ \text{b) } 41{,}54 \text{ m}\right]$

$a = \frac{188}{2} = 94 \qquad b = \frac{156}{2} = 78 \qquad \frac{x^2}{94^2} + \frac{y^2}{78^2} = 1$

$$\boxed{\frac{x^2}{8836} + \frac{y^2}{6084} = 1}$$



$$a - c = 94 - \underbrace{\sqrt{94^2 - 78^2}}_{c = \sqrt{a^2 - b^2}} = 41{,}5404\ldots \simeq \boxed{41{,}54 \text{ m}}$$

67 Considera l'equazione $\frac{x^2}{k-1} + \frac{y^2}{k} = 1$ e trova per quali valori di k rappresenta:

a. un'ellisse;

b. un'ellisse con i fuochi sull'asse y;

c. un'ellisse con un vertice in $(-3; 0)$;

d. un'ellisse che passa per $P\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

[a) $k > 1$; b) $k > 1$; c) $k = 10$; d) $k = 2$]

a) $\begin{cases} k - 1 > 0 \\ k > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k > 1 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k > 1}$

b) $\begin{cases} k > k - 1 \\ k > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 > -1 \quad \text{VERA} \Rightarrow \forall k \\ k > 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k > 1}$

c) $a^2 = 9 \quad \begin{cases} k - 1 = 9 \\ k > 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{k = 10}$

d) $\frac{x^2}{k-1} + \frac{y^2}{k} = 1 \quad P\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \begin{cases} \frac{1}{9(k-1)} + \frac{16}{9k} = 1 \\ k > 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{9(k-1)} + \dfrac{16}{9k} = 1 \\ k > 1 \end{cases} \qquad \frac{k+16(k-1)}{\cancel{9k(k-1)}} = \frac{9k(k-1)}{\cancel{9k(k-1)}}$$

$$k + 16k - 16 = 9k^2 - 9k$$

$$9k^2 - 26k + 16 = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 169 - 144 = 25$$

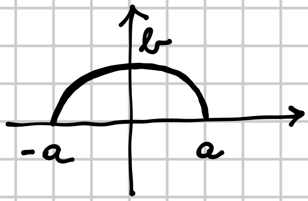
$$k = \frac{13 \pm 5}{9} = \begin{cases} 2 \\ \frac{8}{9} \end{cases}$$

$\frac{8}{9}$ non acc. perché non è >1

$$\boxed{k = 2}$$

RAPPRESENTARE GRAFICAMENTE

87 $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ ← SEMIELLISSE SUPERIORE



elevo al quadrato (si aggiungono punti)

$$y^2 = 25 - 4x^2$$

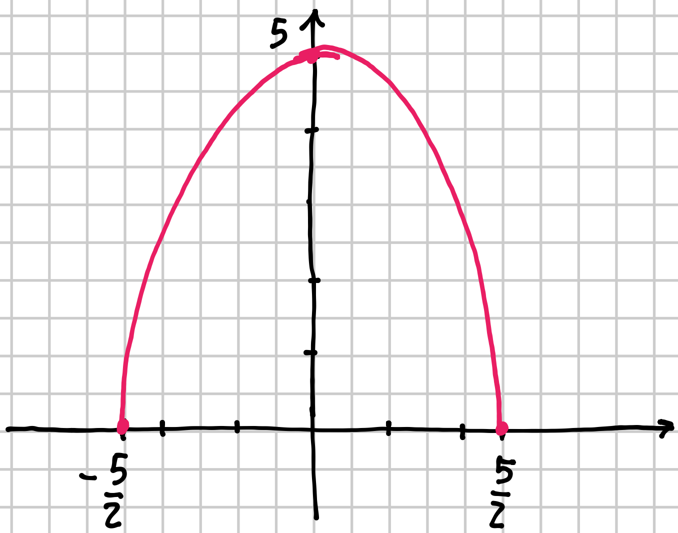
$$4x^2 + y^2 = 25$$

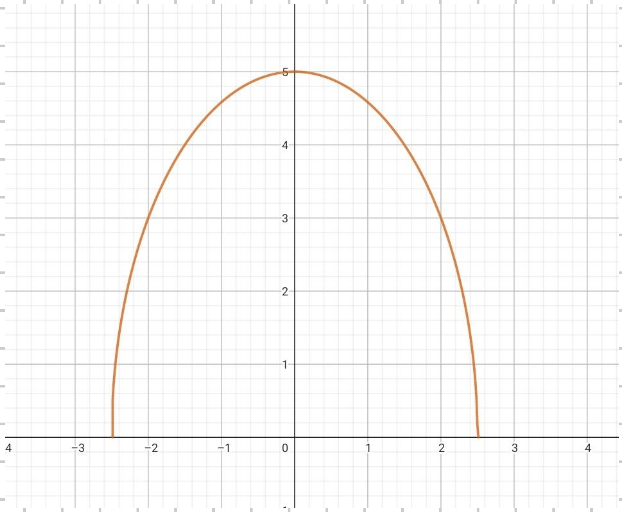
$$\frac{4x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1 \implies \frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{25} = 1$$

ELLISSE COI FUOCHI SULL'ASSE y

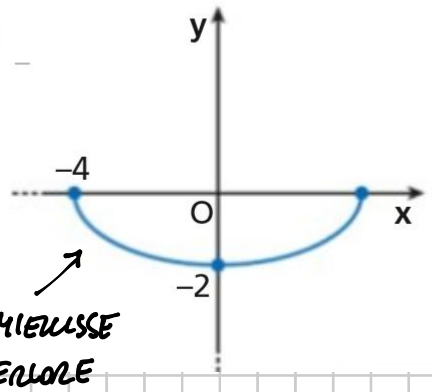
$$a = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$b = 5$$





94



SEMIELLISSE INFERIORE

SCRIVERE L'EQUAZIONE DELLA CURVA

$a = 4 \quad b = 2$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ellisse completa

Devo ricavare y

$\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{16}$

perché inferiore

$y^2 = 4 - \frac{x^2}{4} \implies y = -\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$

$y = -\sqrt{\frac{16 - x^2}{4}}$

$y = -\frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}$

141 Conduci da $P\left(6; -\frac{3}{2}\right)$ le tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 9$.

$[2y + 3 = 0; 4x + 6y - 15 = 0]$

$y + \frac{3}{2} = m(x - 6)$ eq. "retta" per P

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9 \\ y = mx - 6m - \frac{3}{2} \end{cases}$$

$x^2 + 4\left(mx - 6m - \frac{3}{2}\right)^2 - 9 = 0$ eq. risolvente

$x^2 + 4\left(m^2x^2 + 36m^2 + \frac{9}{4} - 12m^2x - 3mx + 18m\right) - 9 = 0$

$$x^2+4\left(m^2x^2+36m^2+\frac{9}{4}-12m^2x-3mx+18m\right)-9=0$$

$$x^2+4m^2x^2+144m^2+\cancel{9}-48m^2x-12mx+72m-\cancel{9}=0$$

$$(1+4m^2)x^2-2(24m^2+6m)x+144m^2+72m=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0 \Rightarrow (24m^2+6m)^2-(1+4m^2)(144m^2+72m)=0$$

$$576m^4+36m^2+288m^3-(144m^2+72m+576m^4+288m^3)=0$$

$$\cancel{576m^4}+36m^2+\cancel{288m^3}-144m^2-72m-\cancel{576m^4}-\cancel{288m^3}=0$$

$$-108m^2-72m=0$$

DIVIDO PER -36

$$3m^2+2m=0$$

$$m(3m+2)=0 \quad m=0 \quad m=-\frac{2}{3}$$

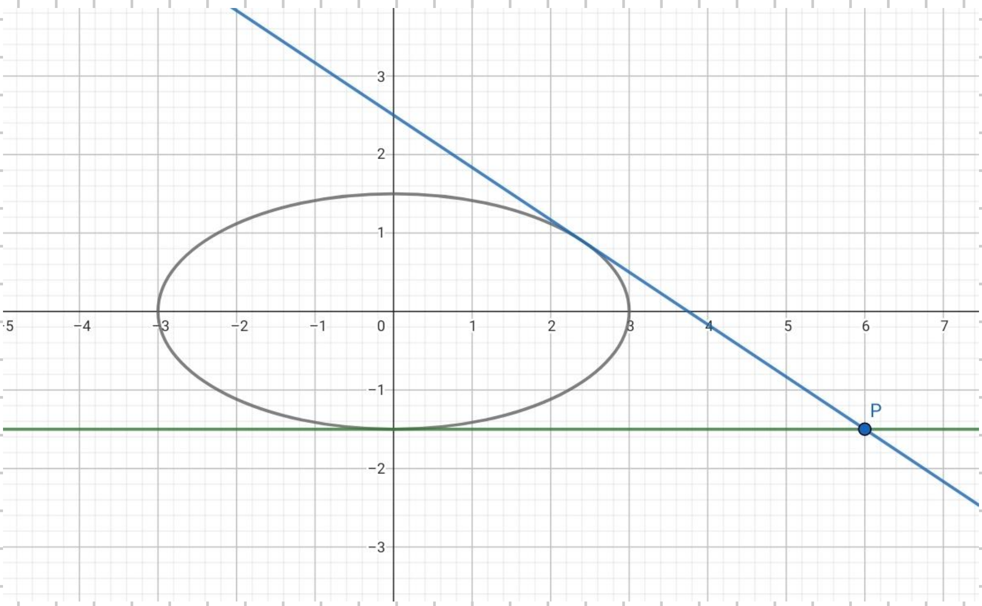
EQ. FASCIO

$$y=mx-6m-\frac{3}{2}$$

$$m=0 \Rightarrow \boxed{y=-\frac{3}{2}}$$

$$m=-\frac{2}{3} \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+4-\frac{3}{2}$$

$$\boxed{y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}}$$



164 Trova l'equazione dell'ellisse avente un fuoco in $\left(\frac{3}{2};0\right)$ e il semiasse su cui non giace il fuoco di misura $\frac{\sqrt{7}}{2}$. $[7x^2+16y^2=28]$

$F_2\left(\frac{3}{2},0\right)$ $F_1\left(-\frac{3}{2},0\right)$ FUOCHI SU ASSE X

$c=\frac{3}{2}$ $b=\frac{\sqrt{7}}{2}$ (semiasse minore)

$a^2-b^2=c^2$ $a^2=b^2+c^2=\frac{7}{4}+\frac{9}{4}=\frac{16}{4}=4$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{7}{4}}=1$ $\frac{x^2}{4}+\frac{4y^2}{7}=1$ $\boxed{7x^2+16y^2=28}$

178 Trova l'equazione dell'ellisse che ha eccentricità $e=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ e un fuoco nel punto $(-3;0)$. $\left[\frac{x^2}{10}+y^2=1\right]$

$F_1(-3,0)$

$c=3$

FUOCHI SU ASSE X

$\Downarrow$

$e=\frac{c}{a}$

$\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{a} \Rightarrow a=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

$b^2=a^2-c^2=10-9=1$

$\boxed{\frac{x^2}{10}+y^2=1}$

SCRIVERE L'EQ. DELL'ELLISSE PASSANTE PER A E B

168 $A(\sqrt{5}; 4)$, $B(-2\sqrt{2}; 2)$. $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1\right]$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \alpha=\frac{1}{a^2} \qquad \beta=\frac{1}{b^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha x^2+\beta y^2=1$$

$$\begin{array}{l} A(\sqrt{5},4) \Rightarrow \\ B(-2\sqrt{2},2) \Rightarrow \end{array} \begin{cases} 5\alpha+16\beta=1 \\ 8\alpha+4\beta=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\alpha+16\left(\frac{1}{4}-2\alpha\right)=1 \\ \beta=\frac{1-8\alpha}{4}=\frac{1}{4}-2\alpha \end{cases} \qquad 5\alpha+4-32\alpha=1 \qquad -27\alpha=-3 \qquad \alpha=\frac{1}{9}$$

$$\beta=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{9-8}{36}=\frac{1}{36}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1}$$