DERIVABILITÀ DI FUNZIONI A TRATTI

12/1/2020

ESEMPIO

Verifichiamo se $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - 1} & \text{se } x \le 0 \\ -\sqrt{x^2+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ è derivabile in $x = 0$.

Controlliamo la continuità in 0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{x^3 - 1} = -1 \quad (= f(0))$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(-\sqrt{x^2+1}\right) = -1$$

È continua in 0

Per calcolare la derivata in 0 devo fare il limite del rapporto incrementale

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h^3-1} + 1}{h} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{h^3-1}\right)^2 - \sqrt[3]{h^3-1} + 1}{\left(\sqrt[3]{h^3-1}\right)^2 - \sqrt[3]{h^3-1} + 1} =$$

$$\boxed{(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{h^3 \cancel{-1} + \cancel{1}}{h\left[\underbrace{\left(\sqrt[3]{h^3-1}\right)^2}_{\downarrow\, 1} - \underbrace{\sqrt[3]{h^3-1}}_{\downarrow\, 1} + 1\right]} = 0$$

Si poteva anche osservare che

$$\frac{\sqrt[3]{h^3-1}+1}{h} = \frac{-\sqrt[3]{1-h^3}+1}{h} = -\frac{\left(1+(-h^3)\right)^{\frac{1}{3}}-1}{h} \sim$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad \text{per } x \to 0$$

$$\sim -\frac{\frac{1}{3}(-h^3)}{h} = \frac{1}{3}h^2 \quad \text{per } h \to 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-\sqrt{h^2+1}+1}{h} \cdot \frac{\sqrt{h^2+1}+1}{\sqrt{h^2+1}+1} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{1}-h^2-\cancel{1}}{h(\underbrace{\sqrt{h^2+1}}_{\downarrow\, 1}+1)} = 0$$

Quindi f è derivabile in 0 con $f'(0)=0$.

4.4. Teorema del limite della derivata. *Sia $f : [a,b[\to \mathbf{R}$ una funzione continua in a e derivabile in $]a,b[$. Se $\underbrace{f'(a+)}_{\lim_{x\to a^+} f'(x)}$ esiste, finito o no, allora anche $f'_+(a)$ esiste e vale $f'(a+)$.* □

Il teorema è enunciato solo per la derivata destra, ma vale anche per la derivata sinistra ($f:]a,b] \to \mathbb{R}$ continua in b e derivabile in $]a,b[$. Se $f'(b-)$ esiste ....)

ESEMPIO

Verifichiamo se $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - 1} & \text{se } x \leq 0 \\ -\sqrt{x^2 + 1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ è derivabile in $x = 0$.

Usiamo il teorema del limite della derivata

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} & \text{se } x < 0 \\[2ex] -\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\left[(x^3-1)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{\cancel{3}}(x^3-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot \cancel{3}x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$$

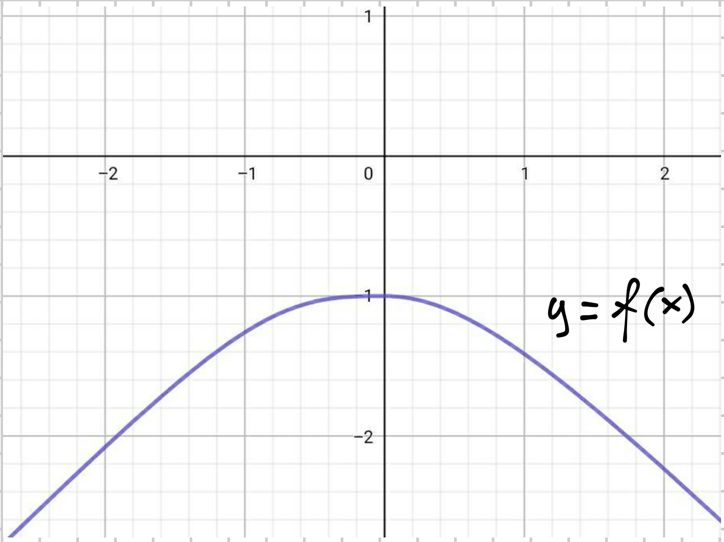
$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \left(-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = 0 \Rightarrow$ la derivata destra in 0 è 0

$f'_+(0) = 0$

$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{(x^3-1)^2}}\right) = 0 \Rightarrow$ la derivata sinistra in 0 è 0

$f'_-(0) = 0$

$\Rightarrow \quad f'(0) = 0$



39 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2) & \text{se } x \le 0 \\ x^3 + 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$, $\quad x_0 = 0.$

Controllare se in 0 è derivabile

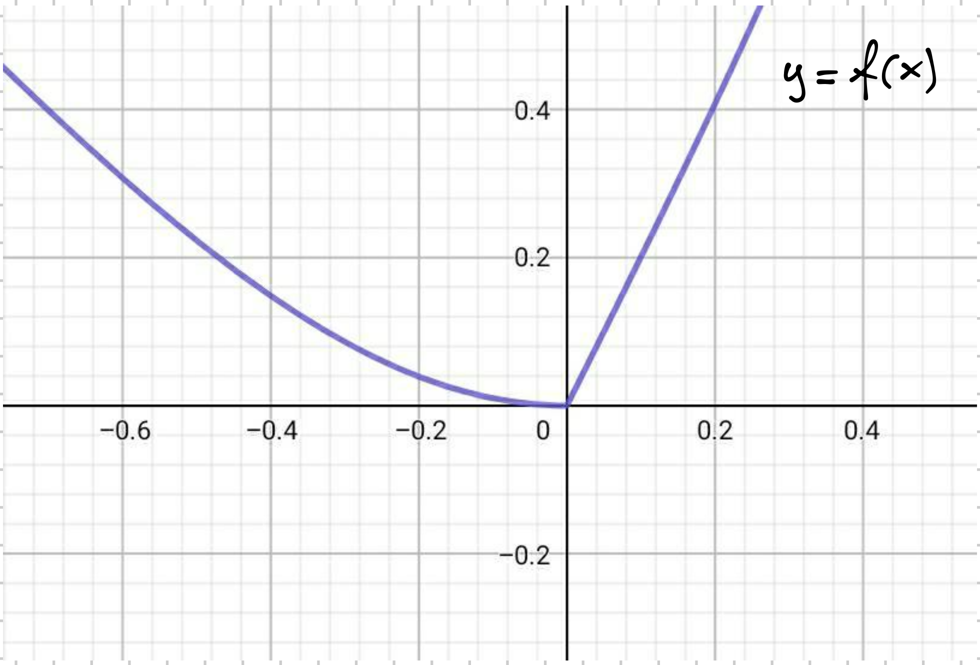
$$\left.\begin{aligned} &f(0) = \ln(1+0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} f(x) \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^3 + 2x) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ f è continua in 0}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow f'_-(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (3x^2+2) = 2 \Rightarrow f'_+(0) = 2$$

f non è derivabile in 0, dove ha un punto angoloso



ATTENZIONE! Se le ipotesi del teorema non sono soddisfatte, non si può applicare!!

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$$

è continua in 0 (basta usare il TH. DEI CARABINIERI)

$$f'(x)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}+\cancel{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)=2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

$x\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right) \text{ NON ESISTE}$$

$\Downarrow$

NON SI PUÒ APPLICARE IL TEOREMA DEL LIMITE DELLA DERIVATA

La funzione è comunque derivabile in 0 (devo fare il limite del rapporto incrementale).

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\cancel{2}}\cdot\sin\frac{1}{h}}{\cancel{h}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}h\cdot\sin\frac{1}{h}=0 \implies f'(0)=0$$

per il TH. CARABINIERI

f è derivabile in 0

COMPITO

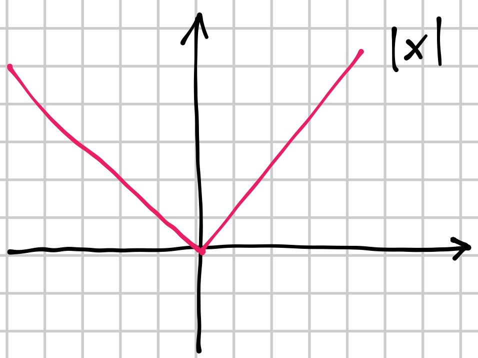
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

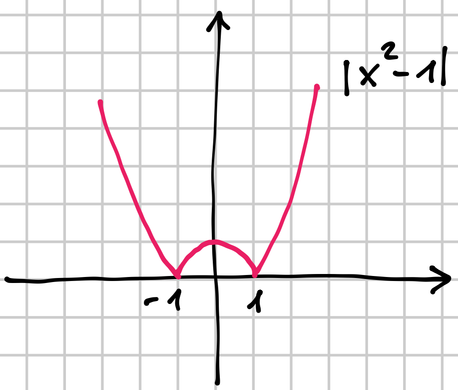
- Controllare la continuità.
- Verificare che NON si può applicare il teorema del limite della derivata.
- Discutere la derivabilità (controllare in 0)

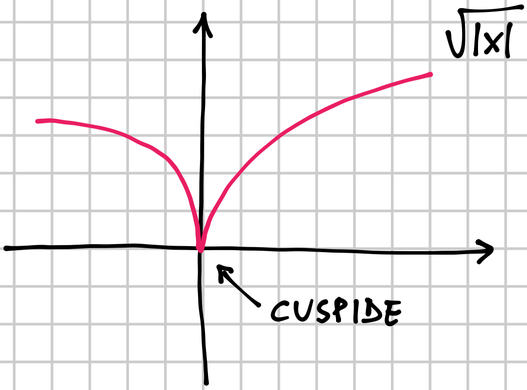
PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

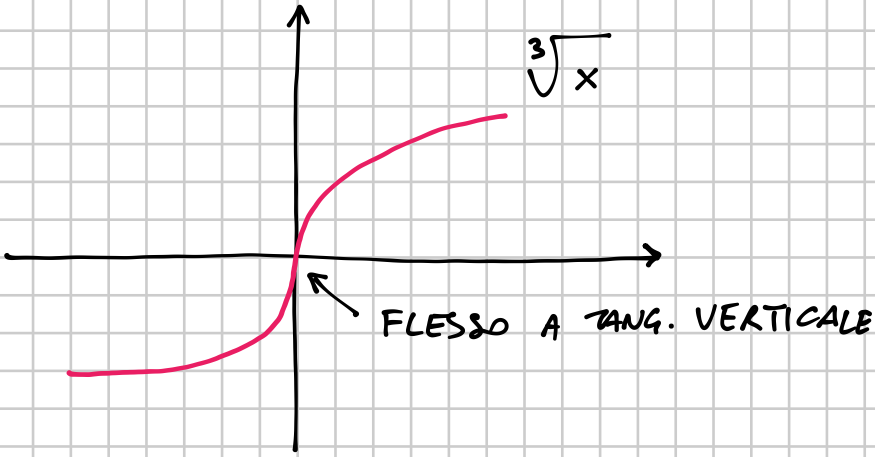
Bisogna studiare i casi in cui:

- funzioni definite a tratti (studiare i punti di raccordo)
- funzioni contenenti moduli: dove si annullano i moduli ci possono essere punti di non derivabilità (generalmente punti angolosi)
- funzioni contenenti radici: dove si annullano le radici ci possono essere punti di non derivabilità (generalmente flessi a tang. verticale o cuspidi)

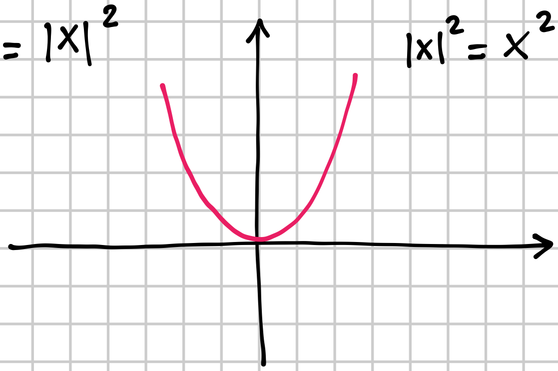








ATTENZIONE $y = |x|^2$



quindi non è che la presenza del modulo dà automaticamente la non derivabilità!

Bisogna studiare caso per caso.

20 $y = -\sqrt[3]{x^2}$ Studiare la derivabilità

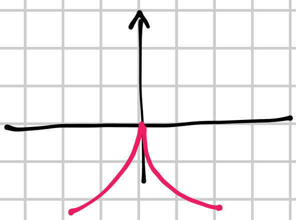
In 0, dove si annulla la radice, possono esserci problemi

$$y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \qquad x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{2}{3\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{0^+}}\right) = -(+\infty) = -\infty \quad \Rightarrow \quad f'_+(0) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{2}{3\underbrace{\sqrt[3]{x}}_{0^-}}\right) = -(-\infty) = +\infty \quad \Rightarrow \quad f'_-(0) = +\infty$$

0 è una cuspide



21 $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ DERIVABILITÀ

$$y' = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \qquad x \neq \pm 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \frac{2}{0^+} = +\infty = f'(1)$$

1 è FLESSO A TANGENTE VERTICALE

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = +\infty = f'(-1)$$

-1 è FLESSO A TANG. VERT.

11 $y = |e^{x-1} - 1|$ $\qquad |x|' = \text{sign}(x)$

Il modulo si annulla quando $e^{x-1} - 1 = 0$, $e^{x-1} = 1$ cioè quando $x = 1$.

$$y' = \text{sign}(e^{x-1}-1) \cdot e^{x-1} = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se } x > 1 \\ -e^{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$e^{x-1} - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} y' = \lim_{x\to 1^+} e^{x-1} = 1 \qquad \lim_{x\to 1^-} y' = \lim_{x\to 1^-} (-e^{x-1}) = -1$$

1 è un punto angoloso