21/1/2021

TEOREMA DELLA DERIVATA NULLA

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad$ I intervallo $\quad$ f derivabile in I

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

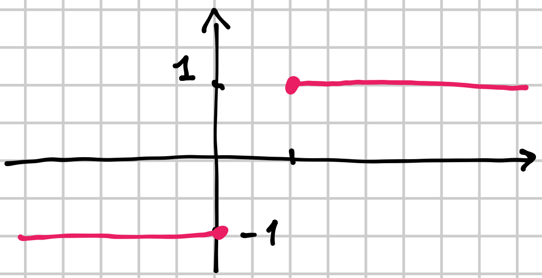
$\Rightarrow$ f è costante

DOMANDA: Se I non è un intervallo, la tesi è ancora valida?

RISPOSTA: NO. CONTROESEMPIO:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \in]-\infty, 0] \\ 1 & \text{se} \quad x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

DISGIUNTI



$f'(x) = 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

f NON è costante

TH. ROLLE

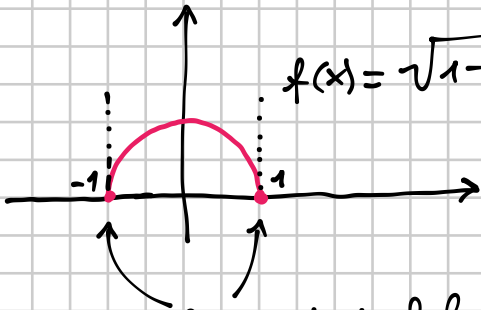
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

f derivabile in $]a,b[$ ①

f continua in $[a,b]$ ②

$f(a)=f(b)$ ③

$\Rightarrow \exists\, c\in\,]a,b[\; : \; f'(c)=0$



$f(x)=\sqrt{1-x^2}$

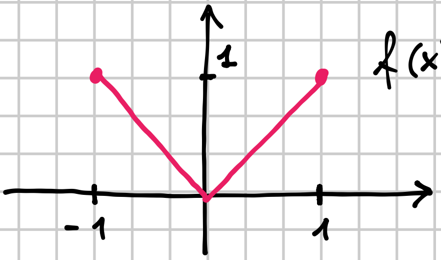
f non derivabile negli estremi, ma continua

Il teorema si può applicare ($c=0$)

Facciamo cadere a una a una le ipotesi ①, ②, ③ e mostriamo che il teorema non vale più

Facciamo cadere ① e valgono le altre

① CONTROESEMPIO



$f(x)=|x|$

$f(-1)=f(1)$

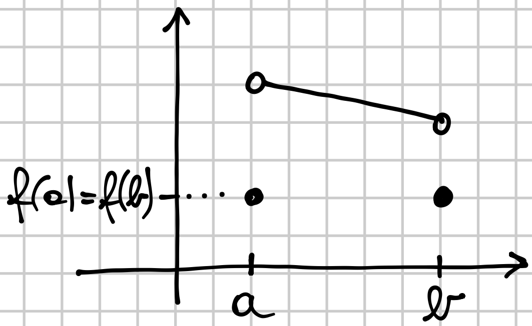
f continua in $[-1,1]$

f non è derivabile in tutti i punti di $]-1,1[$, perché non lo è in 0

<u>Non esiste</u> alcun punto $c\in\,]-1,1[$ in cui $f'(c)=0$

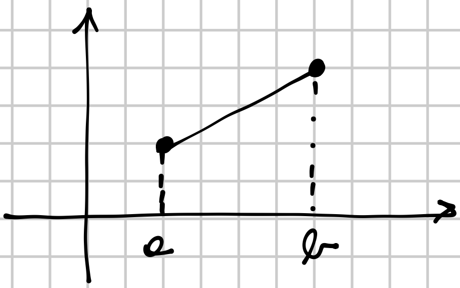
(2) Facciamo cadere l'ipotesi di continuità in $[a,b]$, mantenendo la derivabilità in $]a,b[$

$\Rightarrow$ discontinua in almeno un estremo



<u>non esiste</u> alcun punto c in $]a,b[$ tale che $f'(c)=0$

(3) Facciamo cadere $f(a)=f(b)$



f derivabile in $]a,b[$

f continua in $[a,b]$

$f(a) \neq f(b)$

<u>non esiste</u> alcun punto $c \in]a,b[$ tale che $f'(c)=0$

115 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{se } 0 \le x < 2 \\ \dfrac{16}{x+2} & \text{se } 2 \le x \le 6 \end{cases}$, $\quad [0; 6]$.

Trovare a, b in modo che sia applicabile TH. ROLLE

$f(0) = f(6)$

1) $f(0) = 2 \qquad f(6) = \dfrac{16}{6+2} = 2$ OK

2) continuità in $[0,6] \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (ax^2 + bx + 2) = 4a + 2b + 2$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{16}{x+2} = 4$$

$=$

$\Downarrow$

$4a + 2b + 2 = 4$

$2a + b + 1 = 2$

$2a + b = 1$

3) DERIVABILITÀ IN $]0,6[$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{se } 0 < x < 2 \\ -\dfrac{16}{(x+2)^2} & \text{se } 2 < x < 6 \end{cases}$$

$f'_-(2) = f'_+(2)$

$\Downarrow$

$4a + b = -1$

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} (2ax + b) = 4a + b$$

$f'_+(2) = -1$

$$\begin{cases} 2a+b=1 \\ 4a+b=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} b=1-2a \\ 4a+1-2a=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ 2a=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=1+2=3 \\ a=-1 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}}$$

100 $f(x) = 1 + |x|$, $[-2; 2]$.

Spiegare perché non è applicabile il TH. ROLLE.

$f(-2)=f(2)$ $\quad$ f continua in $[-2,2]$

f <u>NON</u> è derivabile in $]-2,2[$, perché non è derivabile in 0