Calcolare la derivata

314 $y = \ln \cos \sqrt{2x}$ $\left[y' = -\dfrac{\tan \sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}\right]$

$$y' = \frac{1}{\cos\sqrt{2x}} \cdot (\cos\sqrt{2x})' = \frac{1}{\cos\sqrt{2x}}\left(-\sin\sqrt{2x}\right)\cdot\left(\sqrt{2x}\right)' =$$

$$= -\frac{\sin\sqrt{2x}}{\cos\sqrt{2x}}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x}}\cdot \underbrace{\cancel{2}}_{(2x)'} = -\frac{\tan\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$$

334 $y = x^{x^2}$ $\left[y' = x^{x^2+1}(2\ln x + 1)\right]$

$$y = e^{\ln x^{x^2}} = e^{x^2 \cdot \ln x}$$

$$y' = e^{x^2 \ln x} \cdot (x^2 \ln x)' = \overbrace{e^{x^2 \ln x}}^{x^{x^2}} \cdot \left(2x \cdot \ln x + x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) =$$

$$= x^{x^2} \cdot x\,(2\ln x + 1) = x^{x^2+1}\,(2\ln x + 1)$$

391 $y = \ln(3x-1)^2 - \dfrac{4}{3x-1}$ $\left[y' = \dfrac{6(3x+1)}{(3x-1)^2}\right]$

$$y = 2\ln(3x-1) - 4(3x-1)^{-1}$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{3x-1} \cdot 3 - 4 \cdot (-1) \cdot (3x-1)^{-2} \cdot 3 =$$

$$= \frac{6}{3x-1} + \frac{12}{(3x-1)^2} = \frac{6(3x-1)+12}{(3x-1)^2} = \frac{18x-6+12}{(3x-1)^2} =$$

$$= \frac{18x+6}{(3x-1)^2} = \frac{6(3x+1)}{(3x-1)^2}$$

416 $y = \ln \frac{x^2-1}{2x+3}$ $\left[y' = \frac{2(x^2+3x+1)}{(x^2-1)(2x+3)}\right]$

$$y' = \frac{1}{\frac{x^2-1}{2x+3}} \cdot \left(\frac{x^2-1}{2x+3}\right)' = \frac{\cancel{2x+3}}{x^2-1} \cdot \frac{2x(2x+3)-2(x^2-1)}{(2x+3)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{4x^2+6x-2x^2+2}{(x^2-1)(2x+3)} = \frac{2x^2+6x+2}{(x^2-1)(2x+3)} = \frac{2(x^2+3x+1)}{(x^2-1)(2x+3)}$$

417 $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{x^2}}$ $\left[y' = \frac{1-6x^2}{3e^{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^2}}\right]$

$$y' = \frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} \cdot e^{x^2} - \sqrt[3]{x} \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{\left(e^{x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot e^{x^2} - x^{\frac{1}{3}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{\cancel{e^{x^2}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}+1}\right)}{\left(e^{x^2}\right)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{4}{3}}}{e^{x^2}} = \frac{x^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{3} - 2x^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}\right)}{e^{x^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - 2x^2}{\sqrt[3]{x^2}\ e^{x^2}} = \frac{\frac{1-6x^2}{3}}{\sqrt[3]{x^2}\ e^{x^2}} = \frac{1-6x^2}{3\sqrt[3]{x^2}\ e^{x^2}}$$

DERIVATE DI ESPONENZIALI E LOGARITMI

$a > 0$

$y = a^x$ $\qquad y = a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$

$$y' = \underbrace{e^{x \ln a}}_{a^x} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

ESEMPIO

$y = 2^x \implies y' = 2^x \ln 2$

$y = \log_a x$ $\qquad y = \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

$a > 0 \quad a \neq 1$

$$y' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

ESEMPIO

$y = \log_2 x \qquad y' = \dfrac{1}{x \ln 2}$

392 $y = 2^{2x+3} - 8 \cdot 4^x$ $\qquad [y' = 0]$

$$y' = 2^{2x+3} \cdot \ln 2 \cdot 2 - 8 \cdot 4^x \cdot \ln 4 =$$

$$= \underbrace{2^{2x}}_{(2^2)^x} \cdot \underbrace{2^3}_{8} \cdot \underbrace{\ln 2 \cdot 2}_{2 \ln 2 = \ln 2^2} - 8 \cdot 4^x \cdot \ln 4 = 0$$

infatti: $y = \underbrace{2^{2x}}_{4^x} \cdot \underbrace{2^3}_{8} - 8 \cdot 4^x = 0$

390 $y = 2\ln x - \sqrt{\ln x}$ $\qquad \left[y' = \frac{1}{x}\left(2 - \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\right)\right]$

$$y' = \frac{2}{x} - \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(2 - \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\right)$$

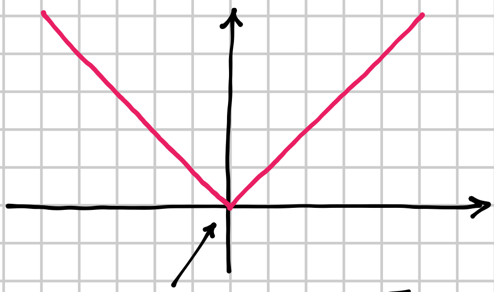
LA DERIVATA DELLA COTAGENTE

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -1 - \cot^2 x$$

LA FUNZIONE MODULO

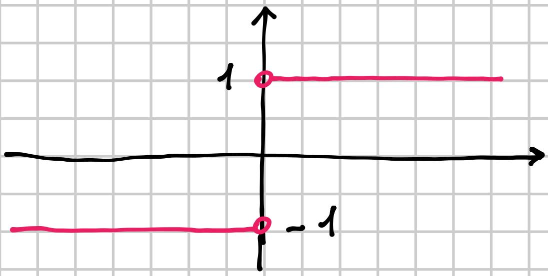
$y = |x|$



in $x = 0$ NON È DERIVABILE

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

FUNZIONE SEGNO $\quad \text{sign}(x) = f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



non è definita in 0

$|x|' = \text{sign}(x)$

$\text{sign}(x) = \dfrac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$ $\qquad |x| = x \cdot \text{sign}(x)$ se $x \neq 0$

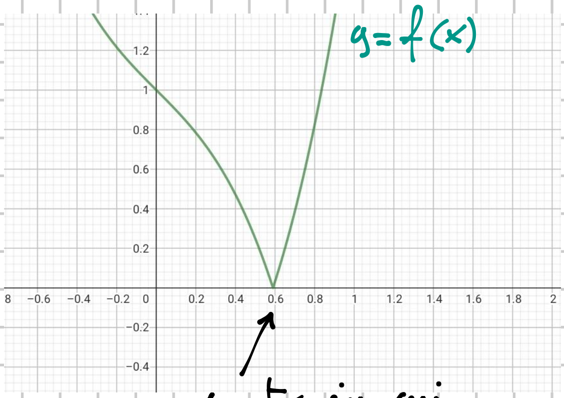
ESEMPIO DI APPLICAZIONE

Calcolare la derivata di $f(x) = |2x^3 + x - 1|$

composizione fra $|x|$ e $2x^3 + x - 1$

$$f'(x) = \text{sign}(2x^3 + x - 1) \cdot (6x^2 + 1)$$

definita dove $2x^3 + x - 1 \neq 0$



punto in cui $2x^3 + x - 1 = 0$

PUNTO DI NON DERIVABILITÀ

ESEMPIO

Calcolare la derivata di $f(x) = x^2 + 2|x-1|$

1° MODO

Osservo che $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

quindi $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2(x-1) & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 + 2(-x+1) & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{se } x > 1 \\ 2x - 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Cosa succede in $x = 1$?

Nel punto di raccordo devo fare il limite del rapporto incrementale

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{1} + h^2 + 2h \cancel{+2} + 2h \cancel{-2} \cancel{-1}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + 4h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}} = 4$$

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) + 2 - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cancel{1} + h^2 + \cancel{2h} - \cancel{2} - \cancel{2h} + \cancel{2} - \cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = 0$$

$f'_+(1) = 4 \qquad f'_-(1) = 0 \Rightarrow f$ NON è derivabile in $x = 1$

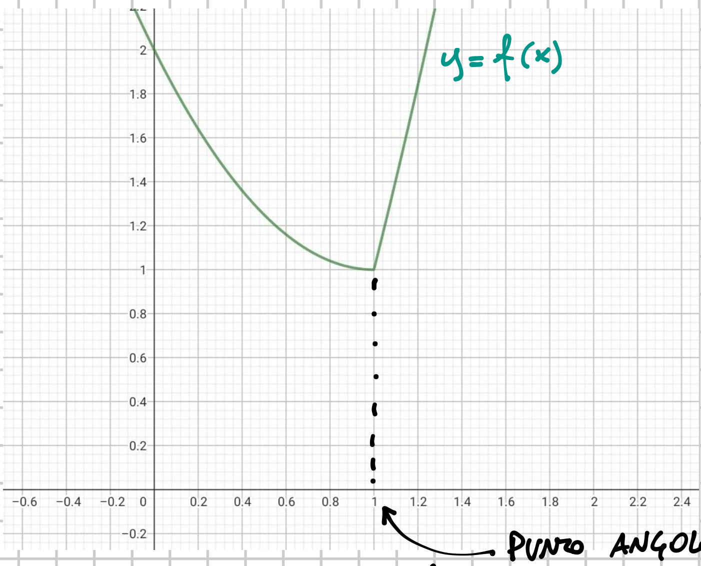
DOVE IL MODULO SI ANNULLA DEVO SEMPRE CONTROLLARE LA DERIVABILITÀ ATTRAVERSO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{se } x > 1 \\ 2x - 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Più semplicemente si può scrivere utilizzando la funzione SEGNO

$f(x) = x^2 + 2|x-1| \qquad f'(x) = 2x + 2 \cdot \text{sign}(x-1)$

anche così va controllato in $x=1$ il limite del rapporto incrementale



PUNTO ANGOLOSO (DI NON DERIVABILITÀ)

$x = 1$

In generale, nelle funzioni che contengono moduli, dove tali moduli si annullano ci potrebbero essere problemi di derivabilità, che quindi vanno controllati col limite del rapporto incrementale.
<u>NON È DETTO</u> che sempre ci sia non derivabilità...

$f(x) = x|x|$ $\qquad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Il modulo si annulla in $x=0$, ma in $x=0$ è derivabile

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Per $x=0$ usiamo $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\cancel{h}|h|}{\cancel{h}} = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \dots = 0$$

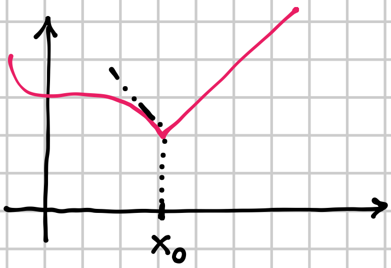
$f'(0) = 0$ la funzione è derivabile in $x=0$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

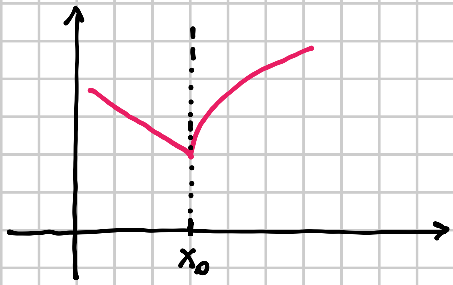
PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

- PUNTI ANGOLOSI

f CONTINUA in x_0

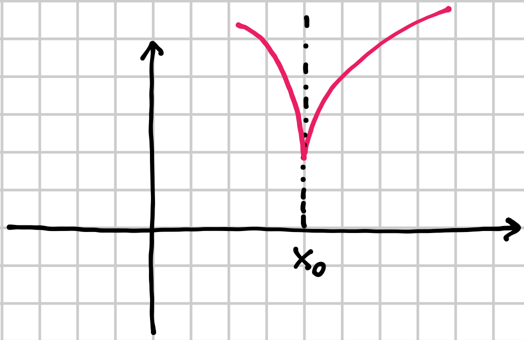
$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ e almeno una delle due è finita



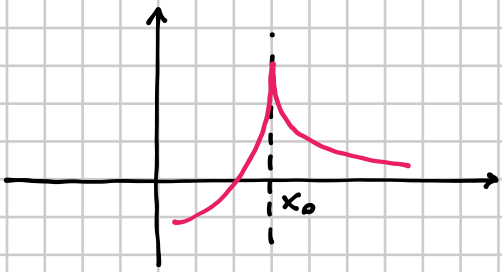


- CUSPIDI

f CONTINUA in x_0 e $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ INFINITE DI SEGNO OPPOSTO



$f'_+(x_0) = +\infty \qquad f'_-(x_0) = -\infty$

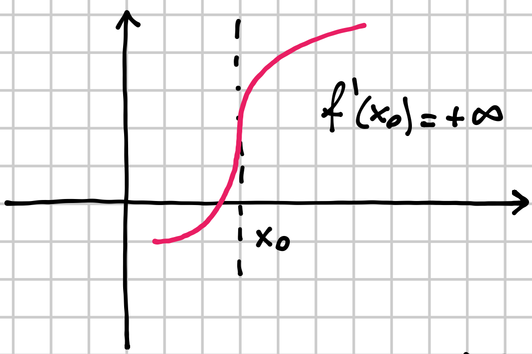


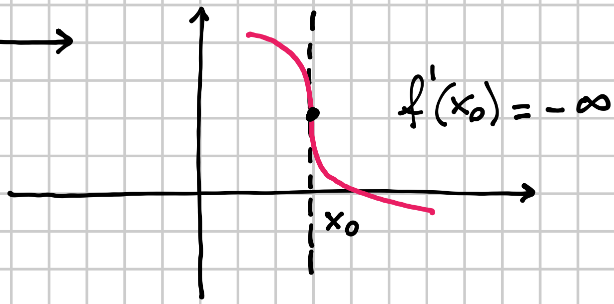
$f'_-(x_0) = +\infty \qquad f'_+(x_0) = -\infty$

- FLESSI A TANGENTE VERTICALE

f CONTINUA IN x_0

$f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ INFINITE DELLO STESSO SEGNO





COMPITO

Controllare che $\sqrt{|x|}$ ha una CUSPIDE in $x=0$ e che $\sqrt[3]{x}$ ha un FLESSO A TANGENTE VERTICALE in $x=0$