12/4/2019

TEOREMA

$\in (a, b)$

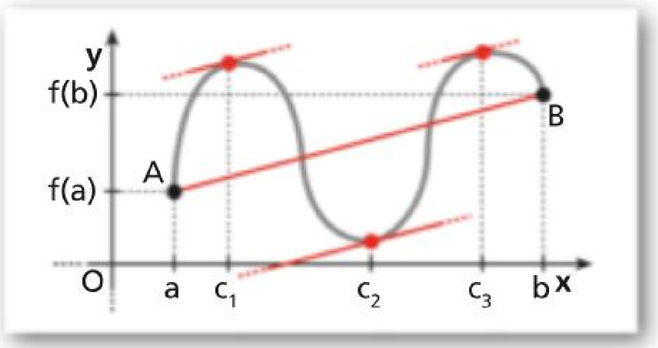
Teorema di Lagrange

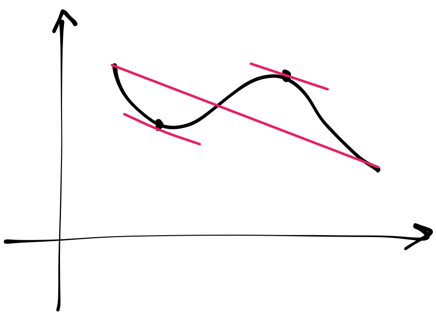
Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso $[a;b]$ ed è derivabile in ogni punto interno all'intervallo, esiste almeno un punto c interno ad $[a;b]$ per cui vale la relazione:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Il teorema afferma che esiste *almeno* un punto $c \in]a;b[$, ma nulla vieta che i punti siano più di uno, come si vede nella figura a lato.

Il grafico di questa funzione ha più punti in cui la tangente è parallela alla retta AB.





Da questo teorema discendono le seguenti proposizioni:

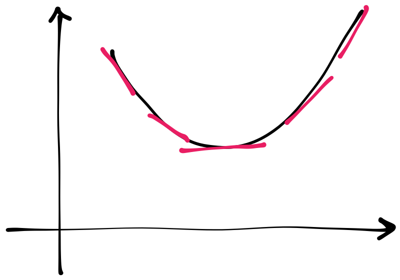
$f : I \to \mathbb{R}$ I intervallo

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è CRESCENTE IN I

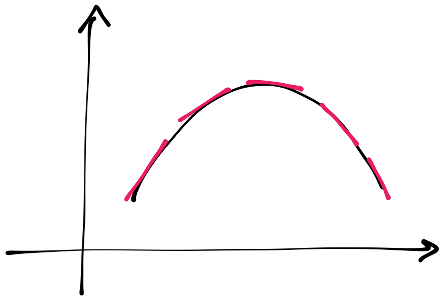
$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è DECRESCENTE IN I

$f'(x)$ È CRESCENTE IN $I \Rightarrow f$ HA LA CONCAVITÀ VERSO L'ALTO IN I

$f'(x)$ È DECRESCENTE IN $I \Rightarrow f$ HA LA CONCAVITÀ VERSO IL BASSO IN I



CONCAVITÀ VERSO L'ALTO



CONCAVITÀ VERSO IL BASSO

Come possiamo stabilire la concavità (verso l'alto o verso il basso) di una funzione? <u>RISP.</u> Dobbiamo valutare se la derivata f' è crescente/decrescente.

E come facciamo a stabilire se la derivata f' è crescente o decrescente? <u>RISP.</u> Studiamo il segno della derivata della derivata di f', cioè il segno della <u>DERIVATA SECONDA</u> f''

$f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f'$ è CRESCENTE IN $I \implies f$ HA LA CONCAVITÀ VERSO L'ALTO IN I

$f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \implies f'$ è DECRESCENTE IN $I \implies f$ HA LA CONCAVITÀ VERSO IL BASSO IN I

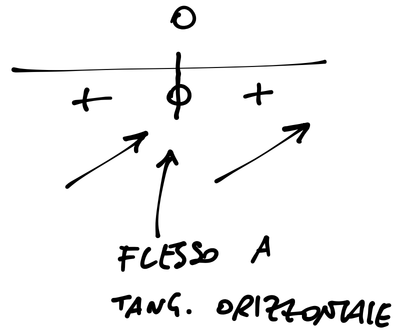
ESEMPIO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^3$

1) DERIVATA (PRIMA)

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow$ SI ANNULLA PER $x=0$

È SEMPRE $>0 \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow f$ È CRESCENTE



2) DERIVATA SECONDA

$f''(x) = 6x$

ZERI DELLA DERIVATA SECONDA $\Rightarrow x=0$

$6x > 0 \Rightarrow x > 0$