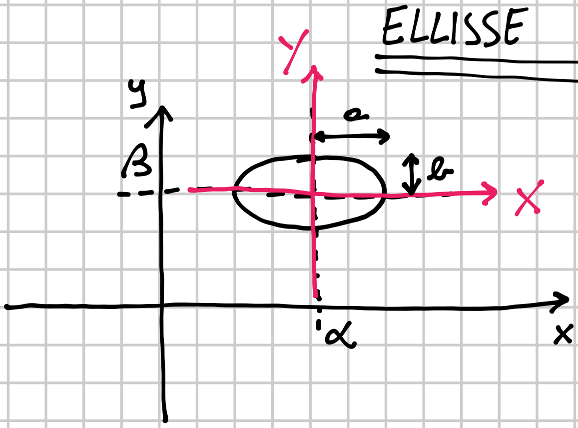
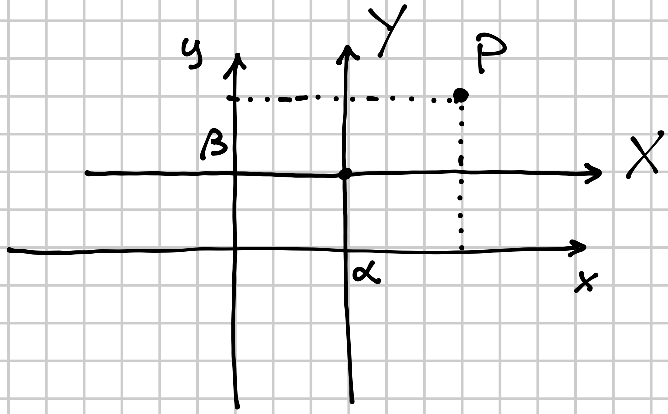
ELLISSE TRASLATA

→ GLI ASSI DELL'ELLISSE SONO PARALLELI AGLI ASSI CARTESIANI



$O'(\alpha, \beta)$ CENTRO DELL'ELLISSE



$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$

TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

Nel sistema di rif. XY, l'ellisse ha equazione $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$

Nel sistema di rif. xy, l'ellisse ha equazione

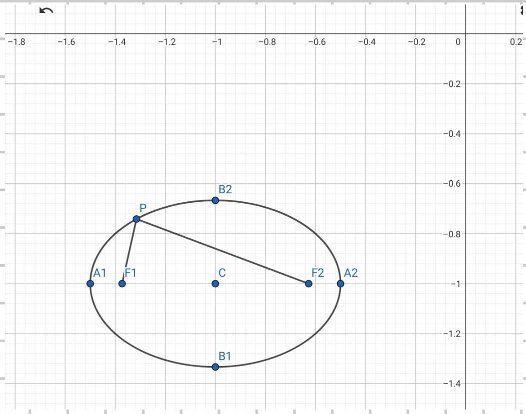
$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1}$$

EQ. DELL'ELLISSE CON CENTRO (α, β)
(E ASSI // AGLI ASSI xy)

210 $4x^2+9y^2+8x+18y+12=0$

ELLISSE TRASLATA

OBIETTIVO: portare l'equazione nella forma $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ per determinare le caratteristiche dell'ellisse



$$4x^2+8x+9y^2+18y+12=0$$

$$4(x^2+2x)+9(y^2+2y)+12=0$$

$$4(x^2+2x+1-1)+9(y^2+2y+1-1)+12=0$$

$$4(x^2+2x+1)-4+9(y^2+2y+1)-9+12=0$$

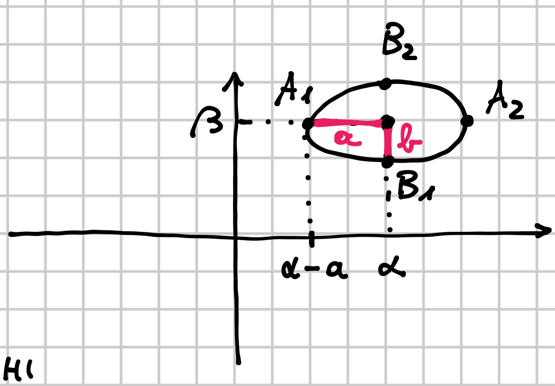
$$4(x+1)^2+9(y+1)^2-1=0$$

$$4(x+1)^2+9(y+1)^2=1 \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(y+1)^2}{\frac{1}{9}}=1$$

$a^2=\frac{1}{4} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ centro $C(-1,-1)$

$b^2=\frac{1}{9} \Rightarrow b=\frac{1}{3}$ $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{9-4}{36}}=\frac{\sqrt{5}}{6}$

ECCENTRICITÀ $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{6}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$



$A_1\left(-1-\frac{1}{2},-1\right)=\left(-\frac{3}{2},-1\right)$

$A_2\left(-1+\frac{1}{2},-1\right)=\left(-\frac{1}{2},-1\right)$

$B_1\left(-1,-1-\frac{1}{3}\right)=\left(-1,-\frac{4}{3}\right)$

$B_2\left(-1,-1+\frac{1}{3}\right)=\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$

FUOCHI

$F_1\left(-1-\frac{\sqrt{5}}{6},-1\right)$ $F_2\left(-1+\frac{\sqrt{5}}{6},-1\right)$

291 Rappresenta l'ellisse di equazione $9x^2 + 4y^2 + 36x - 16y + 16 = 0$ e determinane l'eccentricità, le coordinate dei fuochi e l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa -2 e di minore ordinata.

$\left[e = \frac{\sqrt{5}}{3}; F_{1,2}(-2; 2 \pm \sqrt{5}); y = -1\right]$

$$9x^2 + 36x + 4y^2 - 16y + 16 = 0$$

$$9(x^2 + 4x) + 4(y^2 - 4y) + 16 = 0$$

$$9(x^2 + 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 4y + 4 - 4) + 16 = 0$$

$$9(x+2)^2 - 36 + 4(y-2)^2 - \cancel{16} + \cancel{16} = 0$$

$$9(x+2)^2 + 4(y-2)^2 = 36 \Rightarrow \frac{9(x+2)^2}{36} + \frac{4(y-2)^2}{36} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$a = 2$ centro $C(-2, 2)$

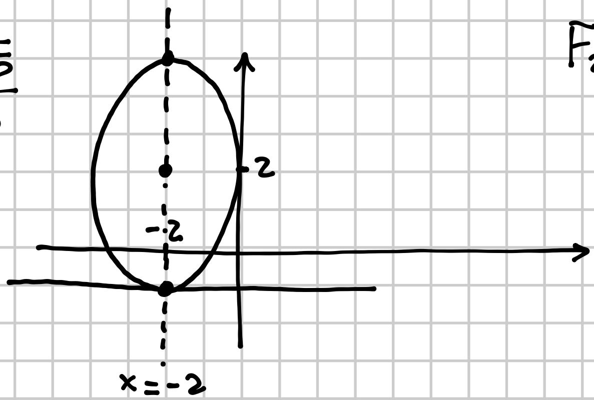
$b = 3$ FUOCHI SONO SULL'ASSE VERTICALE $x = -2$

$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$

$F_1(-2, 2 - \sqrt{5})$

$F_2(-2, 2 + \sqrt{5})$

$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$



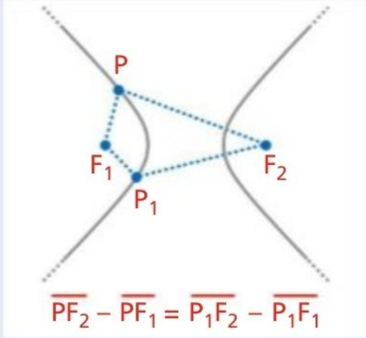
La tangente nel punto di ascissa -2 e ordinata minore (cioè il vertice $B_1(-2, -1)$) è $y = -1$ (orizzontale)

IPERBOLE NEL PIANO CARTESIANO

DEFINIZIONE

Assegnati nel piano due punti, F_1 e F_2, si chiama **iperbole** il luogo geometrico dei punti P del piano che hanno costante la differenza delle distanze da F_1 e da F_2:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \textbf{costante}.$$



F_1 e F_2 sono i **fuochi** dell'iperbole.

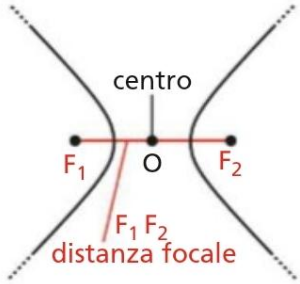
Il punto medio del segmento F_1F_2 è il **centro** dell'iperbole.

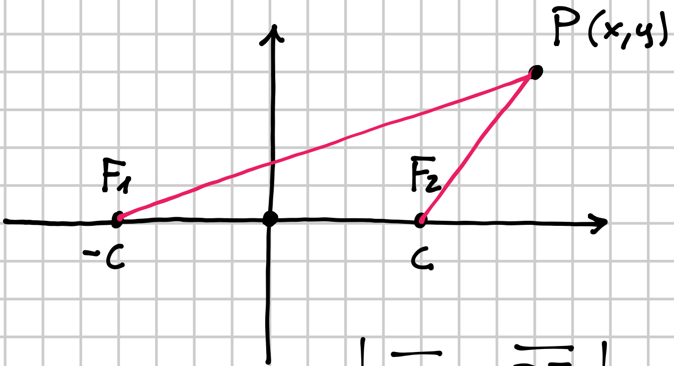
Indichiamo con:

$2c$ la distanza tra F_1 e F_2, detta **distanza focale**;

$2a$ la differenza costante fra le distanze di ognuno dei punti dell'iperbole dai fuochi.

a e c sono due valori costanti e positivi.





$F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$

$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$\overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$$

$$(x+c)^2+\cancel{y^2} = (x-c)^2+\cancel{y^2} + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2}+\cancel{c^2}+2cx = \cancel{x^2}+\cancel{c^2}-2cx + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\pm \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \cancel{4}a^2 - \cancel{4}cx$$

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$$

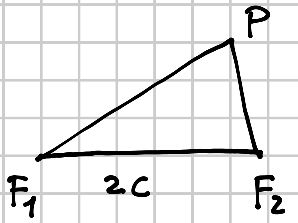
$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right] = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$$

$$a^2\left[x^2+c^2-2cx+y^2\right] = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 \cancel{-2a^2cx} + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 \cancel{-2a^2cx}$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$



$\underbrace{2a}_{\text{differenza dei lati } PF_1 \text{ e } PF_2 \text{ del triangolo}} < 2c \Rightarrow a < c \Rightarrow a^2 < c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 < 0$

CAMBIO SEGNI

$c^2 - a^2 > 0$

$\Downarrow$

$b^2 = c^2 - a^2$

$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$\downarrow$ DIVIDO PER a^2b^2

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

EQUAZIONE CANONICA DELL'IPERBOLE CON FUOCHI SULL'ASSE X

OSSERVAZIONE

Si dimostra che pur avendo elevato 2 volte al quadrato, non sono stati aggiunti punti alla curva, cioè che l'equazione trovata è equivalente a quella di partenza.

$a = 3$

$b = 4$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2}$$

a = SEMIASSE TRASVERSO

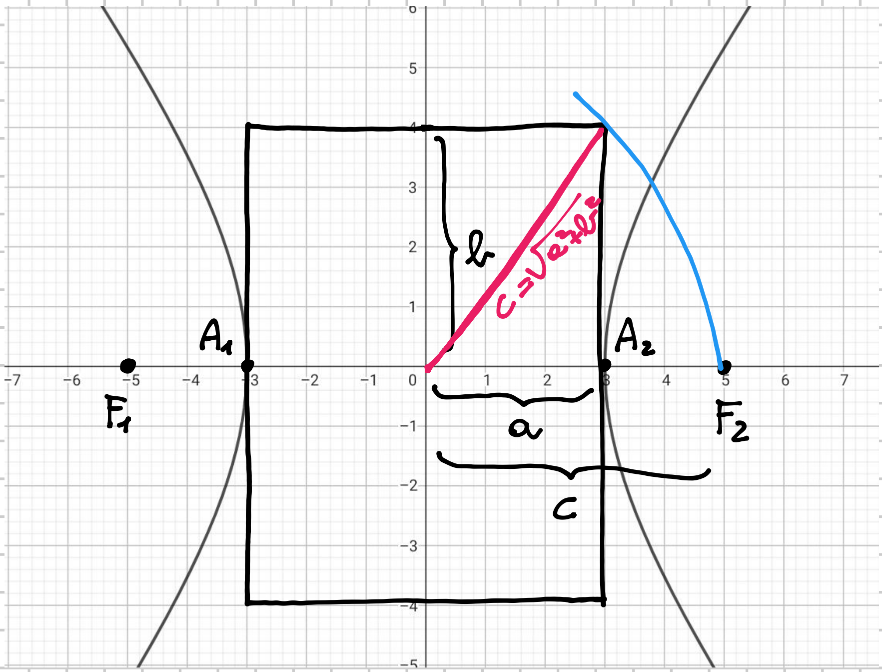
b = SEMIASSE NON TRASVERSO

$c = \sqrt{9+16} = 5$

$\left.\begin{array}{l} A_1(-3,0) \\ A_2(3,0) \end{array}\right]$ VERTICI

$F_1(-5,0)$

$F_2(5,0)$

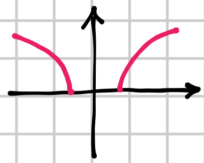


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

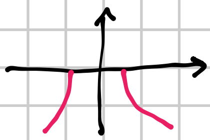
$$\Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}$$

+ parte sopra



− parte sotto



Considero la parte sopra

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} \qquad y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Quando $|x|$ è "grande"

$x^2 - a^2 \simeq x^2$,

quindi se $|x|$ è "grande", la curva "assomiglia" a $y = \frac{b}{a}|x|$

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

$y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$

sono gli ASINTOTI DELL'IPERBOLE