17/1/2019

273 $2-2\sqrt{3}\,i$ $\left[4\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)\right]$

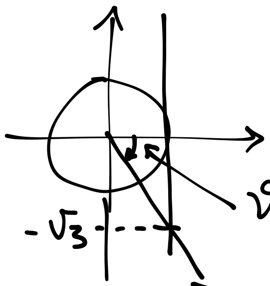
$\downarrow$

IN FORMA TRIGON.

$\rho = ?$ $\vartheta = ?$

$z = 2-2\sqrt{3}\,i$ $|z| = \sqrt{4+12} = 4 = \rho$ z è nel IV QUADR.

$\tan\vartheta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$



RIS. DEL LIBRO
$\left[\frac{5}{3}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{3}\right]$

$$z = 2-2\sqrt{3}\,i = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

ALTERNATIVA

$$z = 2-2\sqrt{3}\,i = 4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = 4\left(\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right) =$$

MODULO (DA TROVARE COME PRIMA)

$$= 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

PRODOTTO DI DUE NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

$z_1 = \rho_1 (\cos\vartheta_1 + i \sin\vartheta_1)$ $\qquad$ $z_2 = \rho_2 (\cos\vartheta_2 + i \sin\vartheta_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 (\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + i \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + i \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2 \left[(\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2) + i (\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2) \right] =$$

$$= \rho_1\rho_2 \left[\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) \right]$$

POTENZA

$$z = \rho (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

$$z^n = \rho^n (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)^n = \rho^n (\cos n\vartheta + i \sin n\vartheta)$$

FORMULA DI DE MOIVRE

OSSERVAZIONE

$$i = (0,1) = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$\rho = 1$ $\qquad$ $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

$$z = \rho (\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$$

$$z \cdot i = \rho \left(\cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Quindi moltiplicare un numero z per i significa ruotare il suo vettore posizione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario.

329 $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)\right]^3 =$ $[4+4\sqrt{3}\,i]$

$$= 2^3\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)^3 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{9}+i\sin\frac{3\pi}{9}\right) =$$

$$= 8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 8\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{4+4\sqrt{3}\,i}$$

349 $$\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\cdot\frac{2}{3}\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right)}{\cos\frac{7}{5}\pi-i\sin\frac{7}{5}\pi} =$$

$$= \frac{\left(\cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi\right)\right)}{\underbrace{\cos\frac{7}{5}\pi-i\sin\frac{7}{5}\pi}_{\cos\left(-\frac{7}{5}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{5}\pi\right)}} =$$

$$= \frac{2}{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi-\left(-\frac{7}{5}\pi\right)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi-\left(-\frac{7}{5}\pi\right)\right)\right] =$$

$$= 2\left[\cos\frac{10}{5}\pi+i\sin\frac{10}{5}\pi\right] = 2\left(\cos 2\pi+i\sin 2\pi\right) =$$

$$= 2\left(1+i\cdot 0\right) = 2$$

366 $(1-i)^6 \cdot (2+2i)^4$ $[-512i]$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

modulo $=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$2+2i=2(1+i)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1-i)^6(2+2i)^4=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6\cdot\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{6\pi}{4}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^4\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=2^9\left(\cos\left(\frac{-6\pi+4\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-6\pi+4\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=2^9\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2^9(-i)=-512i$$

RADICI n-ESIME DELL'UNITÀ

Si chiama <u>RADICE n-ESIMA DELL'UNITÀ</u> (con $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$) ogni numero complesso z tale che $z^n = 1$.

<u>ESEMPIO</u>

1) Trovare le radici quadrate ($n=2$) dell'unità

$$z^2 = 1$$ ← le radici quadrate sono le soluzioni di questa equazione

$$\left.\begin{array}{l} z_0 = -1 \\ z_1 = 1 \end{array}\right]$$ sono le 2 radici quadrate dell'unità

2) Troviamo le radici cubiche ($n=3$) dell'unità

$$z^3 = 1 \qquad z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$\Downarrow$$

$$\rho^3(\cos 3\vartheta + i \sin 3\vartheta) = 1$$

$$\Downarrow$$

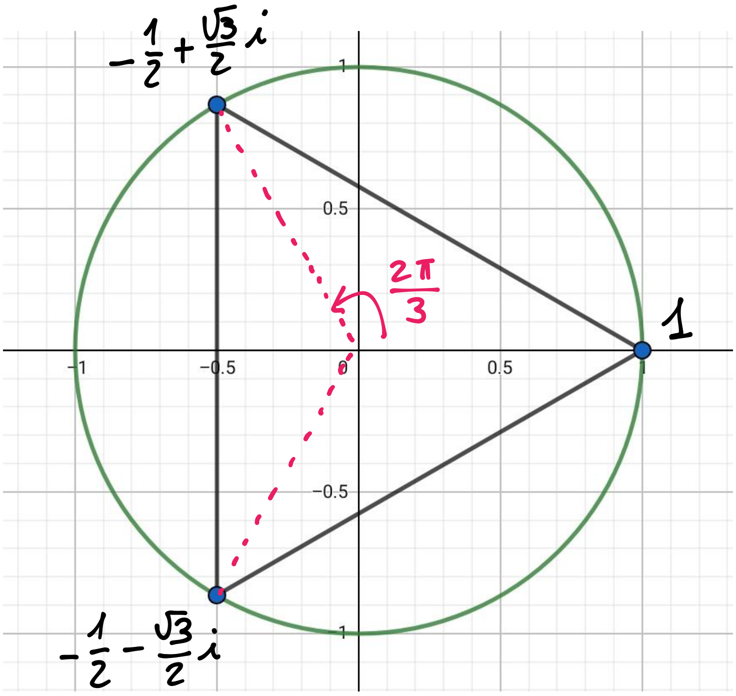
$$0 \leq \vartheta < 2\pi \qquad \begin{cases} \rho = 1 \\ \cos 3\vartheta = 1 \\ \sin 3\vartheta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} 3\vartheta = 0 \rightarrow \vartheta = 0 \\ 3\vartheta = 2\pi \rightarrow \vartheta = \frac{2}{3}\pi \\ 3\vartheta = 4\pi \rightarrow \vartheta = \frac{4}{3}\pi \end{array}$$

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = 1 \cdot \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = 1 \cdot \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'equazione $z^n = 1$ ha n soluzioni, vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di centro $O(0,0)$ e raggio 1.

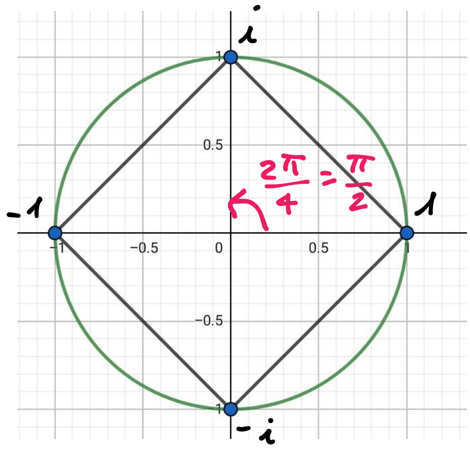


CASO $n=3$

In generale le radici n-esime dell'unità si trovano con la formula

$$\boxed{z_K = \cos\frac{2K\pi}{n} + i\sin\frac{2K\pi}{n} \qquad K=0,1,2,\dots,n-1}$$

3) RADICI 4° DELL'UNITÀ $(n=4)$



$z_0 = 1$

$z_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$z_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$z_3 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$