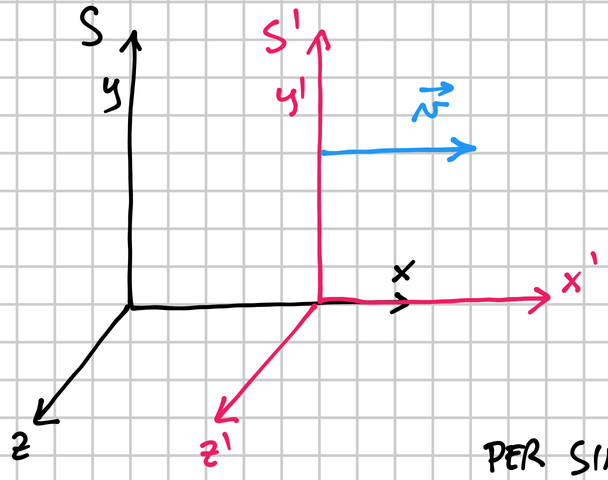
TRASFORMAZIONI DI LORENTZ INVERSE



$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

PER SIMMETRIA
(sostituisco v con $-v$)

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

MODULO

COMPITO: invertire algebricamente
$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

SOLUZIONE

$$x' = \gamma x - v\gamma t \qquad \gamma x = x' + v\gamma t \qquad x = \frac{x'}{\gamma} + vt$$

SOSTITUISCO IN t'

$$t' = \gamma\left[t - \frac{\beta}{c}\left(\frac{x'}{\gamma} + vt\right)\right] = \gamma t - \frac{\beta}{c}x' - \frac{\beta v \gamma}{c}t =$$

$$= \gamma t - \frac{\beta}{c}x' - \beta^2\gamma t$$

$$\Rightarrow \gamma t - \beta^2 \gamma t = t' + \frac{\beta}{c}x' \qquad \gamma t(1-\beta^2) = t' + \frac{\beta}{c}x'$$

OSSERVO CHE

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\cancel{\gamma} t \cdot \frac{1}{\gamma^{\cancel{2}}} = t' + \frac{\beta}{c}x'$$

$$\boxed{t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right)}$$

$$x = \frac{x'}{\gamma} + vt = \frac{x'}{\gamma} + v\gamma t' + \frac{v\beta}{c}\gamma x' =$$

β^2

$$= \gamma x'\left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2\right) + v\gamma t' = \gamma x'(1 - \cancel{\beta^2} + \cancel{\beta^2}) + v\gamma t' = \boxed{\gamma(x' + vt')}$$

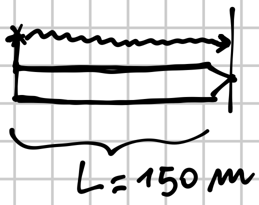
8 ★★★

Un razzo viaggia a velocità $v = 0,60\ c$ e passa accanto a una stazione spaziale nella quale un dispositivo rileva il suo passaggio. Appena la coda passa davanti al dispositivo, questo emette un lampo di luce. La lunghezza del razzo, nel sistema di riferimento a esso solidale, è $L = 150$ m.

- Dopo quanto tempo la luce raggiunge la prua del razzo, nel sistema di riferimento solidale con il razzo?
- Dopo quanto tempo la luce raggiunge la prua del razzo, nel sistema di riferimento solidale con la stazione spaziale?
- A che distanza dalla stazione il raggio luminoso raggiunge la prua del razzo, nel sistema di riferimento solidale con la stazione spaziale?

[$5,0 \times 10^{-7}$ s; $1,0 \times 10^{-6}$ s; $3,0 \times 10^{2}$ m]

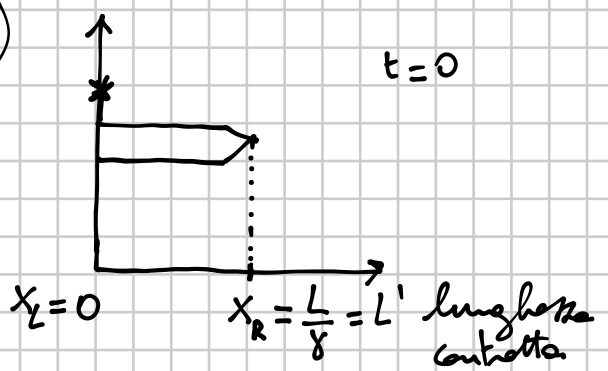
1)

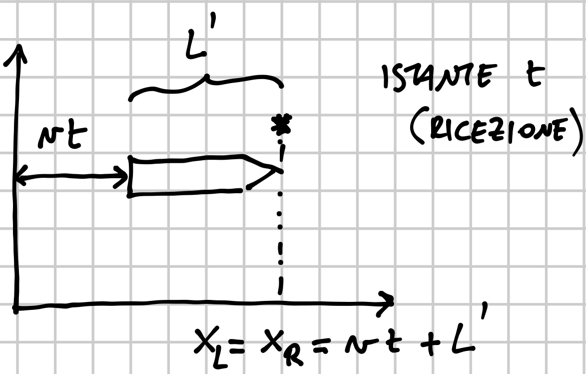


Nel S.R. del razzo la luce viaggia a velocità c. Il tempo impiegato è quello necessario alla luce per percorrere la lunghezza L (lunghezza propria)

$$\Delta t = \frac{L}{c} = \frac{150\ m}{3,0 \times 10^{8}\ \frac{m}{s}} = \boxed{5,0 \times 10^{-7}\ s}$$

2)





x_R = posizione prua del razzo

x_L = posizione del lampo di luce

$$\begin{cases} x_L = ct \\ x_R = vt + L' \end{cases}$$

Per trovare l'istante t di ricezione in cui $x_L = x_R \Rightarrow ct = vt + L'$

$$ct = L' + vt \implies ct = \frac{L}{\gamma} + vt$$

$$(c-v)t = \frac{L}{\gamma} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}60)^2}}$$

$$t = \frac{L}{\gamma(c-v)} \qquad c - v = 0{,}40\,c$$

$$\Downarrow$$

$$t = \frac{(150\ m)\sqrt{1-(0{,}60)^2}}{(0{,}40)(3{,}0\times 10^8\ \frac{m}{s})} = 100\times 10^{-8}\ s = \boxed{1{,}0\times 10^{-6}\ s}$$

3) $x_R = L' + vt = \frac{L}{\gamma} + vt =$

$\uparrow$
POSIZIONE PRUA
NEL S.R. S (STAZIONE)
ALL'ISTANTE DELLA RICEZIONE

$$= (150\ m)\sqrt{1-(0{,}60)^2} +$$
$$+ (0{,}60)(3{,}0\times 10^8\ \frac{m}{s})(1{,}0\times 10^{-6}\ s) =$$

$$= 120\ m + 180\ m = 300\ m$$

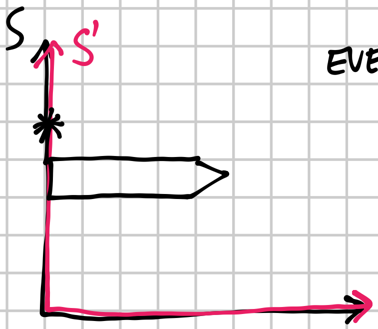
$$= \boxed{3{,}0\times 10^2\ m}$$

$=$

$$x_L = x_R = c\cdot t = (3{,}0\times 10^8\ \frac{m}{s})(1{,}0\times 10^{-6}\ s) = \boxed{3{,}0\times 10^2\ m}$$

CON LE TRASF. DI LORENTZ

ISTANTE $t = t' = 0$

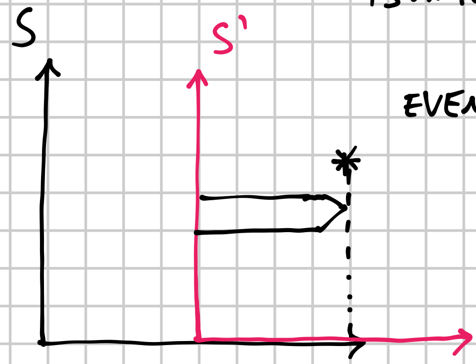


EVENTO = partenza lampo di luce

S $t = 0$ $x = 0$

S' $t' = 0$ $x' = 0$

ISTANTE t'



EVENTO = ricezione lampo di luce

S $t = ?$ $x = ?$

S' $t' = 5{,}0 \times 10^{-7}\,s$ $x' = 150\,m$

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + v t') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c} x'\right) \end{cases}$$

$v = 0{,}60\,c$ $\beta = 0{,}60$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}60)^2}}$$

TRASF. DI LORENTZ INVERSE

$$x = \frac{150 + 0{,}60\,(3{,}0 \times 10^8)(5{,}0 \times 10^{-7})}{\sqrt{1-(0{,}60)^2}}\,m = 300\,m = \boxed{3{,}0 \times 10^2\,m}$$

$$t = \frac{5{,}0 \times 10^{-7} + \frac{0{,}60}{3{,}0 \times 10^8}\,150}{\sqrt{1-(0{,}60)^2}}\,s = \frac{\left(5{,}0 + \frac{0{,}60}{\cancel{30}} \cdot \overset{5}{\cancel{150}}\right) \times 10^{-7}}{\sqrt{1-(0{,}60)^2}}\,s$$

$$= \frac{8{,}0 \times 10^{-7}}{\sqrt{1-(0{,}60)^2}}\,s = 10 \times 10^{-7}\,s = \boxed{1{,}0 \times 10^{-6}\,s}$$