21/5/2021

558 **MOTO RETTILINEO** In un moto su una retta orientata, la velocità in m/s di un punto materiale è data dalla legge $v(t) = t \cdot e^{-t}$. Trova la legge oraria del moto, sapendo che all'istante iniziale $t_0 = 0$ s il punto ha ascissa 1 m.

$[s(t) = 2 - (t+1) \cdot e^{-t}]$

$s(t_0) = s(0) = 1$ CONDIZ. INIZIALE

$v(t) = t e^{-t}$

$$s(t) - s(0) = \int_0^t v(t')\,dt'$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t t' \cdot e^{-t'}\,dt' + 1 = \int_0^t x e^{-x}\,dx + 1 =$$

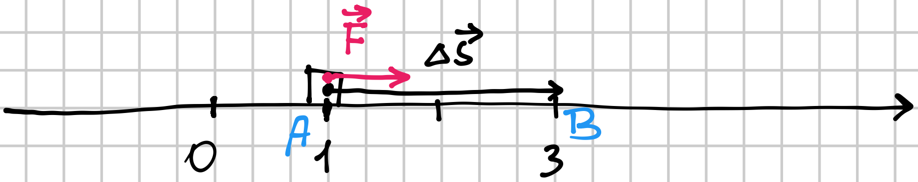
$$= \left[x(-e^{-x})\right]_0^t - \int_0^t (-e^{-x})\,dx + 1 =$$

$$= t(-e^{-t}) - \cancel{0 \cdot (-e^{-0})} - \left[e^{-x}\right]_0^t + 1 =$$

$$= -te^{-t} - (e^{-t} - 1) + 1 = -te^{-t} - e^{-t} + 1 + 1 =$$

$$= \boxed{-e^{-t}(t+1) + 2}$$

563 **LAVORO** Su un punto materiale P che si muove lungo una retta orientata, su cui è stato fissato un sistema di riferimento, agisce nella direzione del moto una forza F, misurata in newton, che è legata all'ascissa di P, misurata in m, dalla relazione $F(x) = kx\sqrt{x^2+1}$, con $k = 1$ kg/(m · s²). Determina il lavoro compiuto su P dalla forza F quando P si sposta dalla posizione $x_1 = 1{,}0$ m alla posizione $x_2 = 3{,}0$ m. [9,6 J]



$$dW = \vec{F}(x) \cdot d\vec{s} = F(x) \cdot ds$$

perché $\vec{F}$ e $d\vec{s}$ hanno stessa direzione e stesso verso

$ds = dx$

$$dW = \int_A^B \vec{F}(x) \cdot d\vec{s} = \int_1^3 kx\sqrt{x^2+1}\,dx =$$

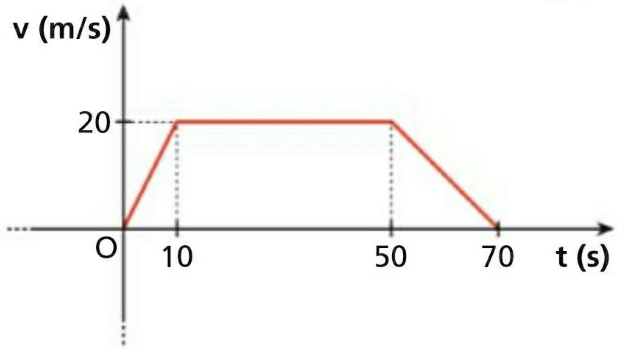
$$= \int_1^3 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 2x \cdot (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3}\left[10^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}\right] = 9{,}598\ldots \text{ J} \simeq \boxed{9{,}6 \text{ J}}$$

552 **MOTO RETTILINEO** Nel grafico è rappresentata la velocità istantanea di un'automobile che si muove su una strada rettilinea. Calcola la distanza percorsa dall'auto nell'intervallo $t = 0$ s e $t = 70$ s, senza determinare l'espressione analitica di $v(t)$.

[1,1 km]



$$\Delta s = s(70) - s(0) = \int_0^{70} v(t)\,dt = \text{AREA DEL TRAPEZIO} =$$

$$= [70 + (50-10)] \cdot \cancel{20}^{10} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 1100\ m = \boxed{1{,}1\ km}$$

554 **MOTO ARMONICO** Una pallina, collegata a una molla, oscilla di moto armonico con velocità $v(t) = 2 \sin 4t$, dove v è misurata in m/s e t in s. Determina la posizione e l'accelerazione in funzione del tempo t, misurato in s, sapendo che nell'istante iniziale $s_0 = 2$ m. Rappresenta graficamente le tre leggi $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ durante un'oscillazione completa.

$$\left[s(t) = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{5}{2};\ a(t) = 8\cos 4t\right]$$

$$s(t) = \int_0^t 2 \sin 4t'\,dt' + s_0 = \frac{1}{2}\int_0^t 4 \sin 4t'\,dt' + 2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos 4t'\right]_0^t + 2 = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{1}{2} + 2 = \boxed{-\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{5}{2}}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2 \sin 4t) = 2\cos 4t \cdot 4 = \boxed{8\cos 4t}$$

556 **MOTO RETTILINEO** Un punto materiale P si muove su un tratto rettilineo con accelerazione $a = a(t) = 6t + 2$, dove a è misurata in m/s^2 e t in secondi. Calcola la distanza percorsa tra gli istanti $t_1 = 2{,}0$ s e $t_2 = 8{,}0$ s e la velocità al tempo t_2, sapendo che al tempo $t_0 = 1{,}0$ s la posizione del punto materiale è $s_0 = 1{,}0$ m e la sua velocità è $v_3 = 1{,}0$ m/s.

$[s = 5{,}4 \cdot 10^2$ m; $v(t_2) = 2{,}0 \cdot 10^2$ m/s$]$

$s(1) = 1$

$v(1) = 1$

$a(t) = 6t + 2$

$v(1) = 1 \qquad v(t) = \int_1^t (6t' + 2)\,dt' + 1 =$

$= \left[3t'^2 + 2t'\right]_1^t + 1 = 3t^2 + 2t - 3 - 2 + 1 =$

$= 3t^2 + 2t - 4$

$v(8) = 3 \cdot 64 + 16 - 4 = 204 \simeq \boxed{2{,}0 \times 10^2 \ \frac{m}{s}}$

distanza percorsa $= \int_2^8 v(t)\,dt = \int_2^8 \left[3t^2 + 2t - 4\right] dt =$

$= \left[t^3 + t^2 - 4t\right]_2^8 = 8^3 + 8^2 - 32 - \cancel{2^3} - 2^2 + \cancel{8} =$

$= 540 \simeq \boxed{5{,}4 \times 10^2 \ m}$

557 **MOTO RETTILINEO** Un carrello inizia a muoversi, all'istante $t = 0$ s, su un binario rettilineo con accelerazione che varia nel tempo secondo la legge $a(t) = (2 - t)e^t$, dove a è misurata in m/s^2 e t in s. In quale istante è massima la velocità? Che distanza ha percorso fino a quel momento?

[$t = 2{,}0$ s; $s(2{,}0) = 4{,}8$ m]

$s(0) = 0$

$v(0) = 0$

$$a(t) = (2-t)e^t$$

$$v(t) = \int_0^t (2-x)e^x\,dx + \overbrace{v(0)}^{0} =$$

$$= \left[(2-x)e^x\right]_0^t + \int_0^t e^x\,dx =$$

$$= (2-t)e^t - 2 + e^t - 1 =$$

$$= (3-t)e^t - 3$$

$$s(t) = \int_0^t \left[(3-x)e^x - 3\right]dx + \overbrace{s(0)}^{=0} =$$

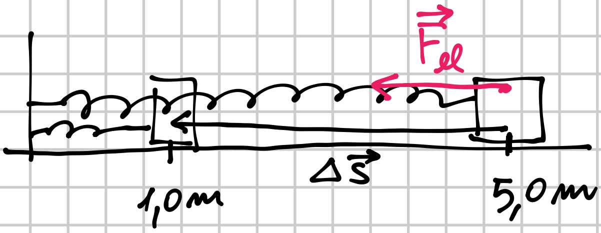
$$= \int_0^t (3-x)e^x - 3\int_0^t dx = \left[(3-x)e^x\right]_0^t + \int_0^t e^x\,dx - 3t =$$

$$= (3-t)e^t - 3 + e^t - 1 - 3t = (4-t)e^t - 3t - 4$$

1) $a = \dfrac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow t = 2$ (studiando il segno si vede che la vel. è max in $t = 2{,}0$ s)

2) $s(2) = (4-2)e^2 - 6 - 4 = 2e^2 - 10 = 4{,}778\ldots$ m $\simeq \boxed{4{,}8 \text{ m}}$

562 **LAVORO DI UNA FORZA ELASTICA** Un punto materiale si muove su una retta, su cui è stato fissato un sistema di riferimento, sotto l'azione di una forza elastica F, misurata in newton, la cui intensità è legata all'ascissa del punto, misurata in m, dalla legge $F(x) = -10x$. Determina il lavoro L compiuto dalla forza quando il punto materiale si sposta dalla posizione $x_0 = 5{,}0$ m alla posizione $x_1 = 1{,}0$ m. [$1{,}2 \cdot 10^2$ J]



$$W = \int_5^1 (-10x)\cdot dx = \int_1^5 10x\, dx = 10\int_1^5 x\, dx = 10\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5 =$$

$$= 5\left[x^2\right]_1^5 = 5(25-1) = 5\cdot 24 = 120 \simeq \boxed{1{,}2\times 10^2\ \text{J}}$$