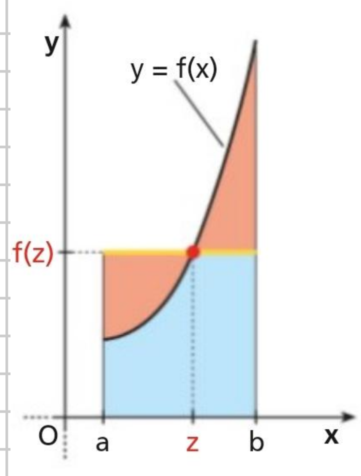
# TEOREMA DELLA MEDIA

**TEOREMA**

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a; b]$, esiste almeno un punto $z$ dell'intervallo tale che:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(z), \qquad \text{con } z \in [a; b].$$

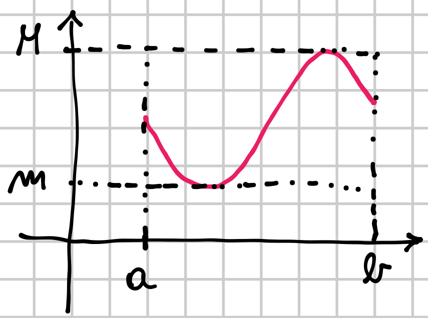



Trovo una funzione costante (che è $f(z)$) che ha lo stesso integrale su $[a,b]$ di $f$

## DIMOSTRAZIONE

$f$ CONTINUA in $[a,b]$ $\Rightarrow$ Per il TH. DI WEIERSTRASS $f$ ammette MASSIMO E MINIMO. I valori massimo e minimo sono: $m$ = VALORE MINIMO

$M$ = VALORE MASSIMO




$\forall x \in [a,b] \qquad m \le f(x) \le M$

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

TH. VALORI INTERMEDI $\Rightarrow$ $f$ CONTINUA assume tutti i valori tra $m$ e $M$

$\exists\, z \in [a,b]$ tale che $f(z) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \Rightarrow f(z)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$ CVD

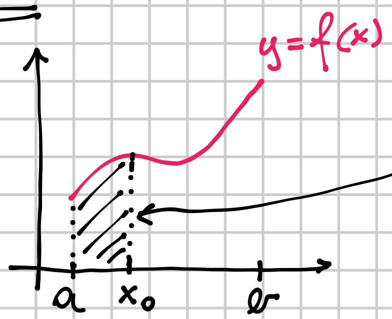
## LA FUNZIONE INTEGRALE

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

la funzione integrale di $f$ è:

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

**ESEMPIO**




$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

In particolare $\quad F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

**TEOREMA**

1° **Teorema fondamentale del calcolo integrale**

Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a; b]$, allora esiste la derivata della sua funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

per ogni punto $x$ dell'intervallo $[a; b]$ ed è uguale a $f(x)$, cioè:

$$F'(x) = f(x),$$

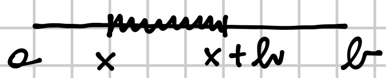
ovvero $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

## DIMOSTRAZIONE

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\int_a^{x} f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = (*)$$

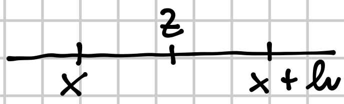



Sto considerando l'integrale della funzione $f$ ristretta all'intervallo $[x, x+h]$.
Su questo intervallo applico il TH. DELLA MEDIA e trovo $z \in [x, x+h]$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(z) \cdot h$$

$$(*) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z) \cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} f(z) = f(x)$$

se $h \to 0$, $z \to x$ perché $z \in [x, x+h]$




(se $h \to 0$, $x+h \to x$ e dunque $z \to x$)

Dato che $f$ è continua, $f(z) \to f(x)$ C.V.D.

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una PRIMITIVA di $f$

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + c}$$

FORMULA CHE LEGA L'INTEGRALE INDEFINITO CON L'INTEGRALE DEFINITO

Sia ora $\varphi$ una generica primitiva di $f$. Quindi possiamo scrivere

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$$

$$\varphi(a) = \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{0} + c = c \Rightarrow \qquad \varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \varphi(a)$$

$$\varphi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + \varphi(a) \Rightarrow \qquad \boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a)}$$

$\varphi$ è una qualsiasi primitiva di $f$ $(\varphi' = f)$

Si può anche scrivere

$$\boxed{\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)}$$

2° TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

**OSSERVAZIONE (MODI DI SCRIVERE)**

$$f(b) - f(a) = \left[f(x)\right]_a^b \qquad = f(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= f(x)\Big|_a^b$$

**87** $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ $\left[\ln \frac{e+1}{2}\right]$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln\left(e^x+1\right) + c$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln\left(e^x+1\right)\Big|_0^1 = \ln\left(e^1+1\right) - \ln\left(e^0+1\right) =$$

$$= \ln(e+1) - \ln 2 =$$

$$= \ln \frac{e+1}{2}$$

**127** $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{16}\right]$

$$\int \frac{1}{\underset{\uparrow\,\Delta<0}{4x^2+4x+5}}\,dx = \int \frac{1}{\underbrace{4x^2+4x+1}_{(2x+1)^2}+4}\,dx = \int \frac{1}{(2x+1)^2+4}\,dx =$$

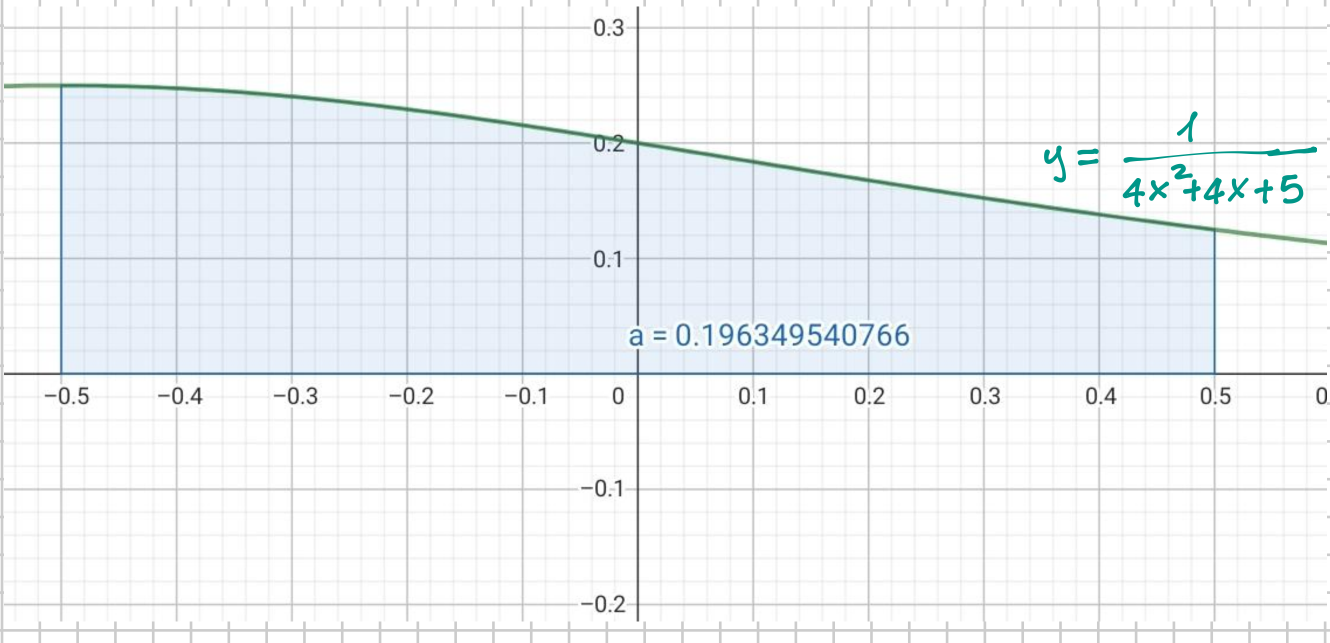
$$= \int \frac{1}{4\left[\frac{(2x+1)^2}{4}+1\right]}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\arctan\left(x+\frac{1}{2}\right)+c$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{4}\arctan\left(x+\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\arctan\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\arctan(1) - \frac{1}{4}\arctan(0) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{16}}$$



**82** Considera la funzione $f(x) = \ln x + \dfrac{a(x-1)}{x+1}$, dove $a$ è un parametro reale non nullo.

**a.** Determina il valore di $a$ in modo che la funzione abbia un punto stazionario di ascissa $x = 1$.

**b.** Per il valore trovato di $a$, determina le coordinate degli eventuali punti del grafico di $f(x)$ in cui la tangente è parallela alla retta di equazione $2x - 9y = 0$.

**c.** Studia la monotonia della funzione trovata e deduci che $f(x) > 0$ per $x > 1$.

**d.** Rappresenta i grafici delle funzioni $h(x) = \ln x$ e $g(x) = 2\dfrac{x-1}{x+1}$, dopo aver verificato che risultano tangenti per $x = 1$.

$\left[\text{a) } a = -2; \text{ b) } \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3} - \ln 2\right)\right]$

a) $$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a(x+1) - a(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{\cancel{ax} + a - \cancel{ax} + a}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{2a}{(x+1)^2}$$

$$f'(1) = 0 \implies \frac{1}{1} + \frac{2a}{(1+1)^2} = 0 \qquad 1 + \frac{\overset{1}{\cancel{2}}a}{\cancel{4}_2} = 0 \qquad \boxed{a = -2}$$

b) $$f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \qquad D = (0, +\infty)$$

retta $2x - 9y = 0$

$\Downarrow$

$y = \underbrace{\frac{2}{9}}_{\text{coeff. ang.}} x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{9} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{9(x+1)^2 - 36x}{\cancel{9x(x+1)^2}} = \frac{2x(x+1)^2}{\cancel{9x(x+1)^2}}$$

$$9(x^2 + 2x + 1) - 36x = 2x(x^2 + 2x + 1)$$

$$9x^2 + 18x + 9 - 36x = 2x^3 + 4x^2 + 2x$$

$$2x^3 - 5x^2 + 20x - 9 = 0$$

$\vdots$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 20\left(\frac{1}{2}\right) - 9 = 0$$

$\pm 1$, $\pm 3$, $\pm 9$ | DIVISORI T. NOTO

$\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{3}{2}$, $\pm \frac{9}{2}$ | DIVISORI T. NOTO FRATTO DIVISORI DEL COEFF. DI GRADO MAX

$2x^3 - 5x^2 + 20x - 9 = 0$

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & -5 & 20 & -9 \\
\frac{1}{2} & & 1 & -2 & 9 \\
\hline
 & 2 & -4 & 18 & 0
\end{array}
$$

$$(2x^2 - 4x + 18)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2(x^2 - 2x + 9)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \underbrace{(x^2 - 2x + 9)}_{\Delta < 0}(2x - 1)$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ è l'unica soluzione

L'unico punto in cui la tangente è parallela alla retta $y = \frac{2}{9}x$ è $x = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} - \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}+1} = \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \ln\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

Il punto del grafico è $\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)$

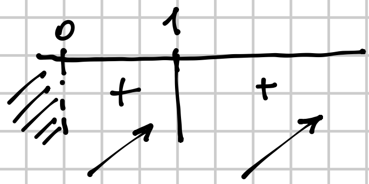
c) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2}$ $\quad x > 0$

Studiare la monotonia significa studiare la crescenza/decrescenza

$f'(x) > 0 \qquad \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2 - 4x}{\cancel{x(x+1)^2}} > 0 \\ \text{perché } x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 1 + 2x - 4x > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \qquad (0,1) \cup (1, +\infty)$$



La funzione è strett. crescente in $(0,1)$ e strett. crescente in $(1,+\infty)$, ma NON è strett. crescente nell'unione !!!

1 si può includere in entrambi

In $x=1$ si ha $f'(1)=0$ e $f(1)=0$

$f$ è strett. crescente in $[1,+\infty)$

$$x>1 \Rightarrow f(x)>f(1)=0$$

d) I grafici $y=h(x)$ e $y=g(x)$ risultano tangenti per $x=1$ se $h(1)=g(1)$ (si intersecano per $x=1$) e se $h'(1)=g'(1)$ (hanno la stessa derivata in $x=1$, dunque la stessa retta tangente)

$h(x)=\ln(x) \qquad h(1)=\ln 1=0$

$g(x)=2\frac{x-1}{x+1} \qquad g(1)=2\frac{1-1}{1+1}=0$

$h'(x)=\frac{1}{x} \qquad h'(1)=1$

$$g'(x)=2\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}=2\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2} \qquad g'(1)=\frac{4}{(1+1)^2}=1$$

La tangente comune nel punto $(1,0)$ è

$$\boxed{y=x-1}$$

Per rappresentare $g(x) = 2\,\dfrac{x-1}{x+1}$ si osserva che $g$ è una

FUNZIONE OMOGRAFICA $\quad y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

(IPERBOLE EQUILATERA)

$y = 2$ ASINTOTO ORIZZONTALE

$\left( \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 2 \right)$

$x = -1$ ASINTOTO VERTICALE

$$\lim_{x \to -1^-} 2\,\frac{x-1}{x+1} = 2\,\frac{-1-1}{0^-} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} 2\,\frac{x-1}{x+1} = 2\,\frac{-1-1}{0^+} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$