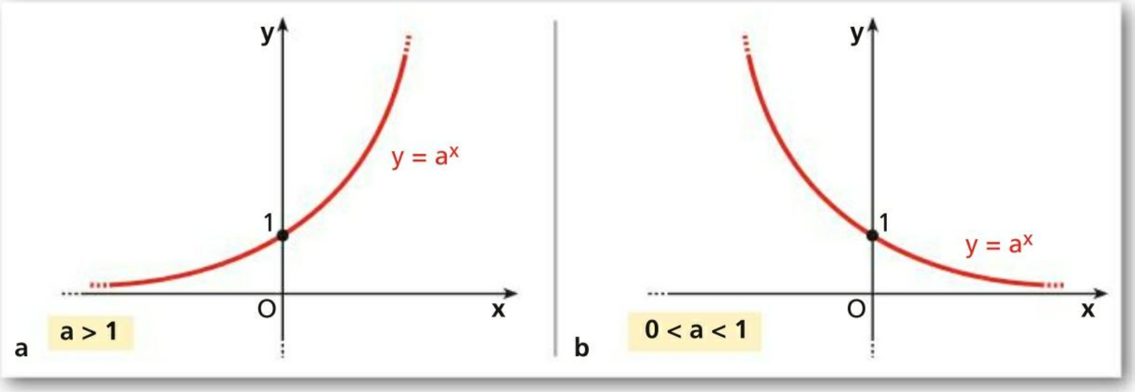
9/2/2018

LA FUNZIONE ESPONENZIALE



Dai grafici notiamo **proprietà comuni nei due casi**:

- il dominio è $\mathbb{R}$;
- il grafico non interseca l'asse x e si trova interamente nei quadranti con ordinata positiva, cioè il codominio è $\mathbb{R}^+$;
- il grafico interseca l'asse y in $(0;1)$;
- la funzione è biunivoca.

Se $a > 1$:

- la funzione è crescente;
- per esponenti negativi decrescenti, le potenze si avvicinano sempre più a 0.

Se $0 < a < 1$:

- la funzione è decrescente;
- per esponenti positivi crescenti, le potenze si avvicinano sempre più a 0.

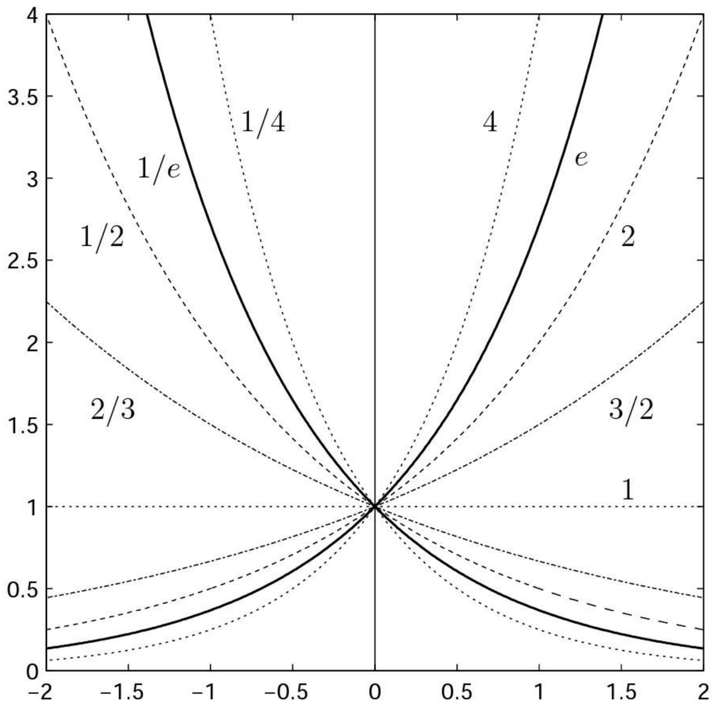


Figura 1: esponenziali in varie basi.

DOMANDA: perché consideriamo solo potenze con base $a > 0$?

D'altra parte sappiamo, ad esempio, che $(-2)^4 = +16$

$(-2)^3 = -8$

$\vdots$

Finché ci limitiamo a esponenti interi, le potenze con base negativa sono gestibili.

↳ problemi sorgono con le potenze a esponente razionale.

<u>ES.</u> $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ovviamente

$$(-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2} > 0$$

DOVREBBERO ESSERE UGUALI

$$(-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} < 0$$

→ CONTRADDIZIONE!

Escludiamo le basi negative per risolvere

Escludiamo anche 0, perché $0^{-2} = \frac{1}{0^2} \dots$

Quindi solo basi $\boxed{a > 0}$

IL NUMERO e

e = COSTANTE DI NEPERO $\rightsquigarrow$ BASE PRIVILEGIATA

Funzione esponenziale con base e

In matematica è spesso utilizzata, per le sue particolari proprietà che studieremo in seguito, la funzione esponenziale

$$y = e^x,$$

dove e è un particolare numero irrazionale, il numero di Nepero:

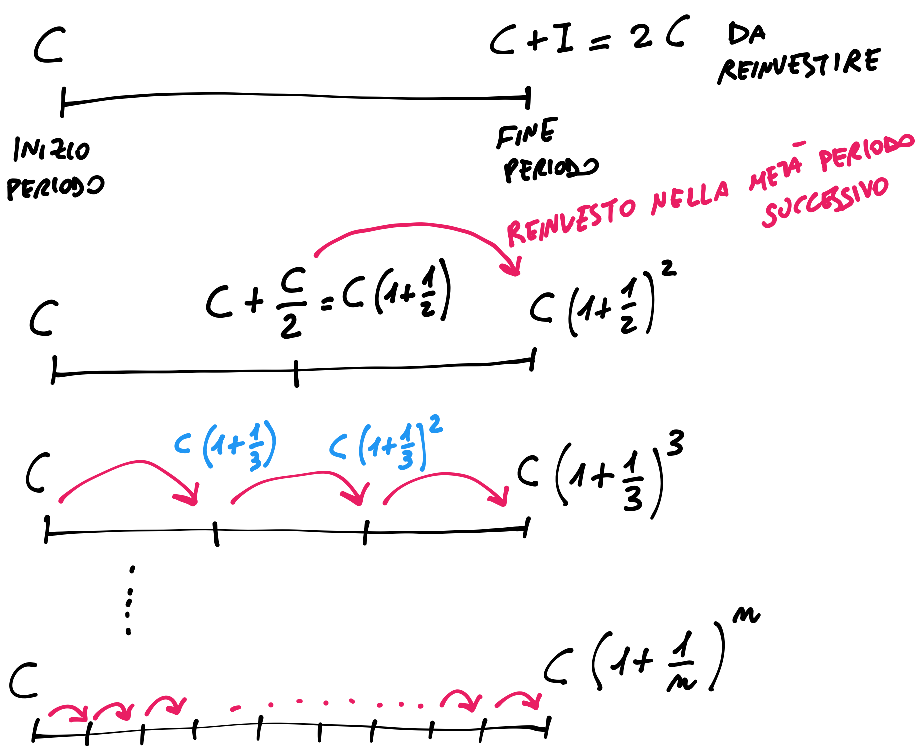
$$e = 2{,}71828182845\ldots$$

Nelle calcolatrici scientifiche trovi spesso un tasto che fornisce il valore di e o anche un tasto che, dato x, fornisce il valore di e^x.

ESEMPIO

C = capitale

I = interesse (tasso 100%)



n SOTTOPERIODI

Quando n diventa grandissimo, sempre più grande ....

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ si avvicina sempre più al numero e

In simboli si scrive $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

LIMITE PER n CHE TENDE A ∞ DI $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ È UGUALE A e

$$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,71692\ldots.$$

$$\left(1+\frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 2,718280\ldots.$$

$$\left(1+\frac{1}{10^9}\right)^{10^9} = 2,718281\ldots.$$

questa successione approssima per difetto ("dal basso") il numero e. L'approssimazione migliora prendendo n sempre più grande.

TASSO 100%

CAPITALE INIZIALE: C

ALLA FINE DEL PERIODO: $C \cdot e$

CAPITALIZZAZIONE CONTINUA O "ISTANTANEA"

L'interesse viene istantaneamente aggiunto al capitale e genera subito altro interesse.

TASSO r

$0 < r \leq 1$

CAPITALE IN.: C

ALLA FINE: $C \cdot e^{r}$

EQUAZIONI ESPONENZIALI

pg. 590 n° 136

$$3^{x+1} = 27$$ scrivo 27 come potenza di base 3

$$3^{x+1} = 3^3$$

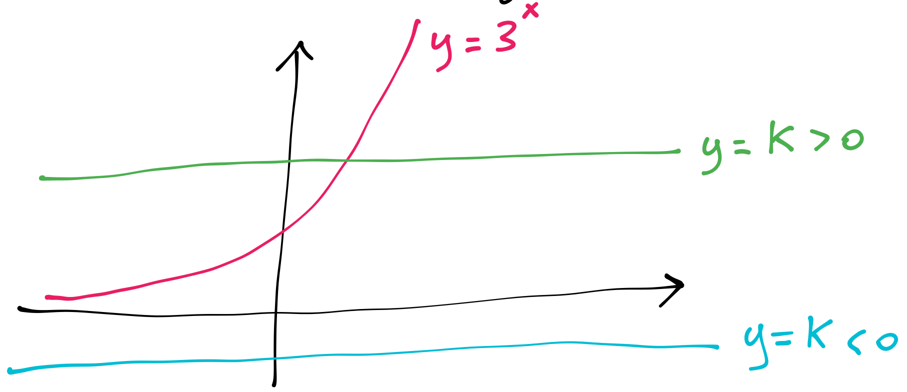
uguaglio gli esponenti (perché posso farlo?)

$$x+1 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$3^x = K$ ← numero

⇝ la vedo come intersezione delle 2 curve che sono i grafici delle funzioni $y = 3^x$

$y = K$



Siccome $y = 3^x$ è iniettiva, la retta $y = K$ la interseca al massimo in un punto!

$K > 0 \Rightarrow$ 1 SOLUZIONE

$K \leq 0 \Rightarrow$ NESSUNA SOLUZIONE

INOLTRE:

$f: A \to B$ è iniettiva se

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

$$3^{x+1} = 3^3 \Longrightarrow x+1 = 3$$

$$f(x+1) = f(3)$$

Se fosse stato $\quad 3^x = -3 \quad$ IMPOSSIBILE perché $3^x > 0 \ \forall x$

Se fosse stato $\quad 3^x = 0 \quad$ IMPOSSIBILE

N 137

$$5^{2x} = \frac{1}{25}$$

$$5^{2x} = 5^{-2}$$

$$2x = -2$$

$$\boxed{x = -1}$$

$$\boxed{3^x = 5} \qquad x = \log_3 5$$

ANTICIPAZIONE (SPOILER)

LO TRATTEREMO A BREVE

Per il momento avremo sempre potenze riconducibili alla stessa base.

N 142 $2^x = 16\sqrt{2}$

$$2^x = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \qquad 2^x = 2^{4+\frac{1}{2}}$$

$$x = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

144 $3^x = \dfrac{9\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$

$$3^x = \frac{3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}}$$

$$3^x = 3^{2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$x = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8+2-1}{4} = \frac{9}{4}$$

155 $3 \cdot 4^x + \frac{7}{4} \cdot 4^x = 19\sqrt{2}$

PR. DISTRIBUTIVA

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$4^x\left(3 + \frac{7}{4}\right) = 19\sqrt{2}$$

$$4^x \frac{12+7}{4} = 19\sqrt{2} \qquad 4^x \cdot \frac{\cancel{19}}{4} = \cancel{19}\sqrt{2}$$

$$\frac{4^x}{4} = \sqrt{2} \qquad 4^x = 4\sqrt{2}$$

$$(2^2)^x$$

$$2^{2x} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \qquad 2^{2x} = 2^{2+\frac{1}{2}}$$

$$2x = 2 + \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = \frac{5}{4}}$$