26/2/2021

396 $y = x\sqrt{1-x^2}$

Trovare max, min, flessi

DOMINIO $\quad 1-x^2 \geq 0 \qquad x^2 \leq 1 \qquad -1 \leq x \leq 1$

$$D = [-1, 1]$$

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) =$$

$$= \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$-1, 1$ punti di non derivabilità (tangente verticale)

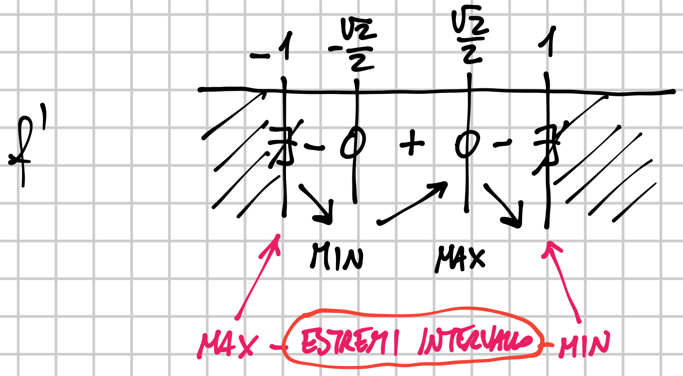
ZERI DI f'

$f'(x) = 0 \qquad \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow 1-2x^2 = 0 \qquad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

SEGNO DI f'

$f'(x) > 0 \qquad \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} > 0 \Rightarrow 1-2x^2 > 0 \qquad x^2 < \frac{1}{2}$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ p.to di min (stazionario)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ p.to di max (stazionario)

-1 p.to di max (estremo int.)

1 p.to di min (estremo int.)

$$f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

STUDIO LA DER. SECONDA f'' PER CONCAVITÀ E FLESSI

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}(-\cancel{2}x)(1-2x^2)}{1-x^2} =$$

$$= \frac{-4x(1-x^2) + x(1-2x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{-4x+4x^3+x-2x^3}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x^3-3x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

ZERI DI f''

$x(2x^2-3)=0 \qquad \boxed{x=0} \quad \vee \quad 2x^2-3=0$

$\downarrow$ CANDIDATO FLESSO

$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ N.A. (fuori da D)

SEGNO DI f''

$x(2x^2-3) > 0 \qquad x > 0$

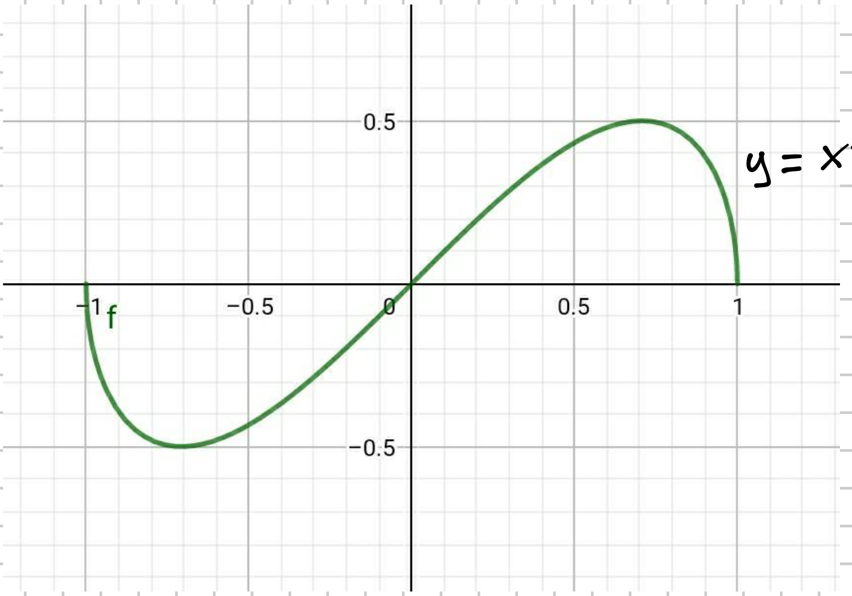
$2x^2-3>0 \qquad \underbrace{x<-\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad x>\sqrt{\frac{3}{2}}}$

$\Downarrow$

in $[-1,1]$ $\quad 2x^2-3$ è <0

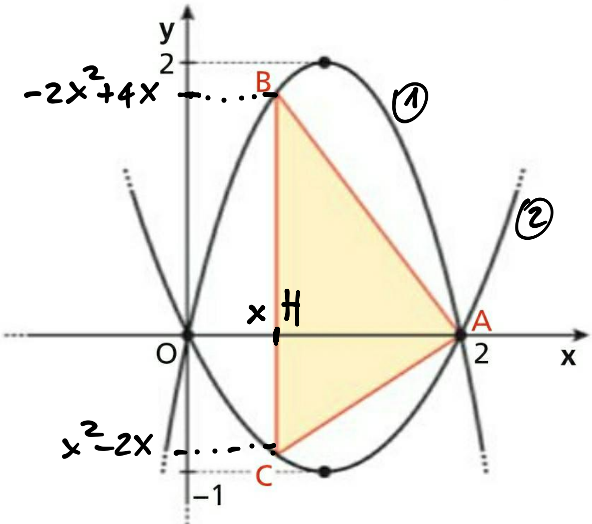
	-1		0		1
x		$-$	0	$+$	
$2x^2-3$		$-$		$-$	
f''		$+$	0	$-$	
		$\cup$	$\uparrow$ FLESSO	$\cap$	

0 è punto di flesso a tang. obliqua



$y = x\sqrt{1-x^2}$

426 **LEGGI IL GRAFICO** Determina le equazioni delle parabole rappresentate in figura e trova il triangolo ABC di area massima, inscritto nella regione da esse delimitata, che ha il lato BC parallelo all'asse y. $\left[C\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{9}\right)\right]$



$$y = ax^2 + bx$$

① $\begin{cases} -\dfrac{\Delta}{4a} = 2 \\ 0 = 4a + 2b \end{cases}$

$\begin{cases} -b^2 = 8a \\ b = -2a \end{cases}$

$\begin{cases} -4a^{\cancel{2}} = 8\cancel{a} \\ b = -2a \end{cases}$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$

② $\begin{cases} -\dfrac{\Delta}{4a} = -1 \\ b = -2a \end{cases}$ $\begin{cases} b^2 = 4a \\ b = -2a \end{cases}$

$\begin{cases} 4a^2 = 4a \\ b = -2a \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

① $y = -2x^2 + 4x$

② $y = x^2 - 2x$

Costruisco la funzione "obiettivo" $\underbrace{\mathcal{A}}_{\text{AREA}}$

$D = [0, 2]$

$\overline{AH} = 2 - x$ $\quad$ $\overline{BC} = -2x^2 + 4x - (x^2 - 2x) = -3x^2 + 6x$

$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\overline{AH}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}(2-x)(-3x^2+6x)$

devo trovare il max di $\mathcal{A}$ in $[0,2]$

$$\mathcal{A}(x) = \frac{3x(-x+2)(2-x)}{2} = \frac{3x(2-x)^2}{2}$$

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{3}{2}\left[(2-x)^2 + x\cdot 2(2-x)(-1)\right] = \frac{3}{2}(2-x)(2-x-2x) =$$

$$= \frac{3}{2}(2-x)(2-3x)$$

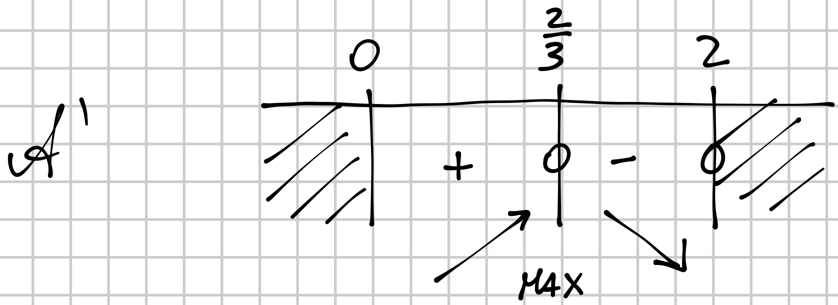
$$\mathcal{A}'(x) = \frac{3}{2}(2-x)(2-3x)$$

<u>ZERI</u>

$$\mathcal{A}'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}$$

<u>SEGNO</u>

$$\mathcal{A}'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{2}{3} \quad \vee \quad x > 2$$



Il triangolo di area max è quello che corrisponde a $x = \frac{2}{3}$

Per trovare quanto vale l'area massima:

$$\mathcal{A}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\cancel{3}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\left(2-\frac{2}{3}\right)^2}{\cancel{2}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$