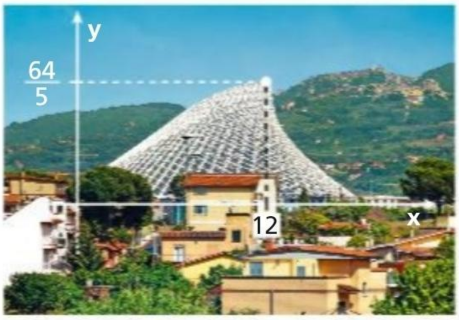
18/1/2021

56 **REALTÀ E MODELLI** **Profili architettonici** La Città dello sport è una struttura sportiva progettata dall'architetto Santiago Calatrava e mai completata, situata a sud di Roma. Rispetto al sistema di riferimento indicato in figura (dove l'unità di misura è il decametro), il suo profilo può essere approssimato dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{cx+3} & \text{se } 0 \leq x \leq 12 \\ \dfrac{1}{5}2^{d-x} & \text{se } x > 12 \end{cases},$$



con a, b, c e d parametri reali. Il grafico di $f(x)$ passa per l'origine del sistema di riferimento e $f'(0) = \frac{16}{3}$.

a. Determina i parametri a, b, c, d.

b. Studia la derivabilità nel punto di ascissa $x = 12$. [a) $a = 16, b = 0, c = 1, d = 18$; b) punto angoloso]

PASSAGGIO PER L'ORIGINE $f(0) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + 3} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f(x) = \frac{ax}{cx+3} \quad \text{per } 0 \leq x \leq 12$$

$$f'(x) = \frac{a(cx+3) - c \cdot ax}{(cx+3)^2} = \frac{\cancel{acx} + 3a - \cancel{acx}}{(cx+3)^2} = \frac{3a}{(cx+3)^2}$$

$$f'(0) = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{3a}{9} = \frac{16}{3} \Rightarrow a = 16$$

$$f(x) = \frac{16x}{cx+3}$$

PASSAGGIO PER $\left(12, \frac{64}{5}\right) \Rightarrow f(12) = \frac{64}{5}$ $\quad \frac{\cancel{16}\cdot\cancel{12}^{\,3}}{12c+3} = \frac{\cancel{64}^{\,1}}{5}$

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}(4c+1)} = \frac{1}{5} \Rightarrow 4c+1 = 5 \Rightarrow c = 1$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{16x}{x+3} & 0\le x\le 12\\[2ex] \dfrac{1}{5}\,2^{d-x} & x>12\end{cases}$$

f è continua nel punto di raccordo:

PONGO

$$\lim_{x\to 12^+}\frac{1}{5}\,2^{d-x}=\frac{64}{5}$$

$$\frac{1}{\cancel{5}}\,2^{d-12}=\frac{64}{\cancel{5}}$$

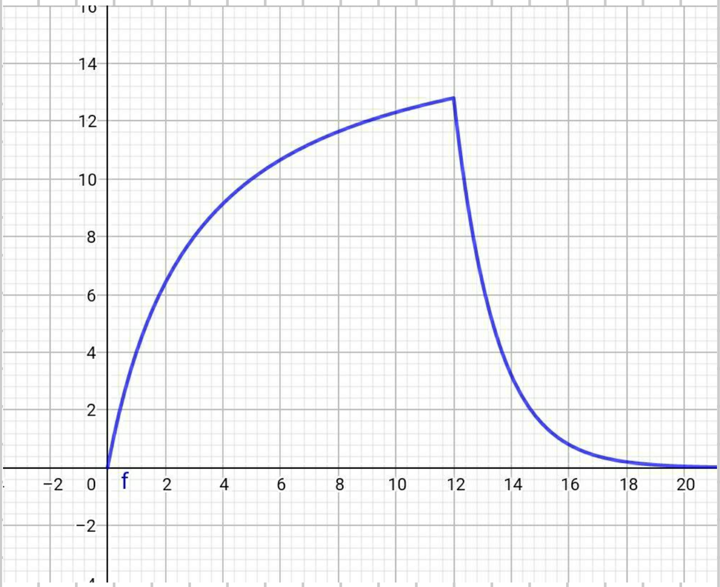
$$2^{d-12}=2^{6}\implies d-12=6$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d=18}$$

IN DEFINITIVA

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{16x}{x+3} & 0\le x\le 12\\[2ex] \dfrac{2^{18-x}}{5} & x>12\end{cases}$$



$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{48}{(x+3)^2} & 0\le x<12\\[2ex] -\dfrac{\ln 2}{5}\,2^{18-x} & x>12\end{cases}$$

$$\left(\frac{16x}{x+3}\right)'=\frac{16(x+3)-16x}{(x+3)^2}=\frac{48}{(x+3)^2}$$

$$\left(\frac{1}{5}\cdot 2^{18-x}\right)' = \frac{1}{5}\, 2^{18-x}\cdot \ln 2 \cdot (18-x)' =$$

$$= -\frac{\ln 2}{5}\, 2^{18-x}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{48}{(x+3)^2} & 0 \leq x < 12 \\ -\dfrac{\ln 2}{5}\, 2^{18-x} & x > 12 \end{cases}$$

$$f'_-(12) = \lim_{x\to 12^-} \frac{48}{(x+3)^2} = \frac{48}{225}$$

$$f'_+(12) = \lim_{x\to 12^+} \left(-\frac{\ln 2}{5}\, 2^{18-x}\right) =$$

$$= -\frac{64}{5}\ln 2$$

$f'_-(12) \neq f'_+(12)$ (FINITE)

12 È PUNTO ANGOLOSO

70 $y = \frac{|x+1|}{x+1}\sqrt[3]{x}$

STUDIARE LA DERIVABILITÀ

DOMINIO $x \neq -1$ $D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

Osserviamo che $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{se } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

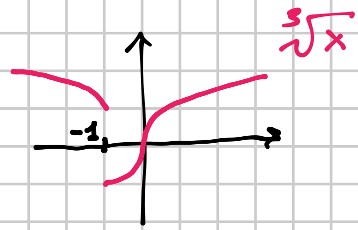
quindi

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x > -1 \\ -\sqrt[3]{x} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

In 0 può esserci un punto di non derivabilità (che in effetti c'è)

$\Downarrow$

0 FLESSO A TANG. VERT.



f è CONTINUA NEL SUO DOMINIO E NON È DERIVABILE IN 0.

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$

non essendo definita in -1, tale punto NON è di discontinuità!!

Se la ridefiniamo così:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x \geq -1 \\ -\sqrt[3]{x} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

allora -1 è un punto di discontinuità di I specie (TIPO SALTO)