22/5/2019

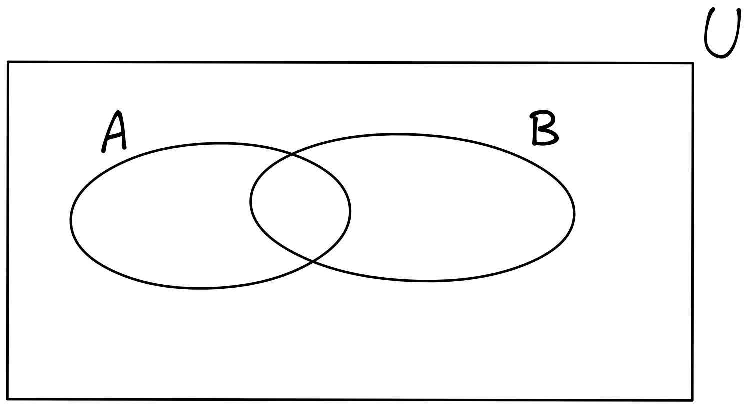
92 **REALTÀ E MODELLI** **Età e ipertensione** Sai che il 21,7% della popolazione italiana ha almeno 65 anni e che il 17,1% della popolazione totale è iperteso, cioè soffre di ipertensione arteriosa. Inoltre, il 28% della popolazione ha almeno 65 anni o soffre di ipertensione arteriosa.

a. Scegliendo a caso un individuo tra la popolazione italiana, calcola la probabilità che abbia almeno 65 anni e sia iperteso.

b. Se un individuo ha almeno 65 anni, qual è la probabilità che soffra di ipertensione arteriosa? E se ha meno di 65 anni?

c. Se un individuo è iperteso, qual è la probabilità che abbia meno di 65 anni?

[a) 10,8%; b) 49,8%; 8%; c) 36,8%]



A = "età ≥ 65"

B = "ipertesi"

$|U| = 100 \qquad |B| = 17{,}1 \qquad |A| = 21{,}7 \qquad |A \cup B| = 28$

a) $P(A \cap B) = \dfrac{|A \cap B|}{|U|} = \dfrac{|A| + |B| - |A \cup B|}{|U|} = \dfrac{21{,}7 + 17{,}1 - 28}{100} = \boxed{10{,}8\,\%}$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

b) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}108}{0{,}217} = 0{,}4976\ldots \simeq \boxed{49{,}8\,\%}$

$P(B \mid \bar{A}) = \dfrac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{0{,}783} = \dfrac{0{,}171 - 0{,}108}{0{,}783} = 0{,}08045\ldots \simeq \boxed{8{,}0\,\%}$

$1 - P(A)$

$\bar{A} \cap B = B \setminus (A \cap B)$ V. FIGURA

c) $P(\bar{A}|B) = \dfrac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}171 - 0{,}108}{0{,}171} =$

$= 0{,}368\ldots \simeq \boxed{36{,}8\%}$

d) $P(\bar{A}|\bar{B}) = \dfrac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{B})} = \dfrac{1 - 0{,}28}{1 - 0{,}171} =$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

$= \dfrac{0{,}72}{0{,}829} = 0{,}8685\ldots \simeq \boxed{86{,}9\%}$

INTERPRETAZIONE: probabilità di avere meno di 65 anni sapendo di non essere iperteso.

138 **Basta la fortuna?** Alice e Sara stanno affrontando lo stesso test composto da 6 domande a risposta chiusa. Ogni domanda ha 5 possibili risposte. Alice risponde a caso a tutte le domande. Sara, invece, conosce le risposte di tre domande e risponde alle altre a caso. Ottengono la sufficienza se rispondono correttamente a 4 domande.

a. Qual è la probabilità che entrambe ottengano esattamente la sufficienza?

b. Qual è la probabilità che Alice ottenga esattamente la sufficienza e Sara non superi la prova?

[a) 0,006; b) 0,008]

a) $E = A \cap S$

$A =$ "Alice risponde a 4 domande"

$S =$ "Sara risponde a 4 domande"

$$P(E) = P(A) \cdot P(S)$$

$$P(A) = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \qquad P(S) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$P(E) = \binom{6}{4}\binom{3}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{6!}{4!\,2!} \cdot 3 \cdot \frac{4^4}{5^9} =$$

$$= \frac{6 \cdot \cancel{5}}{\cancel{2}} \cdot 3 \cdot \frac{2^{\cancel{8}\,7}}{5^{\cancel{9}\,8}} = \frac{18 \cdot 2^7}{5^8} = \frac{2304}{390625} = 0{,}00589\ldots$$

$$\simeq 0{,}006 = \boxed{0{,}6\,\%}$$

b) $S_1 =$ "Sara non supera la prova" $=$ "Sara fallisce le 3 risposte mancanti"

$$P(S_1) = \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$P(E_1) = P(A) \cdot P(S_1) = \binom{6}{4}\frac{4^2}{5^6} \cdot \frac{4^3}{5^3} = 15 \cdot \frac{4^5}{5^9} = 0{,}00786\ldots \simeq 0{,}008$$

$$= \boxed{0{,}8\,\%}$$

210 ●● Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Si estraggono contemporaneamente 5 palline. Calcola la probabilità che:

a. due palline abbiano un numero maggiore di 6;

b. le cinque palline abbiano tutte un numero maggiore di 4;

c. quattro palline abbiano un numero minore di 5.

$\left[\text{a) } \frac{10}{21}; \text{ b) } \frac{1}{42}; \text{ c) } \frac{1}{42}\right]$

a)
$$P(E) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{\frac{4!}{2 \cdot 2} \cdot \frac{6!}{3!\,3!}}{\frac{10!}{5!\,5!}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cancel{4}}{\frac{\cancel{10} \cdot 9 \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cancel{2}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 2 \cdot 5}{\underset{3}{\cancel{9}} \cdot 7} = \boxed{\frac{10}{21}}$$

b)
$$P(E) = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{6}{\frac{\cancel{10} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot 6}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}} = \frac{\cancel{6}}{3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \cancel{6}} = \boxed{\frac{1}{42}}$$

c)
$$P(E) = \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{1 \cdot \cancel{6}}{3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \cancel{6}} = \boxed{\frac{1}{42}}$$

29 Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria,* 2016, *quesito* 4)

[$\simeq 0{,}042\%$]

$$P(E) = \binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0 =$$

$$= \frac{10!}{8!\,2!}\,\frac{3^2}{4^{10}} + 10\cdot\frac{3}{4^{10}} + 1\cdot\frac{1}{4^{10}} =$$

$$= \frac{1}{4^{10}}\left(\frac{\overset{5}{\cancel{10}}\cdot 9}{\cancel{2}}\cdot 9 + 30 + 1\right) = \frac{436}{4^{10}} = 0{,}000415\ldots$$

$$\simeq \boxed{0{,}042\%}$$

35 Un'azienda produce, in due capannoni vicini, scatole da imballaggio. Nel primo capannone si producono 600 scatole al giorno delle quali il 3% è difettoso, mentre nel secondo capannone se ne producono 400 con il 2% di pezzi difettosi. La produzione viene immagazzinata in un unico capannone dove, nel corso di un controllo casuale sulla produzione di una giornata, si trova una scatola difettosa. Qual è la probabilità che la scatola provenga dal secondo capannone?

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria,* 2016, *quesito* 5)

[$\simeq 30{,}77\%$]

$\boxed{1}$ C_1 $\quad$ $\boxed{2}$ C_2 $\quad$ D = "pezzo difettoso"

600 $\quad$ 400

$P(D|C_1) = 0{,}03$ $\quad$ $P(D|C_2) = 0{,}02$

$$P(C_2|D) = \frac{P(D|C_2)P(C_2)}{P(D|C_1)P(C_1)+P(D|C_2)P(C_2)} = \frac{0{,}02\cdot\frac{400}{1000}}{0{,}03\cdot\frac{600}{1000}+0{,}02\cdot\frac{400}{1000}} =$$

$$= \frac{0{,}02\cdot 0{,}4}{0{,}03\cdot 0{,}6+0{,}02\cdot 0{,}4} = 0{,}30769\ldots \simeq \boxed{30{,}77\%}$$

204 Si lanciano contemporaneamente tre dadi.
Calcola la probabilità che i numeri usciti:

a. siano tutti e tre uguali o almeno due dei tre siano il 4;

b. siano tutti e tre uguali o almeno uno dei tre sia il 4;

c. siano tutti e tre uguali o tutti e tre dispari.

[a) $\frac{7}{72}$; b) $\frac{4}{9}$; c) $\frac{5}{36}$]

a) E = "tutti e 3 uguali"

$$P(E) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

A = "almeno 2 dei 3 siano 4" =

$= \underbrace{\text{"tutti e 3 sono 4"}}_{A_1} \cup \underbrace{\text{"2 sono 4 e l'altro è altro numero"}}_{A_2}$

$$P(A_1) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \qquad P(A_2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6}$$

$$P(E \cup A) = P(E) + P(A) - P(E \cap A) =$$

perché $E \cap A = A_1$

$$= P(E) + P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) =$$

$$= P(E) + P(A_1) = 6 \cdot \frac{1}{6^3} + 3 \cdot \frac{5}{6^3} = \frac{6 + 3 \cdot 5}{6^3} =$$

$$= \frac{21}{216} = \boxed{\frac{7}{72}}$$

b) E = "tutti uguali"

$$P(E) = 6\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

A = "almeno uno sia 4"

$\bar{A}$ = "nessuno sia 4"

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

tutti 4

$$P(E \cup A) = P(E) + P(A) - P(E \cap A) = 6 \cdot \frac{1}{6^3} + 1 - \frac{5^3}{6^3} - \frac{1}{6^3} = \frac{6 + 6^3 - 5^3 - 1}{6^3} =$$

$$= \frac{96}{216} = \frac{8}{18} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

c) E = "tutti uguali" $\qquad$ A = "tutti dispari"

$$P(E) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \qquad P(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(E \cup A) = P(E) + P(A) - P(E \cap A) =$$

111
333
555

$$= \frac{1}{6^2} + \frac{1}{2^3} - 3 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36} + \frac{1}{8} - \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{72}{\cancel{216}}} = \frac{2 + 9 - 1}{72} =$$

$$= \frac{10}{72} = \boxed{\frac{5}{36}}$$