22/2/2021

213 Trova i coefficienti a, b, c e d della funzione $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$ in modo che il suo grafico sia simmetrico rispetto all'asse y e abbia un minimo di coordinate $(1; 0)$. $[a = 1; b = 0; c = -2; d = 0]$

In 3 passi

1. Imponi che il grafico della funzione sia simmetrico rispetto all'asse y, cioè che $f(-x) = f(x)$, e applica il principio di identità dei polinomi. Di quanti parametri trovi il valore?
2. Imponi il passaggio per il punto $(1; 0)$.
3. Calcola la derivata prima e imponi che si annulli per $x = 1$.

$D = \mathbb{R}$

SIMMETRICA RISP. ASSE $y \Rightarrow f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ PARI

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$

$f(-1) = f(1)$ CASO PARTICOLARE

$\cancel{a} - b + \cancel{c} - d + \cancel{1} = \cancel{a} + b + \cancel{c} + d + \cancel{1}$

$-2b - 2d = 0 \Rightarrow \boxed{b = -d}$

$f(-2) = f(2)$

$\Rightarrow -8b - 2d = 8b + 2d$

$\Rightarrow \boxed{-4b = d} \Rightarrow \boxed{b = d = 0}$

$f(-x) = ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + 1$

$f(x) = f(-x)$

$\Downarrow$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad a\cancel{x^4} + bx^3 + c\cancel{x^2} + dx + \cancel{1} = a\cancel{x^4} - bx^3 + c\cancel{x^2} - dx + \cancel{1}$

$$\boxed{bx^3 + dx = -bx^3 - dx \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI $\Rightarrow b = -b \wedge d = -d \Rightarrow b, d = 0$

$\Downarrow$

~~dal seguente motivo~~ se due polinomi danno la stessa funzione razionale intera, allora essi sono lo *stesso polinomio*, cioè hanno ordinatamente gli stessi coefficienti.

$\forall x \in \mathbb{R}$ hanno le stesse immagini

$f(x) = ax^4 + cx^2 + 1 \qquad M(1,0)$

$f(1) = 0 \Rightarrow \quad a + c + 1 = 0$

$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$

$f'(1) = 0 \qquad 4a + 2c = 0 \Rightarrow 2a + c = 0$

$$\begin{cases} a = -c-1 \\ 2(-c-1) + c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ -2c + c = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$f(x) = -x^2 + 1$

149 $y = \dfrac{x^3}{x^2 + x - 1}$ Trovare max, min, flessi...

[$x = 1$ min; $x = -3$ max; $x = 0$ fl. orizz.]

D: $\quad x^2 + x - 1 \neq 0 \qquad \Delta = 1 - 4(-1) = 5$

$$x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$D = \left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+x-1) - (2x+1)x^3}{(x^2+x-1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x^4 - x^3}{(x^2+x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2}{(x^2+x-1)^2} = \frac{x^2(x^2+2x-3)}{(x^2+x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2(x+3)(x-1)}{(x^2+x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)(x-1)}{(x^2+x-1)^2}$$

$$x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$f'(x) > 0$

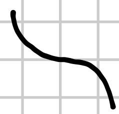
$x^2 > 0 \qquad \forall x \neq 0$

$x + 3 > 0 \qquad x > -3$

$x - 1 > 0 \qquad x > 1$

$(x^2+x-1)^2 > 0 \qquad \forall x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

		-3		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1	
x^2	+		+		+	0	+		+		+
$x+3$	−	0	+		+		+		+		+
$x-1$	−		−		−		−		−	0	+
$(x^2+x-1)^2$	+		+	∄	+		+	∄	+		+
$f'(x)$	+	0	−	∄	−	0	−	∄	−	0	+
	↗	MAX	↘		↘	FLESSO ORIZZ.	↘		↘	MIN	↗



0, 1, −3 SONO ZERI DELLA DERIVATA (PUNTI STAZIONARI)

$\Rightarrow$ CANDIDATI MAX, MIN, FL. ORIZZ.

−3 MAX $\qquad$ 0 FLESSO ORIZZ. $\qquad$ 1 MIN

228 $y = x\ln x, \qquad [1; e].$

Trovare max, min, flessi orizz. in questo intervallo

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} =$$
$$= \ln x + 1$$

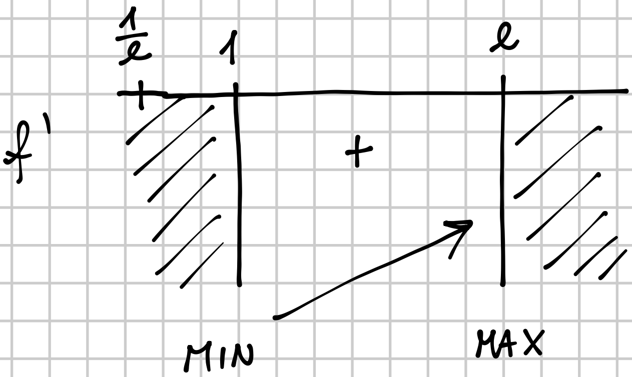
BISOGNA VALUTARE ANCHE GLI ESTREMI DELL'INTERVALLO DI DEFINIZIONE $1, e$

ZERI DI f' $\quad f'(x) = 0$

$$\ln x + 1 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\ln x = -1 \qquad x = e^{-1} = \frac{1}{e} \notin [1, e]$$

SEGNO DI f' $\quad f'(x) > 0$

$$\ln x + 1 > 0 \Rightarrow \ln x > -1 \Rightarrow x > e^{-1}$$



1 è p.to di min

e è p.to di max

$$f(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0$$
$$f(e) = e \cdot \ln e = e$$

227 $y = x\sqrt{4-x^2}$, $[1; 2]$. max, min, ...

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} =$$

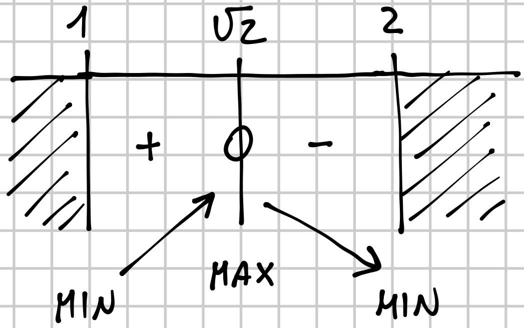
$$= \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

ZERI DI f' $\begin{cases} \dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2-x^2 = 0 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}$

SEGNO DI f' $\begin{cases} \dfrac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} > 0 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2-x^2 > 0 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow 1 \leq x < \sqrt{2}$



$\sqrt{2}$ è un p.to di max (interno)

1 è un p.to di min relativo ⎤ estremi
2 è un p.to di min relativo ⎦ dell'int. $[1, 2]$

$f(1) = \sqrt{3}$
$f(2) = 0 \Rightarrow$ 2 è min assoluto

STUDIO DELLA DERIVATA SECONDA

f derivabile in I intervallo

f' positiva $\Rightarrow$ f è strett. crescente (in I)

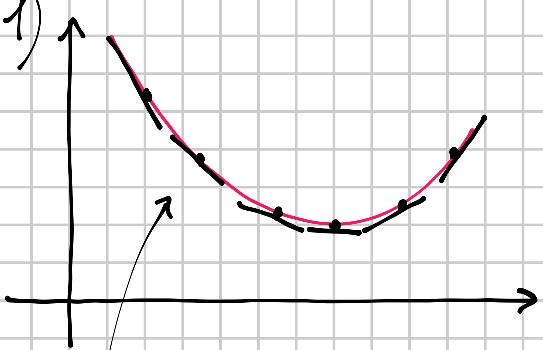
f' negativa $\Rightarrow$ f è strett. decrescente (in I)

1) f' è strett. crescente $\Rightarrow$ f ha la concavità rivolta verso l'alto

2) f' è strett. decrescente $\Rightarrow$ f ha la concavità rivolta verso il basso

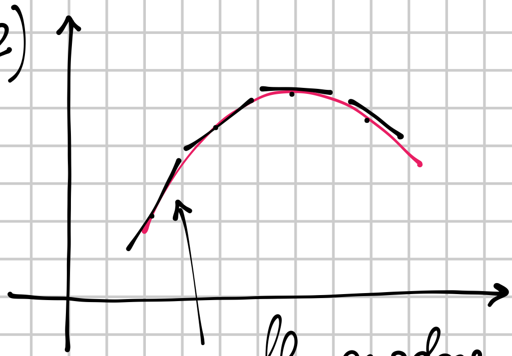
in I

1)



il coeff. angolare della tangente, verso destra diventa sempre più alto

2)



coeff. angolare della tangente diminuisce da sinistra verso destra

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in I.

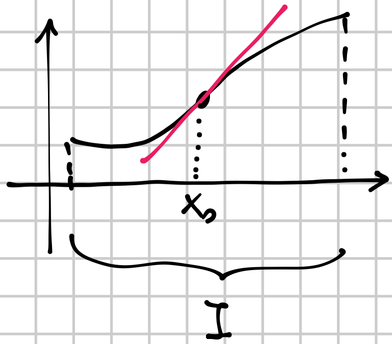
f'' positiva in I $\Rightarrow$ f' strett. crescente in I $\Rightarrow$ f conc. verso l'alto in I

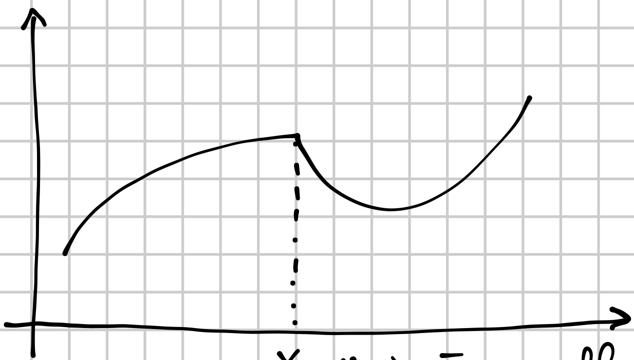
f'' negativa in I $\Rightarrow$ f' strett. decrescente in I $\Rightarrow$ f conc. verso il basso in I

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad$ I intervallo, derivabile 2 volte in I

$x_0 \in I$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x_0) = 0 \\ x_0 \text{ separa due intervalli} \\ \text{con diversa concavità} \end{array}\right] \Longrightarrow x_0 \text{ è un punto di flesso}$$

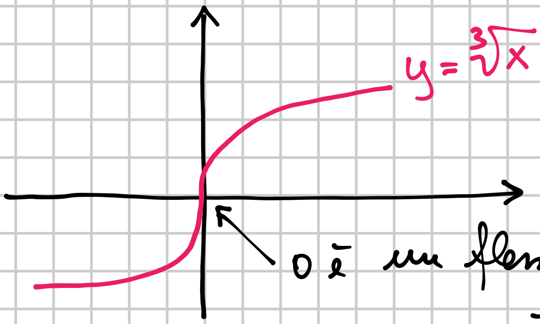




x_0 NON è un flesso, perché non c'è derivabilità

ESEMPIO

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$



0 è un flesso a tangente verticale: né la derivata prima né la derivata seconda sono definite in 0

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad x \neq 0$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} \qquad x \neq 0$$

279 $y = x^4 - 2x^2 - 3x$ $\left[x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ fl. ob.}\right]$

STUDIARE CONCAVITÀ E FLESSI

$D = \mathbb{R}$

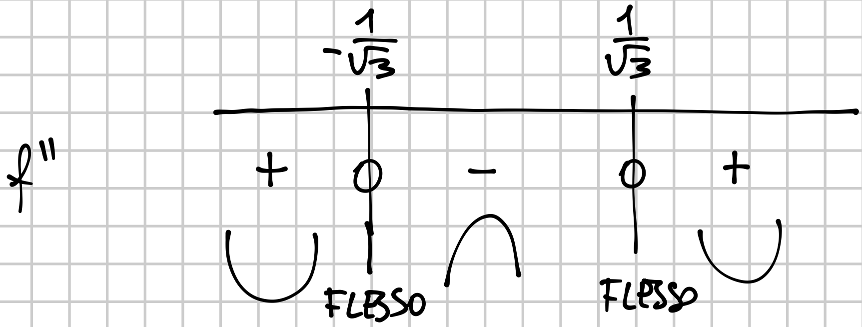
$f'(x) = 4x^3 - 4x - 3$

$f''(x) = 12x^2 - 4$

ZERI DI f'' $\qquad 12x^2 - 4 = 0 \qquad 12x^2 = 4 \qquad x^2 = \frac{1}{3}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ CANDIDATI FLESSI

SEGNO DI f'' $\qquad 12x^2 - 4 > 0 \qquad x^2 > \frac{1}{3} \qquad x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \lor x > \frac{1}{\sqrt{3}}$



f ha la conc. verso l'alto in $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ e in $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$

f ha la conc. verso il basso in $\left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$

$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ sono punti di flesso

Per determinare se sono obliqui, sostituisco $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ nella derivata PRIMA

$f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 3 \neq 0$

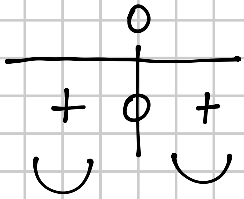
$f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 3 \neq 0$

$\Rightarrow$ flessi obliqui

Uno zero della derivata seconda è necessariamente un punto di flesso? (supponiamo f derivabile 2 volte in I)

NO CONTROESEMPIO

$f(x) = x^4$ $\qquad$ $f'(x) = 4x^3$ $\qquad$ $f''(x) = 12x^2$



0 è uno zero di f'', ma non è un punto di flesso