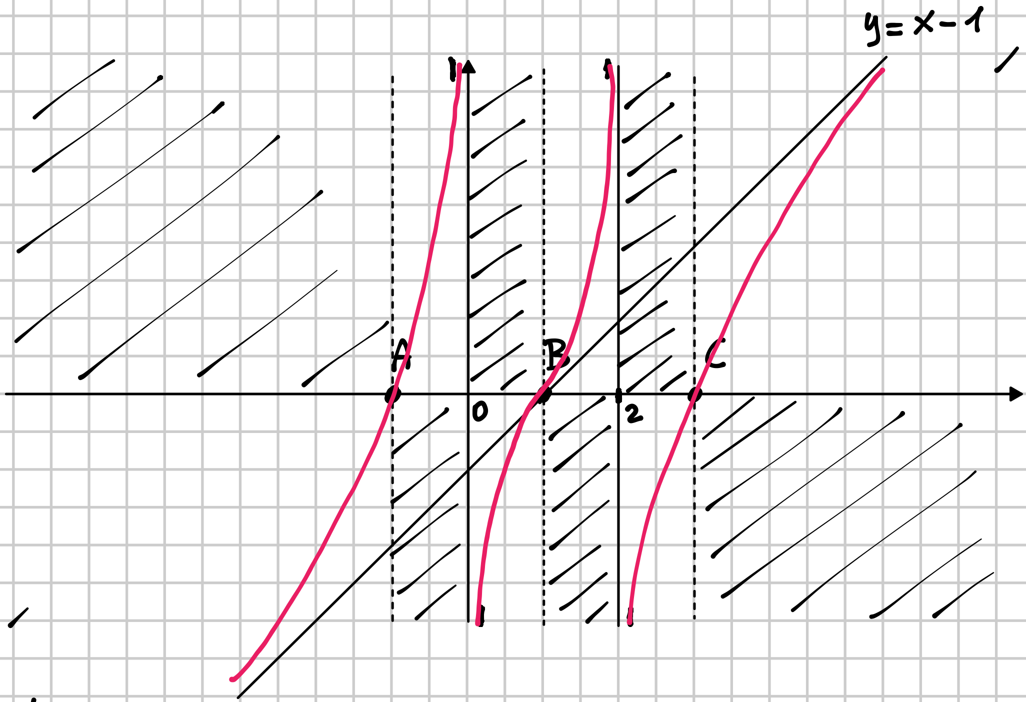
8/3/2021

STUDIO DI FUNZIONE

99 $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} = \dfrac{x^2(x-3) - (x-3)}{x(x-2)}$

$$f(x) = \frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{x(x-2)}$$

1) $D =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$



2) PARI/DISPARI: NO

3) INT. ASSI

- ASSE y NO
- ASSE x $\Rightarrow$ $A(-1, 0)$ $B(1, 0)$ $C(3, 0)$

4) SEGNO

$x - 3 > 0 \quad x > 3$

$x - 1 > 0 \quad x > 1$

$x + 1 > 0 \quad x > -1$

$x > 0 \quad x > 0$

$x - 2 > 0 \quad x > 2$

		-1		0		1		2		3	
$x-3$	−		−		−		−		−	0	+
$x-1$	−		−		−	0	+		+		+
$x+1$	−	0	+		+		+		+		+
x	−		−	∄	+		+		+		+
$x-2$	−		−		−		−	∄	+		+
	−	0	+	∄	−	0	+	∄	−	0	+

5) LIMITI

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(x-2)} = \frac{3}{0^- \cdot (-2)} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(x-2)} = \frac{3}{0^+ \cdot (-2)} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right\} \text{ASINTOTI VERTICALI}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(x-2)} = \frac{8 - 12 - 2 + 3}{2 \cdot 0^-} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x(x-2)} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

6) DERIVATA PRIMA

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 6x - 1)(x^2 - 2x) - (2x - 2)(x^3 - 3x^2 - x + 3)}{(x^2 - 2x)^2} =$$

$$= \frac{3x^4 - 6x^3 \cancel{- 6x^3} + 12x^2 - x^2 \cancel{+ 2x} - 2x^4 \cancel{+ 6x^3} + 2x^2 - 6x + 2x^3 - 6x^2 \cancel{- 2x} + 6}{(x^2 - 2x)^2} =$$

$$= \frac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 6}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 6}{(x^2 - 2x)^2}$$

ZERI

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 6 = 0 \qquad \pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$$

$1 \mapsto \quad 1 - 4 + 7 - 6 + 6 \neq 0$

$-1 \mapsto \quad 1 + 4 + 7 + 6 + 6 \neq 0$

..... RUFFINI NON FUNZIONA

Bisogna studiare l'andamento di $g(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 6$

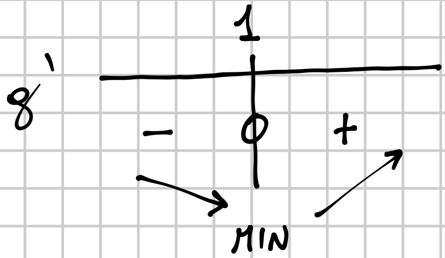
$g(x) > 0 \quad \forall x \in D$

Infatti $g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 14x - 6 = 2(2x^3 - 6x^2 + 7x - 3) =$
$= 2(2x^2 - 4x + 3)(x - 1)$

	2	-6	7	-3
1		2	-4	3
	2	-4	3	//

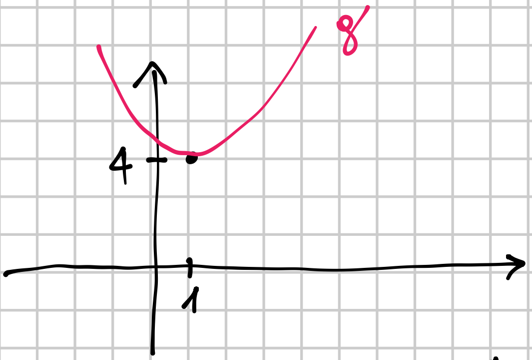
$\downarrow$

$\Delta = 16 - 24 < 0$



1 è p.to di minimo per g

$g(1) = 1 - 4 + 7 \cancel{-6} \cancel{+6} = 4 > 0$



quindi g è SEMPRE POSITIVA

per cui $\forall x \in D \quad f'(x) > 0$, cioè f è strett. crescente in ogni sottointervallo del dominio

7) DERIVATA SECONDA

$$f'(x) = \frac{x^4-4x^3+7x^2-6x+6}{(x^2-2x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(4x^3-12x^2+14x-6)(x^4-4x^3+4x^2) - (4x^3-12x^2+8x)(x^4-4x^3+7x^2-6x+6)}{(x^2-2x)^4}$$

$$= \ldots = -\frac{6(x^3-3x^2+6x-4)}{x^3(x-2)^3} = -\frac{6(x-1)(x^2-2x+4)}{x^3(x-2)^3}$$

CON IL COMPUTER

ATTENZIONE!

ZERI DI f'' $\quad x^3-3x^2+6x-4=0$ $\quad$ RUFFINI $\quad \pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 4$

	1	−3	6	−4
1		1	−2	4
	1	−2	4	//

$$(x-1)\underbrace{(x^2-2x+4)}_{\Delta<0}$$

(quindi sempre positivo)

$x=1$ CANDIDATO FLESSO

SEGNO DI f''

$1-x>0 \quad x<1$

$x>0 \quad x>0$

$x-2>0 \quad x>2$

		0		1		2	
$1-x$	+		+	0	−		−
x	−	∄	+		+		+
$x-2$	−		−		−	∄	+
f''	+	∄	−	0	+	∄	−
	∪		∩	FLESSO	∪		∩

1 è p.to di flesso

$$f(1) = \frac{1-3-1+3}{1-2} = 0$$

$F(1,0) \equiv B$ punto del grafico

ZERO DI f

8) ASINTOTI OBLIQUI

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{(x^2 - 2x)\,x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^3} - 3x^2 - x + 3 - \cancel{x^3} + 2x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^2 - 2x} = 1$$

$y = x - 1$ è asintoto obliquo

sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$