21/1/2019 RADICI 5° DELL'UNITÀ

$$z^5 = 1$$

$$z_k = \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

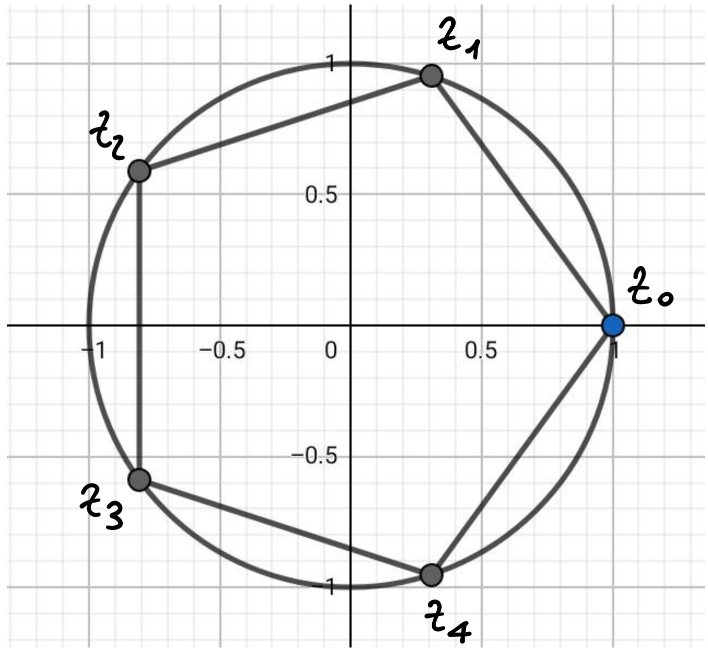
$$z_0 = 1$$

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}$$

$$z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}$$



RADICI n-ESIME DI UN NUMERO COMPLESSO

Dato $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ e un numero $z \in \mathbb{C}$, si chiama **RADICE n-ESIMA** di z ogni numero complesso w tale che

$$w^n = z$$

TEOREMA

Ogni numero complesso $z \neq 0$ ha n radici n-esime distinte, vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di centro 0 e raggio $\sqrt[n]{|z|}$.

Se $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$$\boxed{z_k = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1}$$

RADICI n-ESIME DI z, infatti $z_k^n = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = z$

In pratica: troviamo la 1° $\longrightarrow$ $z_0 = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\vartheta}{n} + i\sin\frac{\vartheta}{n}\right)$

$\downarrow$

le altre si trovano in successione ruotando il vettore posizione di questa ogni volta di un angolo di $\frac{2\pi}{n}$

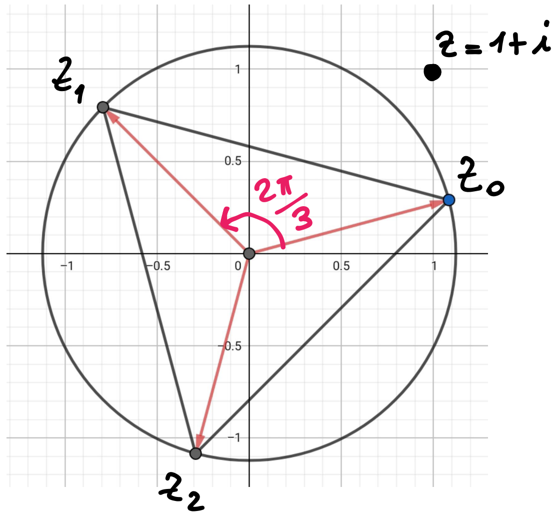
ESEMPIO

Calcolare le radici 3° di $z = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$



OSSERVAZIONE

NON usiamo per le radici complesse il simbolo $\sqrt[n]{\ }$, riservato ai numeri reali positivi.

UNICA ECCEZIONE: se a è REALE NEGATIVO, definiamo

$$\sqrt{a} = i\sqrt{|a|}$$

ESEMPI → $\sqrt{-1} = i$ $\quad \sqrt{-4} = 2i \quad \sqrt{-5} = i\sqrt{5}$

Calcoliamo le 2 radici quadrate del numero

$$z = -8 + 8\sqrt{3}\, i$$

1° PASSO $\Rightarrow$ trasformare in forma trigonometrica

$$\rho = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64+192} = \sqrt{256} = 16$$

ALTERNATIVA

$$z = 8\underbrace{(-1 + \sqrt{3}\, i)}$$

trovo il modulo di questo $= 2 \Rightarrow \underbrace{|z|}_{\rho} = 8 \cdot 2 = 16$

$$z = 16\left(-\frac{8}{16} + \frac{8\sqrt{3}}{16} i\right) = 16\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

$$\begin{cases} \cos\vartheta = -\frac{1}{2} \\ \sin\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \vartheta = \frac{2}{3}\pi$$

Quindi $z = 16\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

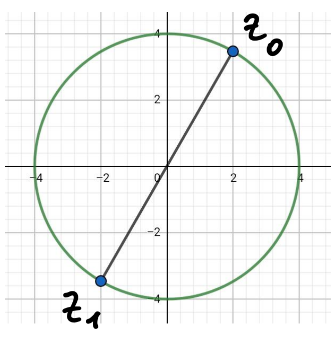
$$z_0 = 16^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \boxed{2 + 2\sqrt{3}\, i}$$

$$z_1 = 16^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2}{3}\pi + 2\pi}{2}\right) =$$

$$= 4\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{-2 - 2\sqrt{3}\, i}$$

$$(2 + 2\sqrt{3}\, i)^2 = 4 - 12 + 8\sqrt{3}\, i =$$
$$= -8 + 8\sqrt{3}\, i$$



418 $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ $\left[-2, 1 \pm i\sqrt{3}, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right]$ in $\mathbb{C}$

$x^3 = t$

$t^2 + 7t - 8 = 0$

$(t+8)(t-1) = 0$

$x^3 = -8 \Longrightarrow$ trovare le 3 radici 3° di -8

$x^3 = 1 \Longrightarrow$ trovare le 3 radici 3° di 1