3/3/2021

ESERCIZIO

Dimostra, utilizzando il teorema degli zeri, che l'equazione

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 5 = 0$$

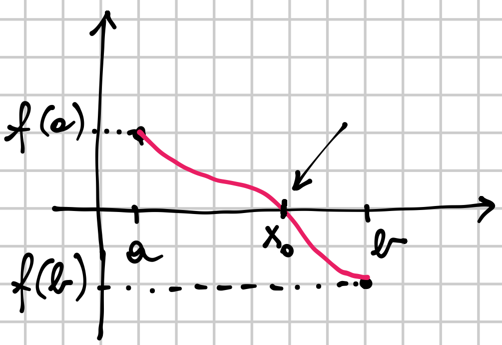
ha almeno una soluzione nell'intervallo $[2,3]$.

TH. ZERI

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$

($f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto)

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in \,]a,b[$ tale che $f(x_0) = 0$

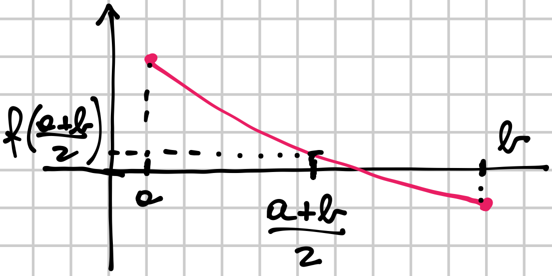


Applico il teorema degli zeri alla funzione $f:[2,3] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 5$

$f(2) = 2^4 + 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 - 5 = \cancel{16} + 8 - \cancel{16} - 10 - 5 = -7 < 0$

$f(3) = 3^4 + 3^3 - 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - 5 = 81 + 27 - 36 - 15 - 5 = 52 > 0$



METODO DI BISEZIONE

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 5$$

$x_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5 \qquad f(2.5) = 12.19 \implies [2, 2.5]$

$x_2 = \frac{2+2.5}{2} = 2.25 \qquad f(2.25) = 0.52 \implies [2, 2.25]$

$x_3 = \frac{2+2.25}{2} = 2.125 \qquad f(2.125) = -3.7 \implies [2.125, 2.25]$

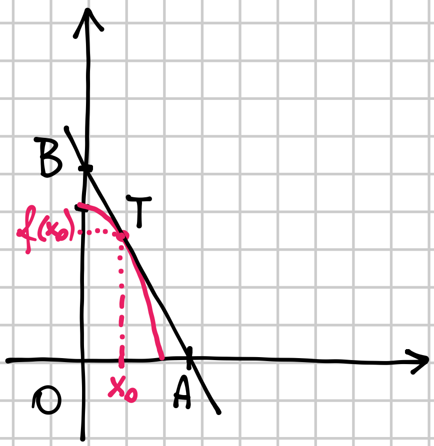
2.125 è un'approssimazione della soluzione per difetto

2.25 è un'approssimazione della soluzione per eccesso

87 Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, opzione Scienze applicate, Scuole italiane all'estero (Americhe)*, 2015, *quesito* 5)

$\left[\frac{32\sqrt{3}}{9}\right]$



$$f(x) = 4 - x^2 \qquad x \in \left]0, 2\right]$$

TANGENTE: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$f'(x_0) = -2x_0$$

$$y - (4 - x_0^2) = -2x_0(x - x_0)$$

$$y - 4 + x_0^2 = -2x_0 x + 2x_0^2$$

$$y = -2x_0 x + x_0^2 + 4$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -2x_0 x + x_0^2 + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ 2x_0 x = x_0^2 + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{x_0^2 + 4}{2x_0} \end{cases}$$

$$A\left(\frac{x_0^2 + 4}{2x_0}, 0\right)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2x_0 x + x_0^2 + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = x_0^2 + 4 \end{cases} \qquad B(0, x_0^2 + 4)$$

$$\mathcal{A}(x_0) = \frac{1}{2} \, \frac{x_0^2 + 4}{2x_0} \cdot (x_0^2 + 4) = \frac{(x_0^2 + 4)^2}{4x_0}$$

FUNZIONE OBIETTIVO DA MINIMIZZARE

$$x_0 \in \left]0, 2\right]$$

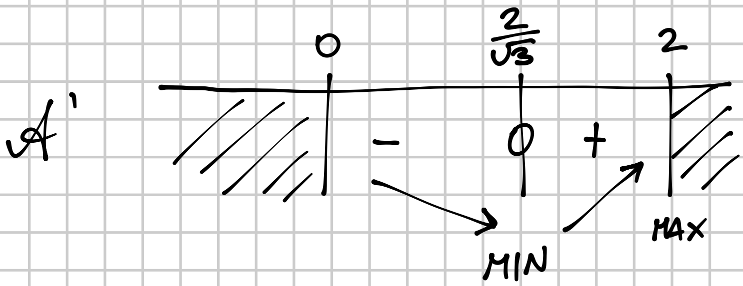
$$\mathcal{A}(x) = \frac{(x^2+4)^2}{4x} \qquad x \in \left]0,2\right]$$

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{1}{4}\,\frac{2(x^2+4)\cdot 2x\cdot x - (x^2+4)^2}{x^2} =$$

$$= \frac{(x^2+4)(4x^2-x^2-4)}{4x^2} = \frac{(x^2+4)(3x^2-4)}{4x^2}$$

ZERI DI $\mathcal{A}'$: $\quad 3x^2-4=0 \quad \begin{cases} x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 < x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

SEGNO DI $\mathcal{A}'$: $\quad \begin{cases} 3x^2-4>0 \\ 0<x\leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \quad \vee \quad x > \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 < x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3}} < x \leq 2$



$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ è p.to di minimo

$f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 4 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3} \qquad T\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{8}{3}\right)$

L'area minima vale $\mathcal{A}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+4\right)^2}{4\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\left(\frac{4}{3}+4\right)^2}{\frac{8}{\sqrt{3}}} =$

$$= \left(\frac{16}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{2^2\cdot \cancel{8}^{2}}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{8}} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$$