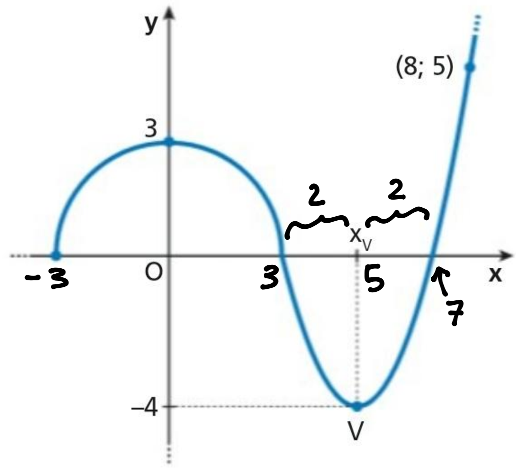
Problema



Il grafico in figura rappresenta una funzione $f(x)$ ed è costituito da una semicirconferenza e da un arco di parabola.

a. Scrivi l'equazione di $f(x)$, trova gli zeri e gli intervalli in cui f è crescente.

b. Spiega perché f è invertibile nell'intervallo $[0; x_V]$; scrivi l'equazione della funzione inversa e disegna il suo grafico.

c. Utilizza il grafico di $f(x)$ per rappresentare $|f(x)|$ e $\frac{1}{f(x)}$.

d. Considera la funzione $y = \ln f(x)$, indicane il dominio e traccia il suo grafico.

a) DOMINIO $D = [-3, +\infty)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pm\sqrt{9 - x^2} \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$$

semicirc. superiore (centro O raggio 3)

Parabola per $(3,0)$, per $(8,5)$ e con $y_V = -4$

$y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{array}{l} (3,0) \to \\ (8,5) \to \\ y_V = -4 \to \end{array} \begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ 64a + 8b + c = 5 \\ b^2 - 4ac = 16a \end{cases} \quad \begin{cases} c = -9a - 3b \\ 64a + 8b - 9a - 3b = 5 \\ b^2 - 4a(-9a - 3b) = 16a \end{cases}$$

$-\frac{\Delta}{4a} = -4$

$$\begin{cases} // \\ 55a + 5b = 5 \Rightarrow 11a + b = 1 \\ b^2 + 36a^2 + 12ab - 16a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ b = 1 - 11a \\ (1 - 11a)^2 + 36a^2 + 12a(1 - 11a) - 16a = 0 \end{cases}$$

$1 + 121a^2 - 22a + 36a^2 + 12a - 132a^2 - 16a = 0$

$25a^2 - 26a + 1 = 0$

$25a^2 - 25a - a + 1 = 0$

$25a(a-1) - (a-1) = 0$

$(a-1)(25a-1) = 0 \quad \begin{array}{l} a = 1 \\ a = \frac{1}{25} \end{array}$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c = -9 + 30 = 21 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{25} \\ b = 1 - \frac{11}{25} = \frac{14}{25} \\ c = -\frac{9}{25} - \frac{42}{25} = -\frac{51}{25} \end{cases}$$

$y = x^2 - 10x + 21$

$\Downarrow$

$x_V = 5 > 0$

$y = \frac{1}{25}x^2 + \frac{14}{25}x - \frac{51}{25}$

$\Downarrow$

$x_V = -7 < 0$ N.Acc.

$f: [-3, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & -3 \le x \le 3 \\ x^2 - 10x + 21 & x \ge 3 \end{cases}$

ZERI DI f: $-3, 3, 7$

$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 10x + 21 \end{cases}$

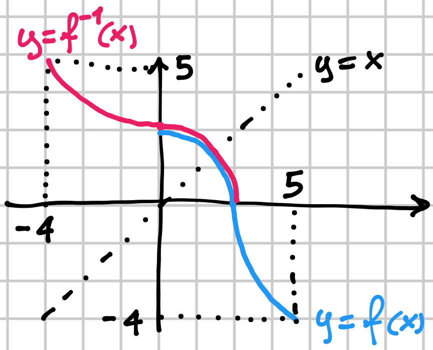
la funzione è crescente (separatamente) negli intervalli $[-3, 0]$ e $[5, +\infty)$.

In $[0, 5]$ è decrescente

b) In $[0, 5]$ f è invertibile perché in tale intervallo è iniettiva perché strettamente decrescente

RISTRETTA

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & 0 \le x \le 3 \\ x^2 - 10x + 21 & 3 \le x \le 5 \end{cases}$



$y = \sqrt{9-x^2}$ $\quad y^2 = 9 - x^2$ $\quad x^2 = 9 - y^2$ $\quad x = \sqrt{9-y^2} \xrightarrow[\text{scambio}]{} y = \sqrt{9-x^2}$

$y = x^2 - 10x + 21$ $\quad y = (x-5)^2 - 4$ $\quad y + 4 = (x-5)^2$ $\quad x - 5 = \pm\sqrt{y+4}$

$x = \pm\sqrt{y+4} + 5$

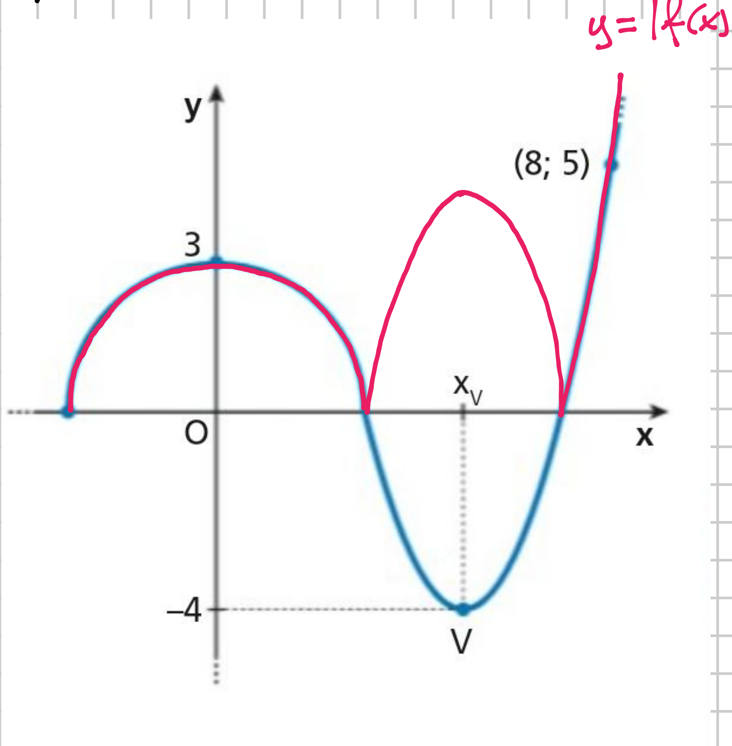
$y = \pm\sqrt{x+4} + 5$

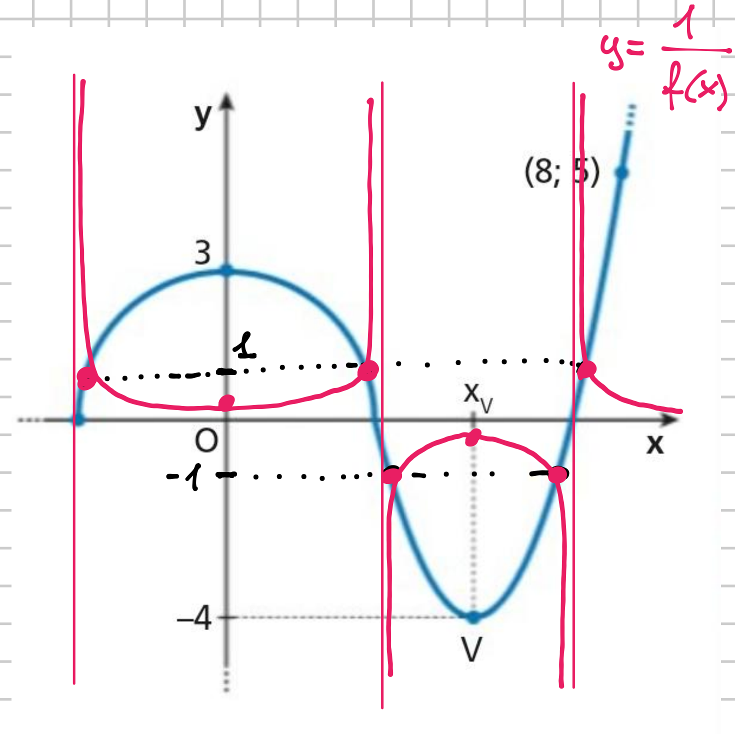
$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & 0 \le x \le 3 \\ 5 - \sqrt{x+4} & -4 \le x \le 0 \end{cases}$

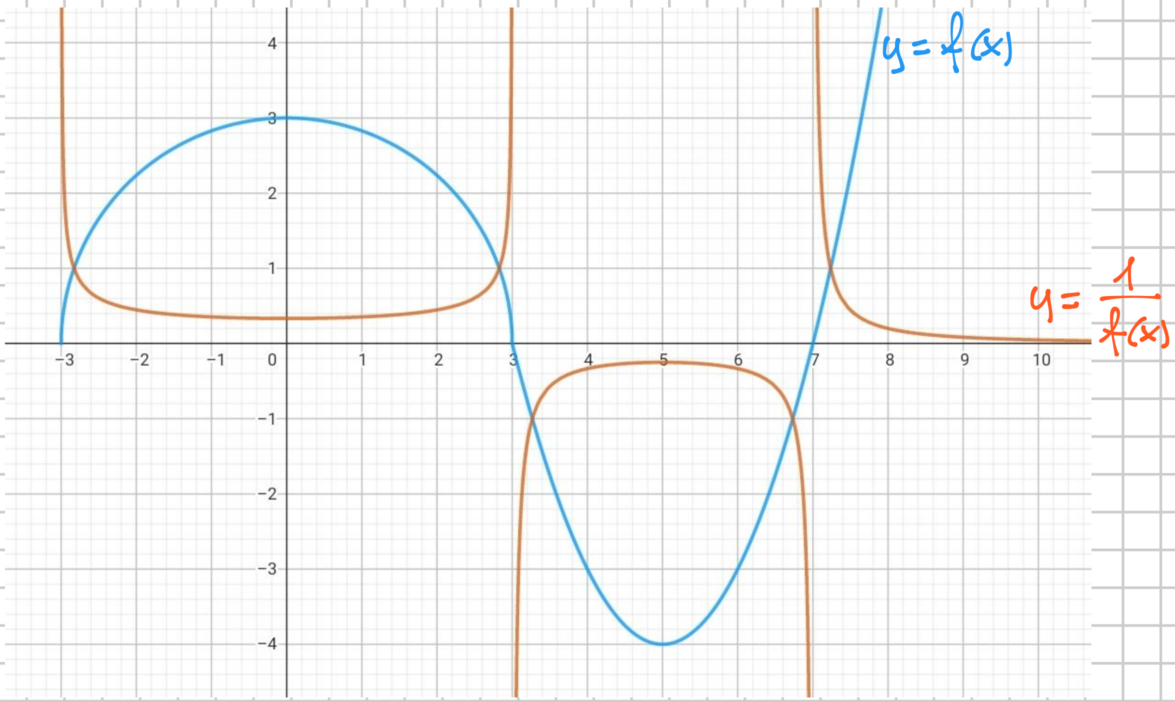
SI VEDE DAL GRAFICO CHE VA PRESO IL $-$

$y = -\sqrt{x+4} + 5$

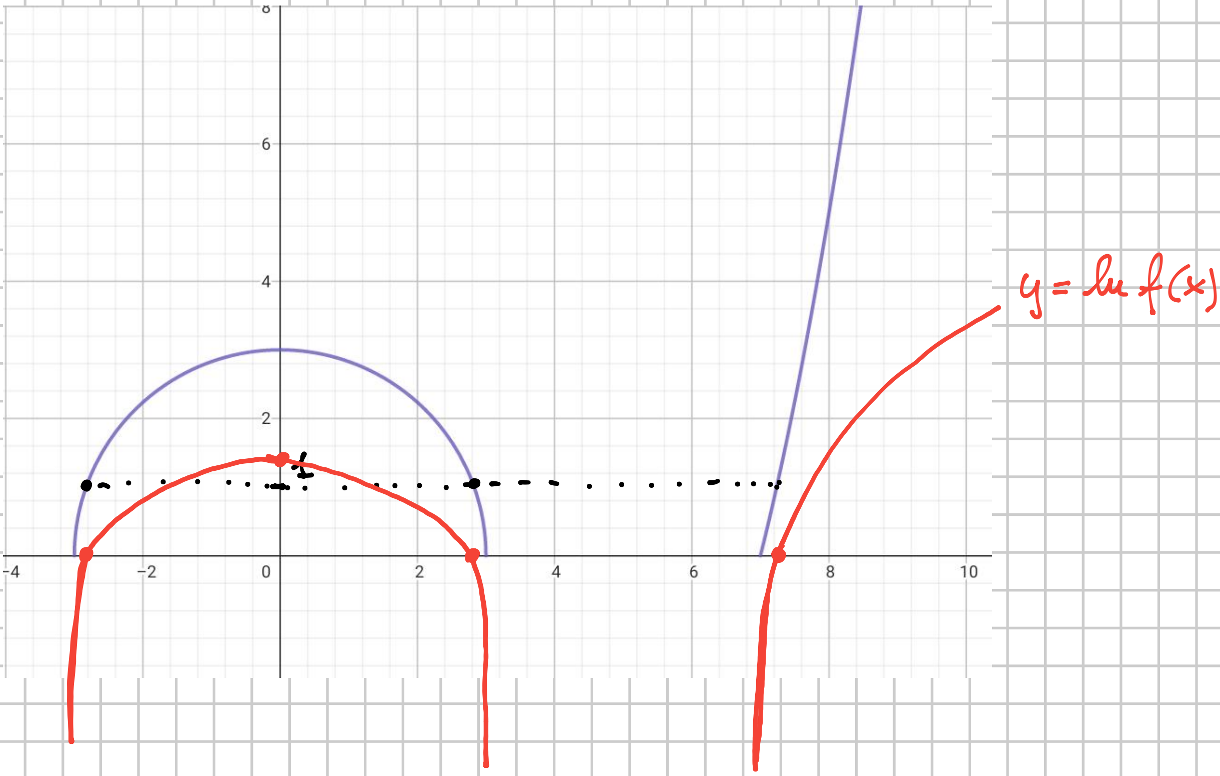
c)

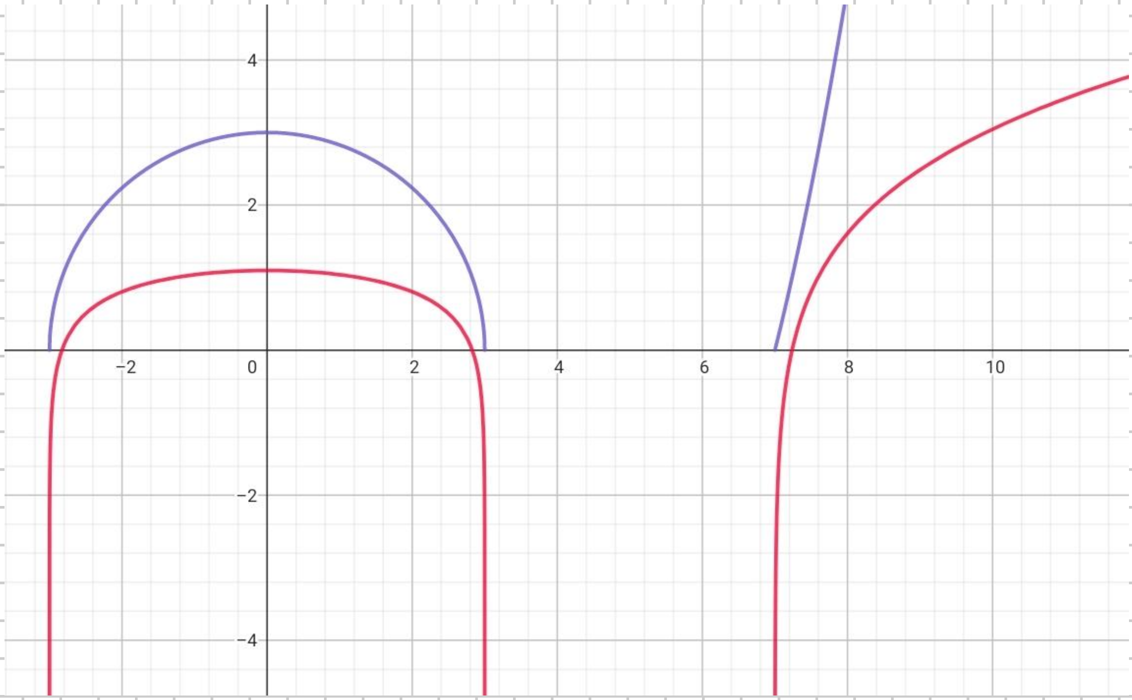






d) $y = \ln f(x)$ $\qquad D = (-3, 3) \cup (7, +\infty)$ $\qquad$ dove $f(x) > 0$





1 Trova per quale valore di a il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + ax}$$

passa per il punto $P\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{10}\right)$.

Determina il dominio di $f(x)$, verifica se la funzione è pari o dispari e studia il segno di $f(x)$ per $x > 0$ e risolvi l'equazione $f(x) - x = 1$.

$$y = \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + ax} \Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + a\left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow a = -4$$

sost. $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{10}\right)$

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x} = \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x(x+2)(x-2)} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0, -2, 2\}$$

$$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 2}{(-x)^3 - 4(-x)} = -\frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x}$$

DISPARI

$$f(x) = \frac{(x^2 - 2)(x^2 - 1)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 1)(x + 1)}{x(x+2)(x-2)}$$

$f(x) > 0$ per $x > 0$

$$\frac{(x - \sqrt{2})\cancel{(x + \sqrt{2})}(x - 1)\cancel{(x + 1)}}{\cancel{x}\cancel{(x+2)}(x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{\overset{N_1}{(x - \sqrt{2})}\overset{N_2}{(x - 1)}}{\underset{D}{x - 2}} > 0$$

$x - \sqrt{2} > 0 \quad x > \sqrt{2}$

$x - 1 > 0 \quad x > 1$

$x - 2 > 0 \quad x > 2$

	0		1		$\sqrt{2}$		2	
N_1		$-$		$-$	0	$+$		$+$
N_2		$-$	0	$+$		$+$		$+$
D		$-$		$-$		$-$	$\nexists$	$+$
	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Il segno della funzione nel suo dominio è

	-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		2	
$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$f(x) - x = 1$ $\qquad$ C.E. $x \neq 0 \wedge x \neq \pm 2$

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x} - x = 1 \implies x^4 - 3x^2 + 2 = (x+1)(x^3 - 4x)$$

$$\cancel{x^4} - 3x^2 + 2 = \cancel{x^4} - 4x^2 + x^3 - 4x$$

$$x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$$

$-1 \mapsto -1 - 1 + 4 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 1 & -1 & -4 & -2 \\
-1 & & -1 & 2 & 2 \\
\hline
 & 1 & -2 & -2 & /\!/
\end{array}$$

$$(x^2 - 2x - 2)(x+1) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 2 = 3$$

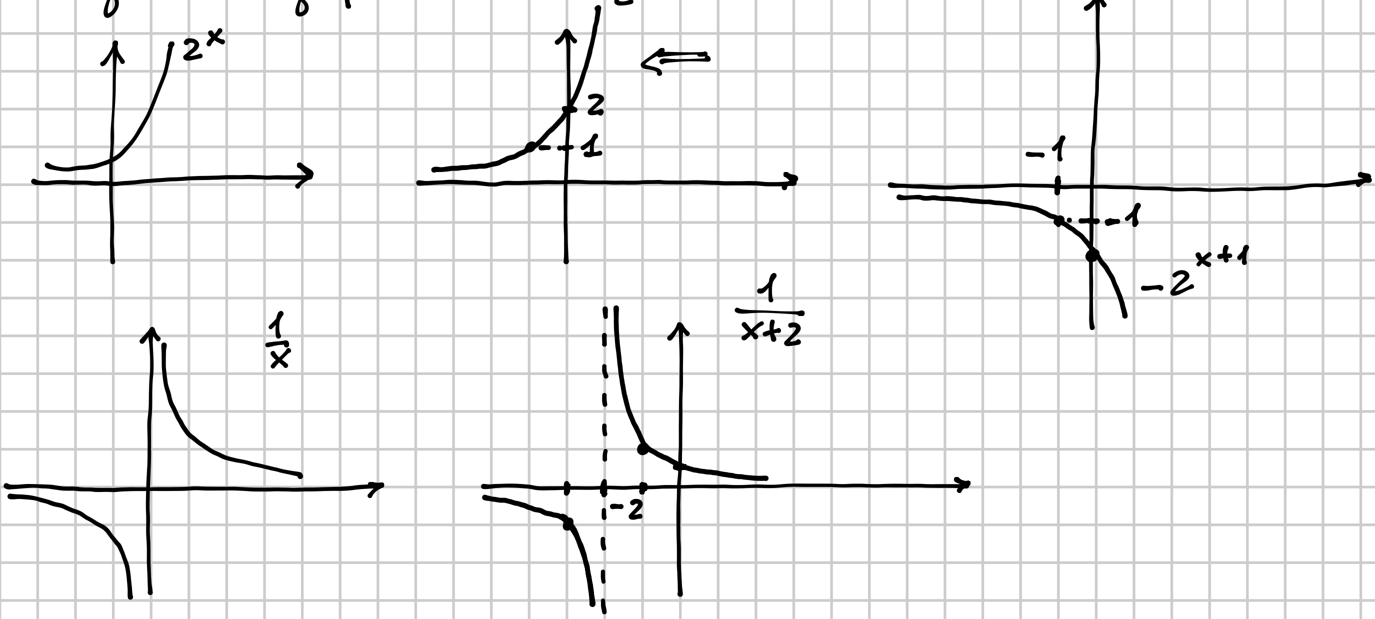
$$\boxed{x = 1 \pm \sqrt{3} \quad \vee \quad x = -1}$$

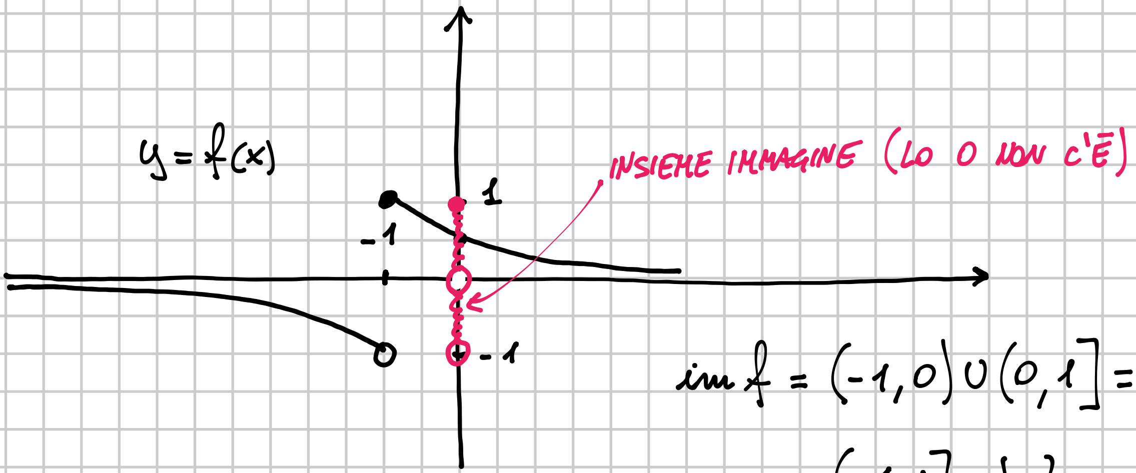
4 Dopo aver determinato l'insieme immagine della funzione $f(x)=\begin{cases}-2^{x+1} & \text{se } x<-1\\ \dfrac{1}{x+2} & \text{se } x\geq -1\end{cases}$:

a. stabilisci se $f(x)$ è iniettiva e se è suriettiva in $\mathbb{R}$;

b. traccia un grafico probabile di $f(x)$ e di $\dfrac{1}{f(x)}$ in uno stesso riferimento cartesiano e determina le eventuali soluzioni dell'equazione $f(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Disegniamo i grafici:





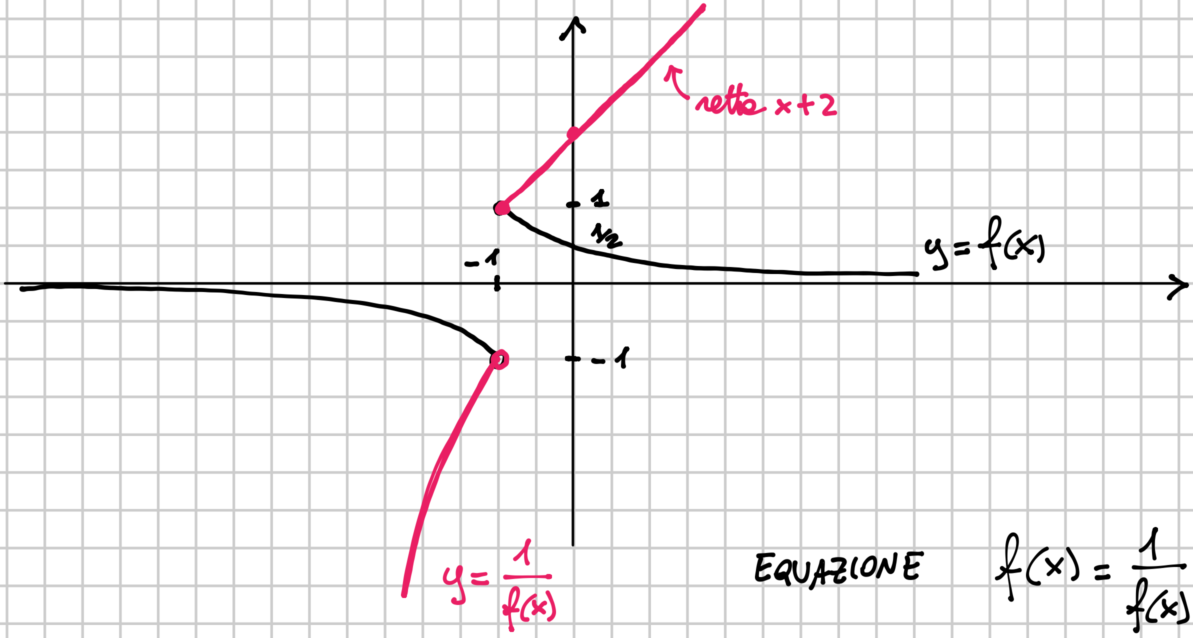
$$\text{im} f = (-1,0)\cup(0,1] =$$
$$= (-1,1]\setminus\{0\}$$

La funzione è INIETTIVA (ogni elemento dell'immagine ha una e una sola controimmagine; elementi distinti vanno in elementi distinti

$$\forall x_1,x_2 \in \text{dom} f \quad x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$)

Infatti ogni retta orizzontale interseca il grafico in al max un punto.

f NON è suriettiva perché $\text{im} f \neq \mathbb{R}$

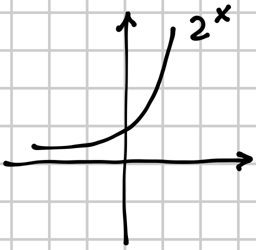


EQUAZIONE $f(x) = \frac{1}{f(x)}$

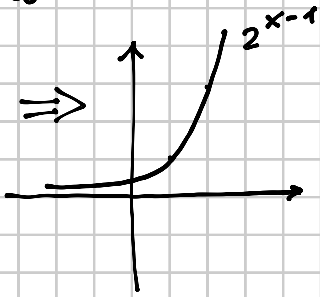
I 2 grafici si intersecano nel punto $(-1,1)$ e non altrove. Quindi l'unica soluzione dell'equazione è -1

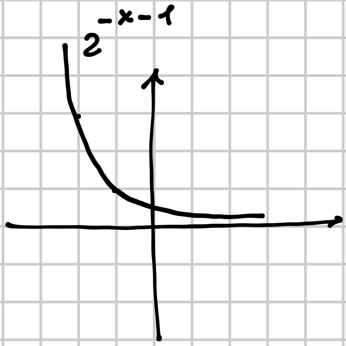
OSSERVAZIONE

$$-\frac{1}{2^{x+1}} = -2^{-x-1}$$

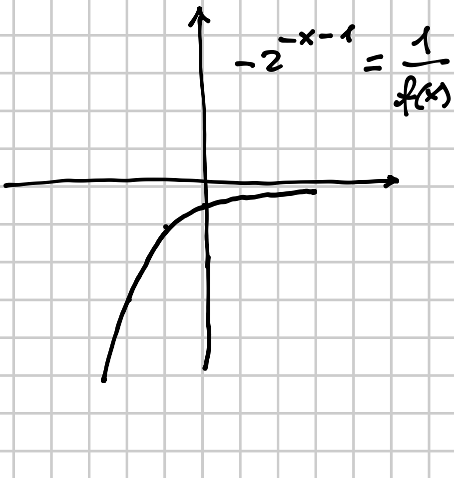


$\Rightarrow$





Per intuire il grafico reciproco si potevano usare queste trasformazioni elementari



3 Considera la funzione

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx + 4.$$

Determina i coefficienti p e q, sapendo che $f(x)$ è divisibile per $x^2 - 4$, e trova gli zeri di $f(x)$.

Se $f(x)$ è divisibile per x^2-4, lo è anche per $(x-2)$ e $(x+2)$, quindi ± 2 sono radici del polinomio

$$\begin{array}{l} f(-2)=0 \Rightarrow \\ f(2)=0 \Rightarrow \end{array} \begin{cases} -8+4p-2q+4=0 \\ 8+4p+2q+4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4p-2q=4 \\ 4p+2q=-12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2p-q=2 \\ 2p+q=-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} p=-1 \\ q=-4 \end{cases}$$

$$4p \quad = -4$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & // \end{array}$$

$$(x^2+x-2)(x-2)$$

$$f(x) = (x+2)(x-1)(x-2)$$

Gli zeri di f sono ± 2, 1

105 Si determini il campo di esistenza della funzione:

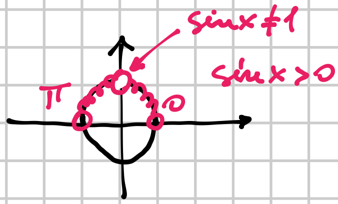
$$y = \log_{\sin x}(x^2 - 5x + 6), \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Sessione straordinaria, 2014, quesito 7*)

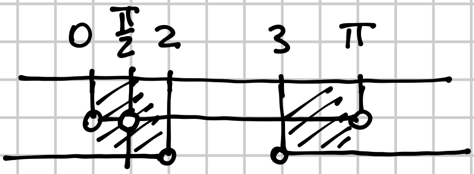
$\left[0 < x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{\pi}{2} < x < 2 \vee 3 < x < \pi\right]$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2\pi & \text{dato del problema} \\ \left.\begin{array}{l} \sin x > 0 \\ \sin x \neq 1 \end{array}\right\} \; 0 < \sin x < 1 & \text{perché base del logaritmo} \\ x^2 - 5x + 6 > 0 & \text{perché argomento del logaritmo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \pi \;\wedge\; x \neq \frac{\pi}{2} \\ (x-3)(x-2) > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 0 < x < \pi \;\wedge\; x \neq \frac{\pi}{2} \\ x < 2 \;\vee\; x > 3 \end{cases}$$



$$\boxed{0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad \frac{\pi}{2} < x < 2 \quad \vee \quad 3 < x < \pi}$$

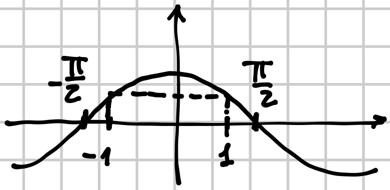
106 TEST Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?

~~A~~ $\cos[\sin(x^2+1)]$ B $\sin[\ln(x^2+1)]$ C $\sin[\cos(x^2+1)]$ D $\cos[\ln(x^2+1)]$

Si giustifichi la risposta.

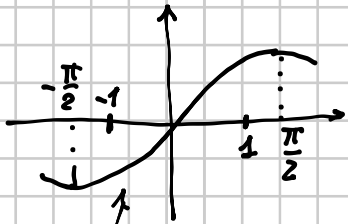
(*Esame di Stato, Liceo scientifico, Corso di ordinamento, Sessione ordinaria*, 2012, *quesito* 10)

Infatti: $-1 \le \sin(x^2+1) \le 1$ per qualsiasi x



$\cos\alpha > 0$ per ogni α tale che $-1 \le \alpha \le 1$

Lo stesso giochetto non si può fare con $\sin x$:



per $-1 < x < 0$ $\sin x < 0$

Inoltre $\ln(x^2+1)$ è una funzione pari e sempre positiva (tranne in 0 dove vale 0), e assume tutti i valori da 0 a $+\infty$, quindi $\sin(\ln(x^2+1))$ e $\cos(\ln(x^2+1))$ possono anche essere negative