6/3/2019

**295** Verifica che la retta $r: \begin{cases} 4x - 3y - 1 = 0 \\ x + 3z - 4 = 0 \end{cases}$ e il piano $\alpha: x - y - z + 8 = 0$ non hanno punti di intersezione e calcola la distanza della retta del piano. $\left[\frac{7\sqrt{3}}{3}\right]$

$$r: \begin{cases} x = t \\ 4t - 3y - 1 = 0 \\ t + 3z - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}t \\ z = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t \end{cases}$$

Controllo che il generico punto della retta $\left(t, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}t, \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t\right)$ non soddisfa l'equazione del piano:

$$t - \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}t\right) - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}t\right) + 8 \overset{?}{=} 0$$

$$\cancel{t} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{4}{3}t} - \frac{4}{3} + \cancel{\frac{1}{3}t} + 8 = 0 \qquad -\frac{3}{3} + 8 = 0$$

$7 = 0$ IMPOSSIBILE

Considero un punto qualsiasi della retta:

es. $t = 1$ $\quad P(1, 1, 1)$ e calcolo la distanza di P dal piano $\alpha$

$$d(P, \alpha) = \frac{|1 - 1 - 1 + 8|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

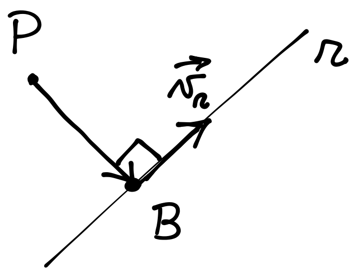
**296** Considera la retta $r$ di equazione $\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 2z \end{cases}$ e il punto di coordinate $P(1; 1; 2)$.

**a.** Calcola la distanza di $P$ da $r$.

**b.** Determina l'equazione della retta perpendicolare a $r$, passante per $P$ e parallela al piano di equazione $x + y = 1$.

$\left[ \text{a) } \sqrt{\frac{7}{3}}; \text{ b) } \begin{cases} y + z - 3 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \right]$

a) $r: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \vec{v}_r = (1, 2, 1)$




Impongo al generico B di essere tale che $\vec{PB} \perp \vec{v}_r$, cioè $\vec{PB} \cdot \vec{v}_r = 0$

$B(t+1, 2t, t) \qquad \vec{PB} = (t+1-1, 2t-1, t-2) = (t, 2t-1, t-2)$

$\vec{PB} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (t, 2t-1, t-2) \cdot (1, 2, 1) = 0$

$t + 2(2t-1) + t - 2 = 0$

$t + 4t - 2 + t - 2 = 0 \Rightarrow 6t = 4 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$

$B\left(\frac{2}{3}+1, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Calcolo la distanza $\overline{PB} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{4}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}-2\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{\cancel{21}^{\,7}}{\cancel{9}_{\,3}}} = \boxed{\sqrt{\frac{7}{3}}}$

b)

$r: \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ $\vec{v}_r = (1,2,1)$ $P(1,1,2)$ $x+y=1$

$s \perp r$, passante per $P$, $//\ x+y=1$

- $\vec{v}_s = (l, m, n)$ $s: \begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 1 + mt \\ z = 2 + nt \end{cases}$ (PASSAGGIO PER P)

- $s \perp r \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow (1,2,1)\cdot(l,m,n) = 0$

$$l + 2m + n = 0 \quad (*)$$

- $s$ // piano $x+y-1=0 \iff \vec{v}_s \perp$ vettore normale del piano $(1,1,0)$

$$(1,1,0)\cdot(l,m,n) = 0$$

$$l + m + n\cdot 0 = 0 \quad (*)(*)$$

$$\begin{matrix}(*) \\ (**)\end{matrix}\begin{cases} l+2m+n=0 \\ l+m=0 \end{cases} \quad \begin{cases} l-2l+n=0 \\ m=-l \end{cases} \quad \begin{cases} -l+n=0 \\ m=-l \end{cases} \quad \begin{cases} n=l \\ m=-l \end{cases}$$

Scelgo $l = 1 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ m=-1 \end{cases}$ $\vec{v}_s = (1,-1,1)$

$$\boxed{s: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2+t \end{cases}}$$

RIS. LIBRO (STESSA RETTA)

$\begin{cases} y+z-3=0 \\ x+y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ 2-t+z-3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=1+t \end{cases}$ DIR. $(1,-1,1)$

PASSA PER $P(1,1,2)$ CON $t=1$

**271** ●●

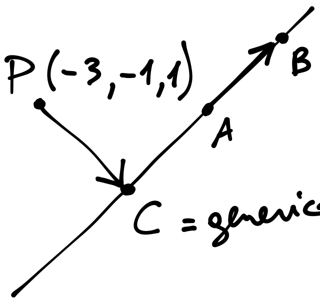
Scrivi le equazioni parametriche della retta passante per il punto $P(-3;-1;1)$, perpendicolare e incidente alla retta $AB$, con $A(3;-3;2)$ e $B(8;-2;1)$.

$$\left[\begin{cases} x = -3+t \\ y = -1-3t \\ z = 1+2t \end{cases}\right]$$

retta AB $\qquad \dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A} = \dfrac{z-z_A}{z_B-z_A}$

$$\frac{x-3}{8-3} = \frac{y+3}{-2+3} = \frac{z-2}{1-2} \Rightarrow \frac{x-3}{5} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

$\vec{AB} = (5,1,-1)$ VETTORE DIREZIONALE DI AB




C = generico punto di AB

$$AB \begin{cases} \dfrac{x-3}{5} = t \\ y+3 = t \\ \dfrac{z-2}{-1} = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3+5t \\ y = -3+t \\ z = 2-t \end{cases}$$

$C(3+5t, -3+t, 2-t)$

PONGO $\vec{PC} \cdot \vec{AB} = 0$

$$\vec{PC} = (3+5t+3, -3+t+1, 2-t-1) = (6+5t, -2+t, 1-t)$$

$$\Downarrow$$

$$(6+5t, -2+t, 1-t) \cdot (5,1,-1) = 0$$

$$5(6+5t) - 2 + t - 1 + t = 0 \qquad 30 + 25t - 3 + 2t = 0$$

$$27t = -27 \qquad t = -1$$

$\vec{PC} = (1,-3,2)$ VETTORE DIREZIONALE DELLA RETTA

retta PC $\boxed{\begin{cases} x = -3+t \\ y = -1-3t \\ z = 1+2t \end{cases}}$

**271** Scrivi le equazioni parametriche della retta passante per il punto $P(-3; -1; 1)$, perpendicolare e incidente alla retta $AB$, con $A(3; -3; 2)$ e $B(8; -2; 1)$.

$$\left[\begin{cases} x = -3 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}\right]$$

RISOLUZIONE ALTERNATIVA

$$\vec{AB} = (5, 1, -1)$$

Trovo il piano per P perpendicolare ad AB

$$5(x+3) + (y+1) - (z-1) = 0$$

$$5x + 15 + y + 1 - z + 1 = 0$$

$$5x + y - z + 17 = 0$$

retta AB

$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Trovo il punto d'intersezione C fra il piano e la retta AB

$$C: \begin{cases} 5x + y - z + 17 = 0 \\ x = 3 + 5t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

$$5(3+5t) + (-3+t) - (2-t) + 17 = 0$$

$$15 + 25t - 3 + t - 2 + t + 17 = 0$$

$$27t = -27 \qquad t = -1$$

$$C(-2, -4, 3)$$

Scrivo l'equazione della retta PC

$$P(-3, -1, 1)$$
$$C(-2, -4, 3)$$

vettore direzionale $\vec{PC} = (-2+3, -4+1, 3-1) = (1, -3, 2)$

retta PC $\boxed{\begin{cases} x = -3 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}}$

**193** **a.** Verifica che il triangolo $OAB$, con $A(2;-2;1)$ e $B(6;0;-3)$, è rettangolo e calcolane l'area.

**b.** Calcola il volume del tetraedro $OABV$, con $V(2;4;4)$. [a) 9; b) 18]

a) $\vec{OA} = (2,-2,1)$ $\quad \vec{AB} = (6-2, 0+2, -3-1) = (4,2,-4)$

$\vec{OB} = (6,0,-3)$

$$\vec{OA}\cdot\vec{AB} = (2,-2,1)\cdot(4,2,-4) =$$
$$= 2\cdot 4 + (-2)\cdot 2 + 1\cdot(-4) =$$
$$= 8-4-4 = 0 \Rightarrow \vec{OA} \perp \vec{AB}$$

$$|\vec{OA}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2+2^2+(-4)^2} = \sqrt{16+4+16} = 6$$

$$\mathcal{A}_{OAB} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6 = \boxed{9}$$

b) Trovo il piano $\alpha$ passante per $O, A, B$

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{array}{l} O \to \\ A(2,-2,1)\to \\ B(6,0,-3)\to \end{array}\begin{cases} d=0 \\ 2a-2b+c=0 \\ 6a-3c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} d=0 \\ 2a-2b+2a=0 \\ c=2a \end{cases} \quad \begin{cases} d=0 \\ c=2a \\ b=2a \end{cases}$$

scelgo $a=1$ $\quad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=2 \\ d=0 \end{cases} \quad x+2y+2z=0$

Trovo la distanza di $V(2,4,4)$ dal piano $\alpha$ (altezza del tetraedro)

$$h = \frac{|2+2\cdot 4+2\cdot 4|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{18}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = 6$$

VOLUME

$$V_{OABV} = \frac{1}{3}\cdot\mathcal{A}_{OAB}\cdot h = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot 9\cdot \cancel{6}^{\,2} = \boxed{18}$$

**195** ●●
Determina i valori di $k$ per cui il piano di equazione $(2-k)x+ky-3kz+1+k=0$:

**a.** passa per l'origine degli assi;

**b.** passa per il punto $P(3; 1; 0)$;

**c.** è perpendicolare al piano di equazione $5x-y-2=0$.

$\left[\text{a) } -1; \text{ b) } 7; \text{ c) } \frac{5}{3}\right]$

a) passaggio per l'origine $\Rightarrow d=0$

$1+K=0 \Rightarrow \boxed{K=-1}$

b) passaggio per $P(3,1,0)$

$(2-K)\cdot 3 + K\cdot 1 - 3K\cdot 0 + 1 + K = 0$

$6-3K+K+1+K=0 \qquad -K=-7 \Rightarrow \boxed{K=7}$

c) $(2-K)x+Ky-3Kz+1+K=0 \perp 5x-y-2=0$

$5(2-K)+(-1)\cdot K+0\cdot(-3K)=0$

$10-5K-K=0 \qquad -6K=-10 \qquad K=\frac{10}{6}=\boxed{\frac{5}{3}}$

QUESITO SIMULAZIONE ESAME DI STATO 28/2/2019

5. Si consideri la superficie sferica $S$ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.
   - Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano $\pi$ di equazione $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ e la superficie S sono secanti.
   - Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando $\pi$ e $S$.

a) $S: \; x^2+y^2+z^2-2x+6z=0$

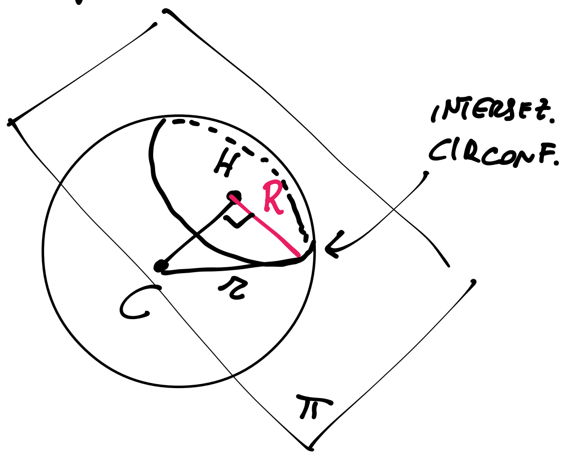
$$C\left(\underset{\alpha}{-\frac{a}{2}}, \underset{\beta}{-\frac{b}{2}}, \underset{\gamma}{-\frac{c}{2}}\right)$$

$$\begin{cases} a=-2 \\ b=0 \\ c=6 \\ d=0 \end{cases}$$

$C(1,0,-3)$

$$r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-d}$$

$$r = \sqrt{1^2+0^2+(-3)^2-0} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$




Devo controllare che $\overline{CH}$ = distanza di C dal piano $\pi$ sia < raggio

$$\overline{CH} = \frac{|3\cdot 1 - 2\cdot 0 + 6(-3)+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+6^2}} = \frac{14}{\sqrt{9+4+36}} = \frac{14}{7} = 2 < \sqrt{10}$$

OK, sono secanti

b) $R = \sqrt{r^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{10-4} = \boxed{\sqrt{6}}$

TH. PITAGORA