372 REALTÀ E MODELLI **Luce in tondo** Una lampada è sospesa sul centro di un tavolo rotondo di diametro $d = 2$ m. La funzione che descrive l'intensità dell'illuminazione ai bordi del tavolo è:

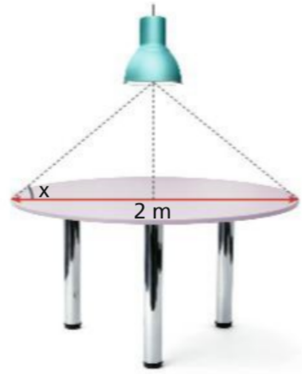
$$I = \frac{2}{d} \sin x \cos^2 x,$$

dove x indica l'angolo formato dal diametro del tavolo e dal raggio che colpisce il bordo in un estremo del diametro.

a. Studia come varia l'illuminazione al variare di x.

b. A che altezza del tavolo va posizionata la lampada per avere la massima illuminazione?

[b) circa 1,71 m $\left(\text{per } x = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$]



373 REALTÀ E MODELLI **Concentrazione farmaco** La concentrazione di un medicinale nel sangue dopo un'iniezione è descritta dalla funzione $C(t) = \frac{50}{t^2+1}$, dove $t \geq 0$ è il tempo espresso in ore e la concentrazione è misurata in mg/mL.

a. Studia e rappresenta graficamente la funzione.

b. Dopo quanto tempo la concentrazione è inferiore a 2 mg/mL?

c. In base al modello, la concentrazione del medicinale sarà mai nulla?

[b) 4 ore e 54 minuti; c) no]

2 Grafici di una funzione e della sua derivata

→ Teoria a p. 1842

Dal grafico di una funzione a quello della sua derivata

Attività interattiva

Se la funzione $f(x)$ è continua e derivabile due volte nell'intervallo considerato, per passare dal grafico di una funzione a quello della sua derivata consideriamo che:

- nei punti di massimo e di minimo e nei punti di flesso orizzontale della funzione $f(x)$ si ha $f'(x) = 0$;
- negli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è crescente si ha $f'(x) > 0$ e negli intervalli in cui la funzione è decrescente si ha $f'(x) < 0$;
- in tutti i punti di flesso di $f(x)$, sia orizzontali sia obliqui, si ha $f''(x) = 0$ e quindi $f'(x)$ ha la tangente orizzontale e può avere un massimo o un minimo.

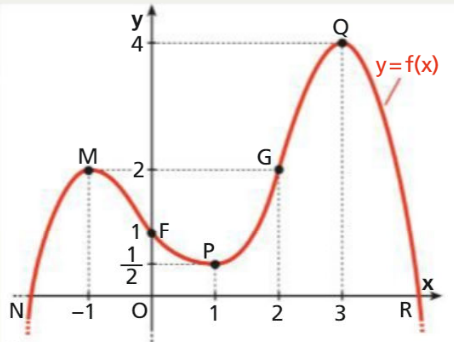
f' strett. crescente ⇒ f concavità verso l'alto
f' strett. decrescente ⇒ f concavità verso il basso

374 ESERCIZIO GUIDA Dato il grafico di $y = f(x)$ della figura **a**, studiamo l'andamento del grafico della sua derivata $y = f'(x)$.

I punti M, P, Q, di ascisse rispettive -1, 1, 3, sono punti di massimo e minimo relativi per $f(x)$, quindi $f'(x) = 0$ per $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$.

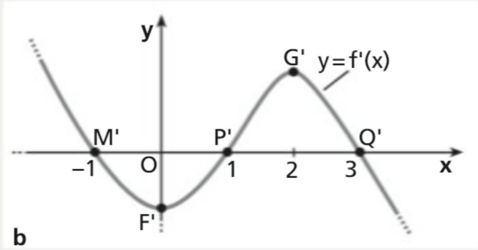
Nei tratti NM e PQ la funzione $f(x)$ è crescente, quindi $f'(x) > 0$, mentre nei tratti MP e QR $f(x)$ è decrescente, quindi $f'(x) < 0$.

Nei punti di flesso F e G di $f(x)$ si ha $f''(x) = 0$, quindi $f'(x)$ ha un minimo in $x = 0$ e un massimo in $x = 2$.



a

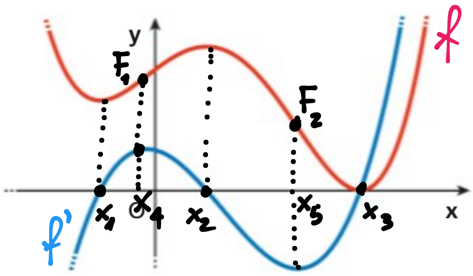
Rappresentiamo graficamente in modo qualitativo l'andamento di $f'(x)$ (figura **b**).



375 Nel grafico sono rappresentate una funzione $f(x)$ e la sua derivata $f'(x)$. Indica qual è il grafico di $f(x)$ e qual è quello di $f'(x)$.

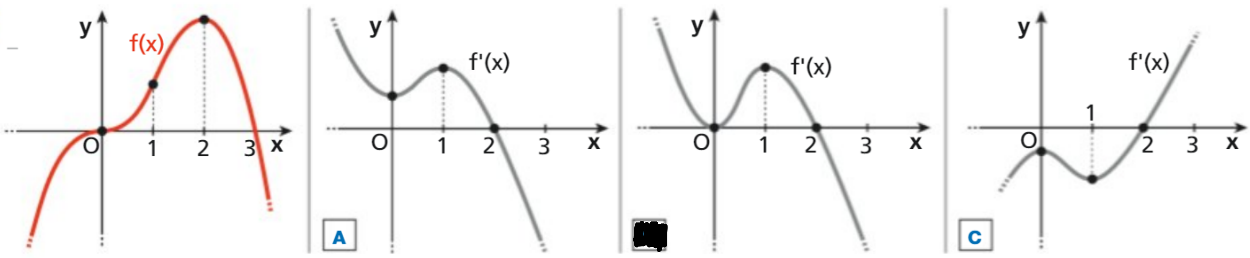
x_1, x_2, x_3 = estremi relativi

x_4, x_5 = flessi

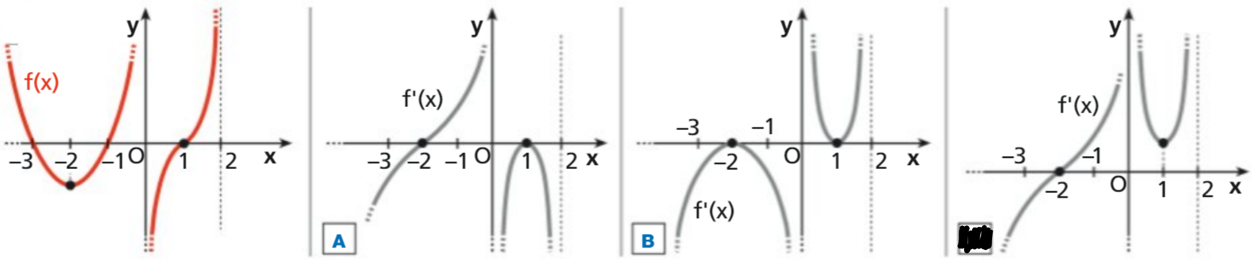


TEST Dato il grafico di $y = f(x)$, individua l'andamento del grafico della sua derivata $y = f'(x)$ fra le tre alternative proposte.

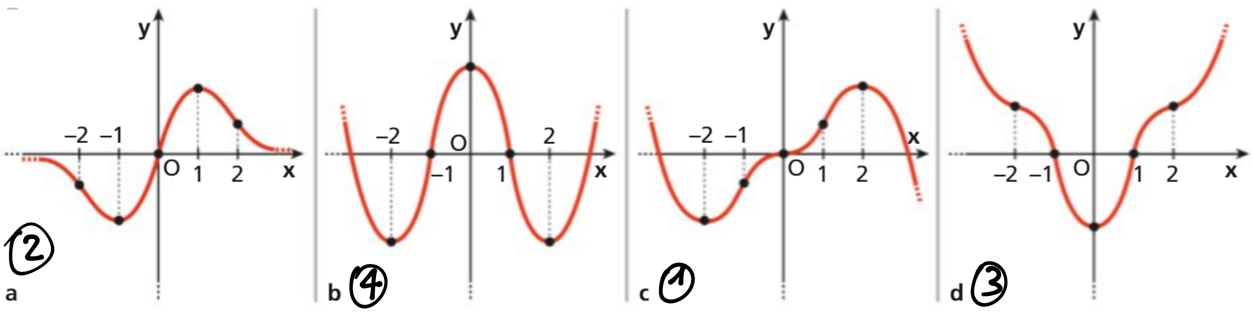
376

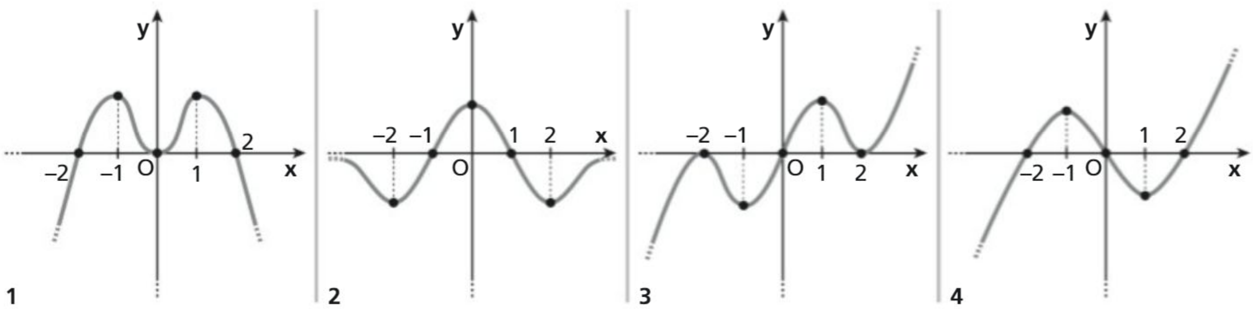


377



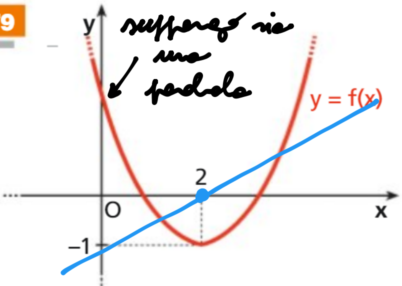
378 **ASSOCIA** al grafico di ciascuna funzione quello della sua derivata.



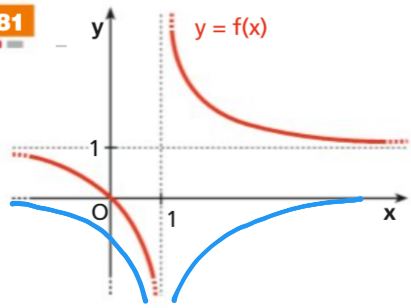


Dato il grafico della funzione $y = f(x)$, traccia l'andamento di quello della sua derivata.

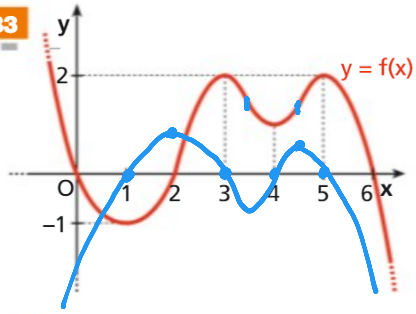
379



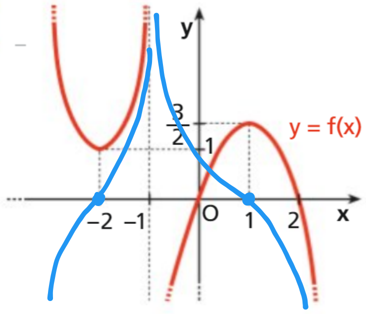
381



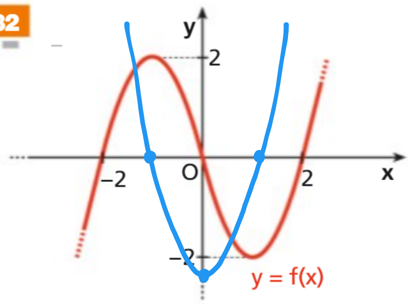
383



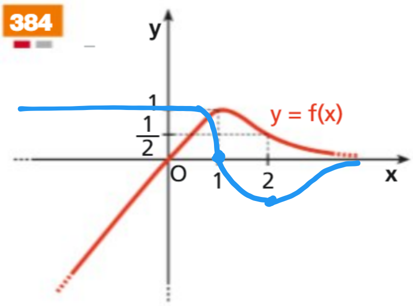
380



382



384



Rappresenta graficamente le seguenti funzioni $f(x)$ e utilizzando il grafico di $f(x)$ disegna quello di $f'(x)$ e di $f''(x)$.

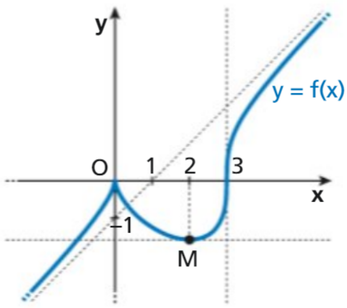
385 $f(x) = x^3 - 3x^2$

386 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

387 $f(x) = e^{x^2}$

388 Traccia nello stesso piano cartesiano il grafico della funzione $y = 2xe^{2x}$ e quello della sua derivata e poi trova le coordinate del loro punto di intersezione. $[P(-1; -2e^{-2})]$

389 **LEGGI IL GRAFICO** Osserva il grafico della funzione $f(x)$.



a. Determina il segno e gli eventuali zeri della funzione $f'(x)$.

b. Calcola il valore dei limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x); \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x); \quad \lim_{x\to 3^-} f'(x);$$

$$\lim_{x\to 3^+} f'(x); \quad \lim_{x\to +\infty} f'(x); \quad \lim_{x\to -\infty} f'(x).$$

Deduci le equazioni degli asintoti di $f'(x)$.

c. Determina qual è il minimo numero di punti di flesso di $f'(\ )$ e traccia un grafico indicativo.

[a) $f'(x) \geq 0$ per $x < 0 \vee 2 \leq x < 3 \vee x > 3$; b) $+\infty, -\infty, +\infty, +\infty, 1, 1$; *a*: $y = 1$, $x = 0$, $x = 3$; c) un flesso per $0 < x < 3$]

Dal grafico della derivata a quello della funzione

Attività interattiva

390 **ESERCIZIO GUIDA** Dato il grafico della funzione $y = f'(x)$ della figura, studiamo il possibile andamento del grafico di una funzione $f(x)$ che abbia $y = f'(x)$ come derivata.