189 Considerata l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, determinare a e b sapendo che è tangente alla retta di equazione $4x+y-7=0$ e che passa per il punto $(2\sqrt{2};3)$.

(Università di Firenze, Corso di laurea in Scienze vivaistiche)

$$\left[a_1=\sqrt{7};\, b_1=3\sqrt{7};\, a_2=\frac{\sqrt{14}}{2};\, b_2=\sqrt{7}\right]$$

$$\frac{1}{a^2}=\alpha \qquad \frac{1}{b^2}=\beta \qquad \alpha x^2-\beta y^2=1$$

$$\begin{cases}\alpha x^2-\beta y^2=1\\ y=-4x+7\end{cases} \qquad \alpha x^2-\beta(-4x+7)^2-1=0$$

$$\alpha x^2-\beta(16x^2+49-56x)-1=0$$

$$\alpha x^2-16\beta x^2-49\beta+56\beta x-1=0$$

$$(\alpha-16\beta)x^2+56\beta x-49\beta-1=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=0 \qquad (28\beta)^2-(\alpha-16\beta)(-49\beta-1)=0$$

$$784\beta^2+(\alpha-16\beta)(49\beta+1)=0$$

$$\cancel{784\beta^2}+49\alpha\beta+\alpha-\cancel{784\beta^2}-16\beta=0$$

PASSAGGIO PER $(2\sqrt{2},3)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases}49\alpha\beta+\alpha-16\beta=0\\ 8\alpha-9\beta=1\end{cases}$

$$\begin{cases}49\left(\frac{9}{8}\beta+\frac{1}{8}\right)\beta+\frac{9}{8}\beta+\frac{1}{8}-16\beta=0\\ \alpha=\frac{9}{8}\beta+\frac{1}{8}\end{cases} \qquad \frac{441}{8}\beta^2+\frac{49}{8}\beta+\frac{9}{8}\beta+\frac{1}{8}-16\beta=0$$

$$\Downarrow$$

$$441\beta^2+49\beta+9\beta+1-128\beta=0$$

$$441\beta^2-70\beta+1=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=1225-441=784=28^2$$

$$\beta=\frac{35\pm28}{441}=\begin{cases}\frac{\cancel{63}}{\cancel{441}}=\frac{1}{7}\\ \frac{\cancel{7}}{\cancel{441}}=\frac{1}{63}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{9}{8}\beta + \frac{1}{8} \\ \beta = \frac{1}{7} \vee \beta = \frac{1}{63} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{9+7}{56} = \frac{\cancel{16}^{\,\cancel{8}\,2}}{\cancel{56}_{\,\cancel{28}\,7}} = \frac{2}{7} \\ \beta = \frac{1}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{2}{7} \\ \beta = \frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\cancel{8}^{\,1}}{8} \cdot \frac{1}{\cancel{63}_{\,7}} + \frac{1}{8} = \frac{1+7}{56} = \frac{\cancel{8}^{\,\cancel{2}\,1}}{\cancel{56}_{\,\cancel{14}\,7}} = \frac{1}{7} \\ \beta = \frac{1}{63} \end{cases}$$

1^a iperbole $\quad \frac{2}{7}x^2 - \frac{1}{7}y^2 = 1$

2^a iperbole $\quad \frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{63}y^2 = 1$

1) $\dfrac{x^2}{\frac{7}{2}} - \dfrac{y^2}{7} = 1 \implies a^2 = \frac{7}{2}$, $b^2 = 7$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \\ b &= \sqrt{7} \end{aligned}}$$

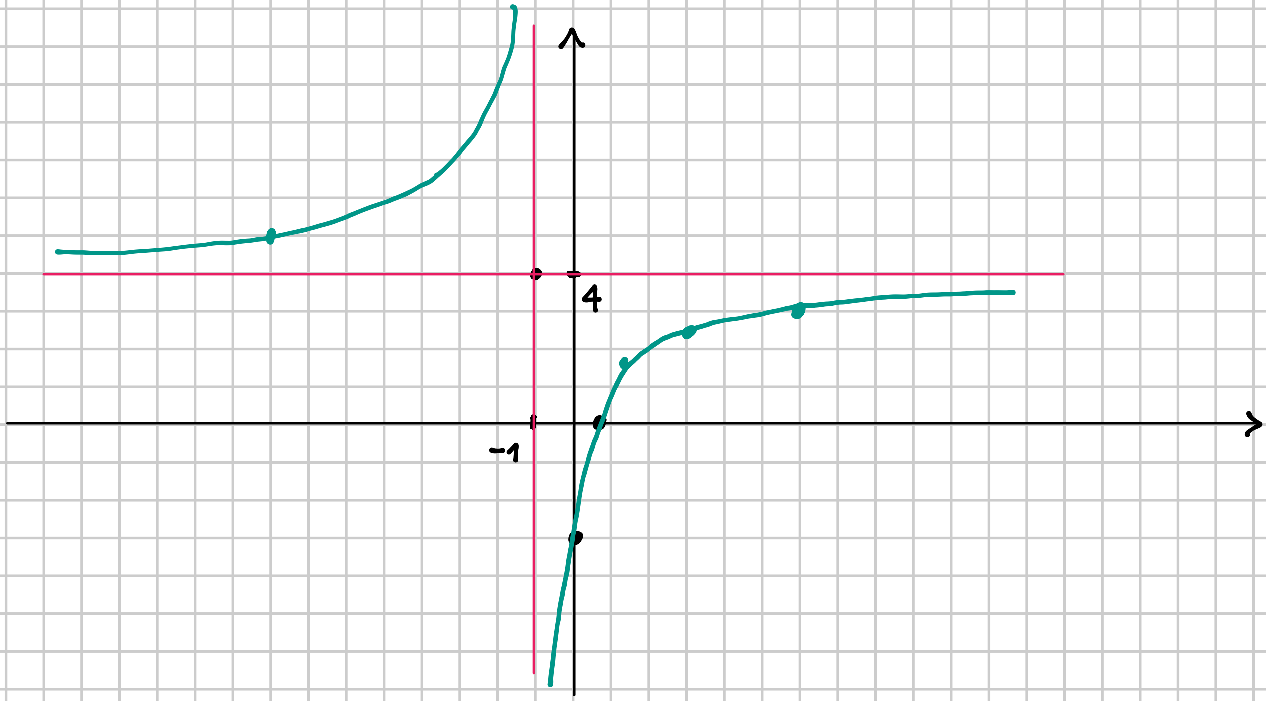
2) $\dfrac{x^2}{7} - \dfrac{y^2}{63} = 1 \implies a^2 = 7$, $b^2 = 63$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \sqrt{7} \\ b &= \sqrt{63} = 3\sqrt{7} \end{aligned}}$$

344 Determina per quali valori di a e b l'iperbole di equazione $y = \frac{ax-3}{bx+1}$ ha centro nel punto $C(-1; 4)$.

$[a = 4; b = 1]$

$C(-1, 4) \Rightarrow$ gli asintoti sono $x = -1$ e $y = 4$



eq. asintoto verticale $bx + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{b}$

dato che l'asintoto verticale è $x = -1 \Rightarrow -\frac{1}{b} = -1 \Rightarrow b = 1$

eq. asintoto orizzontale $y = \frac{a}{b}$

dato che l'as. orizz. è $y = 4 \Rightarrow \frac{a}{b} = 4 \Rightarrow a = 4$

L'equazione della funzione omografica è $y = \frac{4x-3}{x+1}$

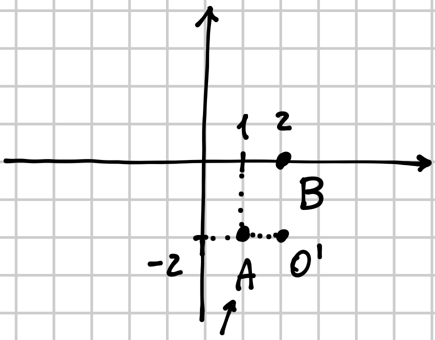
INT. ASSE x $\begin{cases} y = \frac{4x-3}{x+1} \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4x-3}{x+1} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 0 \end{cases}$

INT. ASSE y $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{4x-3}{x+1} = -3 \end{cases}$

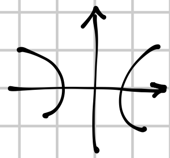
212 Scrivi l'equazione dell'iperbole avente centro di simmetria $O'(2; -2)$, gli assi paralleli agli assi cartesiani, un vertice reale in $A(1; -2)$ e un vertice non reale in $B(2; 0)$.

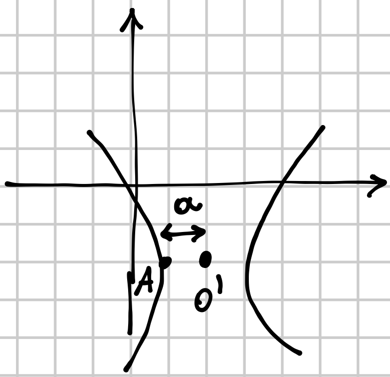
$$\left[(x-2)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = 1\right]$$

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y+2)^2}{b^2} = 1$$



VERTICE REALE $\Rightarrow$ FUOCHI SU UNA RETTA // ASSE X





$$a = \overline{AO'} = |2-1| = 1$$

$$b = \overline{BO'} = |0-(-2)| = 2$$

$$\boxed{(x-2)^2 - \frac{(y+2)^2}{4} = 1}$$

ASINTOTI

I coefficienti angolari sono $\pm \frac{b}{a}$. Gli asintoti passano per il centro $O'(2,-2)$

$$\Downarrow$$

$$\pm 2$$

ASINTOTO 1

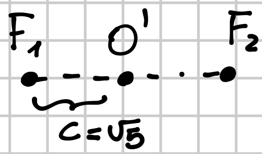
$$y+2 = 2(x-2)$$

$$y = 2x - 6$$

ASINTOTO 2

$$y+2 = -2(x-2)$$

$$y = -2x + 2$$

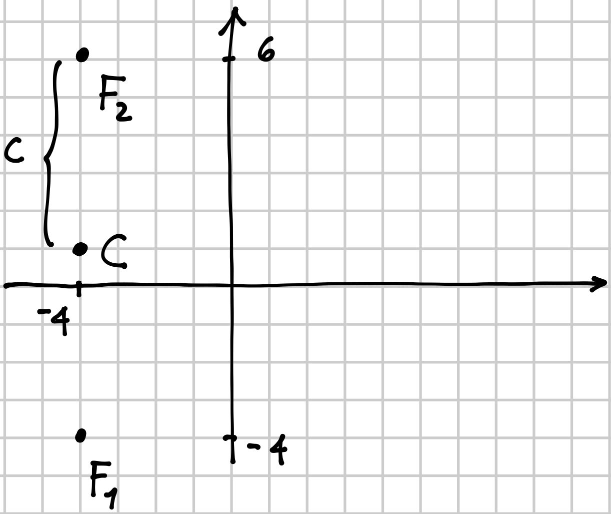


FUOCHI

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$F_1(2-\sqrt{5}, -2) \quad F_2(2+\sqrt{5}, -2)$$

214 Trova e rappresenta l'equazione dell'iperbole con assi paralleli agli assi cartesiani, con i fuochi $F_1(-4; -4)$, $F_2(-4; 6)$ e semiasse trasverso di lunghezza 4. $\left[\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = -1\right]$



Il centro $C(\alpha, \beta)$ è nel punto medio del segmento F_1F_2

$$x_c = \frac{-4-4}{2} = -4$$

$$y_c = \frac{-4+6}{2} = 1$$

$C(-4, 1)$

$$\frac{(x+4)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = -1$$

fuochi su asse verticale

SEMIASSE TRASVERSO $b = 4$

$$c = \overline{F_2C} = |6-1| = 5$$

$$a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\boxed{\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = -1}$$