148 Scrivi le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 9$, condotte dal punto $P\left(3; \frac{3}{2}\right)$. Indicati con R e S i punti di contatto, trova l'area del triangolo PRS.

$\left[x - 3 = 0; x + 4y - 9 = 0; \frac{3}{2}\right]$

$y - \frac{3}{2} = m(x-3)$ retta per P

$$\begin{cases} y = mx - 3m + \frac{3}{2} \\ x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases}$$

$x^2 + 2\left(mx - 3m + \frac{3}{2}\right)^2 - 9 = 0$

$x^2 + 2\left(m^2x^2 + 9m^2 + \frac{9}{4} - 6m^2x + 3mx - 9m\right) - 9 = 0$

$x^2 + 2m^2x^2 + 18m^2 + \frac{9}{2} - 12m^2x + 6mx - 18m - 9 = 0$

$(1+2m^2)x^2 - 2(6m^2 - 3m)x + 18m^2 - 18m - \frac{9}{2} = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 0 \qquad (6m^2 - 3m)^2 - (1+2m^2)\left(18m^2 - 18m - \frac{9}{2}\right) = 0$

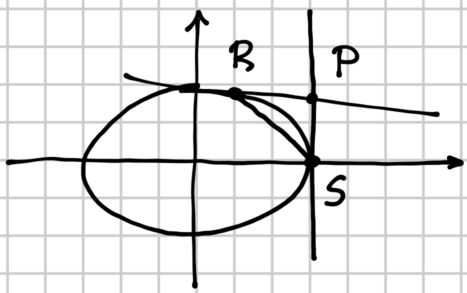
$\cancel{36m^4} + \cancel{9m^2} - \cancel{36m^3} - \cancel{18m^2} + 18m + \frac{9}{2} - \cancel{36m^4} + \cancel{36m^3} + \cancel{9m^2} = 0$

$18m + \frac{9}{2} = 0 \qquad 18m = -\frac{9}{2} \qquad m = -\frac{1}{4}$

Dato che P è esterno devo avere 2 tangenti: l'altra è la retta per P verticale

$x = 3$
tangente 1

$y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$
tangente 2



$S(3,0) \quad P\left(3, \frac{3}{2}\right)$

$$R \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 9 \\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4} \end{cases}$$

$x^2 + 2\left(-\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}\right)^2 - 9 = 0$

$x^2 + 2\left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{81}{16} - \frac{9}{8}x\right) - 9 = 0$

$x^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{81}{8} - \frac{9}{4}x - 9 = 0$

$$x^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{81}{8} - \frac{9}{4}x - 9 = 0$$

$$8x^2 + x^2 + 81 - 18x - 72 = 0$$

$$9x^2 - 18x + 9 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad (x-1)^2 = 0 \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$R(1,2) \qquad P\left(3, \frac{3}{2}\right) \qquad S(3,0)$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 3 & \frac{3}{2} \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right| = \frac{3}{2} + 6 + 0 - \left(\frac{9}{2} + 0 + 6\right) =$$

$$= \frac{3}{2} + \cancel{6} - \frac{9}{2} - \cancel{6} = -3$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|-3| = \frac{3}{2}$$

173 Scrivi l'equazione dell'ellisse avente un vertice nel punto $(-3; 0)$ e passante per $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -2\right)$.

$[8x^2 + 9y^2 = 72]$

$A_1(-3,0) \Rightarrow a = 3$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

per trovare b^2 sostituisco le coordinate del punto

$$\frac{\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{9} + \frac{(-2)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\frac{9}{2}}{9} + \frac{4}{b^2} = 1 \qquad \frac{1}{2} + \frac{4}{b^2} = 1 \qquad \frac{4}{b^2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{b^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = 8$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

moltiplico per $8 \cdot 9$

$$\boxed{8x^2 + 9y^2 = 72}$$

182 Scrivi l'equazione dell'ellisse tangente nel punto $A(2;-1)$ alla retta di equazione $y = x - 3$.

$$\left[\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\right]$$

$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ $\quad \alpha = \frac{1}{a^2} \quad \beta = \frac{1}{b^2}$

passaggio per $A(2,-1) \Rightarrow 4\alpha + \beta = 1$

$$\begin{cases} \alpha x^2 + \beta y^2 = 1 \\ y = x - 3 \end{cases} \Rightarrow \alpha x^2 + \beta (x-3)^2 = 1$$

$$\alpha x^2 + \beta(x^2 + 9 - 6x) - 1 = 0$$

$$\alpha x^2 + \beta x^2 + 9\beta - 6\beta x - 1 = 0$$

$(\alpha+\beta)x^2 - 6\beta x + 9\beta - 1 = 0$ pongo $\frac{\Delta}{4} = 0$ (condiz. di tangenza)

$$\begin{cases} (-3\beta)^2 - (\alpha+\beta)(9\beta-1) = 0 \\ 4\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1-\beta}{4} \end{cases}$$

$$9\beta^2 - \left(\frac{1-\beta}{4} + \beta\right)(9\beta - 1) = 0$$

$$9\beta^2 - \left(\frac{1-\beta+4\beta}{4}\right)(9\beta-1) = 0$$

$$9\beta^2 - \frac{3\beta+1}{4} \cdot (9\beta - 1) = 0$$

$$36\beta^2 - (3\beta+1)(9\beta-1) = 0$$

$$36\beta^2 - (27\beta^2 - 3\beta + 9\beta - 1) = 0$$

$$36\beta^2 - 27\beta^2 + 3\beta - 9\beta + 1 = 0 \qquad 9\beta^2 - 6\beta + 1 = 0$$

$$(3\beta - 1)^2 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \frac{1-\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{\cancel{2}^{1}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_{2}} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1}$$

179 Scrivi l'equazione dell'ellisse di eccentricità $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e avente il semiasse minore $a = 4$. $\longrightarrow$ FUOCHI SU ASSE y

$$\left[\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1 \right]$$

$\Downarrow$

$e = \frac{c}{b}$

$a = 4$

$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{c}{b}$

$b^2 - c^2 = a^2$

$b^2 - c^2 = 16 \Rightarrow c^2 = b^2 - 16$

elevo al quadrato $\Downarrow$

$\frac{5}{25} = \frac{c^2}{b^2}$

$\frac{5}{25} = \frac{b^2 - 16}{b^2}$

$\frac{1}{5} b^2 = b^2 - 16$

$b^2 - \frac{1}{5} b^2 = 16$

$\frac{4}{5} b^2 = 16$

$b^2 = \cancel{16}^{4} \cdot \frac{5}{\cancel{4}_1} = 20$

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1}$$