12/2/2021

374 $\lim_{x \to 0^+} 2x \cdot \ln 5x = 0 \cdot \infty$ [0]

$$\lim_{x\to0^+} 2x \cdot \ln 5x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln 5x}{\frac{1}{2x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{\cancel{5}x}\cdot\cancel{5}}{-\frac{1}{2}x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\left(-2x^{\cancel{2}}\right) = 0$$

367 $\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^x = \infty \cdot 0$ [0]

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{-\frac{1}{x^3}}$$ e peggiora la situazione!

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

393 $\lim_{x \to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$ $[e^2]$

F. IND. $0^0 \quad 1^\infty \quad \infty^0$

$$\lim_{x\to0} (e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0} e^{\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to0} e^{\frac{\ln(e^x+x)}{x}} = \ldots (*)$$

A PARTE $\lim_{x\to0} \frac{\ln(e^x+x)}{x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{e^x+x}\cdot(e^x+1)}{1} =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2 \qquad (*) = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\ln(e^x + x)}{x}} = e^2$$

400 $\lim_{x \to 0^+} x^{\sin x} = 0^0$ [1]

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\sin x \cdot \ln x} = \ldots\ldots = e^0 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sin x \cdot \ln x = 0 \cdot \infty = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(\sin x)^{-2} \cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \lim_{x \to 0^+} -\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\overbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}^{\to 0}}_{\to 1} = 0$$

74 È data la funzione $f(x) = \dfrac{2x + \cos x}{x}$.

a. Determina il suo dominio e calcola $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Dimostra che tale limite non può essere calcolato con la regola di De L'Hospital. Quale ipotesi viene a mancare?

c. Scrivi l'equazione della tangente al grafico della funzione nel suo punto di ascissa $\dfrac{\pi}{2}$.

$\left[\text{a) } D: x \neq 0; 2; \text{c) } y = -\dfrac{2}{\pi}x + 3\right]$

a) DOMINIO $x \neq 0 \Rightarrow D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\cos x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(2 + \frac{\cos x}{x}\right)}{\cancel{x}} = 2$$

$\frac{\cos x}{x} \to 0$

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\downarrow\, 0} \leq \underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\downarrow\, 0} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow\, 0} \quad \text{per } x \to +\infty$$

0 per il TH. CARABINIERI

$\boxed{2x + \cos x \sim 2x \text{ per } x \to +\infty \text{ perché? } \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\cos x}{2x} = 1}$

b) Non si può applicare De L'Hôpital perché non esiste il limite del rapporto delle derivate:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-\sin x}{1} = \lim_{x\to+\infty} (2-\sin x) \not\exists \text{ perché}$$

$2-\sin x$ oscilla sempre fra 1 e 3

c) TANGENTE NEL PUNTO $(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \frac{2x + \cos x}{x} \qquad f'(x) = \frac{(2 - \sin x) \cdot x - 2x - \cos x}{x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x} - x\sin x - \cancel{2x} - \cos x}{x^2} =$$

$$= \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} + \overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{0}}{\frac{\pi}{2}} = 2 \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\frac{\pi}{\cancel{2}}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cancel{2}}} = -\frac{2}{\pi}$$

TANGENTE $\qquad y - 2 = -\frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

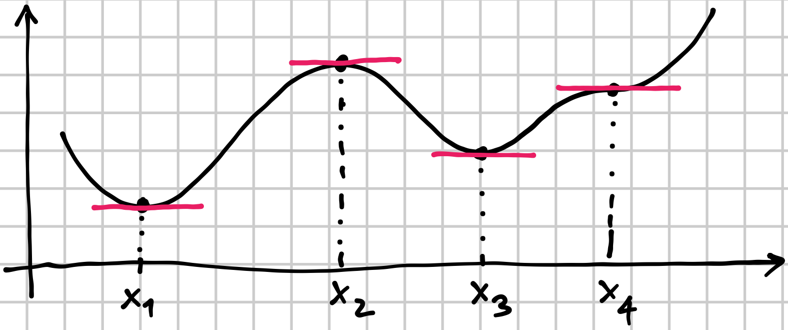
$$y = -\frac{2}{\pi}x + 1 + 2$$

$$\boxed{y = -\frac{2}{\pi}x + 3}$$

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO

$f: I \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in I \quad$ f è derivabile in x_0

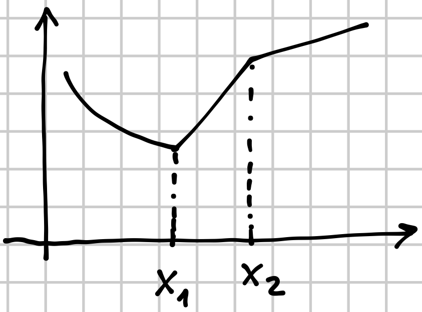
x_0 è un PUNTO STAZIONARIO sse $f'(x_0) = 0$
(PUNTO CRITICO)



x_1, x_3 = punti di minimo relativo

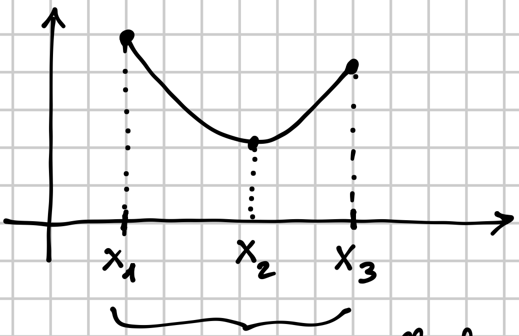
x_2 = punto di massimo relativo

x_4 = punto di FLESSO (a tang. orizzontale) né max, né min



x_1 = p.to angoloso, p.to di min relativo

x_2 = p.to angoloso, né di max né di min



$f: [x_1, x_3] \to \mathbb{R}$

x_2 = p.to di min

x_1 = p.to di max

x_3 = p.to di max

OPERATIVAMENTE, i massimi e minimi relativi vanno ricercati fra

- punti in cui la derivata si annulla (punti stazionari)
- punti in cui la funzione non è derivabile
- negli estremi degli intervalli di definizione

40 $y = 2x^3 + 6x^2$ $[x = -2 \max; x = 0 \min]$

Trovare max, min, flessi a tg. orizz.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile $\Rightarrow$ i max, min vanno ricercati fra i punti stazionari

$f'(x) = 6x^2 + 12x$

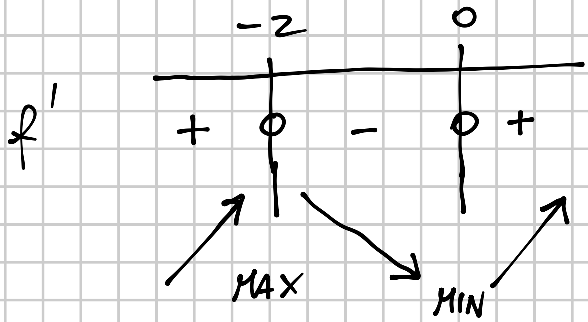
ZERI DI f' $\quad f'(x) = 0 \qquad 6x^2 + 12x = 0 \qquad 6x(x+2) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$

CANDIDATI MAX, MIN, FLESSI...

SEGNO DI f'

$f'(x) > 0 \qquad 6x^2 + 12x > 0 \qquad 6x(x+2) > 0 \qquad x < -2 \ \vee \ x > 0$



-2 è max relativo

0 è min relativo

51 $y = 6x^5 - 10x^3$

$$f'(x) = 30x^4 - 30x^2$$

ZERI DI f' $\quad f'(x) = 0 \qquad 30x^4 - 30x^2 = 0$

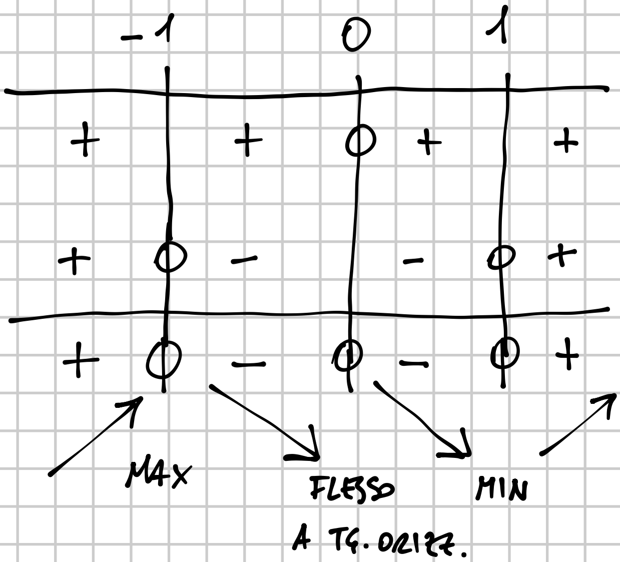
$$30x^2(x^2-1) = 0$$

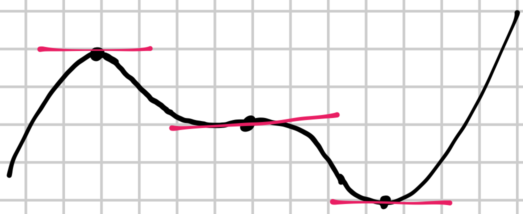
$$x = 0 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 1$$

SEGNO DI f' $\quad f'(x) > 0 \qquad 30x^2(x^2-1) > 0$

$x^2 > 0 \qquad \forall x \neq 0$

$x^2 - 1 > 0 \qquad x < -1 \vee x > 1$





110 $y = \sqrt[3]{x^2} - x = x^{\frac{2}{3}} - x$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - 1 = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1$$

0 è punto di non derivabilità

<u>ZERI</u>

$f'(x) = 0$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1 = 0 \qquad \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 1 \qquad 3\sqrt[3]{x} = 2 \qquad x = \frac{8}{27}$$

<u>SEGNO</u>

$$f'(x) > 0 \qquad \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1 > 0 \qquad \frac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}} > 0$$

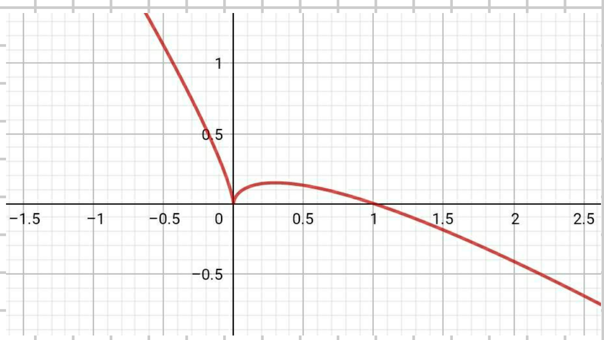
$N > 0 \qquad 2 - 3\sqrt[3]{x} > 0 \qquad \sqrt[3]{x} < \frac{2}{3} \qquad x < \frac{8}{27}$

$D > 0 \qquad 3\sqrt[3]{x} > 0 \qquad x > 0$

		0		$\frac{8}{27}$	
N	$+$		$+$	0	$-$
D	$-$	$\nexists$	$+$		$+$
f'	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$
	$\searrow$	MIN (CUSPIDE)	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

infatti $f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$

$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\infty$



0 CUSPIDE, P.TO DI MIN

$\frac{8}{27}$ P.TO DI MAX