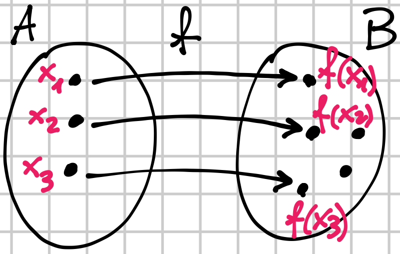
FUNZIONI INIETTIVE

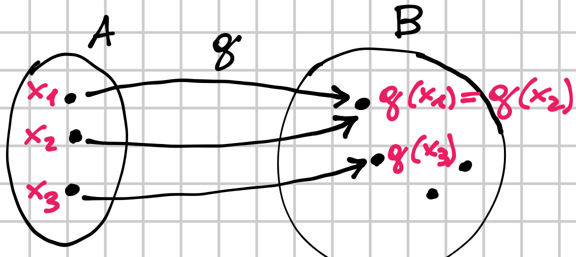
DEFINIZIONE

$f: A \to B$ è INIETTIVA se e solo se

$$\forall x_1, x_2 \in A \qquad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



f è INIETTIVA



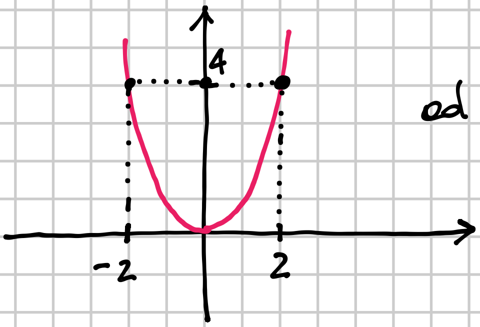
g è NON INIETTIVA

Nelle funzioni iniettive elementi distinti di A vanno in elementi distinti di B

Le funzioni iniettive si dicono anche 1-1 (UNO A UNO)

ESEMPI

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$ NON È INIETTIVA



ad es. $f(-2) = f(2)$

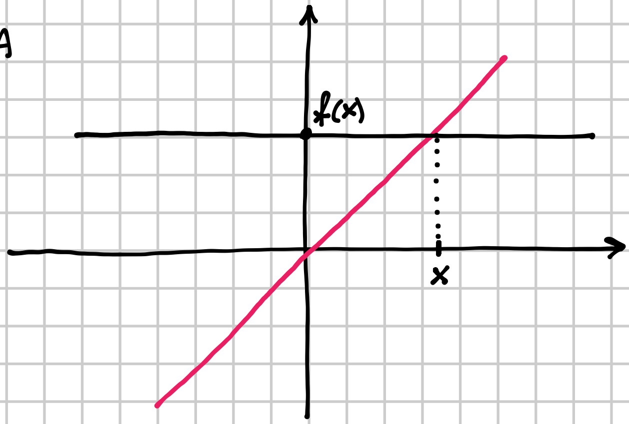
ogni elemento di $[0, +\infty)$ (pensato nell'asse y) ha 2 controimmagini (tranne 0 che ne ha solo una)

$\Downarrow$

l'equazione $x^2 = y$ ha 2 soluzioni distinte $x = \pm\sqrt{y}$ (tranne $y=0$)

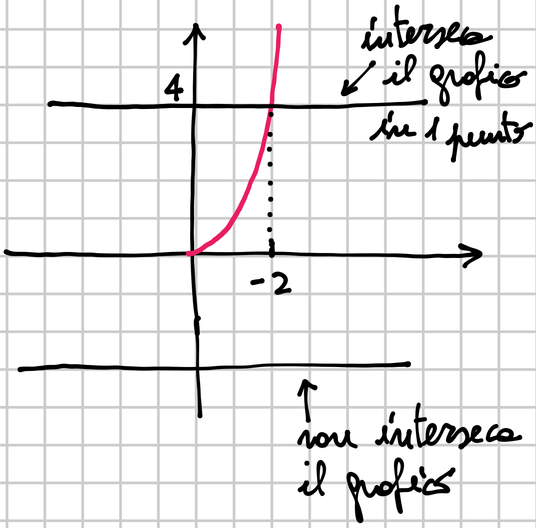
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x$ $\quad$ (FUNZIONE IDENTITÀ)

È INIETTIVA



ogni retta orizzontale interseca il grafico in al massimo un punto

3) $g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x^2$ $\quad$ è INIETTIVA



infatti ogni elemento di $\mathbb{R}$ o non ha controimmagini o ne ha solo una (ha al max 1 sola controimmagine)

ogni retta orizzontale interseca il grafico in al max 1 punto

Dato $y \geq 0$, la sua controimmagine è $x = \sqrt{y}$

La condizione di iniettività è

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \qquad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

IN MODO EQUIVALENTE

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \qquad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ESERCIZIO 1

Stabilire se la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2x^3 - 1$ è iniettiva o no.

Applico la condizione $\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Dati $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$, suppongo che $f(x_1) = f(x_2)$ cioè

$$\underbrace{2x_1^3 - 1}_{f(x_1)} = \underbrace{2x_2^3 - 1}_{f(x_2)}$$

aggiungo 1 a entrambi i membri

$$\Downarrow$$

$$2x_1^3 = 2x_2^3$$

divido per 2 entrambi i membri

$$\Downarrow$$

$$x_1^3 = x_2^3$$

applico $\sqrt[3]{}$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = x_2$$

Ho dimostrato che da $f(x_1) = f(x_2)$ discende che $x_1 = x_2$ (per qualsiasi coppia di elementi x_1, x_2 del dominio). Dunque f è INIETTIVA.

ESERCIZIO 2

Stabilire se $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad g(x)=x^2$ è iniettiva o no.

$$g(x_1)=g(x_2)$$

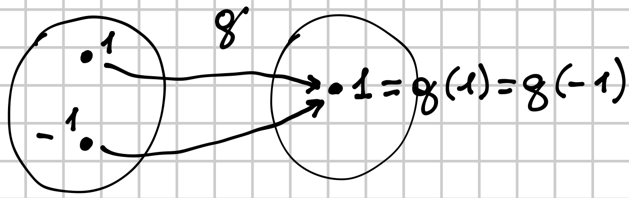
$$x_1^2=x_2^2$$

$$\Downarrow$$

$(x_1=x_2 \ \vee \ x_1=-x_2) \leftsquigarrow x_1=\pm x_2$ quindi non è vero che necessariamente $x_1=x_2$

dunque g **NON** è iniettiva

CONTROESEMPIO : $g(1)=g(-1)$ perché $1^2=(-1)^2$



ESERCIZIO 3

Stabilire se $h(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ $\quad h: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ $\quad$ è iniettiva

$$h(x_1) = h(x_2)$$

$$\frac{x_1+2}{x_1-1} = \frac{x_2+2}{x_2-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x_1-1+2+1}{x_1-1} = \frac{x_2-1+2+1}{x_2-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x_1-1+3}{x_1-1} = \frac{x_2-1+3}{x_2-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x_1-1}{x_1-1} + \frac{3}{x_1-1} = \frac{x_2-1}{x_2-1} + \frac{3}{x_2-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{1} + \frac{3}{x_1-1} = \cancel{1} + \frac{3}{x_2-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\cancel{3}}{x_1-1} = \frac{\cancel{3}}{x_2-1}$$

prendo i reciproci

$$\Downarrow$$

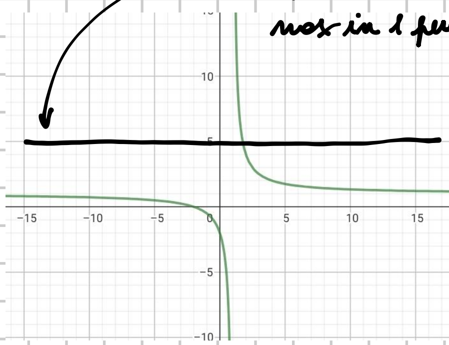
$$x_1 - 1 = x_2 - 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = x_2$$

È iniettiva

ogni retta orizz. interseca al max in 1 punto



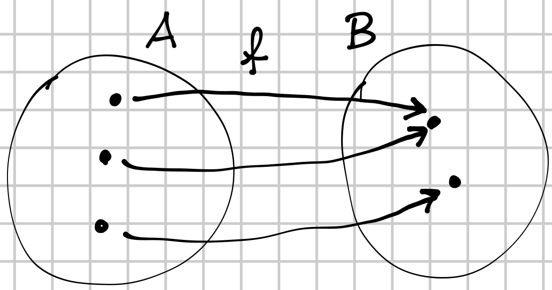
FUNZIONI SURIETTIVE

Una funzione $f: A \to B$ è SURIETTIVA se

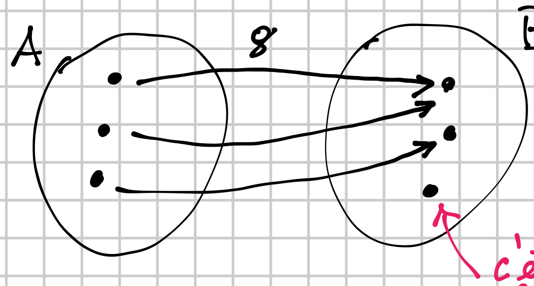
$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad \text{t.c.} \quad f(x) = y$$

TALE CHE

Ogni elemento di B ha almeno una controimmagine in A



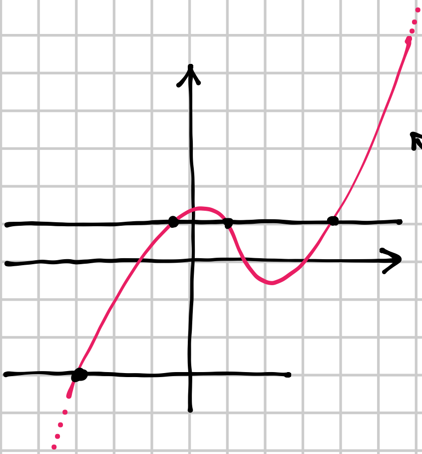
f è SURIETTIVA



g NON è SURIETTIVA

c'è un elemento a cui non arrivano frecce

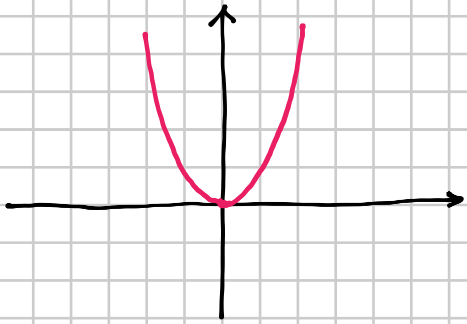
Se il codominio è $\mathbb{R}$ (con dominio $D \subseteq \mathbb{R}$), una funzione è suriettiva se ogni retta orizzontale interseca il grafico della funzione in almeno un punto



è il grafico di una funzione suriettiva

ESEMPIO IMPORTANTE

1) $f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

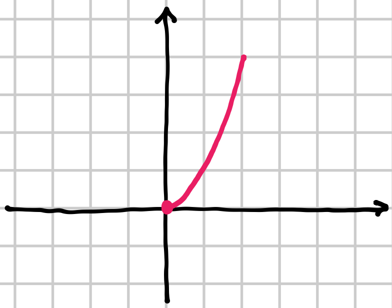


Né iniettiva né suriettiva

ogni $y>0$ ha 2 controimmagini

ad es. -1 non ha controimmagini

2) $f(x) = x^2$ $\quad f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

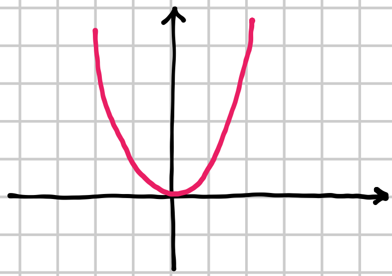


Iniettiva ma NON suriettiva

ogni $y \geq 0$ ha 1 sola controimmagine

ad es. -1 non ha alcuna controimmagine

3) $f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$



Non iniettiva ma suriettiva

ad es. 4 ha 2 controimmagini, che sono -2 e 2

ogni elemento di $[0, +\infty)$ ha almeno 1 controimmagine

4) $f(x) = x^2$ $\quad f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

Sia iniettiva che suriettiva

Una funzione sia iniettiva che suriettiva si dice BIETTIVA o CORRISPONDENZA BIUNIVOCA