17/2/2021

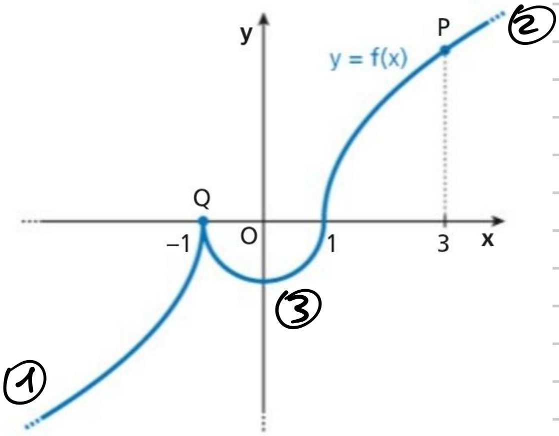
58 LEGGI IL GRAFICO Determina l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ il cui grafico è composto da due archi di parabola, con asse coincidente con l'asse x e direttrice l'asse y, e da una semicirconferenza.

a. Studia la derivabilità della funzione e classifica gli eventuali punti di non derivabilità.

b. Verifica che la tangente al grafico in P passa per Q.

c. Verifica se è possibile applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo $[0; 1]$.

d. Ci sono altri punti del grafico con tangente parallela alla tangente in P?



$$\left[y = \begin{cases} -\sqrt{-4x-4} & \text{se } x \le -1 \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 < x \le 1; \\ \sqrt{4x-4} & \text{se } x > 1 \end{cases} \text{a) } \begin{matrix} x=-1 \text{ cuspide,} \\ x = 1 \text{ punto a tangente verticale;} \end{matrix} \text{ d) } (-3; -2\sqrt{2}); \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \right]$$

$y = ax^2 + bx + c$ $\quad V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\quad y = \frac{-1-\Delta}{4a}$ $\quad F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$

$x = ay^2 + by + c$ $\quad V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$ $\quad x = \frac{-1-\Delta}{4a}$ $\quad F\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

VERTICE DIRETTRICE FUOCO

ASSE DI SIMMETRIA DELLE 2 PARABOLE : $y = 0 \Rightarrow b = 0$

$x = ay^2 + c$

1° PARABOLA ① $\boxed{x \le -1}$

$V(-1, 0) \Rightarrow -1 = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow c = -1$

$-\frac{\Delta}{4a} = -1 \Rightarrow \Delta = 4a \quad b^2 - 4ac = 4a$

(NON SERVE)

DIRETTRICE $\quad \frac{-1-\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = -1$

$b^2 - 4ac = -1$

$4a = -1 \quad a = -\frac{1}{4}$

$x = -\frac{1}{4}y^2 - 1 \quad \frac{1}{4}y^2 = -x - 1 \quad y^2 = -4(x+1) \quad y = -\sqrt{-4x-4}$

PRENDO IL −

2° PARABOLA (2) $\boxed{x \geq 1}$

$$x = ay^2 + c \qquad V(1,0)$$

$$\Downarrow$$

$$1 = c$$

DIRETTRICE $\dfrac{-1-\Delta}{4a} = 0 \implies \Delta = -1$

$$b^2 - 4ac = -1 \implies a = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4}y^2 + 1 \qquad \frac{1}{4}y^2 = x - 1 \qquad y = \sqrt{4x-4}$$

(3) SEMICIRC. INFERIORE DI CENTRO $O(0,0)$ E RAGGIO $R=1$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - x^2 \implies y = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-4x-4} & \text{se } x \leq -1 \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \sqrt{4x-4} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{-4x-4}} \cdot (-4) = \dfrac{2}{\sqrt{-4x-4}} & \text{se } x < -1 \\[2ex] -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } -1 < x < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2\sqrt{4x-4}} \cdot 4 = \dfrac{2}{\sqrt{4x-4}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{-4x-4}} \cdot (-4) = \dfrac{2}{\sqrt{-4x-4}} & \text{se} \quad x < -1 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{4x-4}} \cdot 4 = \dfrac{2}{\sqrt{4x-4}} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2}{\sqrt{-4x-4}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

-1 è una CUSPIDE

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

1 è un FLESSO A TANGENTE VERTICALE

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{\sqrt{4x-4}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

b) $f(x) = \sqrt{4x-4}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x-4}}$

$P(3, 2\sqrt{2})$ $\qquad f'(3) = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$y - 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-3)$$ TANGENTE IN P

$Q(-1, 0)$ $\qquad 0 - 2\sqrt{2} \overset{?}{=} \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-3)$

$$-2\sqrt{2} = -2\sqrt{2} \quad \underline{\underline{OK}}$$

c) È possibile applicare Lagrange ad f in $[0,1]$?

f è continua in $[0,1]$
f è derivabile in $]0,1[$

quindi è applicabile

d) $f'(3) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ Devo risolvere $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{1}\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-4x-4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x < -1 \end{cases} \vee \boxed{2}\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 < x < 1 \end{cases} \vee \boxed{3}\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4x-4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{1}\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{-4x-4} \\ x < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 8 = -4x-4 \\ x < -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ x < -1 \end{cases} \quad x = -3$$

$$P_2(-3, \underbrace{-2\sqrt{2}}_{f(-3)})$$

2] $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 < x < 1 \end{cases}$

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 = 1 - x^2$$

$$3x^2 = 1 \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

entrambe le soluzioni sono nell'int. $]-1,1[$ ma dobbiamo fare il controllo perché elevando al quadrato possono esserci soluzioni estranee

CONTROLLO $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ NON ACCETTABILE!

$$\frac{\overbrace{-\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\text{NEGATIVO}}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}}} \overset{?}{=} \overbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\text{POSITIVO}}$$

CONTROLLO $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}}} \overset{?}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \overset{?}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{?}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

OK!

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\sqrt{1-\frac{1}{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad P_3\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

3] $\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4x-4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x > 1 \end{cases}$ ....

RITROVIAMO IL PUNTO $P\left(3, 2\sqrt{2}\right)$