1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} - e^{-x}}{x}.$$

Calcola, se esistono, i limiti $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(x)$, giustificando le risposte.

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - e^{-x}}{x} = 0$ perché il numeratore è per $x \to +\infty$ un infinito di ordine inferiore rispetto al denominatore.

Infatti: $\sqrt[3]{x+1} - e^{-x} \sim \sqrt[3]{x}$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = 0$$

(Si può anche applicare il teorema di De L'Hôpital)

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - e^{-x}}{x} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} + e^{-x}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} + e^{-x} \right] = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

ALTERNATIVA:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1 + 1 - e^{-x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = \frac{1}{3} + \lim_{t\to 0} \frac{1-e^{t}}{-t} =$$

$x = -t$

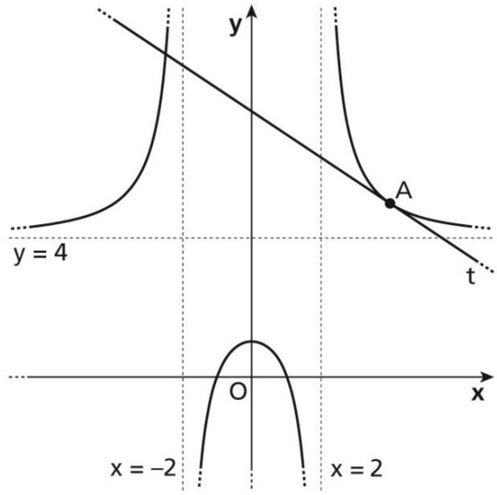
$$= \frac{1}{3} + \lim_{t\to 0} \frac{e^{t}-1}{t} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

2. La funzione $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+k}$, in cui $p(x)$ è un polinomio e $k \in \mathbb{R}$, ha il grafico in figura, che è simmetrico rispetto all'asse y.

La retta t è tangente al grafico di $f(x)$ nel punto A di ascissa 4 e ha coefficiente angolare $-\frac{2}{3}$.

Determinare il grado di $p(x)$ e l'espressione della funzione basandosi sulle informazioni che si possono dedurre dal grafico.

Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo della funzione $g(x) = xf(x)$.



Il grado di $p(x)$ è 2, perché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 4$ $(\neq 0 \text{ e } \neq \infty)$.
Se fosse di grado > 2 tenderebbe a ∞; se fosse di grado < 2 tenderebbe a 0 (per $x \to \pm\infty$)

$p(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad a = 4$

$b = 0$ perché f è pari

$\forall x \in D \quad f(-x) = f(x)$

$$\frac{a(-x)^2 + b(-x) + c}{(-x)^2 + K} = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + K} \qquad \forall x \in D$$

$$\frac{ax^2 - bx + c}{\cancel{x^2+K}} = \frac{ax^2 + bx + c}{\cancel{x^2+K}}$$

$$-bx = bx$$

$$2bx = 0 \qquad \forall x \in D$$

$$\Downarrow$$

$b = 0$ per la legge di annullamento del prodotto

$$f(x) = \frac{4x^2 + c}{x^2 + K}$$

dato che $x = -2$ e $x = 2$ sono asintoti verticali, $K = -4$

$$f(x) = \frac{4x^2 + c}{x^2 - 4}$$

$$f'(x) = \frac{8x(x^2-4) - 2x(4x^2+c)}{(x^2-4)^2} = \frac{\cancel{8x^3} - 32x - \cancel{8x^3} - 2cx}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(4) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-32 \cdot 4 - 8c}{144} = -\frac{2}{3}$$

$$-128 - 8c = -\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \overset{48}{\cancel{144}} \qquad 128 + 8c = 96 \qquad 16 + c = 12$$

$$c = -4 \qquad\qquad f(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2 - 4}$$

$$g(x) = x\, f(x)$$

ASINTOTO OBLIQUO

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 4$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} \left[g(x) - mx \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{4x^3 - 4x}{x^2 - 4} - 4x \right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{4x^3} - 4x - \cancel{4x^3} + 16x}{x^2 - 4} = 0$$

ASINTOTO OBLIQUO

$y = 4x$