数理統計学 4.3 章〜4.4 章

標本平均の標本分布

正規分布のたたみこみは正規分布なので、帰納法より、n 重のたたみこみも正規分布となる。

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ について、

$$
\begin{aligned}
E[\bar{X}] &= E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] \\
&= \frac{1}{n}E[\sum_{i=1}^{n} X_i] \\
&= \mu
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
Var[\bar{X}] &= Var[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] \\
&= \frac{1}{n^2}Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

より、$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ が成り立つ。

カイ二乗分布の定義

$X_1, \ldots, X_\nu \sim N(0,1), i.i.d$ について、$Y = X_1^2 + \cdots + X_\nu^2$ とする。
Y の分布を自由度 ν のカイ二乗分布 $\chi^2(\nu)$ という。

Y が自由度 ν のカイ二乗分布に従うとき、Y の密度関数は、

$$f(y) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} y^{\nu/2-1} e^{-y/2}, \quad y > 0$$

で与えられ、ガンマ分布の特殊な場合 $Ga(\nu/2, 2)$ と一致する。

ガンマ分布の密度関数による証明

$\mathit{Ga}(\nu_1, \alpha) * \mathit{Ga}(\nu_2, \alpha) = \mathit{Ga}(\nu_1 + \nu_2, \alpha)$ より、ガンマ分布の密度関数のたたみこみは形状母数が足された分布になる。

よって、$\nu = 1$ の場合に $Y = X_1^2$ の密度関数が $\mathit{Ga}(1/2, 2)$ の密度関数に一致することを示す。（他の自由度については帰納法的に証明可）

$Y = X_1^2$ の密度関数

$Y \leq y \Leftrightarrow -\sqrt{y} \leq X_1 \leq \sqrt{y}$ であるから、

$$P(Y \leq y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \phi(x)dx = 2\int_0^{\sqrt{y}} \phi(x)dx$$

両辺を y で微分すると、

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}\phi(\sqrt{y}) = \frac{1}{2^{1/2}\sqrt{\pi}} y^{1/2-1} e^{-y/2}$$

$Ga(1/2, 2)$ の密度関数

一方、$Ga(\nu, \alpha)$ の密度関数 (2.75 式) は、

$$f(y) = \frac{1}{\alpha^{\nu}\Gamma(\nu)} y^{\nu-1} e^{-y/\alpha}, \quad \Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

より、$Ga(1/2, 2)$ の密度関数は、

$$f(y) = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} y^{1/2-1} e^{-y/2}, \quad \Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} x^{1/2-1} e^{-x} dx$$

$\Gamma(1/2)$ の導出

ここで、$x = t^2$ として、$dx = 2tdt$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{1/2-1}e^{-x}dx &= \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}dx \\ &= \int_0^\infty (t^2)^{-1/2}e^{-t^2}2tdt \\ &= 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt \\ &= 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}f(y) &= \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)}y^{1/2-1}e^{-y/2} \\ &= \frac{1}{2^{1/2}\sqrt{\pi}}y^{1/2-1}e^{-y/2}\end{aligned}$$

問 4.1 カイ二乗分布の確率密度関数

$X_1, \dots X_n$ $N(0,1), i.i.d.,$ とする。$Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$ とおくとき、
Y の積率母関数が $E[e^{\theta Y}] = (1-2\theta)^{-n/2}$ で与えられることを示せ。
またこのことから Y の分布がガンマ分布 $Ga(n/2, 2)$ であることを確かめよ。

$$E[e^{\theta Y}] = E[e^{\theta(X_1^2 + \dots + X_n^2)}]$$
$$= \prod_{i=1}^{n} E[e^{\theta X_i^2}]$$

ここで、

$$E[e^{\theta X^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\theta - \frac{1}{2})x^2} dx$$

問 4.1 カイ二乗分布の確率密度関数

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ であることを既知として

$$E[e^{\theta X^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2} - \theta}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\theta}}$$

よって、

$$E[e^{\theta Y}] = (\frac{1}{\sqrt{1 - 2\theta}})^n$$
$$= (1 - 2\theta)^{-n/2}$$

を得る。

問 4.1 カイ二乗分布の確率密度関数

一方、ガンマ分布 $Ga(\nu, \alpha)$ の積率母関数 (2.76 式) は、

$$\phi(\theta) = (1 - \theta\alpha)^{-\nu}$$

であるから、$Ga(n/2, 2)$ の積率母関数は、

$$\phi(\theta) = (1 - 2\theta)^{-n/2}$$

よって、Y の分布は $Ga(n/2, 2)$ の分布と一致する。

標本分散の標本分布

正規分布の仮定のもとで $\bar{X}$ と $s^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/n$ について、以下が成り立つ。

- $\bar{X}$ と s^2 は互いに独立である。
- ns^2/σ^2 は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う。

X_i の代わりに基準化した確率変数 $Z_i = (X_i - \mu)/\sigma$ を用いた証明を行う。(簡単な線形変換によって X_i に関しても上記が成立する)

行列

- $n \times n$ の直交行列は、$G^\top G = GG^\top = I_n$
- n 次元の確率ベクトル $X = (X_1, \cdots, X_n)$ について $Y = GX$ とすれば、$X = G^\top Y$
- $1 = detI_n = det(G^\top G) = detG^\top detG = (detG)^2$
- $detG = detG^\top = \pm 1$
- $|detJ(\partial x/\partial y)| = |detG^\top| = 1$
- $X^\top X = Y^\top GG^\top Y = Y^\top Y$

Yの密度関数

よって、$X = G^\top Y$をXの密度関数に代入して、

$$f_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} exp(-\frac{y^\top y}{2})$$

となり、Yも標準多変量正規分布に従う。

Helmert 変換

1 行目が $g_1 = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots \frac{1}{\sqrt{n}})$、それ以外の行は g_1 に対して、$g_1, \cdots, g_n$ が $\mathbb{R}^{\ltimes}$ の正規直交底をなすように $g_2, \cdots, g_n$ を選ぶ。

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & \frac{-n+1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{pmatrix}$$

この G を用いた変換は Helmert 変換という。

問 4.2 各行のノルム

G の第 1 行を (4.12) 式、その他の行を (4.13) 式に定めるとき、G は直交行列となることを示せ。

第 1 行のノルムは、

$$||g_1||^2 = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{\sqrt{n}})^2 = n \times \frac{1}{n} = 1$$

第 k 行のノルムは、

$$||g_k||^2 = (k-1)\cdot(\frac{1}{\sqrt{k(k-1)}})^2 + (\frac{-(k-1)}{\sqrt{k(k-1)}})^2 = \frac{1}{k} + \frac{k-1}{k} = 1$$

問 4.2 各行の内積

第 1 行と第 k 行の内積は、

$$g_1 \cdot g_k = (k-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{-(k-1)}{\sqrt{k(k-1)}} = 0$$

第 k 行と第 l 行の内積について（$2 \leq k \leq l \leq n$）

$$g_k \cdot g_l = (k-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{k(k-1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l(l-1)}} + \frac{-(k-1)}{\sqrt{k(k-1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{l(l-1)}} = 0$$

よって、$GG^\top = G^\top G = I_n$ となるため、G は直交行列となる。

カイ二乗分布に従うことの証明

G は直行行列だから、

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X^\top X = (GX)^\top GX = Y^\top Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

G の第 1 行の選び方により、$Y_1 = \sqrt{n}\bar{X}$ であるから、

$$ns^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_1^2 = \sum_{i=2}^{n} Y_i^2$$

よって、ns^2 は自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う。

$Y_2, \cdots, Y_n$ は $Y_1 = \sqrt{n}\bar{X}$ と互いに独立であるから ns^2 と $\bar{X}$ は互いに独立であり、ns^2/σ^2 が自由度 $n-1$ のカイ二乗分布に従う。

t 分布

互いに独立な確率変数 $U \sim N(0,1), \quad V \sim \chi^2(m)$ について、

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/m}}$$

の分布を自由度 m の t 分布という。

また、$X_1, \cdots, X_n$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本としたとき、

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s} \quad \left(s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right)$$

を t 統計量という。

t 統計量の分布

式を変形して、

$$T = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{s^2/\sigma^2}}$$

として、$U = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$、$V = (n-1)s^2/\sigma^2$ とおけば、

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}}$$

となり、t 統計量の分布が自由度 $n-1$ の t 分布であることがわかる。

問 4.3 t 統計量　$n-1 \to n$ の変形

$s^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/n$ とするとき、t 統計量が $t = \sqrt{n-1}(\bar{X}-\mu)/s$ と書けることを示せ。

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2)}} = \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{n(n-1)}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2)}} = \frac{\sqrt{n-1}(\bar{X}-\mu)}{s}$$

t 分布の密度関数

U と V の同時密度関数は、

$$f(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \frac{v^{m/2-1} e^{-v/2}}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}$$

ここで、変数変換 $T = \frac{U}{\sqrt{V/m}}, \quad V = V$ について、逆変換は、
$U = T\sqrt{V/m}, \quad V = V$ であるから、ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{v/m} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって、ヤコビアンの絶対値は、$\sqrt{v/m}$

t 分布の密度関数

以上より、T, V の同時密度関数は、

$$
\begin{aligned}
f(t, v) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2 v/(2m)} \frac{\sqrt{v/m} v^{m/2-1} e^{-v/2}}{2^{m/2}\Gamma(m/2)} \\
&= \frac{v^{(m+1)/2-1} e^{-v(1+t^2/m)/2}}{2^{m/2}\Gamma(m/2)\sqrt{2\pi m}}
\end{aligned}
$$

となり、これを v に関して 0 から ∞ まで積分すると、

$$
f_T(t) = \int_0^\infty f(t, v) dv = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\sqrt{\pi m}\Gamma(\frac{m}{2})} (1 + \frac{t^2}{m})^{-(m+1)/2}
$$

を得る。

問 4.4 (4.19) 式

左辺について、

$$\int_0^\infty v^{(m+1)/2-1} e^{-v(1+t^2/m)/2} dv = \int_0^\infty v^{(m+1)/2-1} e^{-Av} dv$$

ここで、$t = Av$ とすれば、$v = t/A, dv = (1/A)dt$ であるから、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty v^{(m+1)/2-1} e^{-Av} dv &= \int_0^\infty (\frac{t}{A})^{(m+1)/2-1} e^{-t} \cdot \frac{1}{A} dt \\
&= (\frac{1}{A})^{(m+1)/2} \int_0^\infty t^{(m+1)/2-1} e^{-t} dt \\
&= (\frac{1}{A})^{(m+1)/2} \Gamma(\frac{m+1}{2}) \\
&= 2^{(m+1)/2} \Gamma(\frac{m+1}{2})(1 + \frac{t^2}{m})^{-(m+1)/2}
\end{aligned}$$

問 4.5

自由度 m が $m \to \infty$ のとき、t 分布の密度関数が正規分布の密度関数に収束することを示せ。

スターリングの公式より、

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\sqrt{2\pi a}a^a e^{-a}} = \frac{a\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi a}a^a e^{-a}} = \frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}a^{a-1/2}e^{-a}} \to 1$$

であるから、$\Gamma(a) \approx \sqrt{2\pi}a^{a-1/2}e^{-a}$ であるから、

$$\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \approx \frac{\sqrt{2\pi}(\frac{m+1}{2})^{\frac{m}{2}}e^{-(\frac{m+1}{2})}}{\sqrt{2\pi}(\frac{m}{2})^{\frac{m-1}{2}}e^{-(\frac{m}{2})}} = \sqrt{\frac{m}{2}}(1+\frac{1}{m})^{(m-1)/2}e^{-1/2}$$

問 4.5 続き

ここで、$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ を用いて、

$$(1+\frac{1}{m})^{(m-1)/2} = [(1+\frac{1}{m})^m]^{\frac{m-1}{2m}} \approx e^{\frac{m-1}{2m}} \to e^{1/2}$$

となるので、

$$\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\sqrt{\pi m}\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

一方、$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ を用いて、

$$(1+\frac{t^2}{m})^{-(m+1)/2} = [(1+\frac{t^2}{m})^m]^{-(m+1)/(2m)} \to [e^{t^2}]^{-1/2} = e^{-t^2/2}$$

問 4.5 続き

以上から、

$$\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\sqrt{\pi m}\Gamma(\frac{m}{2})}(1+\frac{t^2}{m})^{-(m+1)/2} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$$

となるため、正規分布の密度関数に収束する。

問 4.10 コーシー分布の期待値

自由度 1 の t 分布はコーシー分布といい、密度関数は

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2})}(1+t^2)^{-1} \\
&= \frac{1}{\pi(1+t^2)}
\end{aligned}
$$

であり、期待値は、

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |t| f(t) dt &= 2\int_0^{\infty} t f(t) dt \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{t}{\pi(1+t^2)} dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\log(1+t^2)\right]_0^{\infty} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

問 4.10 コーシー分布の分散

分散は、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{\pi(1+t^2)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-s}^{s} (1 - \frac{1}{1+t^2}) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[t - tan^{-1} t \right]_{-s}^{s} \\ &= \frac{1}{\pi} (2s - 2tan^{-1} s)\end{aligned}$$

$s \to \infty$ とすれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt = \infty$$

問 4.10 コーシー分布に従う証明

$U \sim U[0,1]$ とするとき、$X = tan(\pi(U - \frac{1}{2}))$ がコーシー分布に従うことを示せ。

$X = tan(\pi(U - \frac{1}{2}))$ を変形して、

$$U = \frac{1}{\pi} tan^{-1}(X) + \frac{1}{2}$$

であるから、逆関数 $u(x)$ は、

$$u(x) = \frac{1}{\pi} tan^{-1}(x) + \frac{1}{2}$$

また、ヤコビアンの絶対値は、

$$|\frac{du}{dx}| = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

問 4.10 コーシー分布に従う証明

$U \sim U[0,1]$ であるから、U の密度関数は、

$$f_U(u) = 1$$

変数変換より、

$$\begin{aligned} f_X(x) &= f_U(u(x)) \cdot \left|\frac{du}{dx}\right| \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)} \\ &= \frac{1}{\pi(1+x^2)} \end{aligned}$$

以上より、X はコーシー分布に従う。

問 4.10 コーシー分布の累積分布関数

コーシー分布の累積分布関数は、

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[tan^{-1}(t)\right]_{-\infty}^{x} \\
&= \frac{1}{\pi}(tan^{-1}(x) - (-\frac{\pi}{2})) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}tan^{-1}(x)
\end{aligned}
$$

F 分布

互いに独立な確率変数 $U \sim \chi^2(l), V \sim \chi^2(m)$ に対して、

$$Y = \frac{U/l}{V/m}$$

の分布を自由度 (l, m) の F 分布という。

- l は第 1 自由度あるいは分子の自由度
- m は第 2 自由度あるいは分母の自由度

$\tilde{Y}$ の密度関数

$\tilde{Y} = U/V$ の密度関数について、

$$Z = \frac{\tilde{Y}}{1+\tilde{Y}} = \frac{U}{U+V} = \frac{U/2}{U/2+V/2}$$

$U/2 \sim Ga(l/2, 1)$, $V/2 \sim Ga(m/2, 1)$ より、$Z \sim Be(l/2, m/2)$ であり、密度関数は、

$$f(z) = \frac{1}{B(l/2, m/2)} z^{l/2-1}(1-z)^{m/2-1}$$

であり、ヤコビアンは $J = dz/d\tilde{y} = (1+\tilde{y})^{-2}$

F 分布の密度関数

$\tilde{Y}$ の密度関数は、

$$f(\tilde{y}) = \frac{1}{B(l/2, m/2)} \frac{\tilde{y}^{l/2-1}}{(1+\tilde{y})^{(l+m)/2}}$$

$Y = \tilde{Y}m/l$ の密度関数は、

$$f_Y(y) = \frac{l^{l/2} m^{m/2}}{B(l/2, m/2)} \frac{y^{l/2-1}}{(m+ly)^{(l+m)/2}}$$

となり、自由度 (l, m) の F 分布の密度関数となる。

t 分布と F 分布の関係

- Y が自由度 (l, m) の F 分布に従うとき、$1/Y$ は自由度 (m, l) の F 分布に従う
- T が自由度 m の t 分布に従うとき、T^2 は自由度 (l, m) の F 分布に従う
- 分母の自由度 m が $m \to \infty$ のとき lY の密度関数および分布関数がそれぞれ自由度 l のカイ二乗分布の密度関数および分布関数に収束する

問 4.6

Y が自由度 (l, m) の F 分布に従うとし、分母の自由度 m が $m \to \infty$ のとき、lY の密度関数が自由度 l のカイ二乗分布の密度関数に収束することを示せ。

Y の密度関数は、

$$f_Y(y) = \frac{l^{l/2} m^{m/2}}{B(l/2, m/2)} \frac{y^{l/2-1}}{(m + ly)^{(l+m)/2}}$$

ここで、$Z = lY$ とすると、$Y = \frac{Z}{l}$ より、$|\frac{dy}{dz}| = \frac{1}{l}$

$$f_Z(z) = \frac{1}{l} f_Y(\frac{z}{l})$$

問 4.6

$$f_Z(z) = \frac{1}{B(l/2, m/2)} \cdot (\frac{1}{m})^{l/2} \cdot z^{l/2-1} \cdot (1 + \frac{z}{m})^{-(l+m)/2}$$
$$= \frac{\Gamma((l+m)/2)}{\Gamma(l/2)\Gamma(m/2)} \cdot (\frac{1}{m})^{l/2} \cdot z^{l/2-1} \cdot (1 + \frac{z}{m})^{-(l+m)/2}$$

ここで、スターリングの公式から、

$$\frac{\Gamma(\frac{m+l}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot (\frac{1}{m})^{l/2} \approx \frac{\sqrt{2\pi}(\frac{m+l}{2})^{\frac{m}{2}} e^{-(\frac{m+l}{2})}}{\sqrt{2\pi}(\frac{m}{2})^{\frac{m-1}{2}} e^{-(\frac{m}{2})}} \cdot (\frac{1}{m})^{l/2}$$
$$= \frac{1}{2^{l/2}}(1 + \frac{l}{m})^{(l+m-1)/2} e^{-l/2}$$

問 4.6

であるから、$m \to \infty$ のとき、

$$\frac{\Gamma(\frac{m+l}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot (\frac{1}{m})^{l/2} \approx \frac{1}{2^{l/2}}$$

以上より、

$$f_Z(z) = \frac{1}{2^{l/2}\Gamma(l/2)} z^{l/2-1} e^{-z/2}$$

に収束する。

非心分布

- t 分布、カイ二乗分布、F 分布は平均が 0 の正規変量について定義された分布
- 平均が 0 でない場合の正規変量に一般化した t 分布、カイ二乗分布、F 分布は非心分布という

非心 t 分布

互いに独立な確率変数 $U \sim N(\lambda, 1), V \sim \chi^2(m)$ について、

$$T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{m}}}$$

の分布を自由度 m、非心度 λ の非心 t 分布といい、$t(m, \lambda)$ と表す。

$T = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{s}$ は自由度 $n-1$、非心度 $\lambda = \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$ の非心 t 分布に従う。

非心度 λ が一定、自由度 m が $m \to \infty$ のときには非心 t 分布の密度関数および累積分布関数は $N(\lambda, 1)$ の密度関数および累積分布関数に収束する。

非心カイ二乗分布

互いに独立な確率変数 $X_i \sim N(\mu_i, 1), i = 1, \ldots, m$ に対して、

$Y = X_1^2 + \cdots + X_m^2, \lambda = \mu_1^2 + \cdots + \mu_m^2$ としたとき、Y の分布を自由度 m、非心度 λ の非心カイ二乗分布といい、$\chi^2(m, \lambda)$ で表す。

- Y の分布は非心度 $\lambda = \sum_{i=1}^m \mu_i^2$ および自由度 m のみに依存する
- λ が一定なら個々の μ_i はどのような値でもよい

また、

$$\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(m-1, \sum_{i=1}^m (\mu_i - \bar{\mu})^2), \quad \bar{\mu} = \sum_{i=1}^m \mu_i / m$$

非心 F 分布

互いに独立な確率変数 $U \sim \chi^2(l, \lambda), V \sim \chi^2(m)$ について、

$$Y = \frac{U/l}{V/m}$$

の分布を自由度 (l, m)、非心度 λ の非心 F 分布といい、$F(l, m, \lambda)$ で表す。