数理統計学 2.4 章

ベルヌーイ試行

確率 p で表が出るようなコインを n 回投げることを考える。

確率変数 X_i を次のように定義する：

$$X_i = \begin{cases} 1 & (i\text{ 回目に表が出る}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

X_i のように 0 か 1 のみをとる変数をベルヌーイ変数という。

表の出る確率 p は成功確率ともいう。

2 項分布

確率変数 X を次のように定義する：

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

X は n 回コインを投げたときの表の回数を表す。

X の分布はパラメータ n,p の 2 項分布 $Bin(n, p)$ に従う。

$Bin(n, p)$ の確率関数は、

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

で表される。

2 項分布の確率母関数

X の確率母関数は 2 項定理より、

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \sum_{x=0}^{n} s^x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (sp)^x (1-p)^{n-x} \\
&= (ps + 1 - p)^n \\
&= (1 + p(s-1))^n
\end{aligned}
$$

であり、$G'(s) = np(1+(s-1))^{n-1}$、$G''(s) = n(n-1)p^2(1+p(s-1))^{n-2}$

2 項分の期待値・分散

よって、$G'(1) = E[X] = np, G''(s) = E[X(X-1)] = n(n-1)p^2$ を得る。

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\
&= E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2
\end{aligned}
$$

であることから、2 項分布の平均と分散は、

$$
E[X] = np, Var[X] = np(1-p)
$$

となる。

分布族

- 2 項分布は単一の分布ではなく、特定の n と p に対応する分布の集合 $\rightarrow$ 分布族をなしている
- 分布族において個々の分布を指定するものをパラメータ、あるいは分布族の母数という。

ポアソン分布

2 項分布から、n を大とし p を小としたときの極限として得られる。
ただし、平均成功回数 $\lambda = np$ は一定とする。

(例)
ある都市に住む n 人のうち、任意の一人が一日のうちに事故にあう確率を p として、p の値は各人に共通とする。

- p が小さい $\rightarrow$ 特定の人が事故にあう確率は低い
- 一日の事故数 X の期待値 $\lambda = np \rightarrow$ 無視できない大きさ
- 各人の事故が互いに独立に起きる $\rightarrow X$ は $Bin(n, p)$ に従う

ポアソン分布の確率関数

$\lambda = np$ を固定し、$n \to \infty$ となるときの $P(X = k)$ の極限を求める。

2 項分布の確率関数に $p = \frac{\lambda}{n}$ を代入して、

$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{\lambda}{n})^{-k} \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

となる。(ただし、任意の y について、$(1+\frac{y}{n})^n \to e^y$)

ポアソン分布の確率関数

また、

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

より、$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ であるから、ポアソン分布の確率関数は非負整数上の確率分布となる。

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

とする分布を、パラメータ λ のポアソン分布 $Po(\lambda)$ という。

ポアソン分布の確率母関数・期待値・分散

ポアソン分布の確率母関数は、

$$G(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{s\lambda} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$$

となり、$G'(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}$、$G''(s) = \lambda^2 e^{(s-1)}$

であるから、$G'(1) = \lambda$、$G''(1) = \lambda^2$ を用いて、

ポアソン分布の期待値と分散は、

$$E[X] = Var[X] = \lambda$$

と表される。

負の 2 項分布

コインの表が出る確率を p、確率変数 X を r 回表が出るまでの裏の回数とする。

$X=k$ となる確率を考えると、

- r 回目の表までに k 回の裏が出ており、計 $r+k$ 回行う
- $r+k-1$ 回までに裏が k 回出て、最後の $r+k$ 回目で表が出る

よって、確率関数は、

$$P(X=k)=\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^{r-1}\times p=\binom{r+k-1}{k}(1-p)^k p^r$$

確率の和が 1 であることの確認

このような確率関数をもつ分布をパラメータ r、p の負の 2 項分布 $NB(r,p)$ という。

$0 \leq p \leq 1$、$q = 1 - p$ として、$p^{-r} = (1-q)^{-r}$ を q の無限級数にテーラー展開すると、

$$(1-q)^{-r} = 1 + rq + \frac{r(r+1)}{2!}q^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} q^k$$

となり、両辺に p^r をかければ、右辺が 1 になることが確認できる。

幾何分布・負の２項分布の確率母関数

$r = 1$ のとき、負の２項分布の確率関数は、

$$P(X = k) = p(1-p)^k$$

となり、この分布を幾何分布という。

負の２項分布の確率母関数は、

$$G(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} (qs)^k p^r$$
$$= (\frac{p}{1-qs})^r = (1-(s-1)\frac{q}{p})^{-r}$$

負の 2 項分布の期待値・分散

$$G'(s) = E[Xs^{X-1}] = \frac{rq}{p}(1-(s-1)\frac{q}{p})^{-(r+1)}$$
$$G''(s) = E[X(X-1)s^{X-2}] = \frac{r(r+1)q^2}{p^2}(1-(s-1)\frac{q}{p})^{-(r+2)}$$

を用いて、

$$G'(1) = E[X] = \frac{rq}{p}$$
$$G''(1) = E[X(X-1)] = \frac{r(r+1)q^2}{p^2}$$

よって、負の 2 項分布の期待値と分散は、

$E[X] = \frac{r(1-p)}{p}$、$Var[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$

超幾何分布

壺に M 個の赤玉、$N-M$ 個の白玉の計 N 個の玉が入っているとする。
壺から無作為に n 個の玉を取り出したときの赤玉の数を X とし、
$X=k$ となる確率を考える。

このとき、玉の取り出し方の総数は、

$$\binom{M}{k} \times \binom{N-M}{n-k}$$

ただし、$k \leq M$、$n-k \leq N-M$、$0 \leq k \leq n$

超幾何分布の確率関数

X の確率関数は、

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\quad \max\{0,n+M-N\}\leq k\leq\min\{n,M\}$$

$$P(X=k)=\frac{M!(N-M)!n!(N-n)!}{N!k!(M-k)!(n-k)!(N-M-n+k)!}$$

で表され、$p=\frac{M}{N}$、$q=1-p$ とすれば、超幾何分布の期待値と分散は、

$E[X]=np$、$Var[X]=\frac{N-n}{N-1}npq$ となる。（詳しい導出は 4.8 節）

超幾何分布における M と n の対称性

次の操作について考える。

- 最初に壺に入っている N 個の玉はすべて白色で区別がないとする
- M 個を無造作に取り出し、それらの玉に赤色をつけて壺に戻す
- n 個を無造作に取り出し、それらの玉に丸印をつけて壺に戻す

このとき、X は赤色かつ丸印がついた玉の数。
上記の操作のうち、2 番目と 3 番目の操作を入れ替えても状況は同じになる。

$\rightarrow$ 超幾何分布の確率関数で、M と n を入れ替えても式は変わらない。

一様分布

区間 $[a, b]$ 上の一様分布を、$U[a, b]$ で表す。

$U[a, b]$ の密度関数と累積分布関数はそれぞれ、

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{if } x > b \end{cases}$$

一様分布の平均・分散

$$E[X] = \int_a^b x \times \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$E[X^2] = \int_a^b x^2 \times \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

よって、一様分布の期待値と分散は

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

となる。

正規分布 (標準正規分布)

平均 μ と分散 σ^2 の 2 つのパラメータを持つ分布族。

標準正規分布の密度関数は、

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

であり、原点で対称になる。

また、標準正規分布の累積密度関数は、

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(u)\, du$$

一般の正規分布

X を標準正規分布に従う確率変数とし、新しい確率変数

$Y = a + bX, \quad b > 0$ を考える。

累積分布関数 $F_Y(y)$ は、

$$F_Y(y) = P(a + bX \leq y) = P(X \leq \frac{y-a}{b}) = \Phi(\frac{y-a}{b})$$

であり、Y の密度関数 $f_Y(y)$ は、

$$f_Y(y) = \frac{1}{b}\phi(\frac{y-a}{b}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} exp(-\frac{(y-a)^2}{2b^2})$$

正規分布の積率母関数

積率母関数 $\tilde{\phi}$ は、

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} &= E[e^{\theta Y}] = E[e^{a\theta + b\theta X}] = e^{a\theta} E[e^{b\theta X}] \\ &= e^{a\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(x - b\theta)^2}{2} + \frac{b^2\theta^2}{2})\, dx \\ &= exp(a\theta + \frac{b^2\theta^2}{2})\end{aligned}$$

であり、

$$(\tilde{\phi}(\theta))' = E[Ye^{\theta Y}] = (a + b^2\theta) exp(a\theta + b^2\theta^2)$$

$$(\tilde{\phi}(\theta))'' = E[Y^2 e^{\theta Y}] = ((a + b^2\theta)^2 + b^2) exp(a\theta + b^2\theta^2)$$

正規分布の期待値・分散

$\tilde{\phi}'(0) = E[Y] =$a、$\tilde{\phi}''(0) = E[Y^2] = a^2 + b^2$ より、

正規分布の期待値と分散は、$E[Y] = \mu = a$、$Var[Y] = \sigma^2 = b^2$

あらためて Y の密度関数は、

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

となり、Y は平均 μ、分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う。

また、標準正規分布は $N(0, 1)$ で表される。

標準化（基準化）

Y が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、先程とは逆の変換

$$X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

を施すことで、X は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

このような変換を標準化、あるいは、基準化という。

ガンマ分布

正の実数 a に対して、ガンマ関数は以下のように定義される：

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

いま、

$$\int_0^\infty x^a e^{-x}\, dx = -x^a e^{-x}\Big|_0^\infty + a \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

であるから、

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

の漸化式が成り立ち、一般に、$\Gamma(n) = (n-1)!$ で表される。

ガンマ分布の密度関数

ガンマ分布の密度関数は、

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-x}, \quad x > 0$$

で表され、尺度母数 $\alpha > 0$ を導入して、式の密度をもつ確率変数 X に対して $Y = \alpha X$ とおけば、Y の確率変数は、

$$f(y) = \frac{1}{\alpha^{\nu}\Gamma(\nu)} y^{\nu-1} e^{\frac{-y}{\alpha}}, \quad y > 0$$

で表される。

Y は形状母数 ν、尺度母数 α のガンマ分布 $Ga(\nu, \alpha)$ に従う。

ガンマ分布の積率母関数

ガンマ分布の積率母関数は、

$$
\begin{aligned}
\phi(\theta) &= E[e^{\theta Y}] = E[e^{\theta\alpha X}] = E[e^{aX}] \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-x(1-a)}\, dx = (1-a)^{-\nu} \\
&= (1-\theta\alpha)^{-\nu}
\end{aligned}
$$

と表される。(ただし、$a = \theta\alpha$)

$$(\phi(\theta))' = E[\alpha X e^{\theta\alpha X}] = \alpha\nu(1-\theta\alpha)^{-(\nu+1)}$$

$$(\phi(\theta))'' = E[\alpha^2 X^2 e^{\theta\alpha X}] = \alpha^2\nu(\nu+1)(1-\theta\alpha)^{-(\nu+2)}$$

ガンマ分布の期待値・分散、指数分布

$\phi'(0) = \nu\alpha$、$\phi''(0) = \nu(\nu+1)\alpha^2$ より、

ガンマ分布の期待値と分散は、$E[Y] = \nu\alpha$、$Var[Y] = \nu\alpha^2$

特に、形状母数 ν が 1 のとき、ガンマ分布の密度関数は、

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-x}{\alpha}}, \quad x > 0$$

であり、指数分布 $Ex(\alpha)$ で表す。

また、指数分布の累積分布関数は、

$$F(x) = 1 - e^{\frac{-x}{\alpha}}$$

ベータ分布

0 と 1 の間の連続分布。

密度関数は、$a > 0, b > 0$ を用いて、

$$f(x) = cx^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1$$

で与えられ、$Be(a, b)$ で表す。

基準化定数 c の逆数（ベータ関数）は、次のように定義される：

$$\frac{1}{c} = B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$$

ベータ分布の期待値・分散

また、ベータ関数はガンマ関数を用いて、

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

で表すことができる。

ベータ分布の期待値と分散は、$E[X] = \frac{a}{a+b}$、$Var[X] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ となる。

混合分布

異なる分布を組み合わせて作った分布。

F_1、F_2 を異なる累積分布関数とし、$0 \leq p \leq 1$ として、

$$F(x) = pF_1(x) + (1-p)F_2(x)$$

とすれば、$F(x)$ も累積分布関数となる。

F からの観測値は、成功確率 p のコインを投げて、表が出たら F_1 から、裏が出たら F_2 から取る。

3 個以上の混合分布

$F(x,\theta)$ をパラメータ θ を持つ累積分布関数の集合（分布族）とし、θ がある密度関数 $g(\theta)$ を持つとすれば、

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,\theta)g(\theta)\,d\theta$$

は無限個の分布の連続的な混合となる。

問 2.1

平均まわりの k モーメントを原点まわりのモーメントを用いて表せ。また、原点まわりの k 次まわりのモーメントを平均まわりのモーメントと $\mu = E[X]$ を用いて表せ。

平均まわりの k モーメント (k=0,1,2,...)

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k]$$

原点まわりの k 次モーメント (k=0,1,2,...)

$$\mu'_k = E[X^k]$$

問 2.1
平均まわりのモーメント → 原点まわりのモーメント

二項定理より、

$$(X-\mu)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i (-\mu)^{k-i}$$

両辺の期待値をとって、

$$E[(X-\mu)^k] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-\mu)^{k-i} E[X^i]$$

つまり、

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-\mu)^{k-i} \mu'_i$$

問 2.1

原点まわりのモーメント $\rightarrow$ 平均まわりのモーメント

$X = (X - \mu) + \mu$ として、二項定理より、

$$X^k = ((X - \mu) + \mu)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (X - \mu)^{k-i} \mu^i$$

両辺の期待値をとって、

$$E[X^k] = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu^i E[(X - \mu)^{k-i}]$$

よって、

$$\mu'_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu^i \mu_{k-i}$$

問 2.10

ガンマ関数の漸化式 ((2.73) 式) 及び (2.81) 式を用いてベータ分布 $Be(a, b)$ の平均と分散を求めよ。

ベータ分布の密度関数

$$f(x) = cx^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1$$

ベータ関数

$$\frac{1}{c} = B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

漸化式

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

問 2.10 ベータ分布の期待値の導出

積率母関数が簡単な形で書けないため、期待値の定義から導出する。

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 cx^a(1-x)^{b-1}\,dx \\
&= c\int_0^1 x^{(a+1)-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{1}{B(a,b)}B(a+1,b) \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \times \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+b+1)} \\
&= \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!} \times \frac{a!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}
\end{aligned}
$$

問 2.10 ベータ分布の分散の導出 1

先程と同様に、

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 cx^{a+1}(1-x)^{b-1}\,dx \\
&= c\int_0^1 x^{(a+2)-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{1}{B(a,b)}B(a+2,b) \\
&= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times \frac{\Gamma(a+2)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+2)} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \times \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a+b+2)} \\
&= \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!} \times \frac{(a+1)!}{(a+b+1)!} = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}
\end{aligned}
$$

であるから、

問 2.10 ベータ分布の分散の導出 2

$$
\begin{aligned}
Var[X] &= E[X^2] - E[X]^2 \\
&= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - (\frac{a}{a+b})^2 \\
&= \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}
\end{aligned}
$$

以上より、期待値と分散はそれぞれ、

$$
E[X] = \frac{a}{a+b}, \quad V[X] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}
$$