Cyclotron maser instability　　2022/6/18　Rikuto Yasuda　1.

a1

Basic Equation 条件

・磁化プラズマであること

・Maxwell eq

$$\nabla\cdot\mathbb{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (A1)$$

$$\nabla\times\mathbb{E} = -\frac{\partial\mathbb{B}}{\partial t} \qquad (A2)$$

$$\nabla\cdot\mathbb{B} = 0 \qquad (A3)$$

$$\nabla\times\mathbb{B} = \mu_0 \dot{\imath} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbb{E}}{\partial t} \qquad (A4)$$

・ブラソフ方程式（全ての荷電粒子を考慮）

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbb{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbb{r}} + \mathbb{F}\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbb{p}} = 0 \qquad (A5)$$

α：α番目の粒子

$$d^6 n = f_\alpha(t, \mathbb{r}, \mathbb{p})\, d^3\mathbb{r}\, d^3\mathbb{p}$$

位相空間の$(\mathbb{r}, \mathbb{p})$

d^6n…微小3次元空間・運動量空間内の粒子数

・電荷密度　$\rho = \iiint \sum_\alpha q_\alpha f_\alpha(t, \mathbb{r}, \mathbb{p})\, d^3\mathbb{p}$　(A6)

・電流密度　$\dot{\jmath} = \iiint \sum_\alpha q_\alpha f_\alpha(t, \mathbb{r}, \mathbb{p})\, \mathbb{v}\, d^3\mathbb{p}$　(A7)

・上記の方程式を線型化（1次）　$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + f_\alpha^{(1)}$，$\rho_\alpha = \rho_\alpha^{(0)} + \rho_\alpha^{(1)}$

a2

0次のオーダー

・媒体は空間一様、定常を仮定　・$\mathbb{B} = \mathbb{B}_0$
(f)

・運動量空間において円柱座標系（$p_{\parallel}$, $p_\perp$, φ）を使用

$B = B_0 e_z = B_0 e_{\parallel}$　（B_0の向きをz軸へ）

$p_x = p_\perp \cos\varphi$，$p_y = p_\perp \sin\varphi$，$p_z = p_{\parallel}$

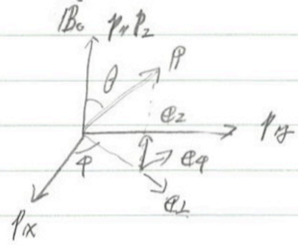
まずは(A5)のブラソフ方程式が0次のオーダーで $\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial\varphi} = 0$ となることを示す(A11)

(A11)によって $f_\alpha^{(0)}(\mathbb{r}, \mathbb{p})$ は $f_\alpha^{(0)}(p_{\parallel}, p_\perp)$ となる。（B_0まわりに軸対称）

(A11) 0次オーダーで空間一様、定常, $\mathbb{B} = B_0 e_\parallel$ と仮定

(A5) $\cancel{\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial t}} + \mathbb{v} \cdot \cancel{\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{r}}} + \mathbb{F} \cdot \dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{p}} = 0$ (α は省略)

$\quad\;\; \overset{\shortparallel}{0} \qquad\qquad \overset{\shortparallel}{0}$



$$\mathbb{F} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{p}} = 0 \quad — ①$$

$\mathbb{F} = \mathbb{v} \times \mathbb{B}$ とすると… (E は電荷一様より(?)無視)

①… $(\mathbb{v} \times \mathbb{B}) \cdot \dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{p}} = 0$ $\qquad \mathbb{p} = \dfrac{m\mathbb{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\gamma \mathbb{v}$ (相対論的効果)

$$\left(\frac{\mathbb{p}}{\cancel{m\gamma}} \times \mathbb{B}\right) \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{p}} = 0$$

$$(p_\perp \cos\varphi, p_\perp \sin\varphi, p_\parallel) \times (0, 0, B_0) \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{p}} = 0$$

$$(p_\perp B_0 \sin\varphi, -p_\perp B_0 \cos\varphi, 0) \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{p}} = 0$$

$$p B_0 \sin\theta (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0) \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{p}} = 0 \qquad e_\varphi = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$$

$$p B_0 \sin\theta\, e_\varphi \cdot \left(\cancel{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} e_\perp + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel} e_\parallel} + \frac{\partial f^{(0)}}{p_\perp \partial \varphi} e_\varphi \right) = 0$$

$$\cancel{\frac{p \sin\theta}{p_\perp}} B_0 \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varphi} = 0$$

$$B_0 \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \varphi} = 0$$

A. $\dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial \varphi} = 0$ (A11)

No.

Date

ⓧ3

1次のオーダー ・(A5)は 1次のオーダーで以下のようになる.

$$\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial t} + \mathbb{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \mathbb{r}} + q_\alpha(\mathbb{v}\times\mathbb{B}_0 + \mathbb{E}^{(1)} + \mathbb{v}\times\mathbb{B}^{(1)})\cdot\left[\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial \mathbb{p}} + \frac{\partial f_\alpha^{(1)}}{\partial \mathbb{p}}\right] = 0 \qquad (A13)$$

→ proof (A13)

・1次の項：$\mathbb{E}^{(1)}, \mathbb{B}^{(1)}, f_\alpha^{(1)}$ は、$\exp[i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - \omega t)]$ $(\omega\in\mathbb{C}, \mathbb{k}\in\mathbb{R}^3)$ に比例する wave perturbation で表現できる。

・1次の電子分布のみ $f_e^{(1)}$ だけが、1次の荷電粒子分布 $f^{(1)}$、$j^{(1)}$ に寄与すると仮定 $(f_e \to f)$

このとき (A13)は

$$i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{p} - \gamma m\omega)f^{(1)} + m\omega_c\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = \gamma m e\,\mathbb{E}^{(1)}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{p}} \qquad (A14)$$

→ proof (A14)

$\omega_c = \frac{eB_0}{m}$, e：電子の電荷, m：電子の質量, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$

proof (A13)

αを落として考える。$f = f^{(0)} + f^{(1)}$ とすると（$f^{(0)}$：空間一様, 定常）, (A5)は…

・$\frac{\partial f}{\partial t} = \underset{0}{\cancel{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t}}} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t}$

・$\mathbb{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbb{r}}(\cancel{f^{(0)}} + f^{(1)}) = \mathbb{v}\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{r}}$

・$\mathbb{F} = q(\mathbb{v}\times\mathbb{B} + \mathbb{E}) = q(\mathbb{v}\times\mathbb{B}_0 + \mathbb{E}^{(1)} + \mathbb{v}\times\mathbb{B}^{(1)})$　　※ $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{(1)}$（電気的中性より）

$\mathbb{B} = \mathbb{B}_0 + \mathbb{B}^{(1)}$

・$\frac{\partial f}{\partial \mathbb{p}} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{p}} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{p}}$

よって

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \mathbb{v}\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{r}} + q(\mathbb{v}\times\mathbb{B}_0 + \mathbb{E}^{(1)} + \mathbb{v}\times\mathbb{B}^{(1)})\cdot\left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{p}} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{p}}\right] = 0 \quad //$$

proof (A14)

$E^{(1)}, B^{(1)}, f_\alpha^{(1)} \propto \exp[i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} - \omega t)]$ より

$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega \qquad \frac{\partial}{\partial \mathbb{r}} \to i\mathbb{k}$

(A13)の

1項：$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = -i\omega f^{(1)}$　　2項：$\mathbb{v}\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{r}} = \frac{\mathbb{P}}{\gamma m}\cdot i\mathbb{k} f^{(1)}$

$$+ \quad = \frac{1}{\gamma m} i\left(\mathbb{k}\cdot\mathbb{P} + \frac{\gamma m}{i}\cdot(-i\omega)\right) f^{(1)}$$

$$= \frac{1}{\gamma m} i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{P} - \gamma m\omega) f^{(1)} \quad -①$$

3項：$q(\mathbb{v}\times\mathbb{B}_0 + \mathbb{E}^{(1)} + \mathbb{v}\times\mathbb{B}^{(1)})\cdot\left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{P}} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{P}}\right] = -e\left(\frac{\mathbb{P}}{m\gamma}\times\mathbb{B}_0 + \mathbb{E}^{(1)} + \frac{\mathbb{P}}{m\gamma}\times\mathbb{B}^{(1)}\right)\cdot\left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{P}} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{P}}\right]$

$$= -\frac{e}{m\gamma}\left[\cancel{(\mathbb{P}\times\mathbb{B}_0)\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{P}}} + m\gamma\mathbb{E}^{(1)}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{P}} + \cancel{(\mathbb{P}\times\mathbb{B}^{(1)})\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{P}}}\right] - \frac{e}{m\gamma}\left[(\mathbb{P}\times\mathbb{B}_0)\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{P}} + \cancel{\mathbb{E}^{(1)}\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{P}}} + \cancel{(\mathbb{P}\times\mathbb{B}^{(1)})\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{P}}}\right]$$

○e_φ　(A10 $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \varphi} = 0$　　$\perp\mathbb{P}$　$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$　$\frac{\partial f}{\partial \mathbb{P}}$ は P の動径面内　　∵2次の項　　∵2次の項

$$= \frac{-e}{m\gamma}\left\{m\gamma\mathbb{E}^{(1)}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{P}} + (\mathbb{P}\times\mathbb{B}_0)\cdot\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{P}}\right]$$

$$= \frac{-e}{m\gamma}\left(m\gamma\mathbb{E}^{(1)}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{P}} - B_0\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \varphi}\right) \quad -②$$

$$\left(\cancel{(\mathbb{P}\times\mathbb{B}_0)\cdot\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{P}}\right)_{\perp,\parallel}} + (\mathbb{P}\times\mathbb{B}_0)\cdot\left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \mathbb{P}}\right)_{\varphi} = -B_0 p\sin\theta\cdot\frac{1}{p_\perp}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \varphi} = -B_0\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \varphi} \right)$$

○e_φ

$\Downarrow$ ①・②

$$\underline{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{P} - \gamma m\omega)f^{(1)} + \underset{m\omega_c}{\underset{\shortparallel}{eB_0}}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \varphi} = \gamma m e\mathbb{E}^{(1)}\cdot\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{P}}} \quad \cdots (A14) \,/\!/$$

・以下の表記を導入

$E_\pm = E_x \pm iE_y$　　　　　　〈 real $\begin{cases} E_- : \text{circular RH} \\ E_+ : \text{circular LH} \end{cases}$

$E_\parallel = E_z$　　　$(e_z /\!/ \mathbb{B}_0)$

RH
$\mathbb{E}_\perp$
LH

・$f^{(1)}$ と $\mathbb{v}$ も同様の表記法を採用

・(A13)・(A14)は以下となる

$$i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{P} - \gamma m\omega)f^{(1)} + m\omega_c\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \varphi} = \frac{\gamma m e}{2}\left(E_+^{(1)}e^{-i\varphi} + E_-^{(1)}e^{i\varphi}\right)\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + \gamma m e E_\parallel^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel} \quad (A15)$$

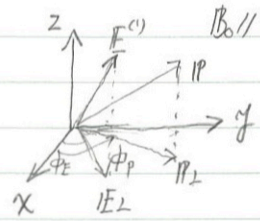
→ proof (A15)

proof (A15)

(A14)の右辺 $= \gamma m e\, \mathbb{E}^{(1)} \cdot \dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{P}}$

$$= \gamma m e \left[\mathbb{E}_{\perp}^{(1)} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{P}_{\perp}} + \mathbb{E}_{\parallel}^{(1)} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbb{P}_{\parallel}} \right]$$

$$= \gamma m e \left[\mathbb{E}_{\perp}^{(1)} \cdot \mathbb{e}_{\perp p} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_{\perp}} + E_{\parallel}^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_{\parallel}} \right] \cdots ①$$



$\mathbb{B}_0 \,/\!/\, \mathbb{e}_{\parallel p} \,/\!/\, \mathbb{e}_{\parallel E}$

$$\mathbb{E}_{\perp}^{(1)} \cdot \mathbb{e}_{\perp p} = E_{\perp} \cos(\phi - \phi_E)$$
$$= E_{\perp} (\cos\phi \cos\phi_E + \sin\phi \sin\phi_E)$$
$$= E_x \cos\phi + E_y \sin\phi$$

ところで

$$E_+ e^{-i\varphi} = (E_x + iE_y)(\cos\varphi - i \sin\varphi)$$
$$= (E_x \cos\varphi + E_y \sin\varphi) + i(E_y \cos\varphi - E_x \sin\varphi) \Rightarrow \frac{E_+ e^{-i\varphi} + E_- e^{i\varphi}}{2} = E_x \cos\varphi + E_y \sin\varphi$$
$$= \mathbb{E}_{\perp}^{(1)} \cdot \mathbb{e}_{\perp p}$$
$$E_- e^{i\varphi} = (E_x - iE_y)(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$
$$= (E_x \cos\varphi + E_y \sin\varphi)$$

よって $① = \dfrac{\gamma m e}{2} (E_+ e^{-i\varphi} + E_- e^{i\varphi}) \dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial p_{\perp}} + \gamma m e\, E_{\parallel}^{(1)} \dfrac{\partial f^{(0)}}{\partial p_{\parallel}}$

よって

$$i(\mathbb{k} \cdot \mathbb{p} - \gamma m \omega) f^{(1)} + m\omega_c \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \varphi} = \frac{\gamma m e}{2} (E_+ e^{-i\varphi} + E_- e^{i\varphi}) \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_{\perp}} + \gamma m e\, E_{\parallel}^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_{\parallel}} \quad \cdots (A15)$$

・(A15)は 1階線形微分方程式なので積分できて...

$$f^{(1)}(t, \mathbb{r}, \mathbb{p}) = \frac{\gamma m e}{2i} \exp\left(-i \frac{k_{\perp} p_{\perp} \sin\varphi}{m\omega_c}\right) \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\exp(in\varphi)}{k_{\parallel} p_{\parallel} - \gamma m \omega + n m \omega_c} \times \left\{ \frac{E_+^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_{\perp}} J_{n+1} + \frac{E_-^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_{\perp}} J_{n-1} + E_{\parallel}^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_{\parallel}} J_n \right\} \cdots (A16)$$

→ proof (A16)

・ここで J_n は $J_n(k_{\perp} p_{\perp} / m\omega_c)$ の Bessel 関数

・1次(摂動成分)オーダーの密度と電流は

$$\rho^{(1)}(t, \mathbb{r}) = \iiint -e f^{(1)}(t, \mathbb{r}, \mathbb{p})\, p_{\perp}\, dp_{\parallel}\, dp_{\perp}\, d\varphi \quad (A17)$$

$$\mathbb{j}\,(t, \mathbb{r}) = \iiint -e f^{(1)}(t, \mathbb{r}, \mathbb{p})\, \mathbb{v}\, p_{\perp}\, dp_{\parallel}\, dp_{\perp}\, d\varphi \quad (A18)$$

(積分範囲 $p_{\parallel} \in \mathbb{R}$, $p_{\perp} \in \mathbb{R}_{+}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$)

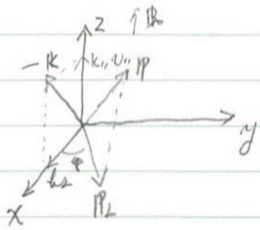
・(A17)と(A18)に(A16)を代入して φ について積分

→ $f^{(1)}$, $j_{\pm}^{(1)} = j_x^{(1)} \pm i j_y^{(1)}$, $j_{\parallel}^{(1)} = j_z^{(1)}$ が得られる.

proof (A16)

$\frac{dy}{dt} + P(x)y = Q(x)$ の一般解

$$y = \exp\left(-\int P(x')dx'\right)\left[\int Q(x')\exp\left(\int P(x'')dx''\right)dx' + C\right]$$



※以下、一般性は失われないので $\mathbb{k}$ は xz 面内にあるとする。

(A15)… $$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{p} - \gamma m\omega)}{m\omega_c} f^{(1)} = \frac{\gamma e}{2\omega_c}\left(E_+ e^{-i\varphi} + E_- e^{i\varphi}\right)\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + \frac{\gamma e}{\omega_c}E_\parallel^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel}$$

$$f^{(1)}(t,\mathbb{r},\mathbb{p}) = \underbrace{\exp\left(-\int \frac{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{p} - \gamma m\omega)}{m\omega_e}d\varphi\right)}_{ⓐ}\left[\int\left(\frac{\gamma e}{2\omega_c}\left(E_+e^{-i\varphi} + E_-e^{i\varphi}\right)\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + \frac{\gamma e}{\omega_c}E_\parallel^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel}\right)\times \underbrace{\exp\left(\int\frac{i(\mathbb{k}\cdot\mathbb{p} - \gamma m\omega)}{m\omega_e}d\varphi\right)}_{ⓑ}d\varphi\right]$$

$$
\begin{aligned}
ⓐ &= \exp\left[-\int \frac{i}{m\omega_c}(\mathbb{k}\cdot\mathbb{p} - \gamma m\omega)d\varphi\right] \\
&= \exp\left[-\int \frac{i}{m\omega_c}(k_\parallel p_\parallel + k_\perp p_\perp\cos\varphi - \gamma m\omega)d\varphi\right] \\
&= \exp\left\{-\frac{i}{m\omega_c}(k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega)\varphi - \frac{i}{m\omega_c}k_\perp p_\perp \sin\varphi\right\} \\
&= \exp\left(\frac{-i k_\perp p_\perp \sin\varphi}{m\omega_c}\right)\cdot\exp\left(\frac{-i(k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega)\varphi}{m\omega_c}\right) /\!/
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ⓑ &= \exp\left(\frac{i k_\perp p_\perp \sin\varphi}{m\omega_c}\right)\cdot\exp\left(\frac{i(k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega)}{m\omega_c}\varphi\right) \\
&= \left[\sum_n J_n\left(\frac{k_\perp p_\perp}{m\omega_c}\right)\exp(in\varphi)\right]\exp\left[\frac{i(k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega)}{m\omega_c}\varphi\right] \\
&= \left[\sum_n J_n\left(\frac{k_\perp p_\perp}{m\omega_c}\right)\exp(in\varphi)\right]\exp\left[\frac{i(k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega)}{m\omega_c}\varphi\right] \\
&= \sum_n\left[J_n\exp\left[\frac{i(k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega + n m\omega_c)}{m\omega_c}\varphi\right]\right]
\end{aligned}
$$

公式

$\exp(-ix\sin\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\exp(-in\phi)$ より…

$\phi = -\phi'$

$\exp(-ix\sin(-\phi')) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\exp(-in(-\phi'))$

$\exp(ix\sin\phi') = \sum J_n(x)\exp(in\phi')$

よって

$$f^{(1)}(t,\mathbb{r},\mathbb{p}) = \exp\left(\frac{-ik_\perp p_\perp\sin\varphi}{m\omega_c}\right)\cdot\exp\left(\frac{-i(k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega)\varphi}{m\omega_c}\right)\left[\int\left(\frac{\gamma e}{2\omega_c}\left(E_+e^{-i\varphi} + E_-e^{i\varphi}\right)\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + \frac{\gamma e}{\omega_c}E_\parallel^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel}\right)\times\sum_n\left[J_n\exp\left[\frac{i(k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega + n m\omega_c)}{m\omega_c}\varphi\right]\right]\right]d\varphi$$

$$= \frac{\gamma e}{\omega_c}\exp\left(-\frac{ik_\perp p_\perp\sin\varphi}{m\omega_c}\right)\cdot\exp(-iA\varphi)\int\left(\frac{1}{2}\left(E_+e^{-i\varphi} + E_-e^{i\varphi}\right)\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + E_\parallel^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel}\right)\times\sum_n J_n\exp i(A+n)\varphi\,d\varphi \quad \text{— ⓒ}$$

Ⓒの積分の第1項

$$= \int \frac{1}{2} E_+^{(1)} e^{-i\varphi} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} \sum_n J_n \exp i(A+n)\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} E_+^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} \sum_n J_n \int \exp\{i(A+n-1)\varphi\} d\varphi$$

$$= \quad " \quad \sum_n J_n \frac{1}{i(A+n-1)} \exp\{i(A+n-1)\varphi\}$$

$$= \underline{\frac{1}{2} E_+^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} \sum_n J_{n+1} \frac{1}{i(A+n)} \exp\{i(A+n)\varphi\}} \quad //$$

← $\sum_{-\infty}^{\infty}$ なので $n \to n+1$ にしても一般性は失われない！

同様にⒸの積分2項目

$$\int \frac{1}{2} E_-^{(1)} e^{i\varphi} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} \sum_n J_n \exp i(A+n)\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} E_-^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} \sum_n J_n \frac{1}{i(A+n+1)} \exp\{i(A+n+1)\varphi\}$$

$$= \underline{\frac{1}{2} E_-^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} \sum_n J_{n-1} \frac{1}{i(A+n)} \exp\{i(A+n)\varphi\}} \quad //$$

〃 の3項目

$$= \underline{E_\parallel^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel} \sum_n J_n \frac{1}{i(A+n)} \exp\{i(A+n)\varphi\}} \quad //$$

$$\left(※ \ \frac{1}{i(A+n)} = \frac{m\omega_c}{i(k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega + n m\omega_c)} \right)$$

よってⒸ

$$= \frac{\gamma e}{\omega_c} \exp\left(-\frac{i k_\perp p_\perp \sin\varphi}{m\omega_c}\right) \exp(-iA\varphi) \times \sum_n \left[\left(J_{n+1} \frac{E_+^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + J_{n-1} \frac{E_-^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + J_n E_\parallel^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel} \right) \frac{1}{i(A+n)} \exp\{i(A+n)\varphi\} \right]$$

$$= \frac{\gamma e}{i\omega_c} \cdot m\omega_c \exp\left(-\frac{i k_\perp p_\perp \sin\varphi}{m\omega_c}\right) \times \sum_n \left[\frac{\exp\{i(-A+A+n)\varphi\}}{k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega + n m\omega_c} \left(J_{n+1} \frac{E_+^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + J_{n-1} \frac{E_-^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + J_n E_\parallel^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel} \right) \right]$$

$$\left(f^{(1)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) =\right) \underline{\frac{\gamma m e}{i} \exp\left(-\frac{i k_\perp p_\perp \sin\varphi}{m\omega_c}\right) \times \sum_n \frac{\exp(in\varphi)}{k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega + n m\omega_c} \left\{ \frac{E_+^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} J_{n+1} + \frac{E_-^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} J_{n-1} + E_\parallel^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel} J_n \right\}} \quad // \qquad (A16)$$

・摂動成分は $J_n\left(\frac{k_\perp p_\perp}{m\omega_c}\right)\cdot J_{n'}\left(\frac{k_\perp p_\perp}{m\omega_c}\right)$ etc. のBessel func.の積を含む級数で表される。→ proof (A16')

・この結果は、J_0^2という無数でない項のみを考慮すると単純化できる。また、$f^{(0)}(p_\parallel, p_\perp)$の大部分において $\frac{k_\perp p_\perp}{m\omega_c} \ll 1$ を仮定すれば、$J_0^2\left(\frac{k_\perp p_\perp}{m\omega_c}\right) \sim 1$ となる。

・結果、以下のような摂動成分が得られる。

$$\rho^{(1)}(t,\mathbf{r}) = E_\parallel^{(1)} \frac{e^2}{i} \iint_D \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\parallel}{\gamma m\omega - k_\parallel p_\parallel} \gamma m p_\perp \, dp_\perp dp_\parallel \quad (A19)$$

$$j_\pm^{(1)}(t,\mathbf{r}) = \frac{E_\pm^{(1)}}{2} \frac{e^2}{i} \iint_D \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\perp}{\gamma m\omega - k_\parallel p_\parallel \pm m\omega_c} p_\perp^2 \, dp_\perp dp_\parallel \quad (A20)$$

$$j_\parallel^{(1)}(t,\mathbf{r}) = E_\parallel^{(1)} \frac{e^2}{i} \iint_D \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\perp}{\gamma m\omega - k_\parallel p_\parallel} p_\parallel p_\perp \, dp_\parallel dp_\perp \quad (A21)$$

→ proof (A19)(A20)(A21)

proof (A16')

$$\exp(-ix\sin\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\exp(-in\varphi)$$

$$(A16') \cdots f^{(1)}(t,\mathbf{r},\mathbf{p}) = \frac{\gamma m c}{i}\exp\left(-\frac{i k_\perp p_\perp \sin\varphi}{m\omega_c}\right) \times \sum_n \frac{\exp(in\varphi)}{k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega + nm\omega_c}\left\{\frac{E_+^{(1)}}{2}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp}J_{n+1} + \frac{E_-^{(1)}}{2}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp}J_{n-1} + E_\parallel^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel}J_n\right\}$$

$$= \frac{\gamma m e}{i}\sum_{n'} J_{n'}\exp(-in'\varphi) \times \sum_n \frac{\exp(in\varphi)}{k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega + nm\omega_c}\left\{ \qquad \right\}$$

$$= \frac{\gamma m e}{i}\sum_{n'}\sum_n \frac{\exp\{i(n-n')\varphi\}}{k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega + nm\omega_c} \times \left\{\frac{E_+^{(1)}}{2}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp}J_{n+1}\cdot J_{n'} + \frac{E_-^{(1)}}{2}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp}J_{n-1}\cdot J_{n'} + E_\parallel^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel}J_n\cdot J_{n'}\right\} \;//$$

$\rho^{(1)}, j^{(1)}$ の導出において $\int_0^{2\pi} f^{(1)} d\varphi$ の項が必要。

$$\int_0^{2\pi} f^{(1)}(t,\mathbf{r},\mathbf{p})\,d\varphi = \frac{\gamma m e}{i}\int \sum_{n'}\sum_n \frac{\exp\{i(n-n')\varphi\}}{\cdots}\{\cdots\}\,d\varphi \quad — ①$$

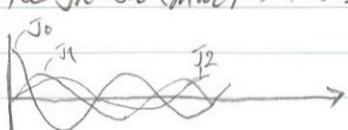
・ここで $\frac{k_\perp p_\perp}{m\omega_c} \ll 1 \Rightarrow \frac{k_\perp m\gamma v_\perp}{m\omega_c} = \frac{v_\perp k_\perp}{\omega_c/\gamma} = r_L k_\perp \ll 1$　　$\left(r_L = \frac{v_\perp(\gamma)}{\omega}\right)$

よって $r_L \ll \frac{\lambda_\perp}{2\pi}$

つまり波動の⊥方向の波長スケールが電子のラーマー半径より十分大きいと仮定する

$\left(r_L \sim 200\,\mathrm{m} \begin{cases} \omega_c = 10^6\,\mathrm{Hz} \\ E = 100\,\mathrm{keV} \end{cases} \quad \sim 60\,\mathrm{m} \begin{cases} \omega_c = 10^6 \\ E = 10\,\mathrm{keV} \end{cases} \right)$

→ すると $J_{n'}\cdot J_n\left(\frac{k_\perp p_\perp}{m\omega_c}\right)$ の中で主要な成分は J_0^2 のみとなる



また、$\frac{k_\perp p_\perp}{m\omega_c} \ll 1$ では $J_0 \sim 1 \rightarrow J_0^2 \sim 1$

(ベッセル関数 $J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$

・すると⑨は…

$$\int_0^{2\pi} f^{(1)} d\varphi = \frac{\gamma m e}{i}\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\exp(-i\varphi)}{k_\parallel p_\parallel - \gamma m \omega - m\omega_c}\frac{E_+^{(1)}}{2}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp}J_0^2 + \frac{\exp(i\varphi)}{k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega + m\omega_c}\frac{E_-^{(1)}}{2}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp}J_0^2 + \frac{1}{k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega}E_\parallel^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel}J_0^2\right] \quad -⑩$$

となる。

proof (A19)…

$$\rho^{(1)} = \iiint -e f^{(1)} p_\perp dp_\parallel dp_\perp d\varphi$$

以下 φに関する積分に注目…

$$\int -e f^{(1)} d\varphi = -\frac{\gamma m e^2}{i}\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\frac{1}{k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega}E_\parallel^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel}J_0^2\right] \quad \because J_0^2 \simeq 1 \quad \because \int_0^{2\pi}\exp(\pm i\varphi)d\varphi = 0$$

$$= \frac{\gamma m e^2}{i}\cdot\frac{2\pi}{\gamma m\omega - k_\parallel p_\parallel}\cdot E_\parallel^{(1)}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel} \quad \because \gamma = \gamma(p_\perp, p_\parallel) = \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

よって

$$\rho^{(1)} = \underline{E_\parallel^{(1)}\frac{2\pi e^2}{i}\iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\parallel}{\gamma m\omega - k_\parallel p_\parallel}\gamma m p_\perp dp_\parallel dp_\perp} \quad (A19)$$

proof (A20)…

$$\begin{cases} j^{(1)} = \iiint -e f^{(1)} v\, p_\perp dp_\parallel dp_\perp d\varphi \\ j_\pm^{(1)} = j_x^{(1)} \pm i j_y^{(1)} \text{ とする} \end{cases}$$

① $j_x^{(1)} = \iiint -e f^{(1)} \underbrace{v_\perp\cos\varphi}_{v_x}\, p_\perp dp_\parallel dp_\perp d\varphi \qquad (\because \int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = 0)$

以下φに関する積分に注目…

$$\int_0^{2\pi} -e f^{(1)}\cos\varphi\, d\varphi \qquad (A_n = k_\parallel p_\parallel - \gamma m\omega + n m\omega_c,\ J_0^2 \sim 1 \text{ とする})$$

$$= \frac{-\gamma m e^2}{i}\int_0^{2\pi} d\varphi\left[\frac{\exp(-i\varphi)\cos\varphi}{A_{-1}}\frac{E_+^{(1)}}{2}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + \frac{\exp(i\varphi)\cos\varphi}{A_{+1}}\frac{E_-^{(1)}}{2}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + \cancel{\frac{\cos\varphi}{A_0}E_\parallel\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel}}\right]$$

$$\int_0^{2\pi}\exp(-i\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = \int d\varphi\, \exp(-i\varphi)\left\{\frac{\exp(i\varphi)+\exp(-i\varphi)}{2}\right\}$$

$$= \int d\varphi\left(\frac{1+\exp(-2i\varphi)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi + \frac{1}{-2i}\exp(-2i\varphi)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi$$

$$\int_0^{2\pi}\exp(i\varphi)\cos\varphi\, d\varphi = \pi$$

$$= \frac{-\gamma m e^2}{i}\left[\frac{\pi}{A_{-1}}\frac{E_+^{(1)}}{2}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + \frac{\pi}{A_{+1}}\frac{E_-^{(1)}}{2}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp}\right] \quad -ⓐ$$

② $j_y^{(1)} = \iiint -e f^{(1)} v_\perp \sin\varphi \, p_\perp dp_\parallel dp_\perp d\varphi$

$$\int_0^{2\pi} -e f^{(1)} \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{\gamma m e^2}{i} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\exp(-i\varphi)\sin\varphi}{A_{-1}} \frac{E_+^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + \frac{\exp(i\varphi)\sin\varphi}{A_{+1}} \frac{E_-^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} \right]$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(-i\varphi)\sin\varphi \, d\varphi = \int d\varphi \exp(-i\varphi) \left\{ \frac{\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)}{2i} \right\}$$

$$= \int d\varphi \, \frac{1-\exp(-2i\varphi)}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\varphi + \frac{1}{2i} \exp(-2i\varphi) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\pi}{i}$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(i\varphi)\sin\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{i}$$

$$= -\frac{\gamma m e^2}{i} \left[\frac{\pi}{iA_{-1}} \frac{E_+^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + \frac{-\pi}{iA_{+1}} \frac{E_-^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} \right] \quad - ②$$

$$j_+^{(1)} = j_x^{(1)} + i j_y^{(1)}$$

$$= \iint v_\perp p_\perp \cdot \frac{-\gamma m e^2}{i} \left[\frac{\pi}{A_{-1}} \cdot \frac{E_+^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + \cancel{\frac{\pi}{A_{+1}} \cdot \frac{E_-^{(1)}}{2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp}} \right]$$
$$+ \cancel{i} v_\perp p_\perp \cdot \frac{-\gamma m e^2}{i} \left[\frac{\pi}{\cancel{i}A_{-1}} \cdot \frac{E_+^{(1)}}{2} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} + \cancel{\frac{-\pi}{iA_{+1}} \cdot \frac{E_-^{(1)}}{2} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp}} \right] dp_\parallel dp_\perp$$

$$= \iint v_\perp p_\perp \cdot \frac{-\gamma m e^2}{i} \left(\frac{\pi}{A_{-1}} E_+^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} \right) dp_\parallel dp_\perp \qquad p_\perp = m v_\perp \gamma$$

$$= \iint \frac{p_\perp^2}{\cancel{m\gamma}} \cdot \frac{-\cancel{\gamma m} e^2}{i} \left(\frac{\pi}{A_{-1}} E_+^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\perp} \right) dp_\parallel dp_\perp$$

$$= \frac{E_+^{(1)}}{2} \cdot \frac{e^2}{i} \cdot 2\pi \iint p_\perp^2 \left(\frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\perp}{(-1)\cdot A_{-1}} \right) dp_\parallel dp_\perp \qquad (-1)\cdot A_{-1} = \gamma m\omega - k_\parallel p_\parallel + m\omega_c$$

$$= \frac{E_+^{(1)}}{2} \cdot \frac{2\pi e^2}{i} \iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\perp}{\gamma m\omega - k_\parallel p_\parallel + m\omega_c} p_\perp^2 dp_\parallel dp_\perp \qquad (A20)//$$

$$j_-^{(1)} = j_x^{(1)} - i j_y^{(1)} \qquad (同様に)$$

$$= \frac{E_-^{(1)}}{2} \cdot \frac{2\pi e^2}{i} \iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\perp}{\gamma m\omega - k_\parallel p_\parallel - m\omega_c} p_\perp^2 dp_\parallel dp_\perp \quad (A20)//$$

(proof A21)

$$j^{(1)} = \iiint -e f^{(1)} v\, p_\perp dp_\parallel dp_\perp d\varphi \qquad j_\parallel^{(1)} = j_z$$

$$j_\parallel^{(1)} = \iiint -e f^{(1)} \frac{p_\parallel}{m\gamma} p_\perp dp_\parallel dp_\perp d\varphi$$

以下φ積分注目…

$$\int -e f^{(1)} d\varphi = \frac{\gamma m e^2}{i} \cdot \frac{2\pi}{\gamma m \omega - k_\parallel p_\parallel} \cdot E_\parallel^{(1)} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p_\parallel} \quad \text{(A19)より..}$$

よって

$$j_\parallel = E_\parallel^{(1)} \cdot \frac{2\pi e^2}{i} \iint \cancel{\gamma m} \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\parallel}{\gamma m \omega - k_\parallel p_\parallel} \frac{p_\parallel p_\perp}{\cancel{m\gamma}} dp_\parallel dp_\perp$$

$$= E_\parallel^{(1)} \frac{2\pi e^2}{i} \iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\parallel}{\gamma m \omega - k_\parallel p_\parallel} p_\parallel p_\perp dp_\parallel dp_\perp \qquad \text{(A21)}$$

・1次オーダーのMaxwell eqからE^(1)が、ρ^(1)とj^(1)の関数として与えられる。

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) E^{(1)} + i\mu_0 c^2 \rho^{(1)} k - i\mu_0 \omega j^{(1)} = 0 \quad \text{(A22)}$$

→ proof (A22)

・(A19)~(A21)で $\rho^{(1)}$ と $j^{(1)}$ をおきかえ。
(A22)は以下のように書きかえられる。 → proof (A23)

$$D(k,\omega) \cdot \begin{pmatrix} E_+^{(1)} \\ E_-^{(1)} \\ E_\parallel^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{(A23)}$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{K}{2} - \frac{i\mu_0\omega}{4} J_+ & \frac{K}{2} - \frac{i\mu_0\omega}{4} J_- & i\mu_0 c^2 R k_\perp \\ \frac{K}{2i} - \frac{\mu_0\omega}{4} J_+ & -\frac{K}{2i} + \frac{\mu_0\omega}{4} J_- & 0 \\ 0 & 0 & K + i\mu_0 c^2 k_\parallel k - i\mu_0 \omega J_\parallel \end{pmatrix} \quad \text{(A24)}$$

ここで $K = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \cdots \text{(A25)}$ $\qquad R = \frac{2\pi e^2}{i} \iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\parallel}{\gamma m \omega - k_\parallel p_\parallel} \gamma m p_\perp dp_\parallel dp_\perp \cdots \text{(A26)}$

$$J_\pm = \frac{2\pi e^2}{i} \iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\perp}{\gamma m \omega - k_\parallel p_\parallel \pm m\omega_c} p_\perp^2 dp_\parallel dp_\perp \quad \text{(A27)}$$

$$J_\parallel = \frac{2\pi e^2}{i} \iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\perp}{\gamma m \omega - k_\parallel p_\parallel} p_\parallel p_\perp dp_\parallel dp_\perp \quad \text{(A28)}$$

(proof A22) $\mathbb{B} = \mathbb{B}^{(0)} + \mathbb{B}^{(1)}$, $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{(1)}$ とする.

(A4)… $\nabla \times \mathbb{B} = \mu_0 \mathbb{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t}$

(A4)左辺を時間微分

$$\circ\ \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbb{B}) = \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}\right) \overset{(A2)}{=} \nabla \times (-\nabla \times \mathbb{E}^{(1)})$$

$$= -\nabla(\nabla \cdot \mathbb{E}^{(1)}) + \nabla^2 \mathbb{E}^{(1)}$$

$$= -\nabla \frac{\rho^{(1)}}{\varepsilon_0} + \nabla^2 \mathbb{E}^{(1)}$$

ここで $\mathbb{E}^{(1)} \propto \exp(i(\mathbb{k} \cdot \mathbb{r} - \omega t))$ より… $\frac{\partial}{\partial \mathbb{r}} \to i\mathbb{k}$ $\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$ となる.

$$= -\frac{i\mathbb{k}}{\varepsilon_0}\rho^{(1)} - k^2 \mathbb{E}^{(1)}$$

$\frac{1}{\varepsilon_0} = c^2 \mu_0$

(A4)右辺を時間微分

$$\circ\ \mu_0 \frac{\partial \mathbb{j}^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbb{E}^{(1)}}{\partial t^2} = -i\mu_0 \omega \mathbb{j}^{(1)} - \omega^2 \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0}_{\frac{1}{c^2}} \mathbb{E}^{(1)}$$

以上より.

$$-i\mu_0 c^2 \mathbb{k} \rho^{(1)} - k^2 \mathbb{E}^{(1)} = -i\mu_0 \omega \mathbb{j}^{(1)} - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbb{E}^{(1)}$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbb{E}^{(1)} + i\mu_0 c^2 \rho^{(1)} \mathbb{k} - i\mu_0 \omega \mathbb{j}^{(1)} = 0 \quad \text{(A22)} //$$

(proof A23)

(A26)〜(A28)より(A19)〜(A21)は以下のようになる。

$$\text{(A19)} \cdots \rho^{(1)} = E_{\parallel}^{(1)} \frac{2\pi e^2}{i} \iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_{\parallel}}{\gamma m \omega - k_{\parallel} p_{\parallel}} \gamma m p_{\perp} dp_{\parallel} dp_{\perp}$$

$$= E_{\parallel}^{(1)} R \quad -ⓐ$$

$$\text{(A20)} \cdots j_{\pm}^{(1)} = \frac{E_{\pm}^{(1)}}{2} \frac{2\pi e^2}{i} \iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_{\perp}}{\gamma m \omega - k_{\parallel} p_{\parallel} \pm m\omega_c} p_{\perp}^2 dp_{\perp} dp_{\parallel}$$

$$= \frac{E_{\pm}}{2} J_{\pm} \quad -ⓑ$$

$$\text{(A21)} \cdots j_{\parallel}^{(1)} = E_{\parallel} \frac{2\pi e^2}{i} \iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_{\perp}}{\gamma m \omega - k_{\parallel} p_{\parallel}} p_{\parallel} p_{\perp} dp_{\parallel} dp_{\perp}$$

$$= E_{\parallel} J_{\parallel} \quad -ⓒ$$

(A23)より(A22)は

$$K \mathbb{E}^{(1)} + i\mu_0 c^2 \rho^{(1)} \mathbb{k} - i\mu_0 \omega \mathbb{j}^{(1)} = 0$$

ⓐ-ⓒより

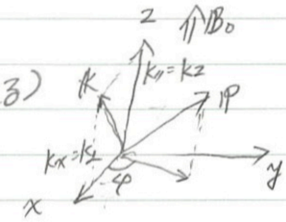
$$K\boldsymbol{E}^{(1)} + i\mu_0 c^2 E_{\parallel}^{(1)} R\boldsymbol{k} - i\mu_0 \omega \boldsymbol{j}^{(1)} = \boldsymbol{0} \quad - ⓓ$$

以下、摂動成分の(1)の表式をおとす

・$E_\pm = E_x \pm iE_y$ }（ⓐ〜ⓒ）より、$E_x = \dfrac{E_+ + E_-}{2}$ −ⓔ　$E_y = \dfrac{E_+ - E_-}{2i}$ −ⓕ

同様に　$j_x = \dfrac{E_+J_+/2 + E_-J_-/2}{2} = \dfrac{E_+J_+ + E_-J_-}{4}$ −ⓖ

$j_y = \dfrac{E_+J_+/2 - E_-J_-/2}{2i} = \dfrac{E_+J_+ - E_-J_-}{4i}$ −ⓗ



・ここからは proof A16 からの仮定と同様、$\boldsymbol{k}$はxz面内にあるとする。(一般性は保たれる)
よって $\boldsymbol{k} = k_\perp \boldsymbol{e}_x + k_\parallel \boldsymbol{e}_z$ と表せる。($k_y = 0$, $k_x = k_\perp$, $k_\parallel = k_y$)

ⓓをx, y, z成分に分けて書き下す。

x: $KE_x + i\mu_0 c^2 E_\parallel R k_x - i\mu_0 \omega j_x = 0$

ⓔ・ⓖより

$$K\left(\frac{E_+ + E_-}{2}\right) + i\mu_0 c^2 E_\parallel R k_\perp - i\mu_0 \omega \left(\frac{E_+J_+ + E_-J_-}{4}\right) = 0$$

$$\left(\frac{K}{2} - \frac{i\mu_0 \omega J_+}{4}\right)E_+ + \left(\frac{K}{2} - \frac{i\mu_0 \omega J_-}{4}\right)E_- + i\mu_0 c^2 R k_\perp E_\parallel = 0 \quad - ⓘ$$

y: $KE_y + i\mu_0 c^2 E_\parallel R k_y - i\mu_0 \omega j_y = 0$

ⓕ・ⓗより

$$K\left(\frac{E_+ - E_-}{2i}\right) + 0 - i\mu_0 \omega \left(\frac{E_+J_+ - E_-J_-}{4i}\right) = 0$$

$$\left(\frac{K}{2i} - \frac{\mu_0 \omega J_+}{4}\right)E_+ + \left(-\frac{K}{2i} + \frac{\mu_0 \omega J_-}{4}\right)E_- + 0 = 0 \quad - ⓙ$$

z: $KE_\parallel + i\mu_0 c^2 E_\parallel R \underbrace{k_z}_{=k_\parallel} - i\mu_0 \omega \underbrace{j_z}_{=E_\parallel J_\parallel} = 0$

$$\left(K + i\mu_0 c^2 R k_\parallel - i\mu_0 \omega J_\parallel\right) E_\parallel = 0 \quad - ⓚ$$

②-⑭より $\mathcal{D}\cdot\begin{pmatrix}E_+\\E_-\\E_{//}\end{pmatrix}$ のテンソル表記にすると

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{K}{2}-\frac{i\mu_0\omega}{4}J_+ & \frac{K}{2}-\frac{i\mu_0\omega}{4}J_- & i\mu_0c^2Rk_\perp \\ \frac{K}{2i}-\frac{\mu_0\omega}{4}J_+ & -\frac{K}{2i}+\frac{\mu_0\omega}{4}J_- & 0 \\ 0 & 0 & K+i\mu_0c^2Rk_{//}-i\mu_0\omega J_{//} \end{pmatrix}}_{=\mathcal{D}\quad (A24)} \cdot \begin{pmatrix}E_+\\E_-\\E_{//}\end{pmatrix} = 0 \qquad (A23)$$

◦ 波の一般的な分散関係は、$\mathcal{D}(k,\omega)$ の行列式 $=0$ とすれば得られる。

◦ 旋回性の関係から、(RHと電子は B_0 に対し同方向に回るので) RH circular wave は、電子と強い相互作用をするので、それのみを考慮することにする

$\Rightarrow E_+^{(1)}=E_{//}^{(1)}=0$ とする。

◦ 以上より分散関係は

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)-\pi\mu_0e^2\omega\iint\frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\perp}{\gamma m\omega-k_{//}p_{//}-m\omega_c}p_\perp^2\,dp_{//}dp_\perp=0$$ となる。→ proof (A29)

◦ ここで考える電子は非相対論的。→ $p=mv$ or $\gamma=1$ ($\omega\simeq\omega_c$ の時の分母をのぞく)

◦ 分布関数は速度空間で、$f(v_{//},v_\perp)=m^3f^{(0)}(p_{//},p_\perp)$ と表せる。(A30)

$$\rightarrow\iiint v_\perp dv_\perp dv_{//}d\phi\, f(v_{//},v_\perp)=\iiint p_\perp dp_\perp dp_{//}d\phi\, f^{(0)}(p_{//},p_\perp)$$

$$=\iiint v_\perp dv_\perp dv_{//}d\phi\, m^3f^{(0)}(p_{//},p_\perp)$$

proof (A29)

A23より…

$\mathcal{D}\cdot\begin{pmatrix}E_+\\E_-\\E_{//}\end{pmatrix}=0$ ($E_+=E_{//}=0$ とすると)

$$\mathcal{D}\cdot\begin{pmatrix}0\\E_-\\0\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\left(\frac{K}{2}-\frac{i\mu_0\omega}{4}J_-\right)E_-\\ \left(-\frac{K}{2i}+\frac{\mu_0\omega}{4}J_-\right)E_-\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

よって $\frac{K}{2} - \frac{i\mu_0 w}{4} J_- = 0$

$$+)\quad -\frac{K}{2i} + \frac{\mu_0 w}{4} J_- = 0$$

$$\frac{K}{2}\left(1-\frac{1}{i}\right) + \frac{\mu_0 w}{4}(1-i) J_- = 0$$

$$\frac{K}{2}(1+i) + \frac{\mu_0 w}{4}(1+i)(-i) J_- = 0 \qquad \text{よって } \frac{K}{2} + \frac{\mu_0 w}{4}(-i) J_- = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(k^2 - \frac{w^2}{c^2}\right) + \frac{\mu_0 w}{4}(-i)\frac{2\pi e^2}{i}\iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\perp}{\gamma m w - k_\parallel p_\parallel - m w_c} p_\perp^2 dp_\parallel dp_\perp = 0$$

$$\left(k^2 - \frac{w^2}{c^2}\right) - \pi\mu_0 e^2 w \iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\perp}{\gamma m w - k_\parallel p_\parallel - m w_c} p_\perp^2 dp_\parallel dp_\perp = 0 \qquad (A29)$$

・よって (A28) の分散関係は

$$k^2 - \frac{w^2}{c^2} - \frac{\pi\mu_0 e^2 w}{m}\iint \frac{\partial f/\partial v_\perp}{w - k_\parallel v_\parallel - \frac{w_c}{\gamma}} v_\perp^2 dv_\parallel dv_\perp = 0$$

(A31) となる。 → (proof A31)

○ $w = w_r + i w_i \in \mathbb{C}$ である。
虚部 w_i は波の growth rate に対応する。($w_i > 0$ が不安定となり波成長)

○ Plemelj's formula を A31 に適用。
Plemelj の式

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \pm i\pi f(x_0) \qquad (A32)$$

$$\left(\begin{aligned} &P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon}\frac{f(x)}{x-x_0}dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}dx\right] \\ &i\pi f(x_0) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}(x_0) \\ &\qquad = i\pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0) f(x)\,dx \end{aligned} \right)$$

proof (A31)

$p = mv$ より $\quad p_\perp^2 dp_\parallel dp_\perp = m^4 v_\perp^2 dv_\parallel dv_\perp$

$$\frac{\partial f^{(0)}(p_\perp, p_\parallel)}{\partial p_\perp} = \frac{\frac{1}{m^3}\partial f(v_\perp, v_\parallel)}{m\, dv_\perp} = \frac{1}{m^4}\frac{\partial f}{\partial v_\perp}$$

よって(A29)の積分は

$$\iint \frac{\partial f^{(0)}/\partial p_\perp}{\gamma m\omega - k_\parallel p_\parallel - m\omega_c} p_\perp^2 dp_\perp dp_\parallel = \iint \frac{\frac{1}{m^4}\partial f/\partial v_\perp}{\gamma m\omega - k_\parallel \gamma m v_\parallel - m\omega_c} m^4 v_\perp^2 dv_\parallel dv_\perp$$

$$= \frac{1}{m}\iint \frac{\partial f/\partial v_\perp}{\gamma(\omega - k_\parallel v_\parallel - \frac{\omega_c}{\gamma})} v_\perp^2 dv_\parallel dv_\perp \qquad \gamma \simeq 1$$

$$= \frac{1}{m}\iint \frac{\partial f/\partial v_\perp}{\omega - k_\parallel v_\parallel - \frac{\omega_c}{\gamma}} v_\perp^2 dv_\parallel dv_\perp$$

よって(A29)は (A31)

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) - \frac{\pi \mu_0 e^2 \omega}{m}\iint \frac{\partial f/\partial v_\perp}{\omega - k_\parallel v_\parallel - \frac{\omega_c}{\gamma}} v_\perp^2 dv_\parallel dv_\perp = 0 \qquad //$$

・ $|\omega_i| \ll \omega_r$ の仮定をおくと

$$\omega_i = \frac{\pi^2}{2}\frac{e^2}{\varepsilon_0 m}\int_0^{+\infty} v_\perp^2 dv_\perp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial v_\perp}\delta\left(\omega_r - k_\parallel v_\parallel - \frac{\omega_c}{\gamma}\right) dv_\parallel \qquad (A33)$$

→proof (A33)

・ $f(v_\parallel, v_\perp)$ を規格化

$\iint dv_\perp dv_\parallel f(v_\parallel, v_\perp) = n$ だったので

$\Rightarrow \iint dv_\perp dv_\parallel f(v_\parallel, v_\perp) = 1$ となる f を導入 (A35) ($f \Rightarrow nf$ となる)

・よって(A32)は

$$\omega_i = \frac{\pi^2}{2}\omega_p^2 \int_0^{+\infty} v_\perp^2 dv_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial v_\perp}\delta\left(\omega_r - k_\parallel v_\parallel - \frac{\omega_c}{\gamma}\right) dv_\parallel \qquad (A34) \quad \left(\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\right)$$

(proof A33)

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\varepsilon} = P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx \pm i\pi f(x_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f/\partial v_\perp}{\omega_r - k_\parallel v_\parallel - \frac{\omega_c}{\gamma} + i\omega_i} dv_\parallel = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\partial f/\partial v_\perp)(-1/k_\parallel)}{\left(v_\parallel - \frac{\omega_r}{k_\parallel} + \frac{\omega_c}{\gamma k_\parallel} - \frac{i\omega_i}{k_\parallel}\right)} dv_\parallel$$

$\omega_r \gg |\omega_i|$ より ($\omega_i > 0$ と仮定)

$$= P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f/\partial v_\perp}{-k_\parallel\left(v_\parallel - \frac{\omega_r}{k_\parallel} + \frac{\omega_c}{\gamma k_\parallel}\right)} dv_\parallel + i\pi\left[\left(\frac{\partial f}{\partial v_\perp}\right)\left(-\frac{1}{k_\parallel}\right)\right]$$

$$\left(v_\parallel = \frac{\omega_r}{k_\parallel} - \frac{\omega_c}{\gamma k_\parallel}\right)$$

$$= P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f/\partial v_\perp}{\omega_r - k_\parallel v_\parallel - \frac{\omega_c}{\gamma}} dv_\parallel + i\pi\int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{k_\parallel}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial v_\perp}\right)\delta\left(v_\parallel - \frac{\omega_r}{k_\parallel} + \frac{\omega_c}{\gamma k_\parallel}\right) dv_\parallel$$

$$\| \qquad -\frac{\partial f}{\partial v_\perp}\delta\left(\omega_r - k_\parallel v_\parallel - \frac{\omega_c}{\gamma}\right)$$

$$\left(\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\right)$$

主値積分I_r、留数部I_iとすると(A31)の積分部は

$= I_r - i\pi I_i$ $\quad \left(\begin{array}{l} I_r = \int_0^\infty P\int_{-\infty}^\infty \dfrac{\partial f/\partial v_\perp}{\omega_r - k_\parallel v_\parallel - \omega_c/\gamma} dv_\parallel v_\perp^2 dv_\perp^2 \\ I_i = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \dfrac{\partial f}{\partial v_\perp} \delta(\omega_r - k_\parallel v_\parallel - \dfrac{\omega_c}{\gamma}) dv_\parallel v_\perp^2 dv_\perp \end{array} \right.$

よって(A31)は.

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi\mu_0 e^2\omega}{m}(I_r - i\pi I_i) = 0$$

$\omega = \omega_r + i\omega_i$とすると

上式の虚部...

$$-\frac{2\omega_r\omega_i}{c^2} - \frac{\pi\mu_0 e^2}{m}(\omega_i I_r - \pi\omega_r I_i) = 0$$

$$-\frac{2\omega_i}{c^2} - \frac{\pi\mu_0 e^2}{m}\Big(\underbrace{\cancel{\frac{\omega_i}{\omega_r} I_r}}_{=0} - \pi I_i\Big) = 0$$

近似的に主値積分をおとす.

$$\frac{\pi^2\mu_0 e^2}{m} I_i = \frac{2\omega_i}{c^2} \qquad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$\omega_i = \frac{\pi^2 e^2 c^2 \mu_0}{2m} I_i$$

$$= \frac{\pi^2 e^2}{2\varepsilon_0 m} I_i$$

$$= \frac{\pi^2 e^2}{2\varepsilon_0 m}\int_0^\infty v_\perp^2 dv_\perp \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial v_\perp}\delta(\omega_r - k_\parallel v_\parallel - \frac{\omega_c}{\gamma}) dv_\parallel \quad (A33)$$