

5.1 電離気体の比誘電率

5.1.1 コールドプラズマの理論 (混合気体における媒質に Maxwell eq)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 N \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \downarrow \quad \mathbf{J} = N \mathbf{A} \mathbf{V}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + N \mathbf{A} \mathbf{V}$$

コールド仮定

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

... (5.1)

$$\alpha = N \mathbf{A} \mu \quad (\mathbf{V} = \mu / \mathbf{E}) \text{ を導入} \quad \dots (5.2)$$

μ .. 移動度 α .. 誘電率

(5.1) の右辺

$$\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + N \mathbf{A} \mathbf{V} = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E} + N \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{E} \quad j \text{.. 虚数単位}$$

$$= (j\omega \epsilon_0 + \alpha) \mathbf{E} \quad (\mathbf{E} : \mathbf{E} e^{j\omega t})$$

$$= j\omega \epsilon_0 \left(1 + \frac{\alpha}{j\omega \epsilon_0} \right) \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \dots (5.3)$$

コールドプラズマにおける
誘電率とすると $K = 1 + \frac{\alpha}{j\omega \epsilon_0}$.. 比誘電率

電流を含めた誘電率

(5.4)

5.1.2 比誘電率 (外部磁場なし)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nu \mathbf{v} = \frac{q}{m} \mathbf{E} \quad \nu \text{.. 平均衝突回数 (1/s)}$$

$$j\omega \mathbf{V} + \nu \mathbf{V} = \frac{q}{m} \mathbf{E}$$

$$(j\omega + \nu) \mathbf{V} = \frac{q}{m} \mathbf{E}$$

電子の速度 v_e

$$\mathbf{V} = \frac{q}{m(j\omega + \nu)} \mathbf{E}$$

$$= \frac{-j\omega}{-j m (j\omega + \nu)} \mathbf{E}$$

(衝突回数は質量 m × $(1 - j\omega/\nu)$ で ...)

$$= \frac{-j\omega}{m\nu (1 - j\omega/\nu)} \mathbf{E} \quad \dots (5.6)$$

μ...移動度

$$M = -\frac{j\alpha}{m\omega(1-j\frac{V}{\omega})} \quad \left\langle (5.2) \alpha = N\varrho\mu \right\rangle$$

$$\alpha = -j \cdot \frac{N\varrho^2}{m\omega} \quad \left\langle m(1-j\frac{V}{\omega}) \rightarrow m \right\rangle$$

... 衝突無視したコールドプラズマの比誘電率

(5.7)

$$K = 1 + \frac{\alpha}{j\omega\epsilon_0}$$

$$= 1 - \frac{jN\varrho^2}{\epsilon_0 m \omega^2 \epsilon_0} = 1 - \frac{N\varrho^2}{\epsilon_0 m \omega^2} \quad \dots \text{衝突無視・コールドプラズマの電流を含めた時の比誘電率}$$

(5.8)

$$= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \left(\omega_p = \sqrt{\frac{N\varrho^2}{\epsilon_0 m}} \text{ プラズマ周波数} \right)$$

外部磁場なしの比誘電率

(5.9)

$\omega \sim \omega_p$ のとき $K \rightarrow 0$ へ

・× 衝突ありのときの比誘電率 ($m \rightarrow m(1-j\frac{V}{\omega})$)

$$K = 1 - \frac{N\varrho^2}{\epsilon_0 m \omega^2 (1-j\frac{V}{\omega})}$$

$$= 1 - \frac{N\varrho^2}{\epsilon_0 m \omega^2 (1+\frac{V^2}{\omega^2})} - j \frac{N\varrho^2 V}{\epsilon_0 m \omega^3 (1+\frac{V^2}{\omega^2})} \quad (5.10)$$

外部磁場なし衝突ありの比誘電率

5.1.3 比誘電率 (外部磁場あり)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \quad (5.11) \text{ 電磁波によるH.E.無視}$$

$$\downarrow \text{付近無視} \quad (+ \alpha = N\varrho\mu \quad K = 1 + \frac{\alpha}{j\omega\epsilon_0} \quad \mathbf{v} = \mu \mathbf{E})$$

~3次元テンソル誘電率 (B の効果なし) ~

テンソル

$$\alpha = N\varrho\mu = jX \frac{\epsilon_0 \omega}{1-Y^2} \begin{bmatrix} 1-Y_x^2 & -jY_z - Y_x Y_z & jY_y - Y_z Y_x \\ jY_z - Y_x Y_z & 1-Y_y^2 & -jY_x - Y_y Y_x \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\begin{pmatrix} -\bar{Y}_Z - Y_2 Y_X & \bar{Y}_X - Y_Z Y_Z & 1 - Y_Z^2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{\omega p^2}{\omega^2} \quad (\text{④ 1: 2: 3 の効果は同方向} \rightarrow \text{成る})$$

$$Y = \frac{\Omega e}{\omega} \quad (Y_X = \frac{\Omega x}{\omega} \quad \Omega x = \alpha \frac{Bx}{m}) \quad (5.12)$$

→ 電子仮定 (α 負) より $\begin{cases} B \cdots \text{正} \rightarrow Y \cdots \text{負} \\ B \cdots \text{負} \rightarrow Y \cdots \text{正} \end{cases}$

~ 3次元テンソル比誘電率 (B の効果なし) ~

$$IK = I + \frac{\alpha}{j\omega \epsilon_0} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

外部磁場ありの比誘電率

$$K_{xx} = 1 - X \frac{1 - Y_x^2}{1 - Y^2} \quad K_{xy} = X \frac{jY_z + Y_x Y_z}{1 - Y^2} \quad K_{xz} = X \frac{-\bar{Y}_Z + Y_2 Y_X}{1 - Y^2}$$

$$K_{yx} = X \frac{-\bar{Y}_Z + Y_X Y_Z}{1 - Y^2} \quad K_{yy} = 1 - X \frac{1 - Y_Z^2}{1 - Y} \quad K_{yz} = X \frac{\bar{Y}_X + Y_Y Y_Z}{1 - Y^2}$$

$$K_{zx} = X \frac{\bar{Y}_Y + Y_Z Y_X}{1 - Y^2} \quad K_{zy} = X \frac{-\bar{Y}_X + Y_Y Y_Z}{1 - Y^2} \quad K_{zz} = 1 - X \frac{1 - Y_Z^2}{1 - Y^2}$$

($X \cdots \frac{\omega p^2}{\omega^2}$ (電場) $Y \cdots \frac{\Omega e}{\omega}$ (磁場))

→ 外部磁場の方向 … Z 軸 ($Y_X = Y_Y = 0, Y_Z = Y$) のとき

$$IK = \begin{bmatrix} S & jD & 0 \\ -jD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad \begin{cases} S = 1 - \frac{X}{1 - Y^2} \\ D = \frac{XY}{1 - Y^2} \\ P = 1 - X \end{cases} \quad (5.17) (5.18)$$

外部磁場あり (Z 軸方向の) 比誘電率

* 衡定 m のときの比誘電率 ($m \rightarrow (1 - \bar{Y}/\omega)m$)

$$X \rightarrow \{1 / (1 - \bar{Y}/\omega)\} X \quad Y \rightarrow \{1 / (1 - \bar{Y}/\omega)\} Y$$

* 付箋: ここで複数種類の荷電粒子があるとき

既知で γ_α を計算 → 電流密度 … 及 $N \gamma_\alpha \gamma_\alpha$

$$\rightarrow R = 1 - \frac{\gamma_\alpha}{\alpha} \frac{X_\alpha}{1 + \epsilon_\alpha |Y_\alpha|}$$

$$L = 1 - \frac{\gamma_\alpha}{\alpha} \frac{X_\alpha}{1 - \epsilon_\alpha |Y_\alpha|}$$

$$P = 1 - \frac{\gamma_\alpha}{\alpha} X_\alpha$$

$$S = \frac{R + L}{2}$$

$$D = \frac{R - L}{2}$$

(5.19) · (5.20)

K が ω の函数である \Rightarrow この媒質を分散性である (dispersive)

K がテンソル \Rightarrow : を異方性である
($E \times V$)

- $X \cdot K \cdot E$ 比較電率 $\omega \cdot E = E_0 \exp(i\omega t)$

5.2 分散関係式と屈折率

5.2.1 分散関係式 - I (外部磁場なし)

$$\nabla \times H = \vec{J} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$= j\omega \epsilon_0 K \vec{E} \quad (5.2)$$

⊕

$$\nabla \times E = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (= - \frac{\partial}{\partial t} \mu H)$$

$$\downarrow K = 1 - \frac{N \alpha^2}{\epsilon_0 m w^2} \quad (\text{電子のみ考慮})$$

$$= 1 - \frac{N \alpha^2}{\epsilon_0 m w^2 (1 + v^2/w^2)} - j \frac{N \alpha^2 v}{\epsilon_0 m w^3 (1 + v^2/w^2)} \quad (+\text{他粒子との衝突含})$$

$$\rightarrow \nabla \times (\nabla \times E) = \nabla \times \left(- \frac{\partial}{\partial t} \mu H \right)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 (\nabla \times H)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial t} j \mu_0 \omega \epsilon_0 K E$$

$$= - j^2 \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 K E$$

$$= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 K E$$

$$= k_0^2 K E$$

$$\nabla \times (\nabla \times E) = k_0^2 K E$$

$$\left(k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = \frac{\omega^2}{c^2} \right) \quad (5.22)$$

$$E = E_0 \exp \{ j(wt - \vec{k} \cdot \vec{r}) \} \quad \vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z \dots \text{単位ベクトル} \quad (5.23)$$

$E_0 = \text{const}$

$$\nabla \times E = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ -jk_x & -jk_y & +jk_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j k \times E \quad (5.24)$$

$$\text{cf. } (\nabla \times E)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

$$= -j k_y E_z \exp(\dots) + j k_z E_y \exp(\dots)$$

$$= - (j k_y E_z - j k_z E_y)$$

$$= (-j k \times E)_x$$

$$\nabla \times \nabla \times E = -j k \times (-j k \times E)$$

$$= -k \times (k \times E)$$

$$= k^2 E - (k \cdot E) k \quad (5.25)$$

$$(5.22) \Rightarrow k^2 E - (k \cdot E) k = k_0^2 k E$$

↓ $k \parallel \theta_2$ という座標を選ぶ ($|k| = k$)

$$k^2 E_x = k_0^2 k E_x \quad k^2 E_y = k_0^2 k E_y \quad 0 = k_0^2 k E_z \quad (5.26)$$

→ $k \neq 0$ のとき $E_z = 0$ … 電場は伝搬ベクトルと直交する成分のみ

$$\frac{k^2}{k_0^2} \equiv n^2 = k \quad \dots \text{分散関係式} \quad (5.27)$$

(電場なし)

$n_0 = \frac{\omega}{c}$ - 波速の波数
 $\rightarrow n$.. 頻率

では (5.8)・(5.9) より ...

(電場なし)
 $n = \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2}} = \sqrt{1 - X} \quad (X = \frac{w_p}{w})$

(5.28)

(5.10) より ...

(電場なし)
 $n = \sqrt{1 - \frac{w_p^2}{w^2(1 - j \frac{V}{w})}} = \sqrt{1 - \frac{X}{1 - jZ}} \quad (Z = \frac{V}{w})$

(5.29)

↙

$$n = n_r - j n_i \text{ とおく} \dots (n_r^2 > n_i^2 \text{ のとき})$$

$$n_r = \sqrt{1 - \frac{X}{1 + Z^2}} \quad n_i = \frac{1}{2n_r} \frac{XZ}{1 + Z^2} \quad (5.30) (5.31)$$

このとき $k = nk_0 = n_r k_0 - j n_i k_0$ である

$$|E| \propto e^{-jkz} = \exp(-jn_r k_0 z - n_i k_0 z)$$

振動項

減衰項 $\rightarrow \gamma = n_i k_0$

$$= \frac{1}{2\pi r} \frac{XZ}{1+z^2} \cdot \frac{w}{c} \quad (3.32)$$

減衰定数

$n_r^2 \gg n_i^2$ の条件は n_r が n_i に比べて十分大きい場合 ($Z^2 \ll 1$)

$$\rightarrow \gamma = \frac{\omega}{2cn_r} XZ$$

小まこと...

5.7.2 ... 外部磁場なしの比誘電率の計算 (k) < 頻域 >



5.2.1 ... 比誘電率 (k) と 波数ベクトル (k)、電場の向き (E) の関係
< Maxwell eq >
→ 外部磁場なしでの k と E の杆子を計算

5.2.2 分散関係式 - II (外部磁場あり) —————

外部磁場の方向を XZ 面上にとり、 k ベクトルを Z 軸にとる

$$\rightarrow B_y = 0, Y_y = 0 \text{ のとき}$$

(5.15') ...

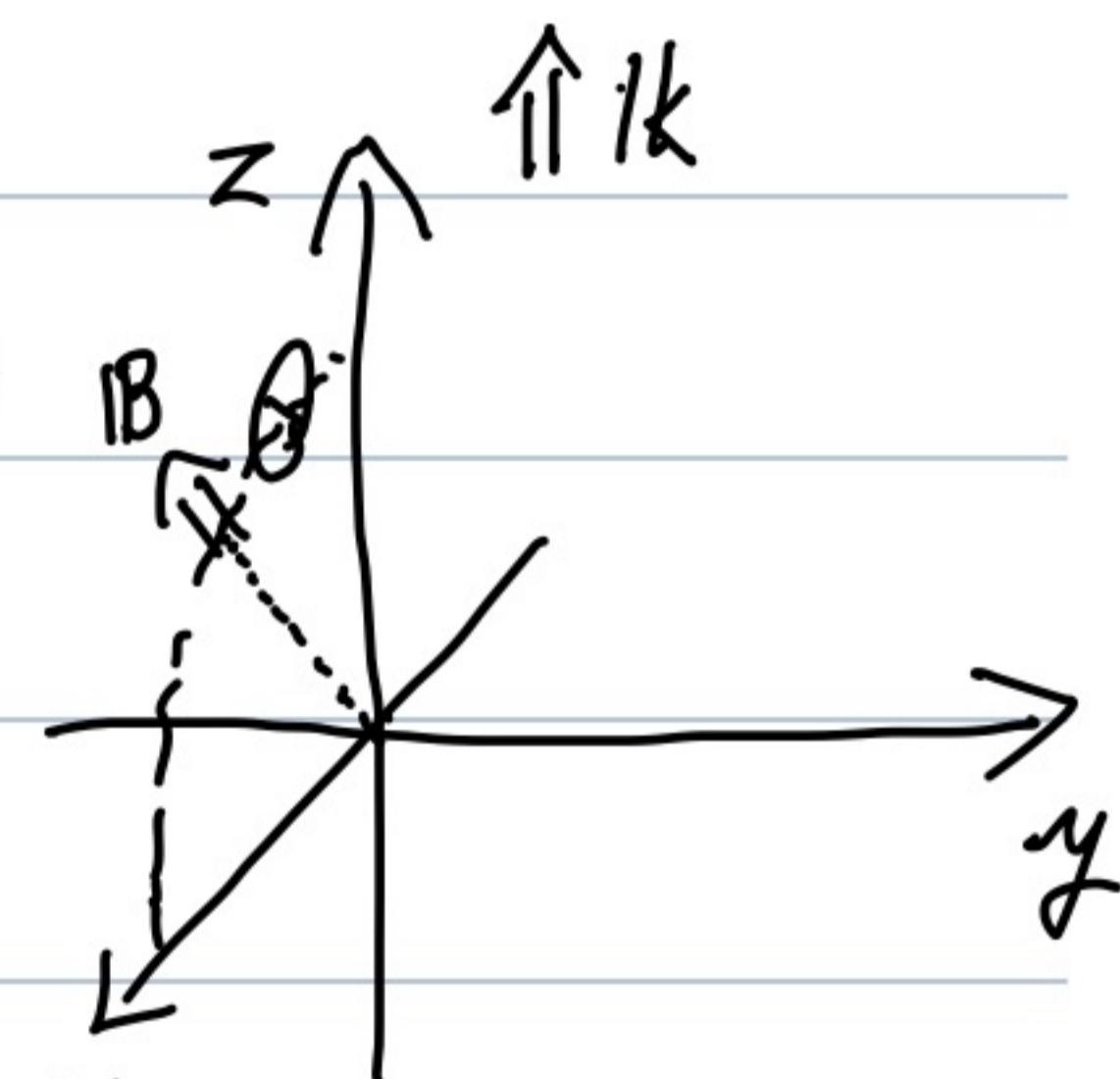
$$K_{xx} = 1 - X \frac{1 - Y_x^2}{1 - Y^2}$$

$$K_{xy} = -K_{yx} = jX \frac{Y_z}{1 - Y^2}$$

$$K_{xz} = K_{zx} = X \frac{Y_x Y_z}{1 - Y^2}$$

$$K_{yy} = 1 - \frac{X}{1 - Y^2}$$

$$K_{yz} = -K_{zy} = jX \frac{Y_z}{1 - Y^2} \quad K_{zz} = 1 - X \frac{1 - Y_z^2}{1 - Y^2}$$



(5.34)

(5.22)・(5.25) の 外部磁場あり ver 1 で $K \rightarrow K$ として

$$(k \cdot E) k - k^2 E + k_0^2 K \Psi = 0 \quad (k = k_{cz}) \quad (5.35)$$

$$k^2 E_z \rho_z - k^2 \mathbb{E} + k_0^2 K \mathbb{E} = 0 \quad (n = \frac{k}{k_0}) \dots \text{屈折率}$$

$$n^2 (E_z \rho_z - \mathbb{E}) + K \mathbb{E} = 0$$

$$\begin{pmatrix} K_{xx} - n^2 & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yz} & K_{yy} - n^2 & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (5.36)$$

$\rightarrow E_x, E_y, E_z$ が 0以外の値を持つ

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} K_{xx} - n^2 & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} - n^2 & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{行列式} \cdots 0$$

$$n^2 = 1 - \frac{2X}{2 - \frac{Y_T^2}{1-X} \pm \sqrt{\frac{Y_T^4}{(1-X)^2} + 4Y_L^2}} \quad \dots \text{分散関係式 (5.37), (5.38)}$$

(磁場あり)

$$(Y_T = Y \sin \theta \quad Y_L = Y \cos \theta)$$

↓ 電子の微欠陥を加える

$$n^2 = 1 - \frac{2X}{2(1-jz) - \frac{Y_T^2}{1-X-jz} \pm \sqrt{\frac{Y_T^4}{(1-X-jz)^2} + 4Y_L^2}} \quad \dots \text{分散関係式 (磁場あり・微欠陥あり)}$$

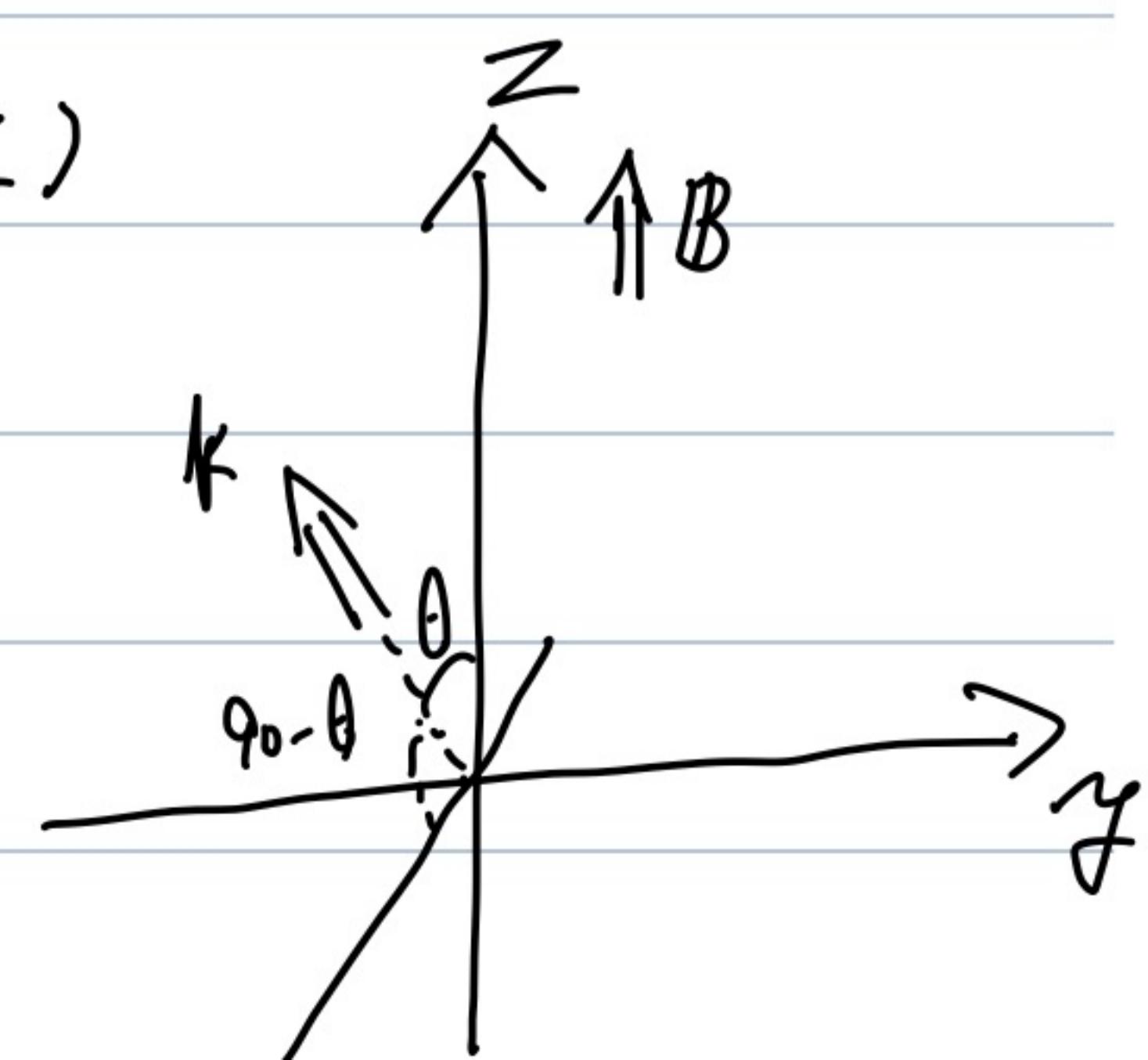
(5.39)

... Appleton - Hartree の式 (木村先生の D 論 5 章)

磁場ありの時の分散関係式 (比誘電率 $K < \infty$) + Maxwell $\rightarrow k \propto E$

C.F.) 別解 (磁場 B を z 軸方向にした場合・複数体考慮)

$$\text{誘電率テンソル } R = \begin{bmatrix} 1 - \frac{X}{1-Y^2} & j \frac{XY}{1-Y^2} & 0 \\ -j \frac{XY}{1-Y^2} & 1 - \frac{X}{1-Y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{bmatrix} \quad (5.16)$$



→ 簡単に...

$$\text{この代入} \rightarrow k = (k_0 \sin \theta, 0, k_0 \cos \theta)$$

$$(k \cdot E) k - k^2 E + k_0^2 k E = 0 \quad \text{代入} \dots$$

$$\begin{vmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & jD & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ -jD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (5.40)$$

S.D.P ... (5.17F)

$$\det = 0 \text{ で}$$

$$An^2 - Bn + C = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta \\ B = RL \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta) \\ C = PRL \end{array} \right. \quad (5.41) \quad (5.42)$$

... 多種因子の運動を考慮した分散実際式

$$n^2 = \frac{B \pm F}{2}$$

$$F^2 = (RL - PS)^2 \sin^4 \theta + 4P^2 D^2 \cos^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta = - \frac{P(h^2 - R)(h^2 - L)}{(Sh^2 - RL)(h^2 - P)}$$

(5.42) で 他の運動の無視すれば

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 - X \frac{1 - Y^2 \cos^2 \theta}{1 - Y^2} \\ B &= 2(1-X) \left(1 - \frac{X}{1-Y^2} \right) - \frac{XY^2 \sin^2 \theta}{1-Y^2} \\ C &= (1-X) \left(1 - \frac{X}{1-|Y|} \right) \left(1 - \frac{X}{1+|Y|} \right) \end{aligned} \right\} (5.46)$$

→ Appleton-Hartree の式と一致

屈折率 = 0 となる時は (5.47) より $C=0$ のとき

$$C = PRL = 0 \Rightarrow \begin{cases} P=0 \rightarrow X=1 \\ R=0 \rightarrow X=1-|Y| \\ L=0 \rightarrow X=1+|Y| \end{cases}$$

とある。

一方 銛突項がある時…

$$X = 1 - jZ \quad X = 1 - |Y| - jZ \quad X = 1 + |Y| - jZ$$

となるが、 X, Y, Z が実数のためこの角は不適 \Rightarrow 屈折率 = 0 は不可

小まこと…

5.7.3 … 外部磁場 k の比誘電率の計算 (k) <座標系>



5.2.2 … 比誘電率 (k) と 波数ベクトル (k)、電場の向き (E) の関係
<座標系>

5.2.3 屈折率の因式的表現

$$\text{付近無視} \dots n = n(X, Y, Z) \quad X = \frac{\omega_p^2}{\omega} \quad Y = \frac{\Omega_e}{\omega} \quad Z = \frac{\gamma}{\omega}$$

$Z=0, Y$ をパラメータとして $n-X$ の関係性を… X が電波 ω が ω_p が変化する間に直線

[1] 外部磁場のない場合 ($E \perp k$)

$$(5.28) \dots n^2 = 1 - X$$

$$X > 1 \text{ のとき } \dots n^2 < 0$$

$(\omega_p^2 > \omega^2)$ \rightarrow 電波伝搬不可



(銛突項ある時… n の実部 a) \rightarrow 減衰して伝搬)

\rightarrow プラズマ波以外の電磁波が通過できない…

[2] 外部磁場があり $|Y| < 1$ の場合

$$(5.37) \text{を書きかえ} \dots n^2 = 1 - \frac{2X}{2 - \frac{Y^2 \sin^2 \theta}{1-X} \pm \sqrt{\frac{Y^4 \sin^4 \theta}{(1-X)^2} + 4Y^2 \cos^2 \theta}} \quad (5.49)$$

$\begin{cases} Y_L \dots Y \cos \theta \\ Y_T \dots Y \sin \theta \end{cases}$

(5.47) 上式は $X = 1-|Y|, 1, 1+|Y|$ のとき $n=0$ となる

i) $\theta = 90^\circ$ (横伝搬 $k \perp B$)

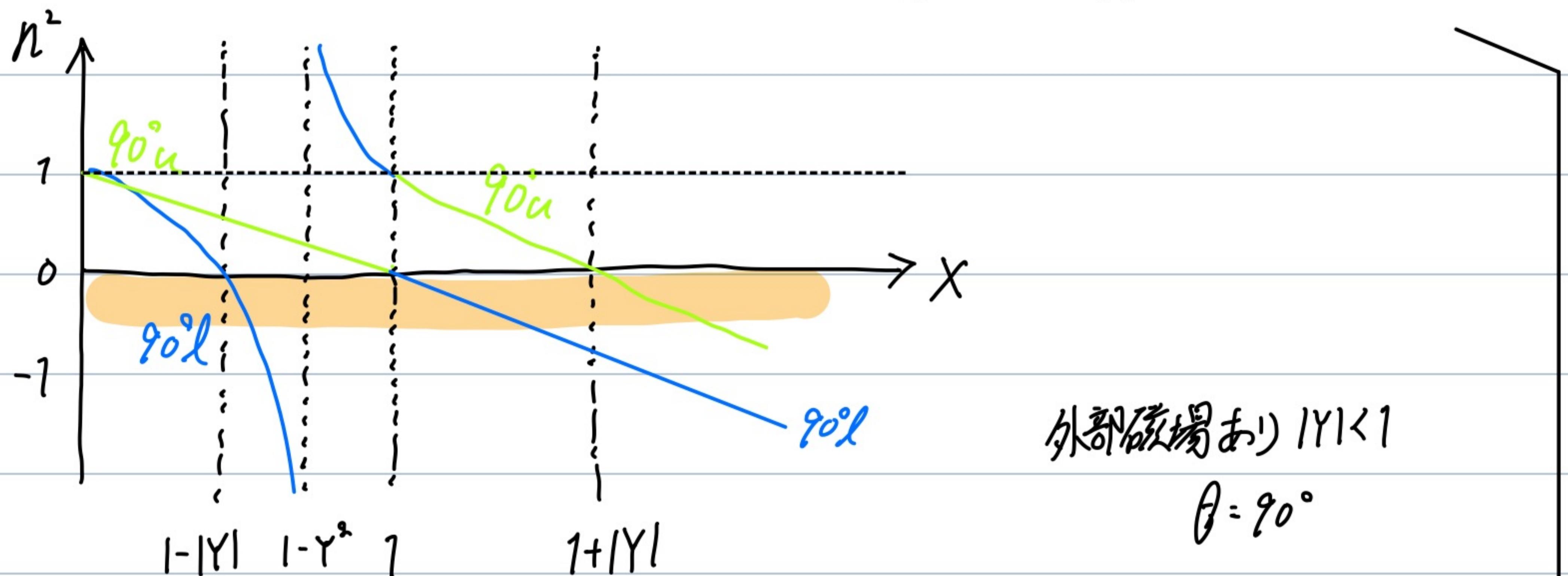
$$n^2 = 1 - \frac{2X}{2 - \frac{Y^2}{1-X} \pm \sqrt{\left(\frac{Y^2}{1-X}\right)^2}} \quad (5.50) \quad \leftarrow (5.49) \text{ に } \theta = 90^\circ \text{ を代入}$$

↓

$$n^2 = \begin{cases} 1 - X & = P \quad (90^\circ u: 0 < X < 1 \quad 90^\circ l: 1 < X) \end{cases} \quad (5.51)$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{X}{1 - \frac{Y^2}{1-X}} & = \frac{RL}{S} \quad (90^\circ l: 0 < X < 1 \quad 90^\circ u: 1 < X) \end{cases} \quad (5.51)'$$

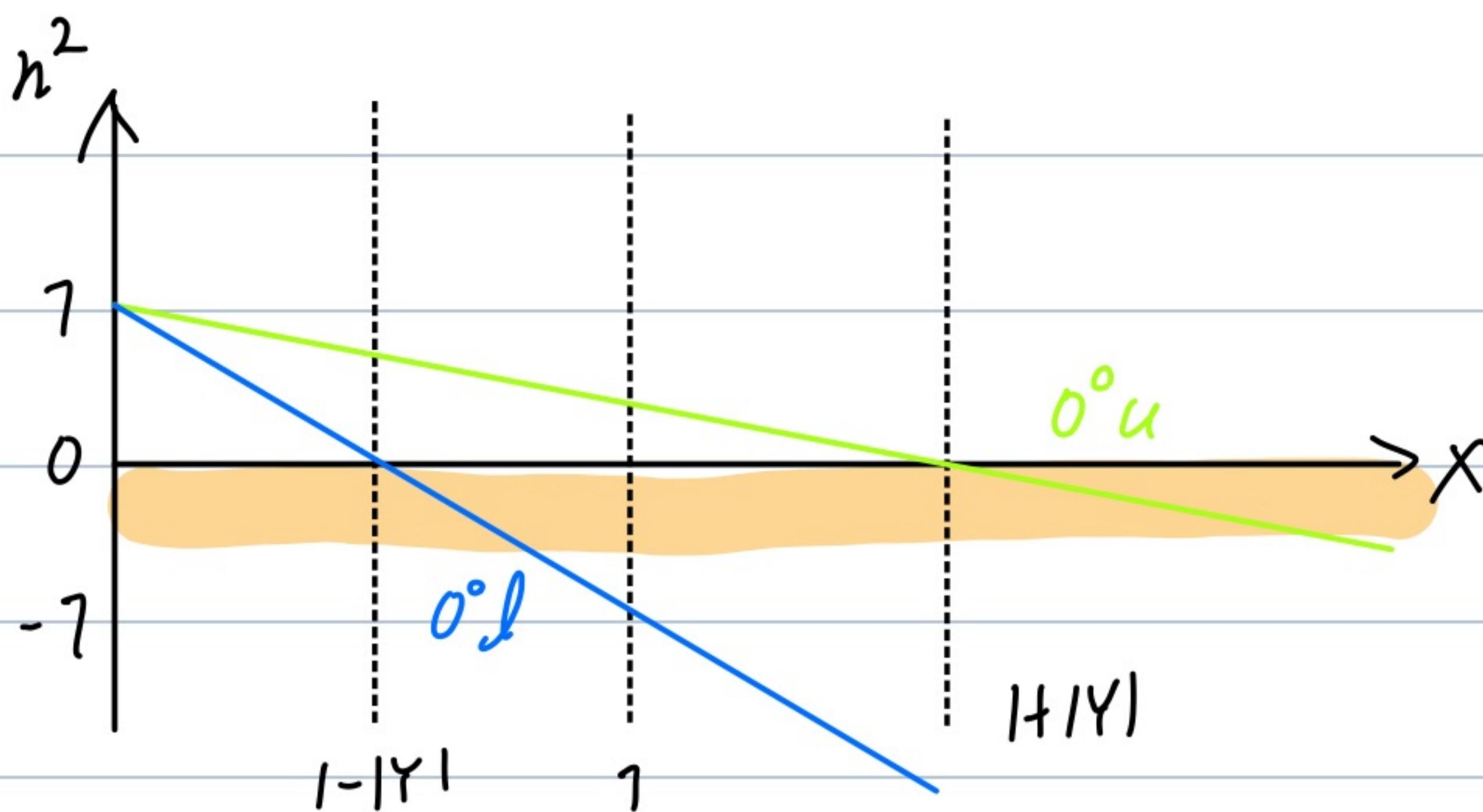
u : 上符号 l : 下符号



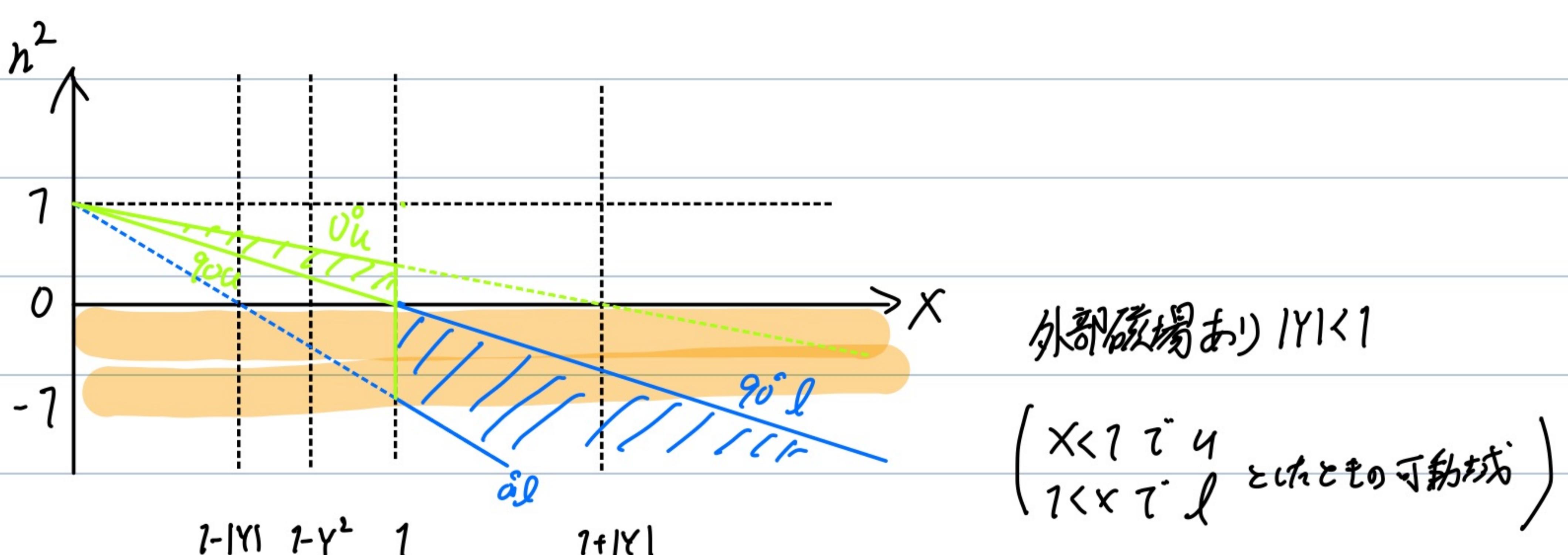
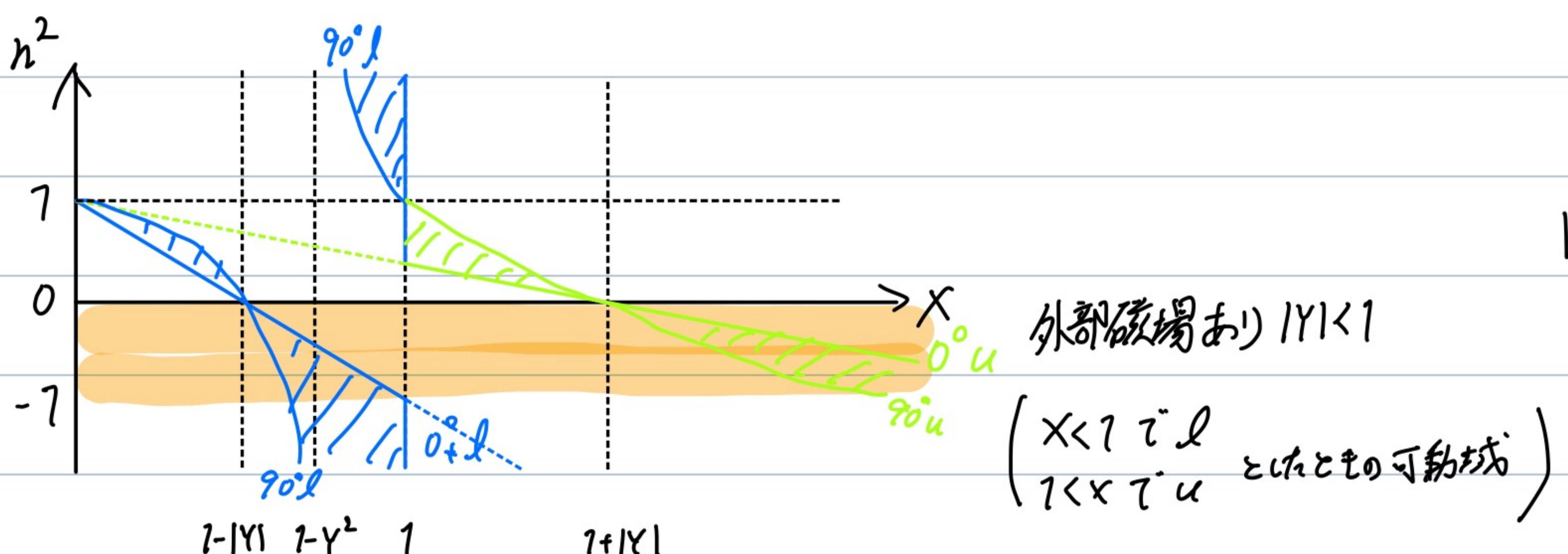
ii) $\theta = 0^\circ$ (縦伝搬 $k \parallel B$)

$$n^2 = \begin{cases} 1 - \frac{X}{1+|Y|} & = L \quad (u: \text{上符号}) \end{cases} \quad (5.52)$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{X}{1-|Y|} & = R \quad (l: \text{下符号}) \end{cases} \quad (5.53) \quad \leftarrow (5.49) \text{ に } \theta = 0^\circ \text{ を代入}$$



$\theta = 90^\circ$ 同様、 $\theta = 0^\circ$ のときは $X = 1 \pi l \Leftrightarrow u$ となります...



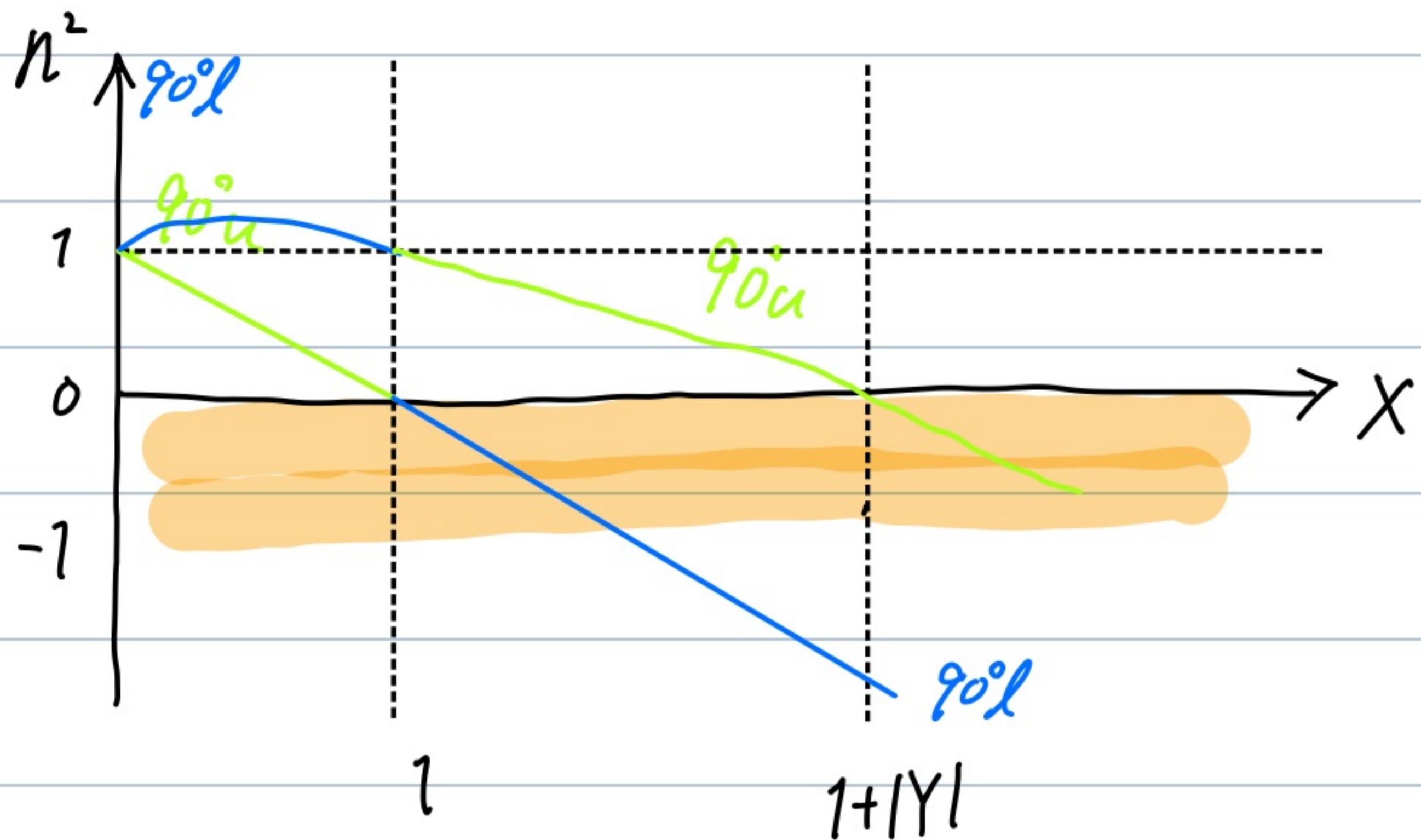
[3] 外部磁場があり $|Y| > 1$ の場合

i) $\theta = 90^\circ$ (横伝搬 $k \perp B$)

$$h^2 = \begin{cases} 1 - X & = P \quad (90^\circ u: 0 < X < 1 \quad 90^\circ l: 1 < X) \\ 1 - \frac{X}{1 - Y^2} & \end{cases} \quad (5.51)$$

$$1 - \frac{X}{1 - Y^2} = \frac{RL}{S} \quad (90^\circ l: 0 < X < 1 \quad 90^\circ u: 1 < X) \quad (5.51)'$$

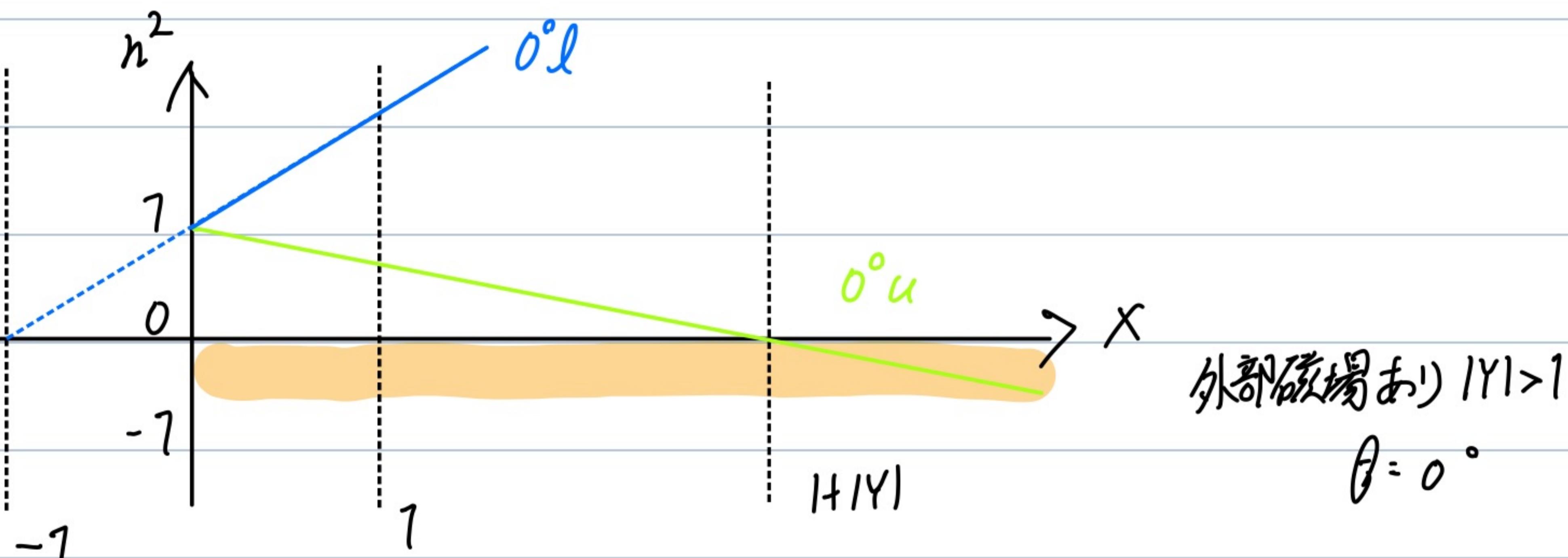
u : 上界 l : 下界



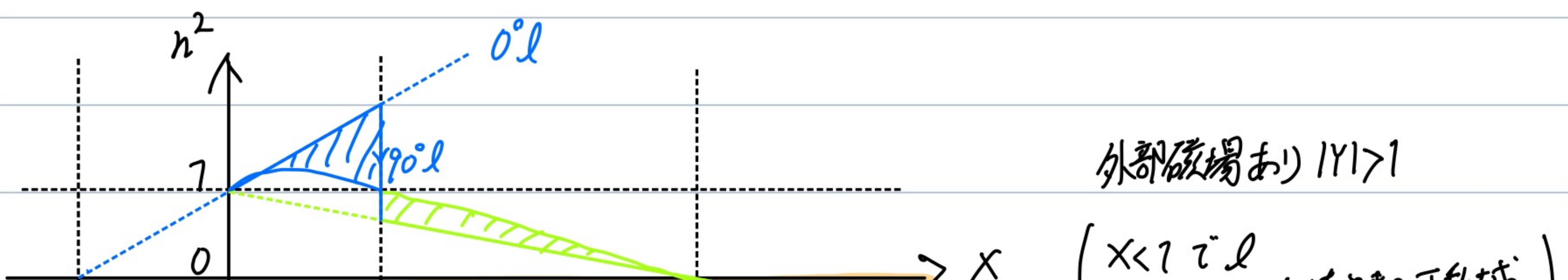
iE) $\theta = 0^\circ$ (継伝搬 $k \parallel B$)

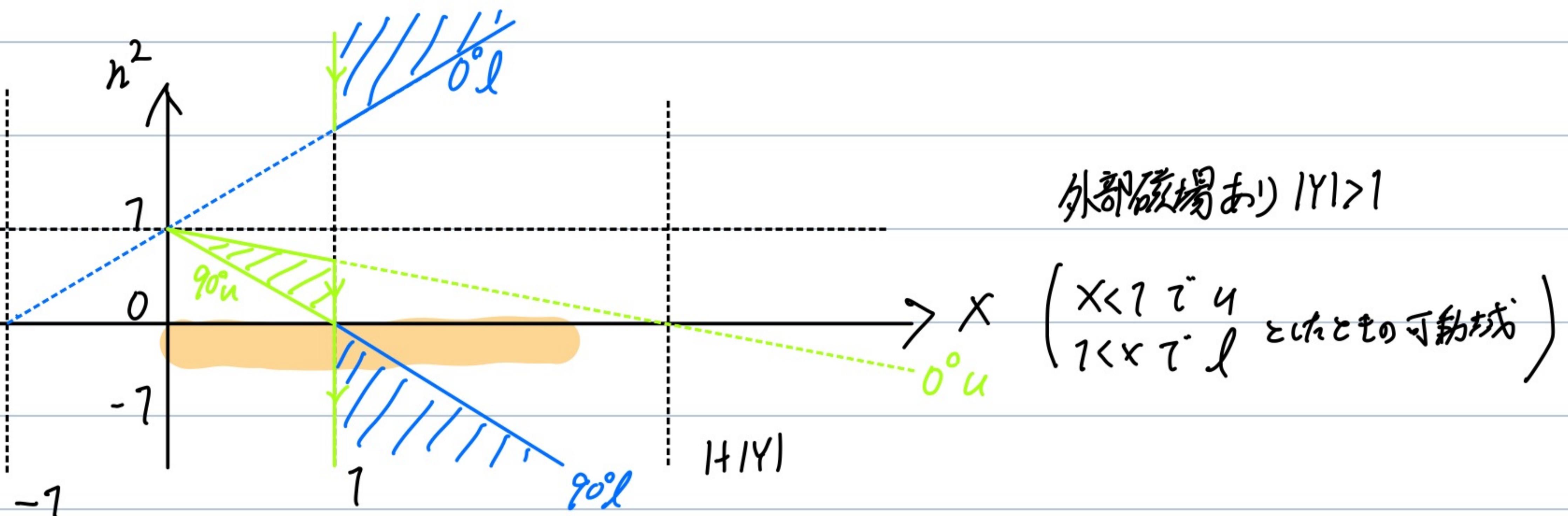
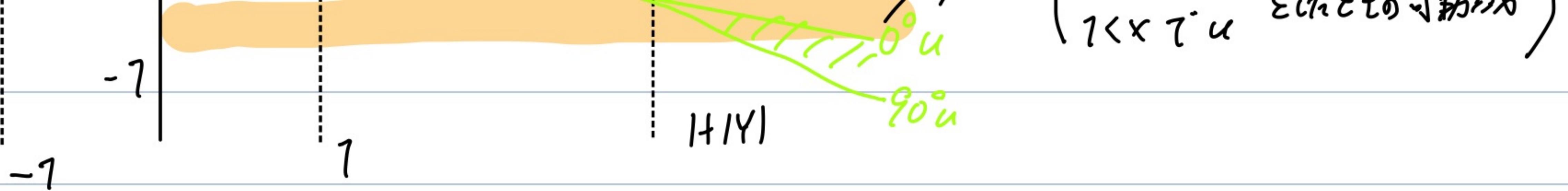
$$n^2 = \begin{cases} 1 - \frac{x}{1+|Y|} = L & (u: \text{上符号}) \end{cases} \quad (5.52)$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{x}{1-|Y|} = R & (l: \text{下符号}) \end{cases} \quad (5.53)$$

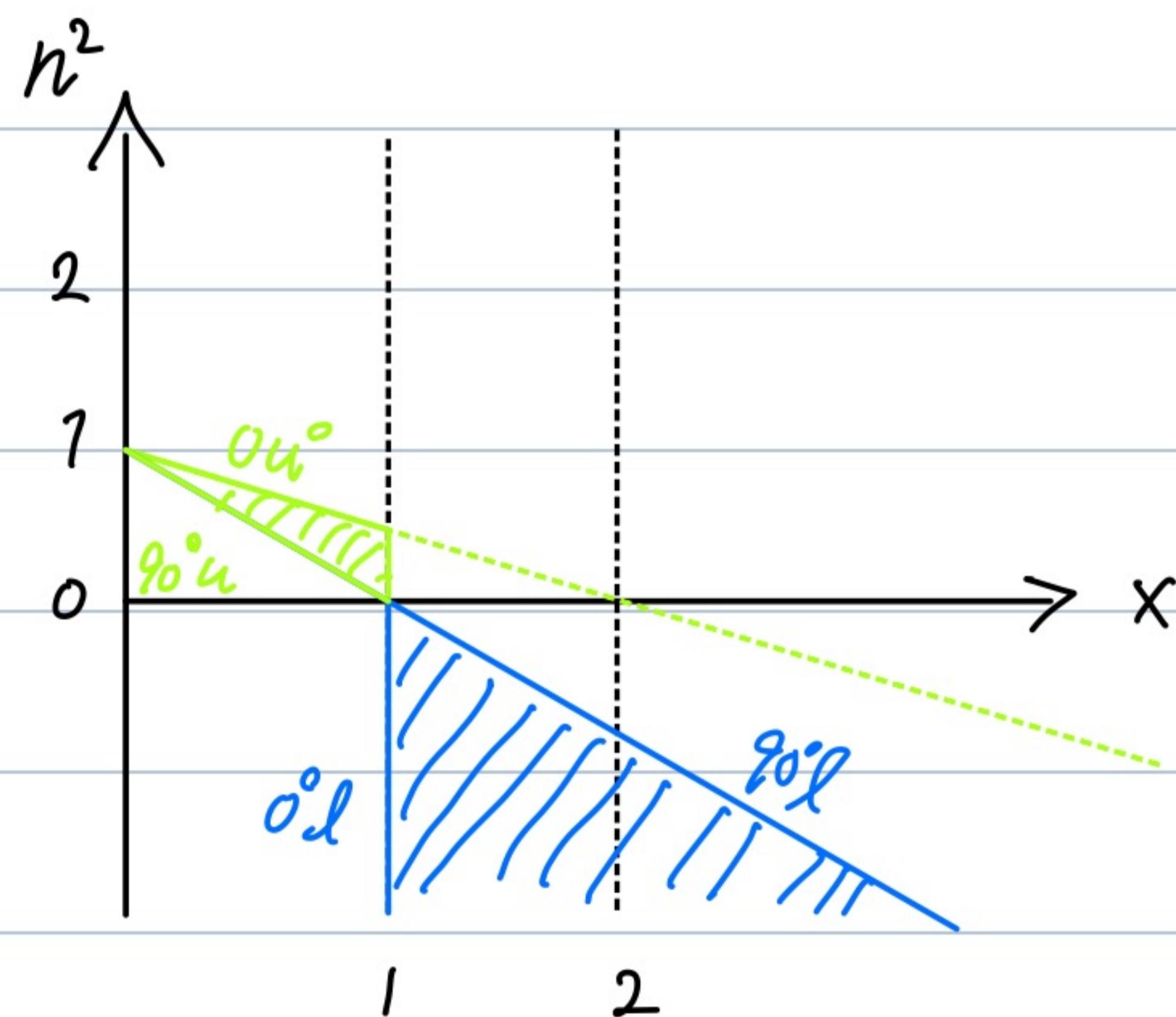
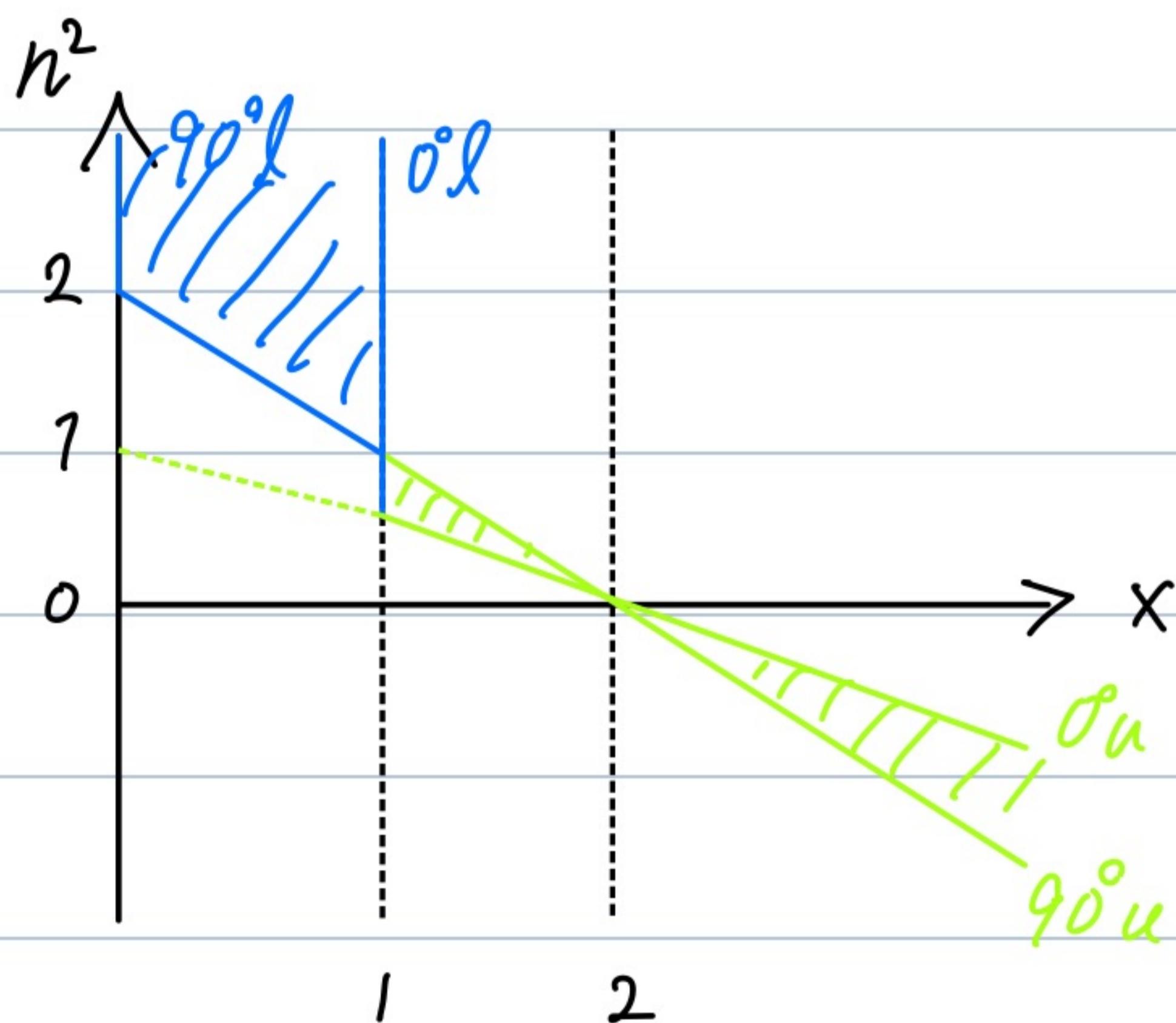


$\theta = 90^\circ$ 同様、 $\theta = 0^\circ$ のときは $X = 1$ で $l \leftrightarrow u$ となります...





[4] 外部磁場があり $|Y|=1$ の場合



外部磁場あり $|Y|=1$

$(x < l \text{ と } y < 0 \text{ と } y < l \text{ との可動域})$

外部磁場あり $|Y|=1$

$(x < l \text{ と } y < 0 \text{ と } y < l \text{ との可動域})$

[5] 衝突項の効果

今まで $n^2 < 0$ であった部分に $n^2 > 0$ の実部が混ざり減衰しながら進行するようになる。

$\rightarrow n^2 < 0 \rightarrow n^2 > 0$ へ不連続にならず、 $n^2 > 0$ の部分が実部として連続的につながる。

$+ \alpha$ $n^2 < 0$ の領域が $n^2 > 0$ の二つの領域に渡るに比べて大きい内側ではこれまでいる時とは。

衝突効果を入れなくてもトンネル効果でさええろ：とかで～る

5.3 偏波

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - k^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mathbf{k} \mathbf{E} = 0 \quad (\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z) \quad (5.35)$$

$$n^2 (E_z \mathbf{e}_z - \mathbf{E}) + K \mathbf{E} = 0$$

$$\begin{pmatrix} K_{xx} - n^2 & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yz} & K_{yy} - n^2 & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (5.36)$$

↓ E_z 消去

$$\begin{pmatrix} K_{11} - n^2 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0 \quad (5.34)$$

$$\begin{pmatrix} K_{11} = K_{xx} - \frac{K_{xz} K_{zx}}{K_{zz}} & K_{12} = K_{xy} - \frac{K_{xz} K_{zy}}{K_{zz}} \\ K_{21} = K_{yx} - \frac{K_{zy} K_{yz}}{K_{zz}} & K_{22} = K_{yy} - \frac{K_{yz} K_{zy}}{K_{zz}} \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

cf. (5.34) $K_{xx} = 1 - X \frac{1 - Y_x^2}{1 - Y^2}$ $K_{xy} = -K_{yx} = jX \frac{Y_x}{1 - Y^2}$
 $K_{xz} = K_{zx} = X \frac{Y_x Y_z}{1 - Y^2}$ $K_{yz} = 1 - \frac{X}{1 - Y^2}$
 $K_{yz} = -K_{zy} = jX \frac{Y_z}{1 - Y^2}$ $K_{zz} = 1 - X \frac{1 - Y_z^2}{1 - Y^2}$

K_{12}, K_{21} … 純虚数 $\Rightarrow \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$ … エルミート行列
 $K_{21} = K_{12}^*$

n^2 … 微小テルの固有値 (2)

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ … 固有ベクトル (2) $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2^* = 0 \rangle$

(5.56)

分散関係式から二つの屈折率 n^2 (モード) を求めること

= k ベクトルに垂直な面内の電場成分 $E_x E_y$ を決める

係数テンソルの 2 つの固有値を求める

.. 固有値に対応する固有ベクトルを得ると \rightarrow 偏波を与えること

固有ベクトルが直交していること

\rightarrow 2 つのモード間に時間平均として

エネルギーが保存される (独立性)

-※ (5.56) は衛星効果を含むとエリミートの条件が失われ、独立性が保たない

5.3.1 $\theta = 0^\circ$ 方向の伝搬 ($k \parallel B \parallel \mathbf{e}_z$)

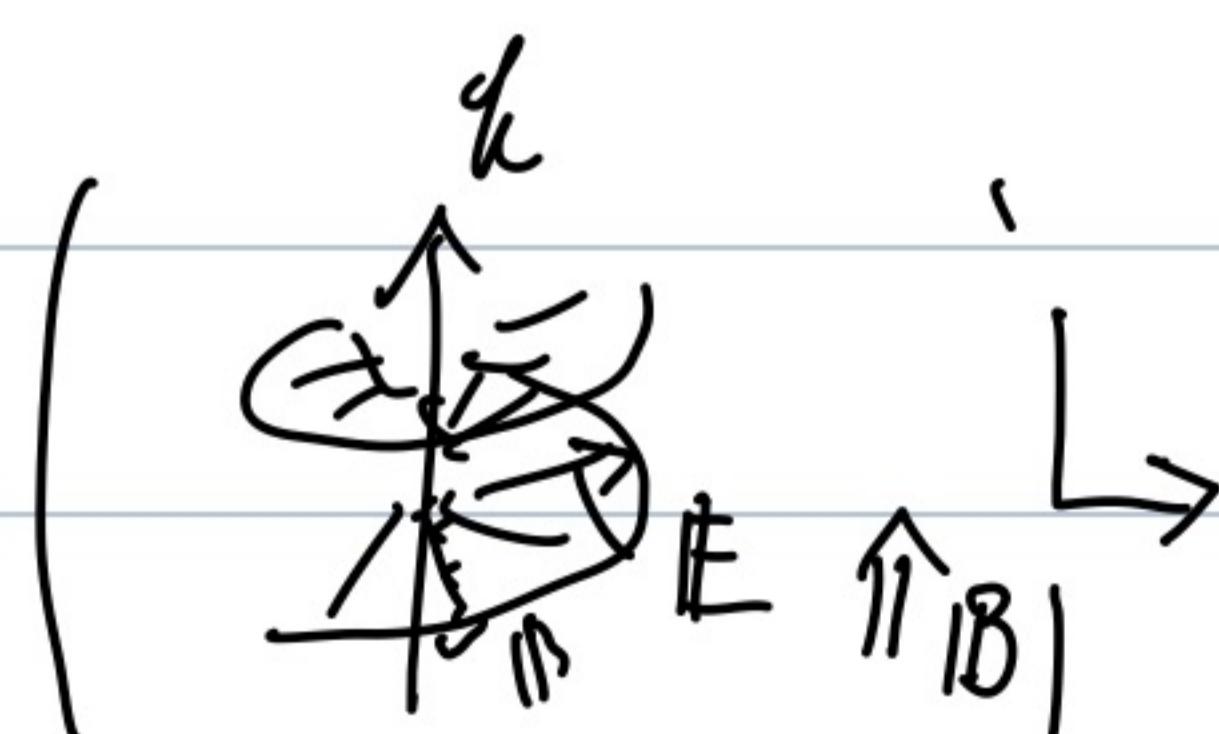
$$(5.45) \dots \theta = 0^\circ \text{ のとき } \rightarrow n^2 = R \text{ or } n^2 = L \text{ or } P = 0$$

$$(5.40) \dots \theta = 0^\circ \text{ のとき } \rightarrow \begin{vmatrix} S - n^2 & jD & 0 \\ -jD & S - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = 0 \quad (5.57)$$

$$P \neq 0 \text{ のとき } \dots E_z = 0$$

$$\frac{E_x}{E_y} = \begin{cases} +j & (h^2 = R \text{ の場合}) \\ -j & (h^2 = L \text{ の場合}) \end{cases} \quad \left(= \frac{|E_x|}{|E_y|} \exp j(\phi_x - \phi_y) \right)$$

(5.58)



第 1 式 ... E 軸正方向に右ネジ回す向きの電場が回転する円偏波の横波

第 2 式 ... \Rightarrow 左回り円偏波 (あくまで外部磁場の向き)

〈円偏波の横波 (TEM) 〉

$P = 0$ のとき ... E_z ... 有限値 (任意)

$(\omega = \omega_p)$

n ... 定義されていない (伝搬しない)

$$\left. \begin{array}{l} k=0 \\ \uparrow \quad \wedge \end{array} \right)$$

\rightarrow 外部磁場の方向への $\omega = \omega_p$ の電場振動

プラスミ振動

5.3.2 $\theta = 90^\circ$ 方向の伝搬 ($k \perp B$) ————— $\langle B \parallel \mathbf{e}_z, k \parallel \mathbf{e}_x \rangle$

あやしい…

$$(5.45) \dots \theta = 90^\circ \text{ のとき } \rightarrow n^2 = P \quad \text{or} \quad n^2 = RL/S \quad (5.59)$$

$$(5.40) \dots \theta = 90^\circ \text{ のとき } \rightarrow \begin{vmatrix} S & jD & 0 \\ -jD & S-h^2 & 0 \\ 0 & 0 & P-h^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = 0 \quad (5.60)$$

i) $h^2 = P$ の場合

$\uparrow B$ $E_z \dots \text{有限値 (任意)}$

$$\det \begin{pmatrix} S & jD \\ -jD & S-h^2 \end{pmatrix} = 0 \text{ とき } \rightarrow E_x = E_y = 0$$

$\rightarrow x$ 軸方向に伝搬、外部磁場の方向に沿う電場を持つ

荷電粒子は磁場方向へは磁場の影響を受けないで運動である

… 外部磁場が存在しない場合のモードと一致

\langle 直進偏波の横波 (TEM) \rangle

ii) $h^2 = RL/S$ の場合

(5.60) より $h^2 \neq P$ のとき

$\uparrow B$ $E_z = 0$

$$\frac{E_x}{E_y} = -\frac{jD}{S}$$

式

$$= -j \frac{Y(1-n^2)}{1-X}$$

$$\left(n^2 = 1 - \frac{X}{1 - \frac{Y^2}{1-X}} \right)$$

→ 外部磁場がないときに x 方向に伝播して電場 E とモード P モードと x 方向のプラスチズム振動ベクトルの外部磁場の印加における結合してできたモード

ハイブリッド (hybrid) モード

5.3.3 一般の場合

$$\text{Maxwell. eq} + \text{庄} = \text{庄} \exp\{j(wt - k \cdot r)\}$$

$$\Rightarrow H = \frac{j}{w \mu_0} k \times E \quad (5.63)$$

$$|H| = \frac{k_0 n}{w \mu_0} E_L \quad (5.63)' \quad \langle E_L \text{ は } k \text{ に垂直な } E \text{ の成分} \rangle$$

\Rightarrow k ベクトル右向とそれに垂直な成分を求めることが大事

k ベクトル ... z 軸方向

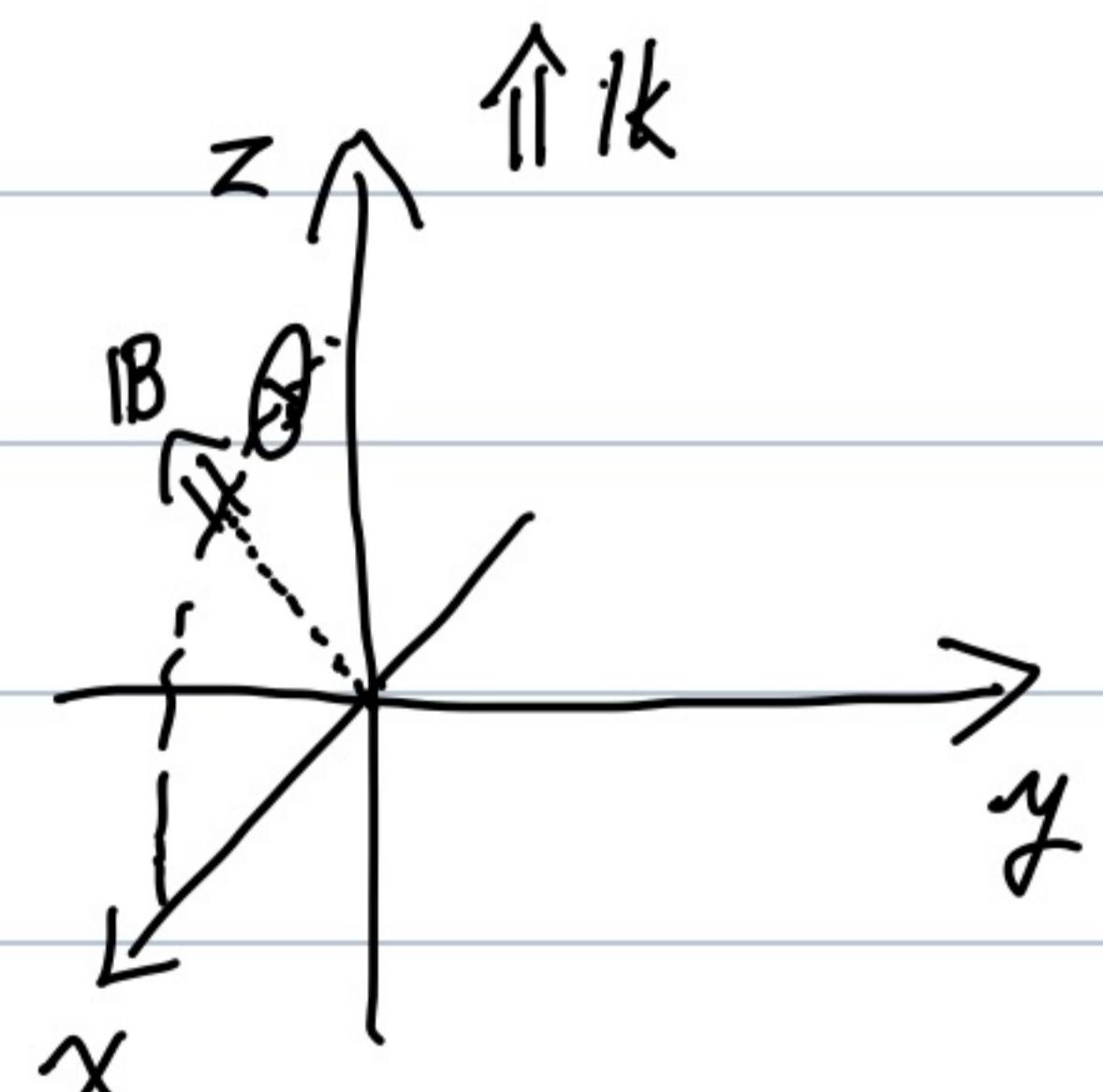
外部磁場 ... xz 面内に向かう座標系

π

を考える。

このとき

比誘電率テンソル要素は...



$$(k \cdot E) k - k^2 E + k_0^2 k \text{ 庄} = 0 \quad (k = k_{Ez}) \quad (5.35)$$

$$n^2 (E_z \mathcal{R}_z - \text{庄}) + k E = 0$$

$$\begin{pmatrix} K_{xx} - n^2 & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yz} & K_{yy} - n^2 & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (5.36)$$

衝突項を無視した場合...

$$\begin{pmatrix} (1-Y^2)(1-n^2) - X(1-Y_x^2) & \bar{j}X Y_z & X Y_z Y_x \\ -\bar{j}X Y_z & (1-Y^2)(1-n^2) - X & \bar{j}X Y_x \\ X Y_z Y_x & -\bar{j}X Y_x & 1 - Y^2 - X(1-Y_z^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (5.64)$$

$$\frac{E_\perp}{E_y} = \frac{E_x}{E_y} = \rho_1 = -\bar{j} \frac{Y_z(1-n^2)}{1-n^2 - X} \quad (5.65)$$

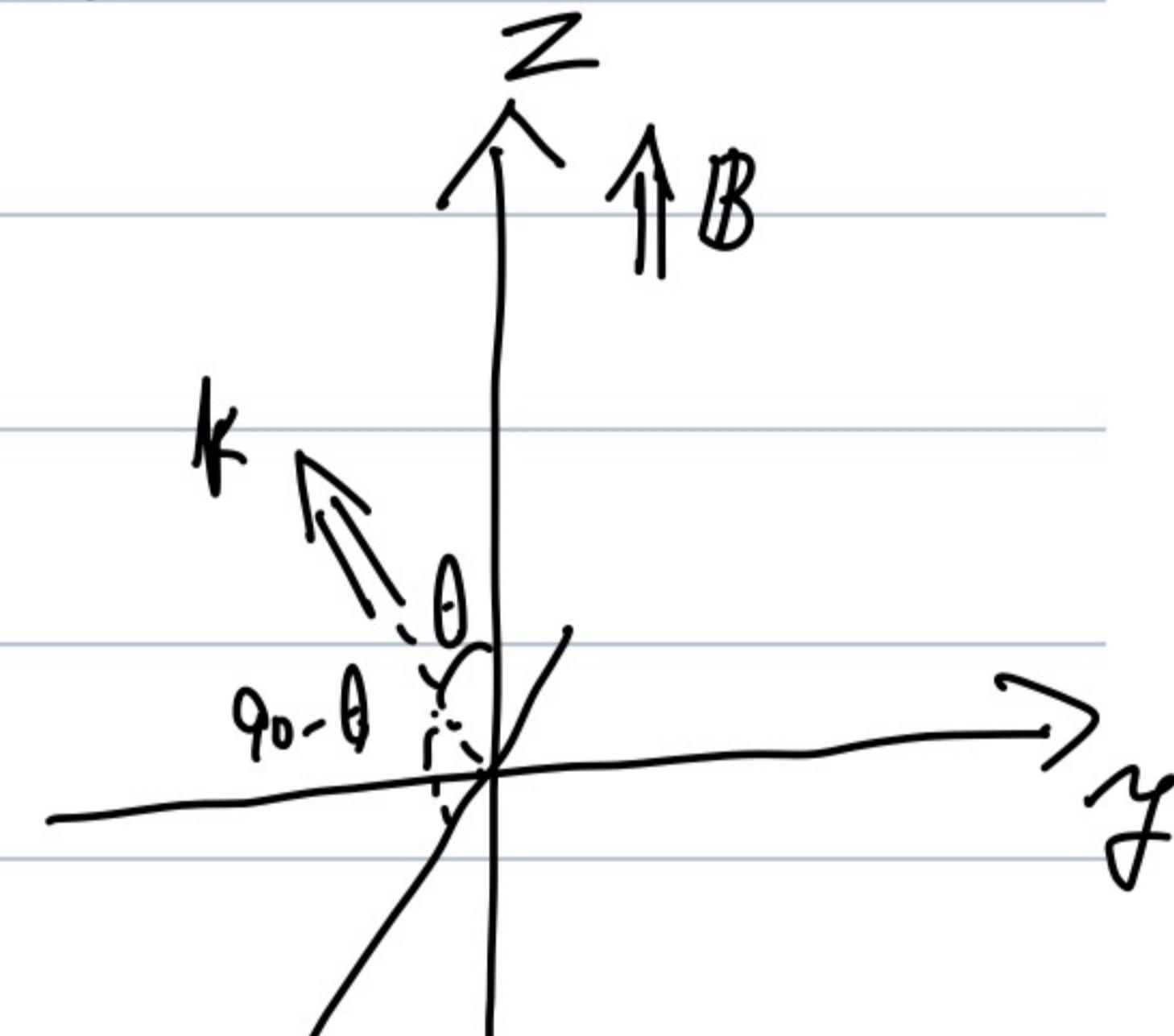
$$\frac{E_k}{E_y} = \frac{E_z}{E_y} = \rho_2 = \bar{j} \frac{Y_x(1-n^2)}{1 - X}$$

$n^2 \dots$ パルトン - ハ - ト - の式 cf. (5.37) (5.49)

外部磁場 ... Z軸方向

k ベクトル ... XZ 面内に向かう座標系

を考える。



$$\begin{aligned} \frac{E_\perp}{E_y} = \frac{E_x}{E_y} = \rho_1 &= \bar{j} \frac{n^2 S - RL}{D n^2 \cos \theta} \\ \frac{E_k}{E_y} = \frac{E_z}{E_y} = \rho_2 &= \bar{j} \frac{(n^2 S - RL)(P - n^2)}{D h^2 \cos \theta} \frac{\tan \theta}{P} \end{aligned} \quad (5.66)$$

(5.65) と (5.66) の符号が逆 $\rightarrow \rho_2$ の付号が入れ替わる

$0 < \theta < 90^\circ (k \cdot B > 0)$ かつ $n^2 > 0$ (伝播可能) とき...

$$(n^2 S - RL - 0 \text{ が正のとき})$$

$$\frac{E_\perp}{E_y} = (1/F) i \quad (\text{右回りの回偏波})$$

$$D = \text{負の} \dots$$

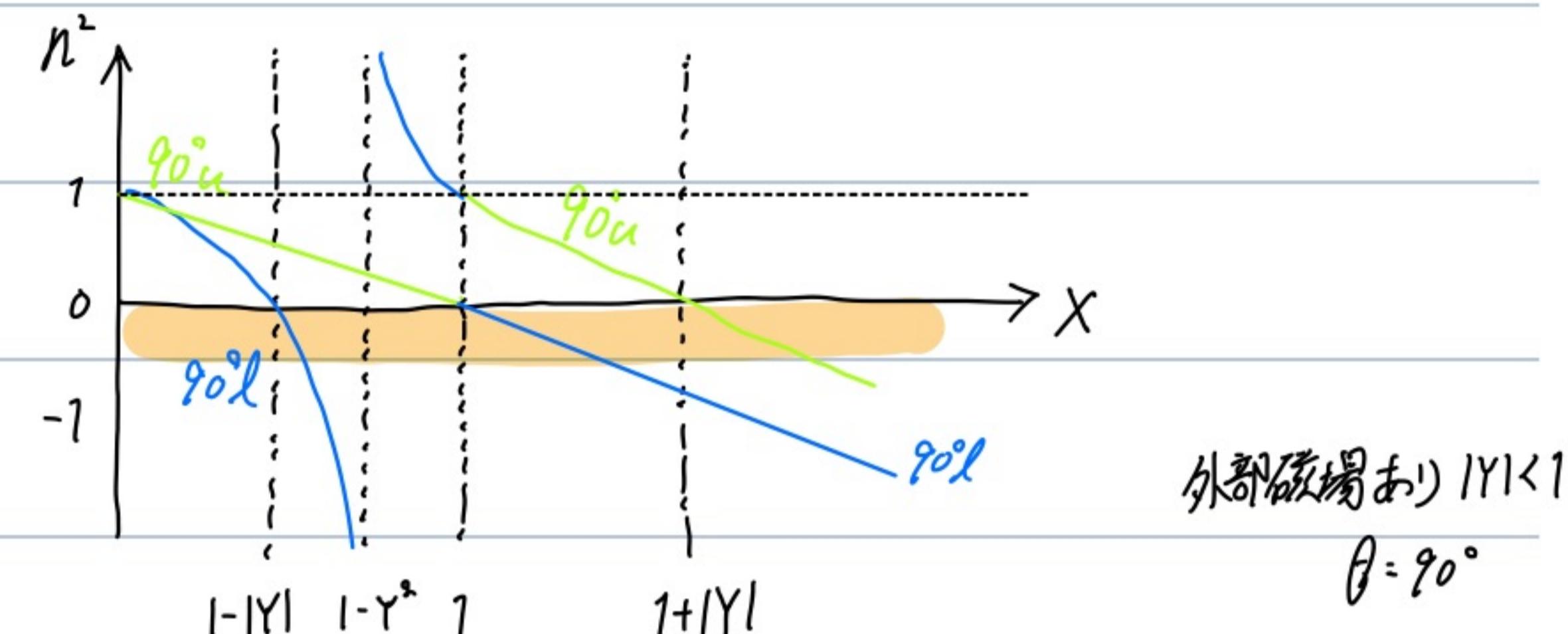
(5.67)

\therefore 負の \dots

$$\frac{E_L}{E_J} = (\text{負})j \quad (\text{左回り} \rightarrow \text{内偏波})$$

ii) $|Y| < 1$ の場合

$$\begin{aligned} \text{すべての } X \geq 0 \quad \text{かつ} \quad L > R \\ \rightarrow D < 0 \end{aligned}$$



$$S=0 \text{ とき } X (= 1 - |Y|^2) \text{ が}$$

小さい X

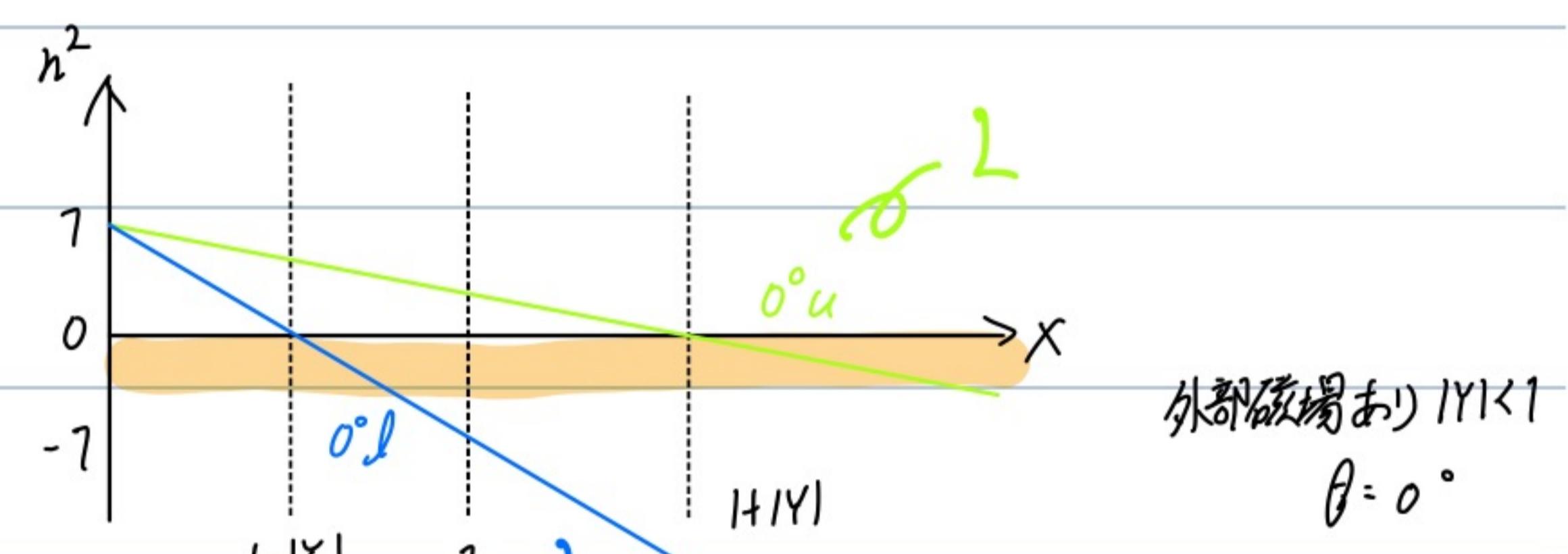
$$\cdots S > 0$$

$$\Downarrow \left(\text{cf. } \frac{S}{D} \left(h^2 - \frac{RL}{S} \right) = Q \right)$$

$X < 1 - |Y|^2$ の範囲では.

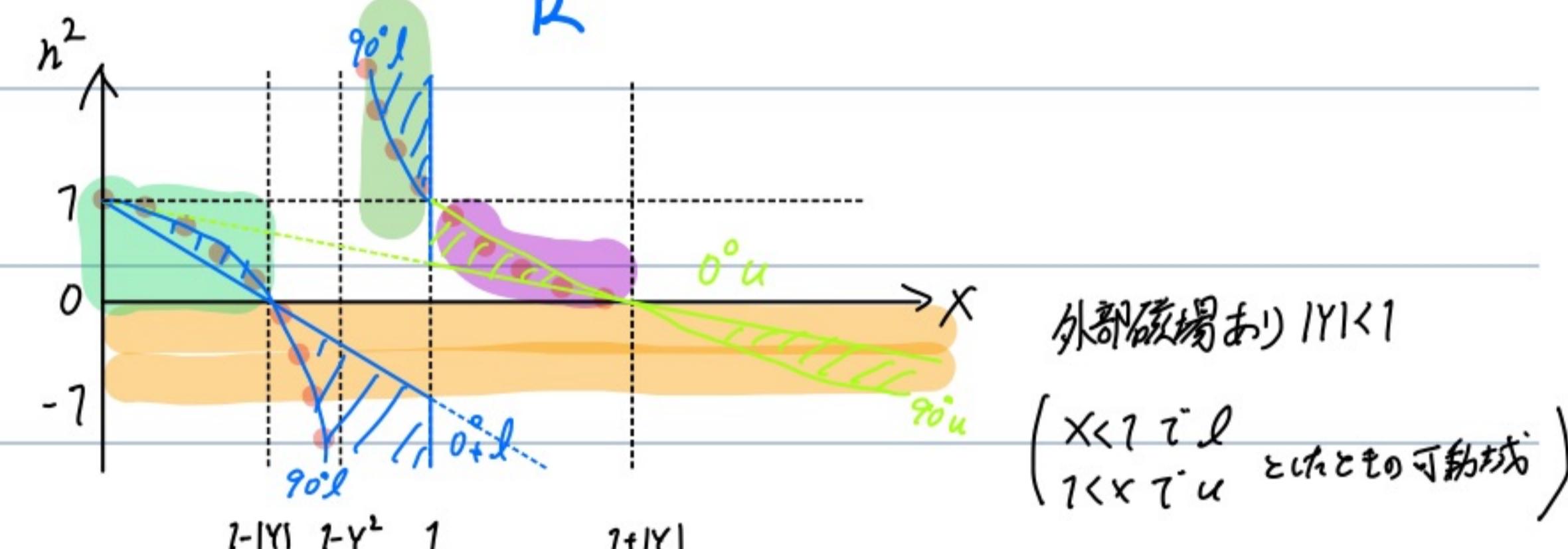
$h^2 = RL/S$ より下側のモード

$\cdots Q > 0 \rightarrow \text{右回り}$



$h^2 = RL/S$ より上側のモード

$\cdots Q < 0 \rightarrow \text{左回り}$



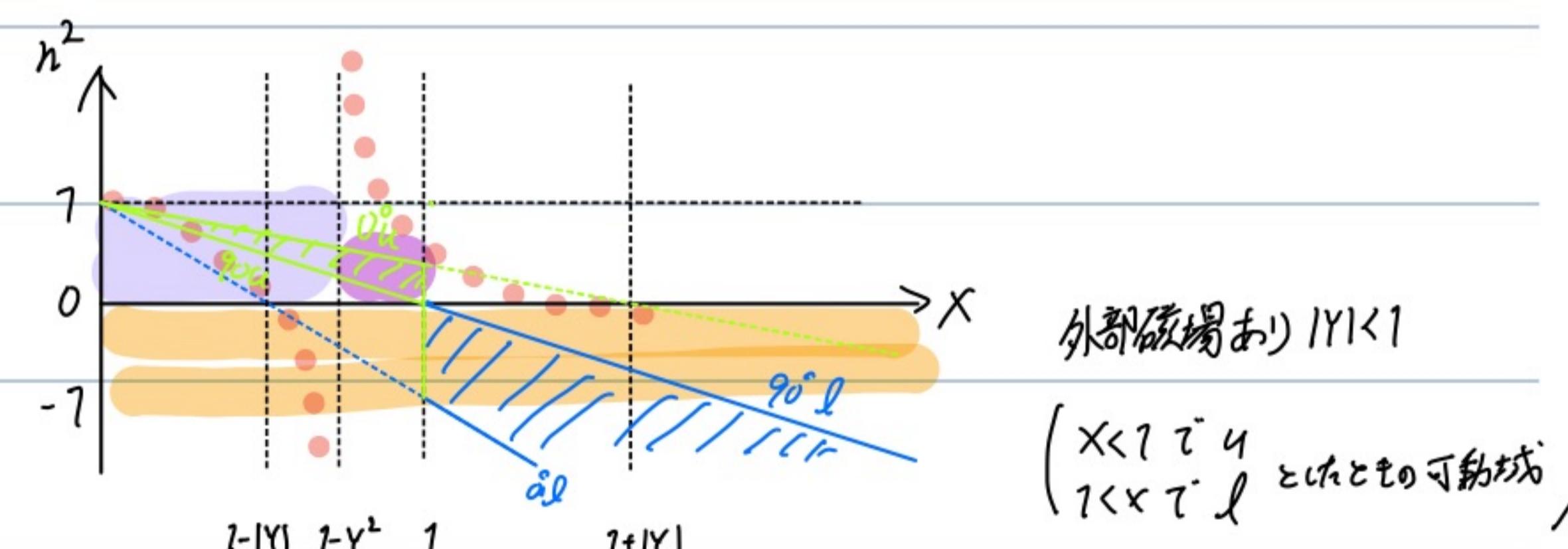
$X > 1 - |Y|^2$ の範囲では.

$h^2 = RL/S$ より下側のモード

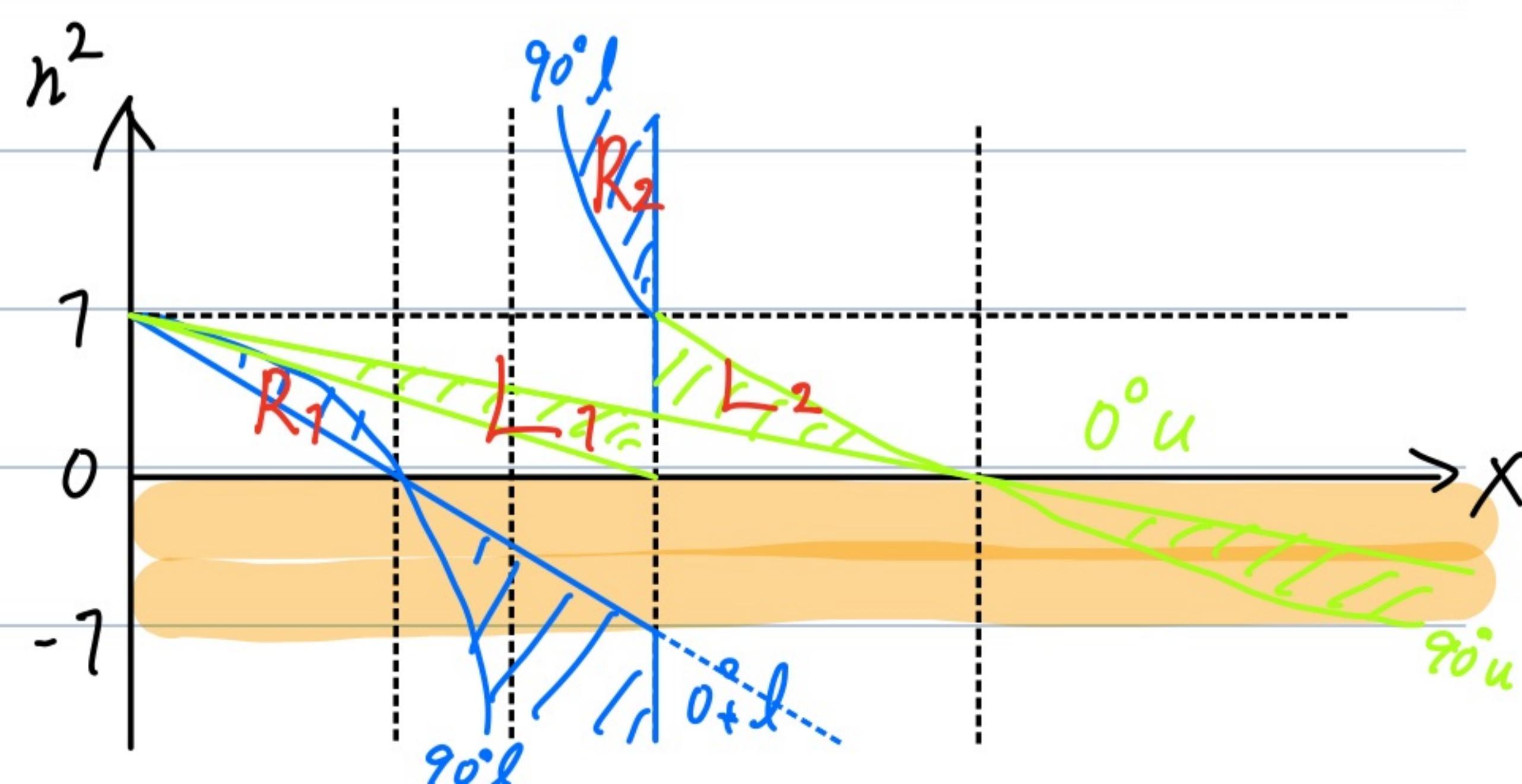
$\cdots Q < 0 \rightarrow \text{左回り}$

$h^2 = RL/S$ より上側のモード

$\cdots Q > 0 \rightarrow \text{右回り}$

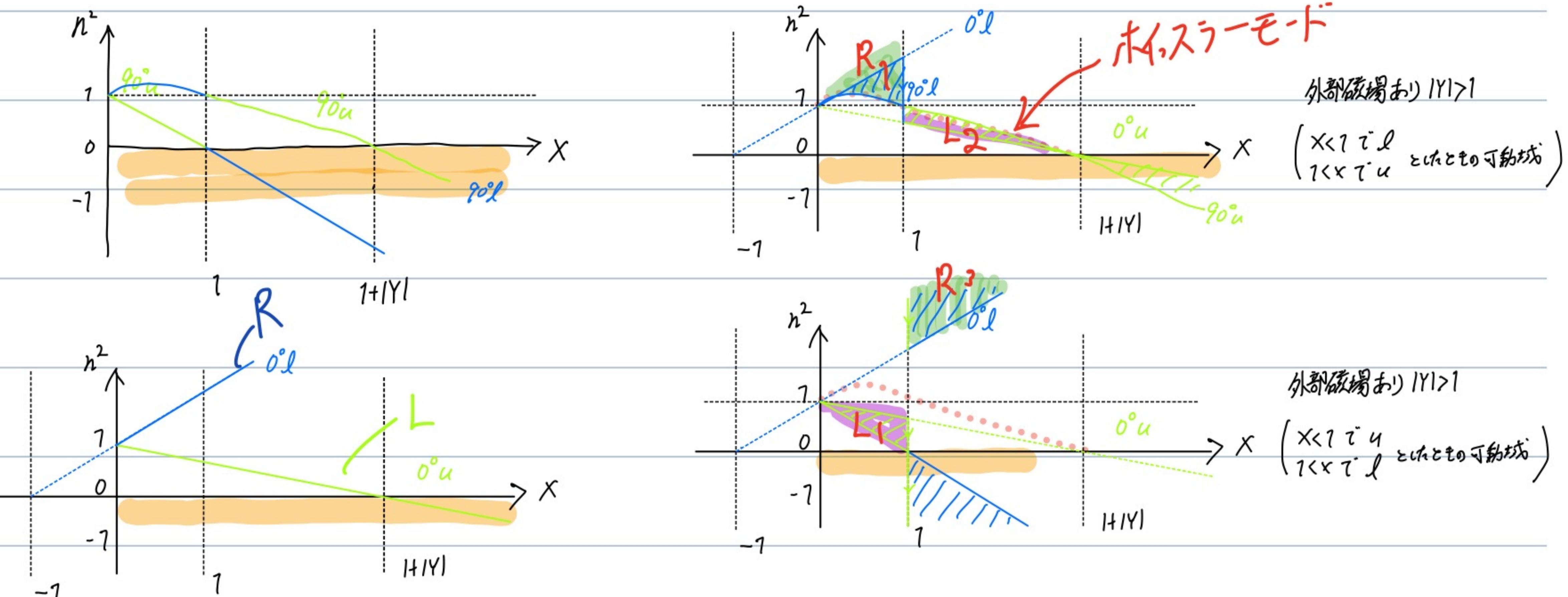


$|Y| < 1$ の時の図



ii) $|Y| < 1$ の場合

$$1-|Y|^2 \quad 1-|Y|^2 \quad 1 \quad |Y|$$



すべての $X \geq 0$ で $R > L \rightarrow D > 0$

$S = 0$ となる $X = 1 - |Y|^2 \dots |Y| > 1$ で $X < 0$

\rightarrow 常に $S > 0$

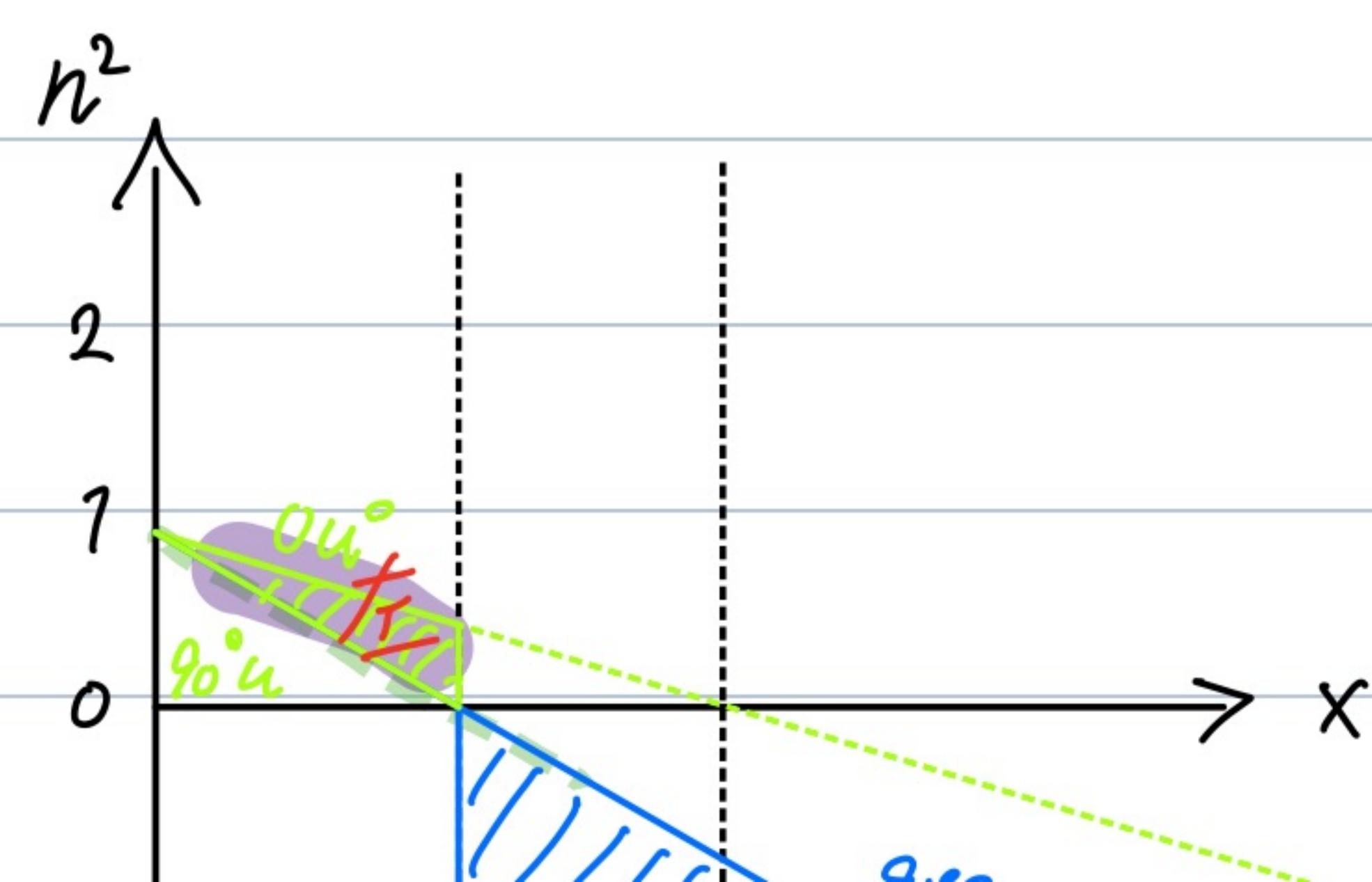
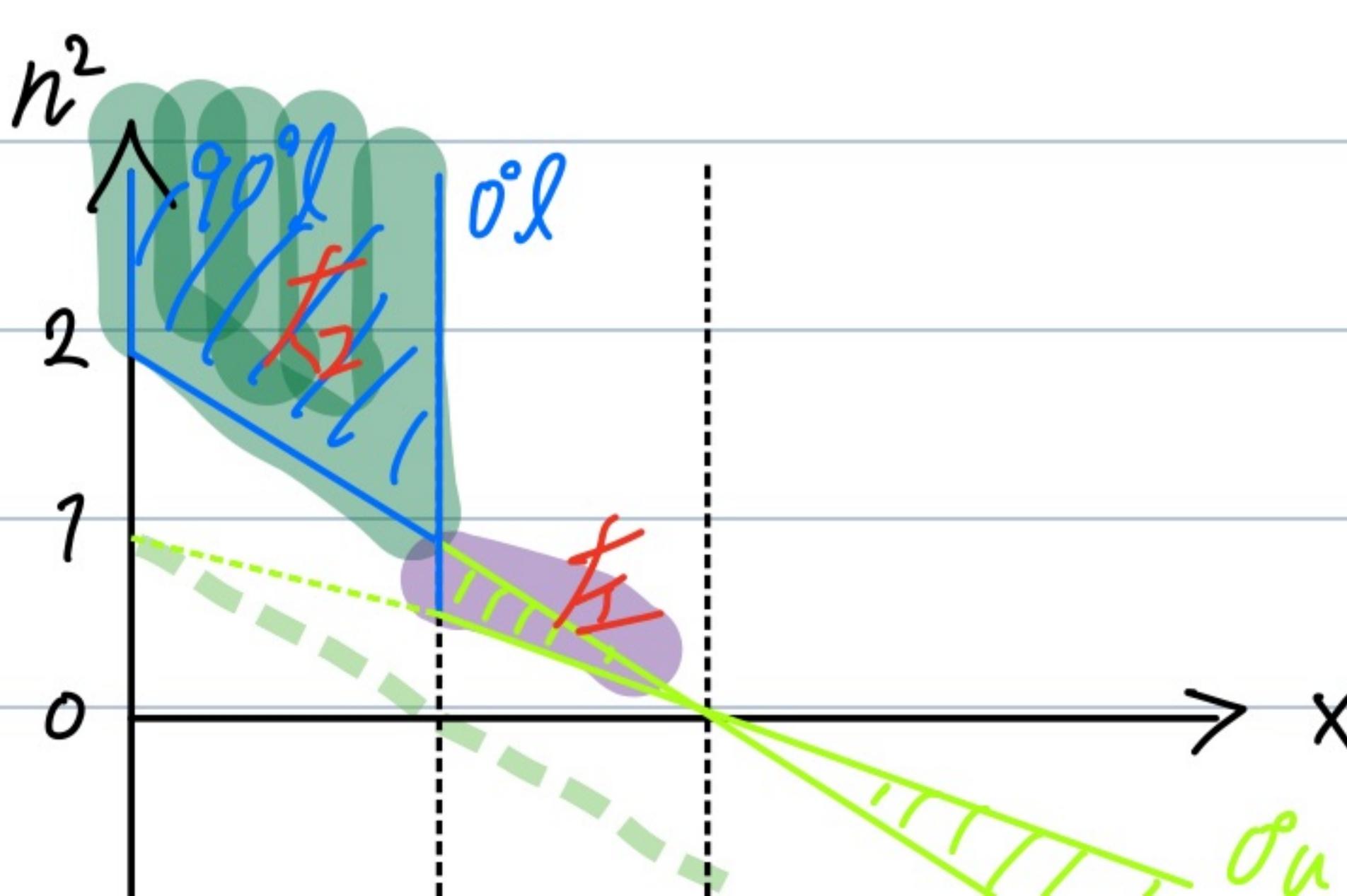


$h^2 = RL/S$ より上側 $\dots Q > 0 \rightarrow$ 右回り

$h^2 = RL/S$ より下側 $\dots Q < 0 \rightarrow$ 左回り (-部ホイストモード)

iii) $|Y| = 1$ の場合

$$\frac{E_\perp}{E_y} = \frac{E_x}{E_y} = \rho_1 = -\bar{j} \frac{Y_2(1-h^2)}{1-h^2-X} \quad ((3.65) \text{ の第 1 式})$$





外部磁場あり $|Y|=1$

$$\left(\begin{array}{l} X < 1 - l \\ 1 < X < u \end{array} \text{とした時の可動域} \right)$$

外部磁場あり $|Y|=1$

$$\left(\begin{array}{l} X < 1 - u \\ 1 < X < l \end{array} \text{とした時の可動域} \right)$$

$$Y < 0 \quad (\text{左負}) \rightarrow Y_2 < 0$$

$$\frac{(1-h^2)}{1-h^2-X} = \frac{1-h^2}{P-h^2} \rightarrow \text{モードは常に } h^2 > P \quad (P=1-X) \\ \rightarrow 分母は負$$



$1-h^2 < 0 \dots \rho_1 = (\text{正})j \quad (\text{右回り} \rightarrow \text{内偏波})$

$1-h^2 > 0 \dots \rho_1 = (\text{負})j \quad (\text{左回り} \rightarrow \text{内偏波})$

ii) ~ iii) より...

Appleton - Hartree の式の後半の上側 (+) のモード (西側)

... 左回り偏波

= の下側 (-) のモード (東側)

... 右回り偏波

なお、 $\theta > 90^\circ$ のときは偏波の回転方向が逆になるが、このときは B の走向を正向かでいる

→ 磁場の走向と向いた観測者は常に [い符号 ... 左回り偏波
l 符号 ... 右回り偏波]

* 以前は左回りモードを正常波 (ordinary wave) ... O モード (i 符号)

右回りモードを異常波 (extraordinary wave) ... X モード (l 符号) と呼んでいた



最近では $\theta = 90^\circ$ で $n^2 = P/L$ に従うもの ... Oモード

$n^2 = RL/s$ に従うもの ... Xモード と呼ばれる場合もある
(渦波モード)

($X \leq 1$ では一致, $X > 1$ で反対に走らせる)

5.4 エネルギーの流れ

5.4.1 ポインティングベクトル

エネルギーの流れ … ポインティングベクトル \bar{P} の時間平均

$$\bar{P} = \operatorname{Re} \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right) = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \quad (5.68)$$

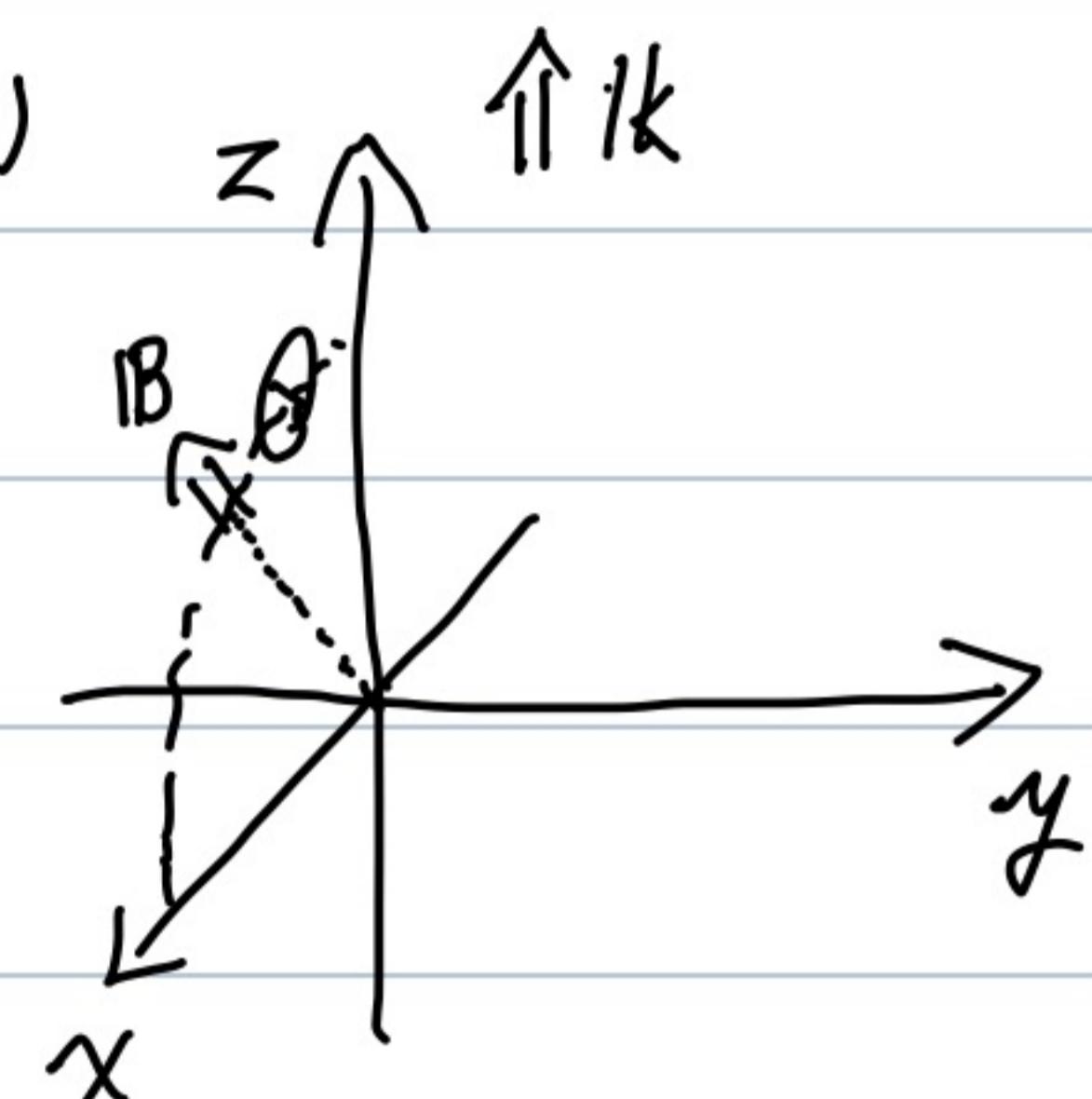
~~各成分に~~ $(\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_2 \rightarrow H_2 = 0)$

$$\bar{P}_x = -\frac{1}{4} (E_z H_y^* + E_z^* H_y) \quad (5.69)$$

$$\bar{P}_y = \frac{1}{4} (E_z H_x^* + E_z^* H_x)$$

$$\bar{P}_z = \frac{1}{4} (E_x H_y^* + E_x^* H_y - E_y H_x^* - E_y^* H_x)$$

(5.69)



真空中 $E/H = \omega \mu_0 / k_0 = Z_0$ のとき 分散性物質の場合

$$H_y = \frac{n}{Z_0} E_x \quad H_x = -\frac{n}{Z_0} E_y = -\frac{n}{Z_0 \rho_1} E_x \quad (5.70)$$

$$E_y = \frac{1}{\rho_1} E_x \quad E_z = \frac{\rho_2}{\rho_1} E_x \quad (5.71)$$

なぜか...

$$\bar{P}_x = -\frac{1}{4Z_0} \left[n^* \frac{\rho_2}{\rho_1} + n \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^* \right] |E_x|^2$$

$$\bar{P}_y = -\frac{1}{4Z_0} \left[\left(\frac{n}{\rho_1} \right)^* \frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{n}{\rho_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^* \right] |E_x|^2 \quad (5.72)$$

$$\bar{P}_z = \frac{1}{4Z_0} (n + n^*) \left(1 + \frac{1}{\rho_1 \rho_1^*} \right) |E_x|^2$$

n … 実数 ($\nu=0$) とすると ρ_1, ρ_2 が純虚数となる

$$\rightarrow n = n^* \quad \rho_1 = -\rho_1^* \quad \rho_2/\rho_1 = (\rho_2/\rho_1)^*$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_x &= -\frac{n \frac{\rho_2}{\rho_1}}{2Z_0} |E_x|^2 \\ \bar{P}_y &= 0 \end{aligned} \right\} (5.73)$$

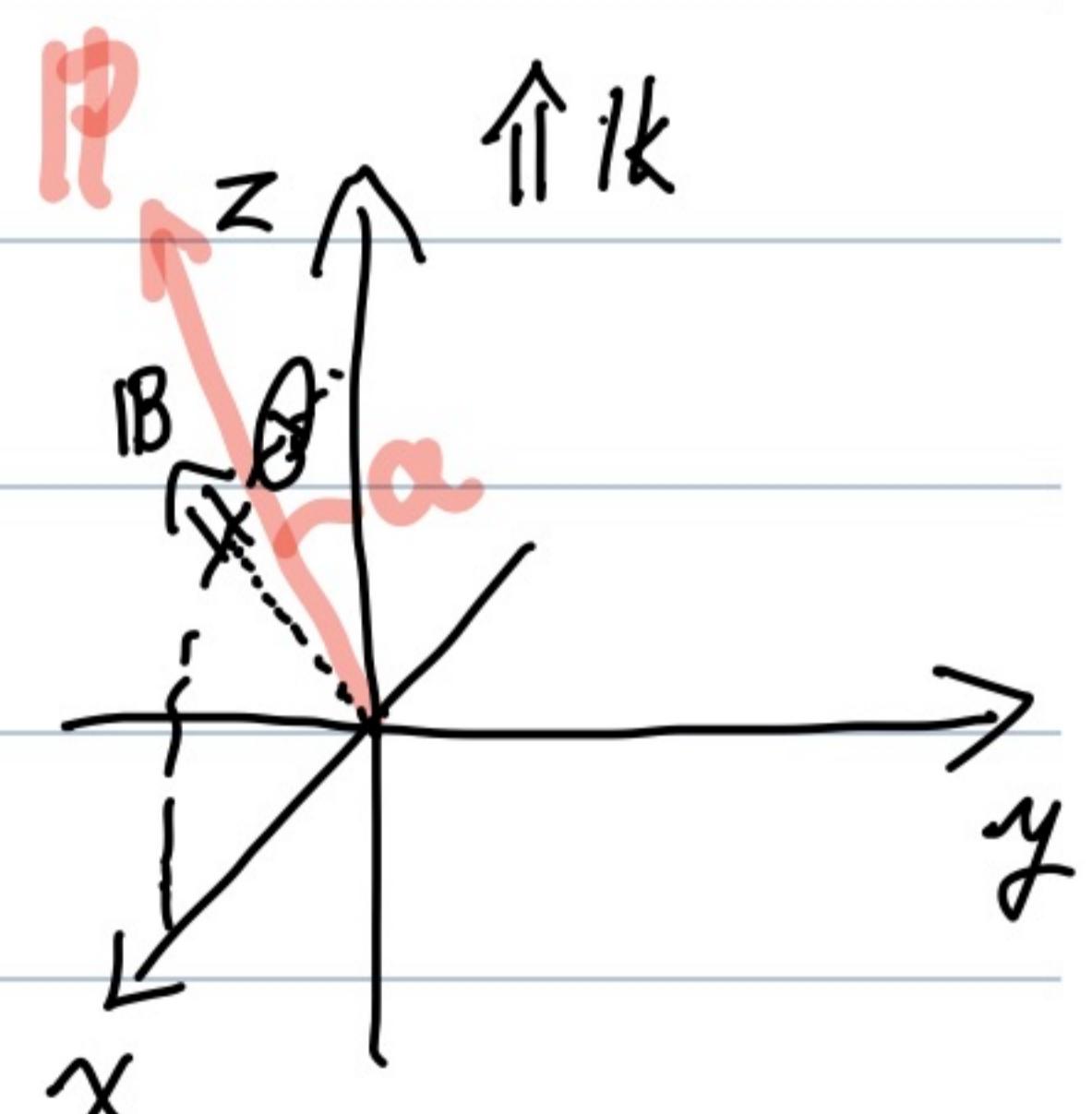
$$\bar{P}_z = \frac{n(1 - \frac{1}{\rho_1^2})}{2Z_0} |E_x|^2$$

→ ポインティングベクトルの進行方向は z 軸との角度を持つ

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\bar{P}_x}{\bar{P}_z} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left\{ -\frac{n \frac{\rho_2}{\rho_1}}{2Z_0} |E_x|^2 / \frac{n(\rho_1^2 - 1)}{2\rho_1^2 Z_0} |E_x|^2 \right\}$$

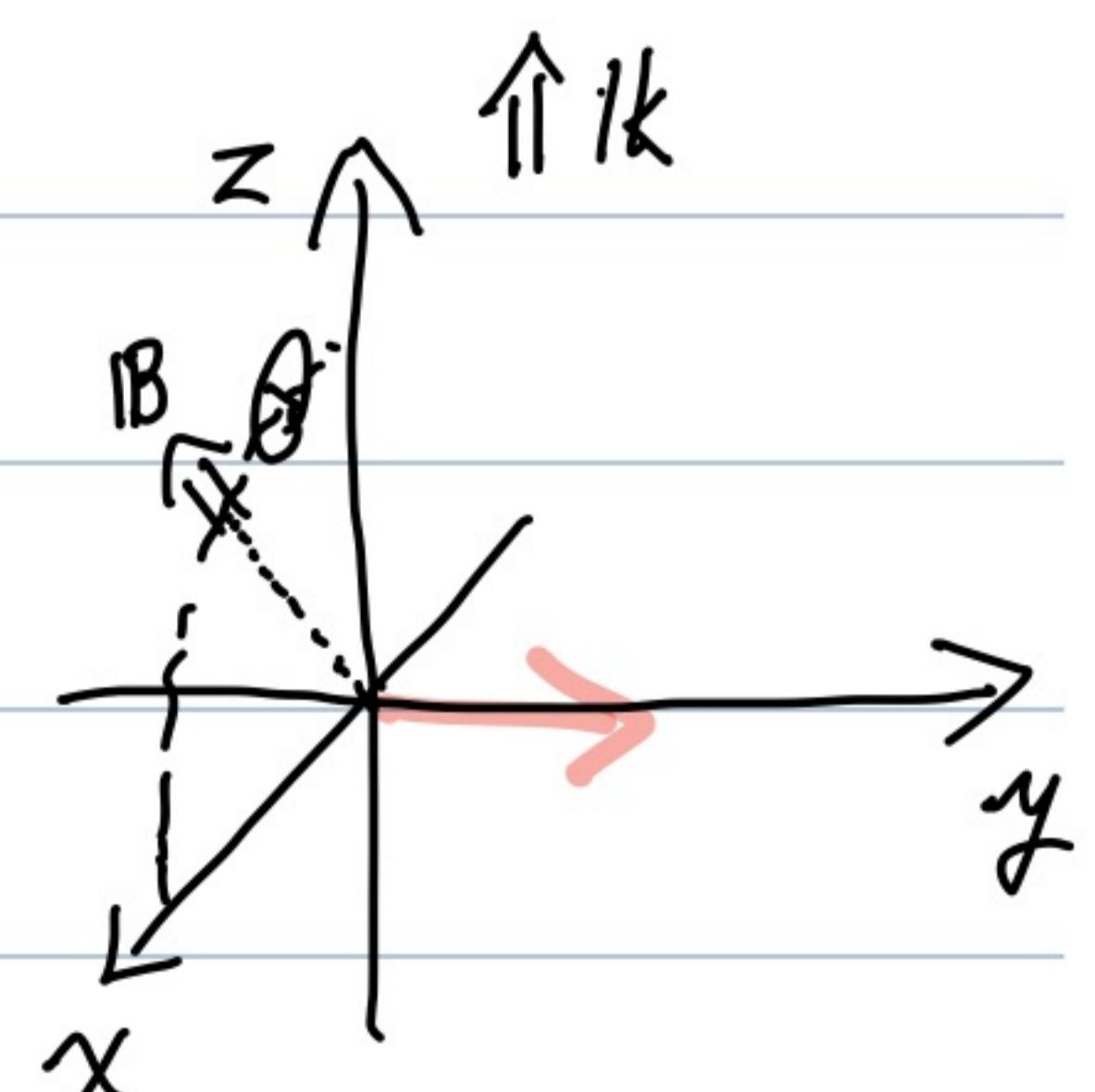
$$= \tan^{-1} \frac{\rho_1 \rho_2}{1 - \rho_1^2} \quad (5.74)$$



n … 純虚数 とすると

$$\rightarrow n = -n^* \quad \text{よし} \dots$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_x &= \bar{P}_z = 0 \\ \bar{P}_y &= \frac{1}{2Z_0} n \frac{\rho_2}{\rho_1^2} |E_x|^2 \end{aligned} \right\} (5.75)$$



$\nu \neq 0$ のときは $X \rightarrow X/(1-\bar{z}z), Y \rightarrow Y/(1-\bar{z}z)$ となるため

P_1, P_2 は複素数へ

$\Rightarrow \overline{P_x}, \overline{P_y}, \overline{P_z}$ のいづれも 0 にならない

$\overline{P_y} \neq 0$... エネルギーの流れが XZ 平面からずれる 横すべり
($n \sim 0$ で顕著になる)

k ベクトルが Z 軸, B が XZ 面内とて...

$n^2 > 0$ のとき ... エネルギーは XZ 面内 を進む

$n^2 < 0$ のとき ... XZ 面内のエネルギーの流れがなくなる

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{波} \dots e^{-k_z n_z z} \end{array} \right.$$

$\sin 2wt/2$ に従って 2 倍の周波数で増減する

5.4.2 群速度(等方性媒質)

$$\text{群速度 } v_g = \frac{\partial w}{\partial k} \quad (1.27) \quad \left(\begin{array}{l} k = k_0 n \\ = (w/c)n \end{array} \right)$$

$$= \frac{\frac{\partial w}{\partial n}}{\frac{n}{c} \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{w}{c} \frac{\partial n}{\partial w}}$$

$$= \frac{c}{n \frac{\partial w}{\partial n} + w \frac{\partial n}{\partial w}}$$

$$= \frac{c}{(n + w \frac{\partial n}{\partial w})} = \frac{c}{n'} \quad (5.76)$$

$$(n' = n + w \frac{\partial n}{\partial w} \cdots \text{群屈折率})$$

外部磁場のないプラスミ等方性媒質

衝突項を無視した場合... $n = \sqrt{1 - w_p^2/w^2}$ とすると

$$n'n = 1$$

(5.77)

位相速度 $v_p = c/n$
とすると...

$$\begin{aligned}\frac{\partial n}{\partial w} &= \frac{1}{2} (1 - w_p^2/w^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - w_p^2/w^2)' \\ &= \frac{1}{2} (1 - w_p^2/w^2)^{-\frac{1}{2}} (+2 \frac{w_p^2}{w^3}) \\ &= \frac{w_p^2}{w^2} \cdot \frac{1}{N w^2 - w_p^2} \\ n' &= n + w \cdot (\partial n / \partial w) \\ &= n + \frac{w_p^2}{w^2} \cdot \frac{1}{n} \\ nn' &= n^2 + \frac{w_p^2}{w^2} \\ &= 1 - \frac{w_p^2}{w^2} + \frac{w_p^2}{w^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$V_g V_p = (c/n') (c/n)$$

$$= c^2 / nn'$$

$$= c^2 \quad (5.78)$$

…この時、偏波は電場がKベクトルに垂直 ($E_z = 0$)

$$\rightarrow \rho_2 = 0 \quad (= E_z / E_{\perp})$$

$$\rightarrow \alpha = 0 \quad (= \tan^{-1} \frac{\rho_1 \rho_2}{1 - \rho_1 \rho_2})$$



エネルギーの方向がKベクトルと一致 (外部磁場・衝突なし)

5.4.3 群速度(異方性媒質)

異方性媒質の場合... n が K に依存する

$$E = \int E(k) \exp \{i(w(k)t - k \cdot r)\} dk \quad (5.79)$$

$$\text{位相} \cdots \phi(k) = \omega(k)t - k \cdot r \quad (5.80)$$

dk だけ離れた波の位相 $\propto (5.80)$ の差を $\Delta\phi$ とする

$$\Delta\phi = \frac{\partial\omega}{\partial k} \cdot dk t - dk \cdot kr \quad \text{となる。} \quad \rightarrow \frac{d(\Delta\phi)}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k} \cdot dk - dk \cdot \frac{dr}{dt} = 0$$

$$\Delta\phi \text{が一定となる } \frac{dr}{dt} = v_g \text{ であるから} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k} ?$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} \quad (5.82)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{\partial\omega}{\partial k_x} \hat{i}_x + \frac{\partial\omega}{\partial k_y} \hat{i}_y + \frac{\partial\omega}{\partial k_z} \hat{i}_z \quad (\text{直角座標系}) \\ &= \frac{\partial\omega}{\partial k} \hat{k} + \frac{1}{k} \frac{\partial\omega}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{k \sin \theta} \frac{\partial\omega}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (\text{球座標系}) \end{aligned} \right\} (5.83)$$

分散関係式を $D(\omega, k) = 0$ と書くとき。

屈折率 n … 分散関係式を $n = n(\omega, k)$ として解いたもの

↑

$\omega(k)$ として解いて、 ω について 3 空向における gradient をとめたもの

→ (5.82), (5.83)

外部磁場の存在するプラズマ中の分散関係式

→ ω, k と B のが角 θ , k ベクトルの大さき α

→ $\omega = \omega(k, \theta)$ と書ける … 中微分は不確

+

$\frac{\partial\omega}{\partial\theta}$ は $k = k(\theta, \omega) = \text{const}$ より (伝播速度は一定)

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} = - \frac{\partial k / \partial \theta}{\partial\omega}$$

(5.84)

$$dk = \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right) d\omega + \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right) d\theta = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial k} = \frac{\partial k}{\partial w} \quad (5.84)$$

(5.82) より

$$v_g = \frac{\partial w}{\partial k} \hat{k} + \frac{1}{k} \frac{\partial w}{\partial \theta} \hat{\theta}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial k} \hat{k} - \frac{1}{k} \frac{\partial k / \partial \theta}{\partial k / \partial w} \hat{\theta}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial k} \left\{ \hat{k} - \frac{1}{k} \frac{\partial k / \partial \theta}{\partial k / \partial w} \hat{\theta} \right\}$$

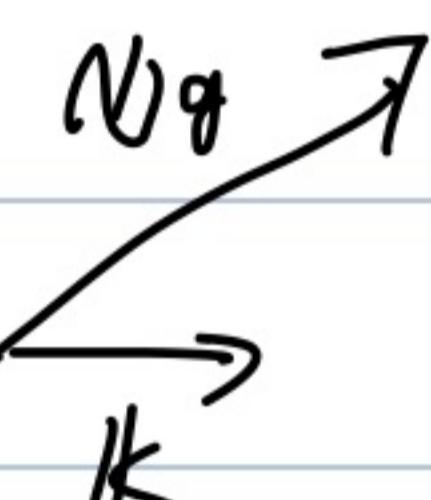
$$= \frac{c}{n + w \frac{\partial n}{\partial w}} \left\{ \hat{k} - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \theta} \hat{\theta} \right\}$$

(5.85)

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{\partial k}{\partial w} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} &= - \left(\frac{\partial k}{\partial \theta} \right) / \left(\frac{\partial k}{\partial w} \right) \end{aligned}}$$

群速度 (ray) の方向と k ベクトルの角 α は...

$$\tan \alpha = - \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial \theta} = - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \theta} \quad (5.86)$$



と与えられる。

$$\therefore v_g = \left| \frac{\partial w}{\partial k} \left\{ \hat{k} - \frac{1}{k} \frac{\partial k / \partial \theta}{\partial k / \partial w} \hat{\theta} \right\} \right|$$

$$= \frac{\partial w}{\partial k} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{k} \frac{\partial k / \partial \theta}{\partial k / \partial w} \right)^2}$$

$$= (\partial w / \partial k) \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$$

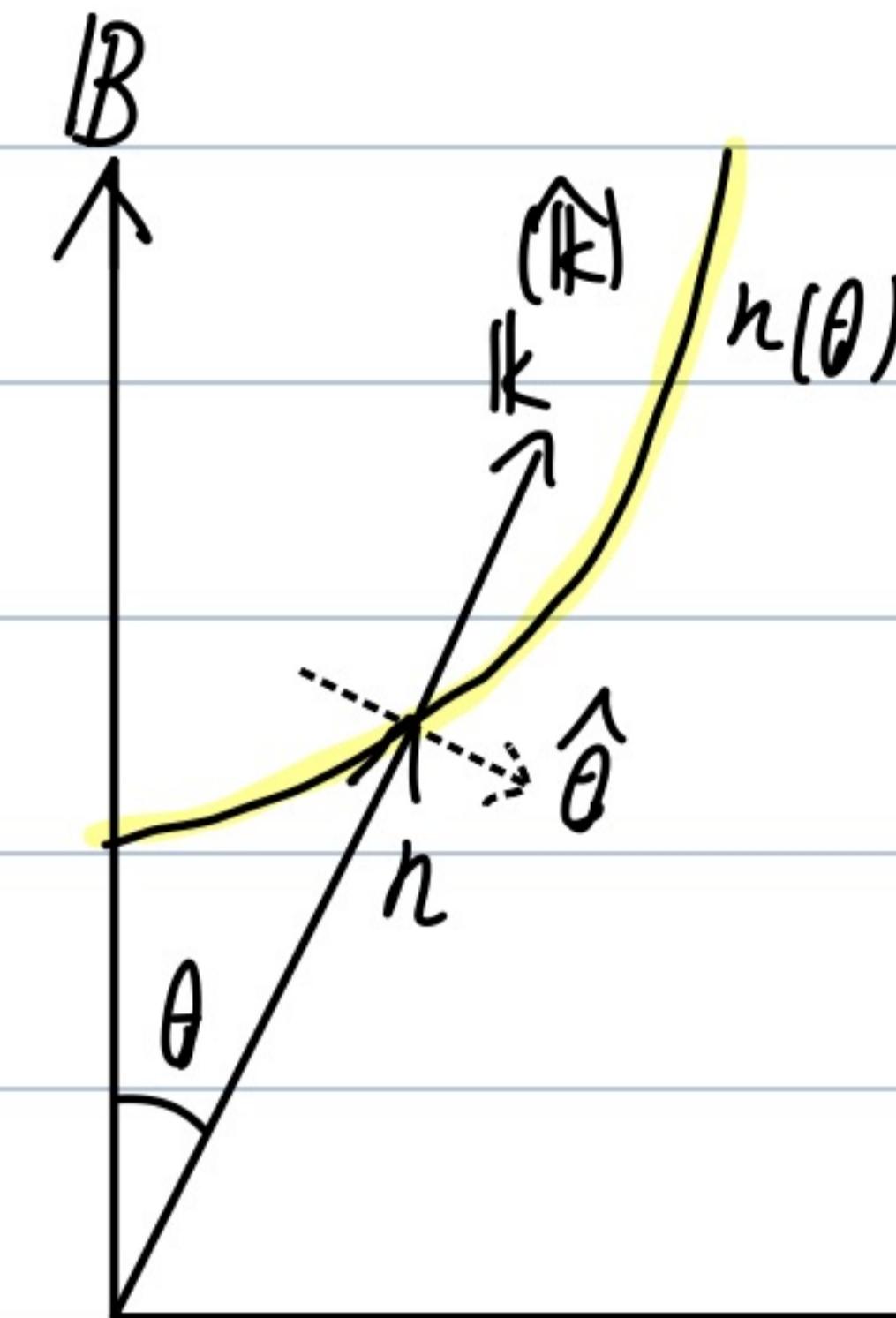
群速度 (異方性媒質)

$$= \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial w}{\partial k} \left| = \frac{c \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{n + w \frac{\partial n}{\partial w}} \right) \quad (5.87)$$

$$n' = \frac{c}{v_g} = \frac{n + w \frac{\partial n}{\partial w}}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \text{群屈折率} \quad (5.88)$$

外部磁場の方向…縦軸

- θの角度にkベクトルをとる
- 原点からの長さを対象の周波数ωの電波に対する屈折率nの大きさ



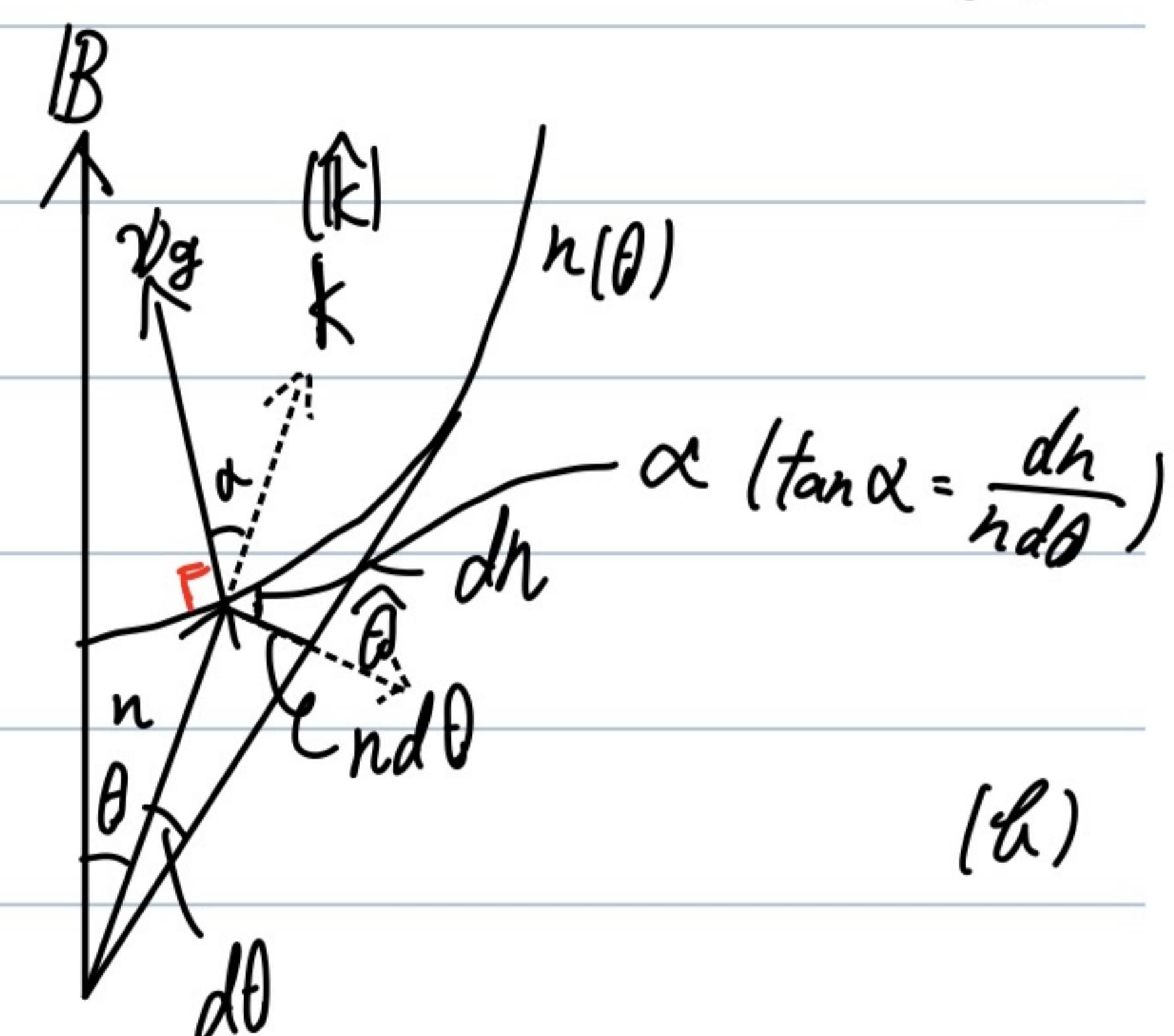
$n = n(\theta)$ 曲線 … 屈折率面

(a)

(5.85)から v_g を作図すると

$$(v_g = \frac{c}{n_r \omega \frac{\partial n}{\partial \omega}} [\hat{k} - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \theta} \hat{\theta}])$$

右図のようになる。



(b)

一方で v_g は ω の k 空間上での gradient

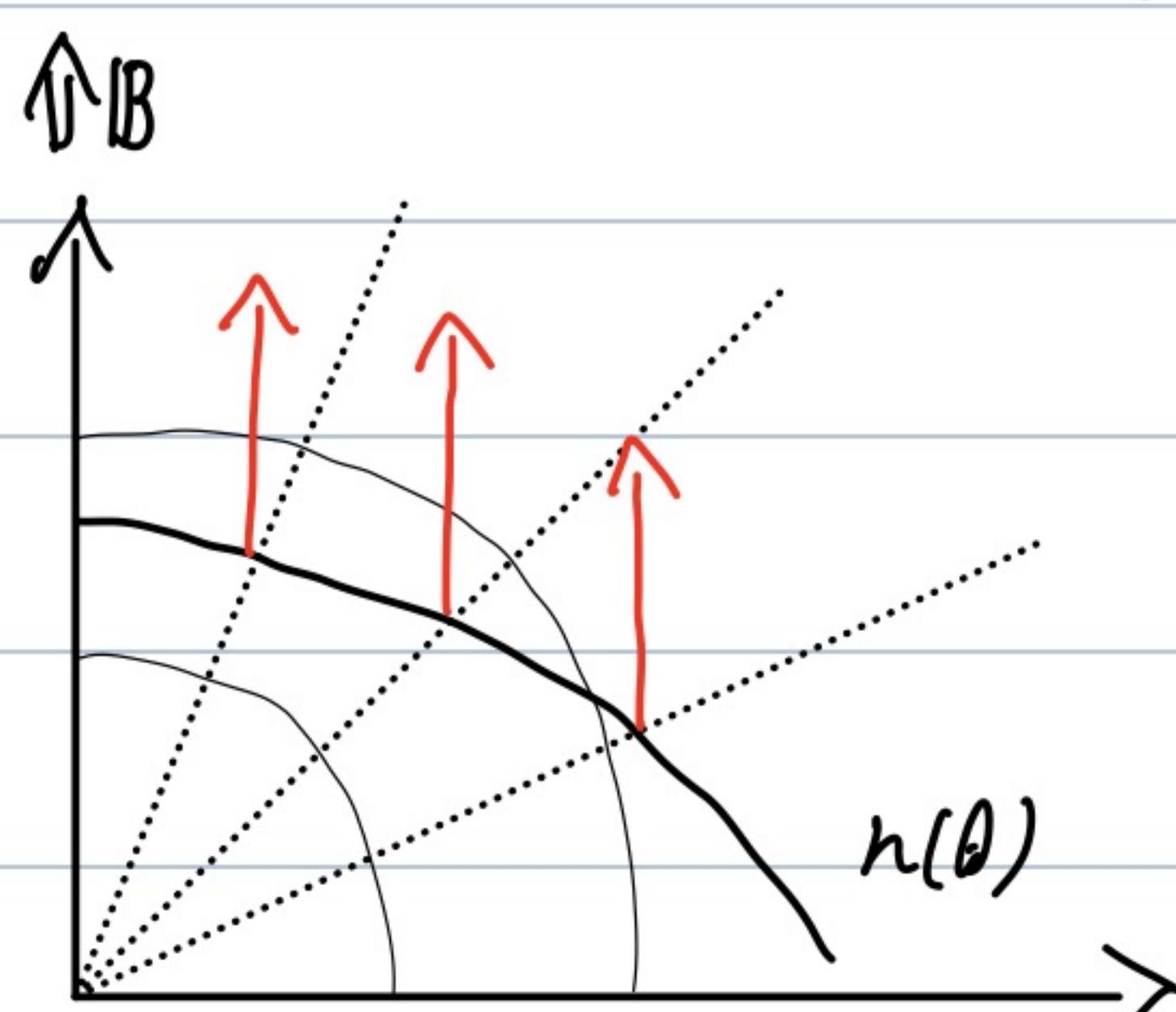
よし v_g は 屈折率面の法線方向に沿う

屈折率がθによらない(等方性の)場合は $\alpha = 0$

v_g と k ベクトル 方向は一致

屈折率がθと共に増加する場合には α は負

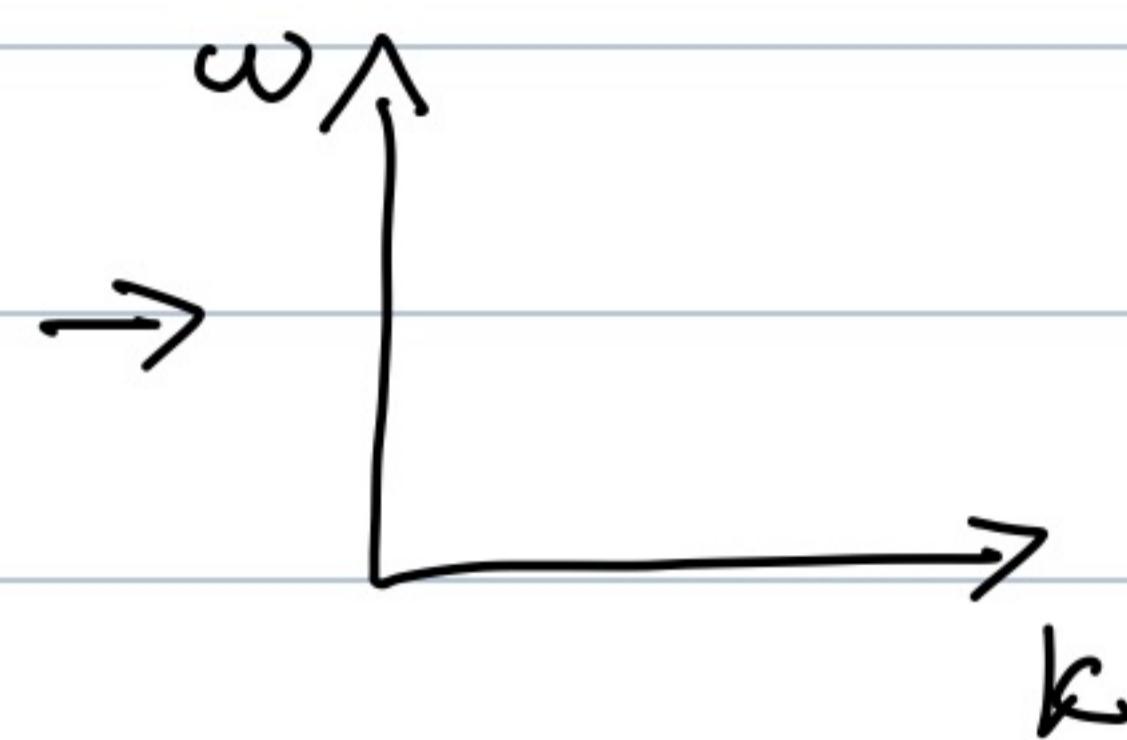
v_g は k と B 方向に近づく (反-じ)



5.4.4 ω - k ダイアグラム

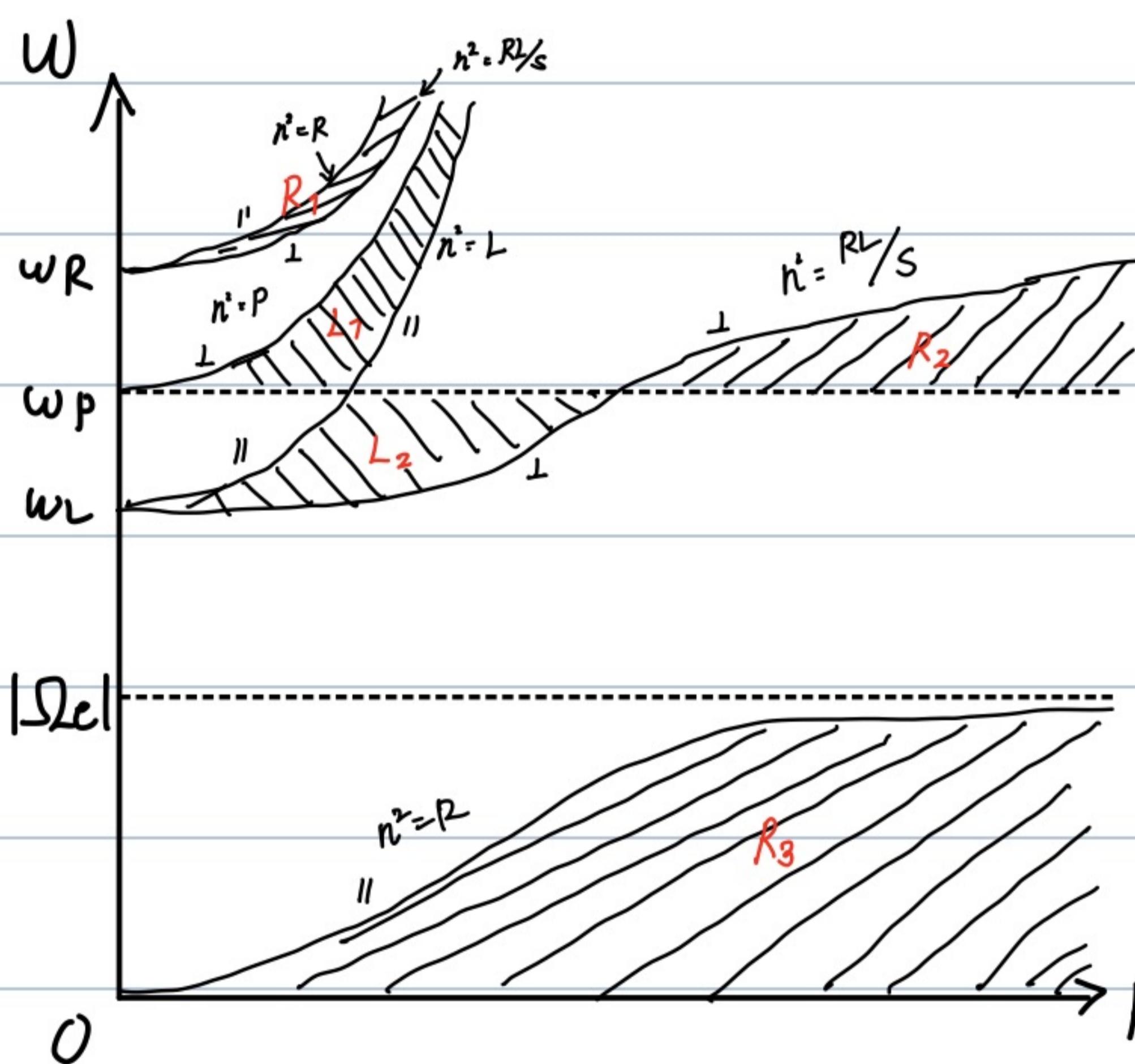
$$\text{群速度 } v_g = \partial\omega / \partial k$$

$$\text{位相速度 } v_p = \omega / k$$

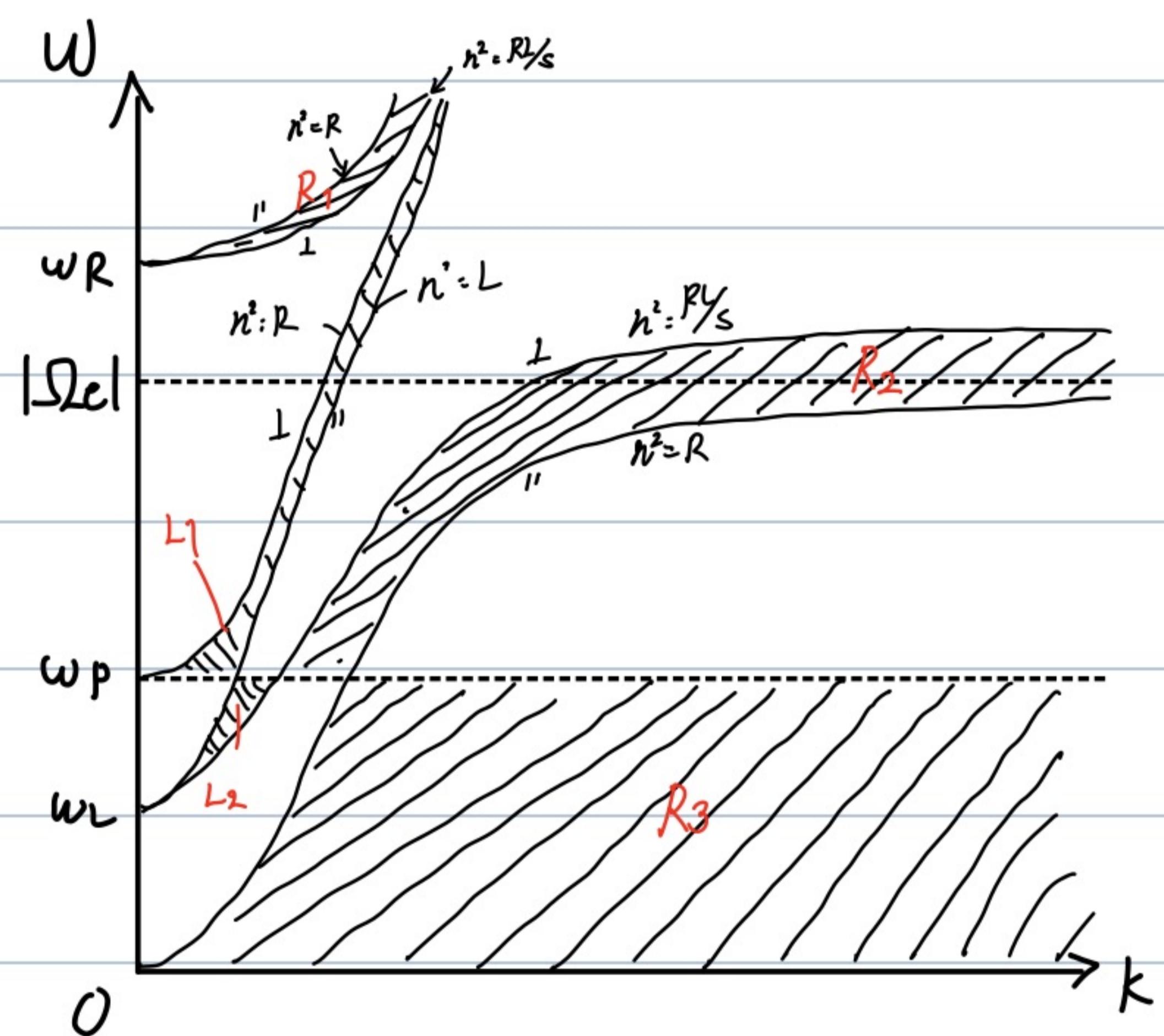


… ω - k ダイアグラム

i) $w_p = 2|\Omega_e|$ の場合



ii) $w_p = 0.5|\Omega_e|$ の場合



$L_1 \sim R_3$ の領域を通過する偏波と対応

位相速度 ω/k … その点と原点を結んだ時の傾き

群速度の k 方向成分 $v_{gk} = \partial\omega / \partial k$ ($\neq v_g$)

$+ \alpha (\text{位相速度})^2 - \gamma$

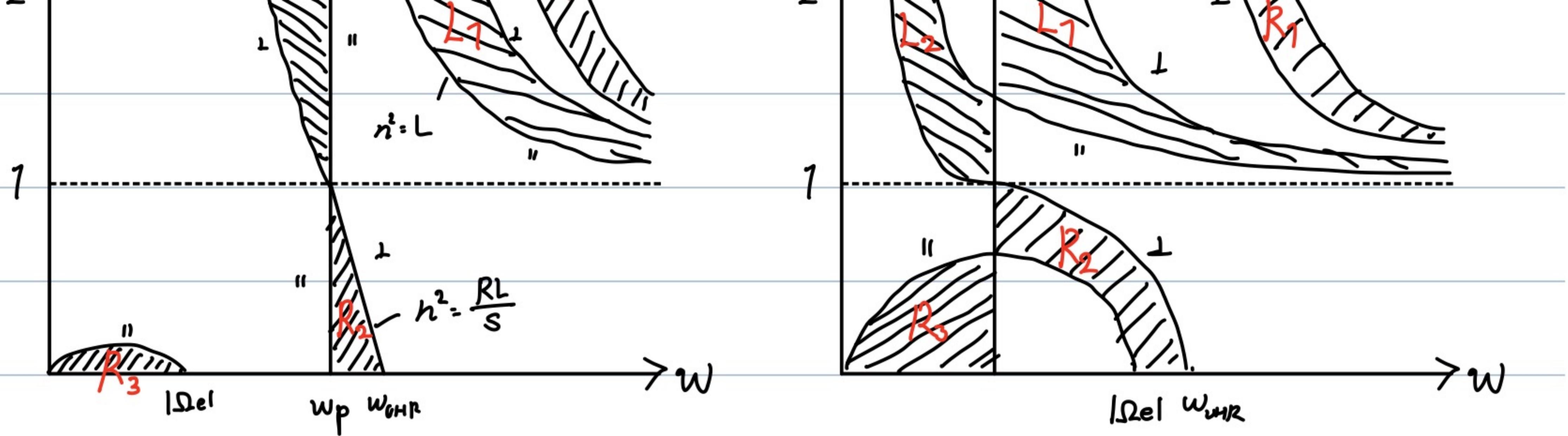
… その点での接線の勾配 (傾き)

i) $w_p = 2|\Omega_e|$ の場合



ii) $w_p = 0.5|\Omega_e|$ の場合





5.4.5 カットオフと共鳴

分散関係で $n=0$ となる状態 ... 切断 or カットオフ

$n = \infty$ = ... 共鳴 or レゾナンス

ⅰ) カットオフ

衝突項を無視すれば $n=0$ は w_p, w_L, w_R の 3つの周波数で起こる

$$P=0 \rightarrow X=1 \rightarrow w=w_p$$

$$L=0 \rightarrow X=1+|Y| \rightarrow w=w_L = -\frac{1\Omega_{el}}{2} + \sqrt{w_p^2 + \frac{\Omega_e^2}{4}}$$

$$R=0 \rightarrow X=1-|Y| \rightarrow w=w_R = \frac{1\Omega_{el}}{2} + \sqrt{w_p^2 + \frac{\Omega_e^2}{4}}$$

$$\rightarrow w_p, w_L, w_R \text{ で } n=0 \quad (w_R > w_p > w_L)$$

$n=0$ のとき

圧が有限でも川は消失・群速度は0人

カットオフの例
... 河流

衝突項がある時 ...

厳密には 0 にならない



ii) 共鳴

$h = \infty$ のとき (5.45) は

$$\tan^2 \theta = - \frac{P}{S} \quad (5.90)$$

となる。

$\theta = 0^\circ$ や $\theta = 90^\circ$ の場合を考察を行う。

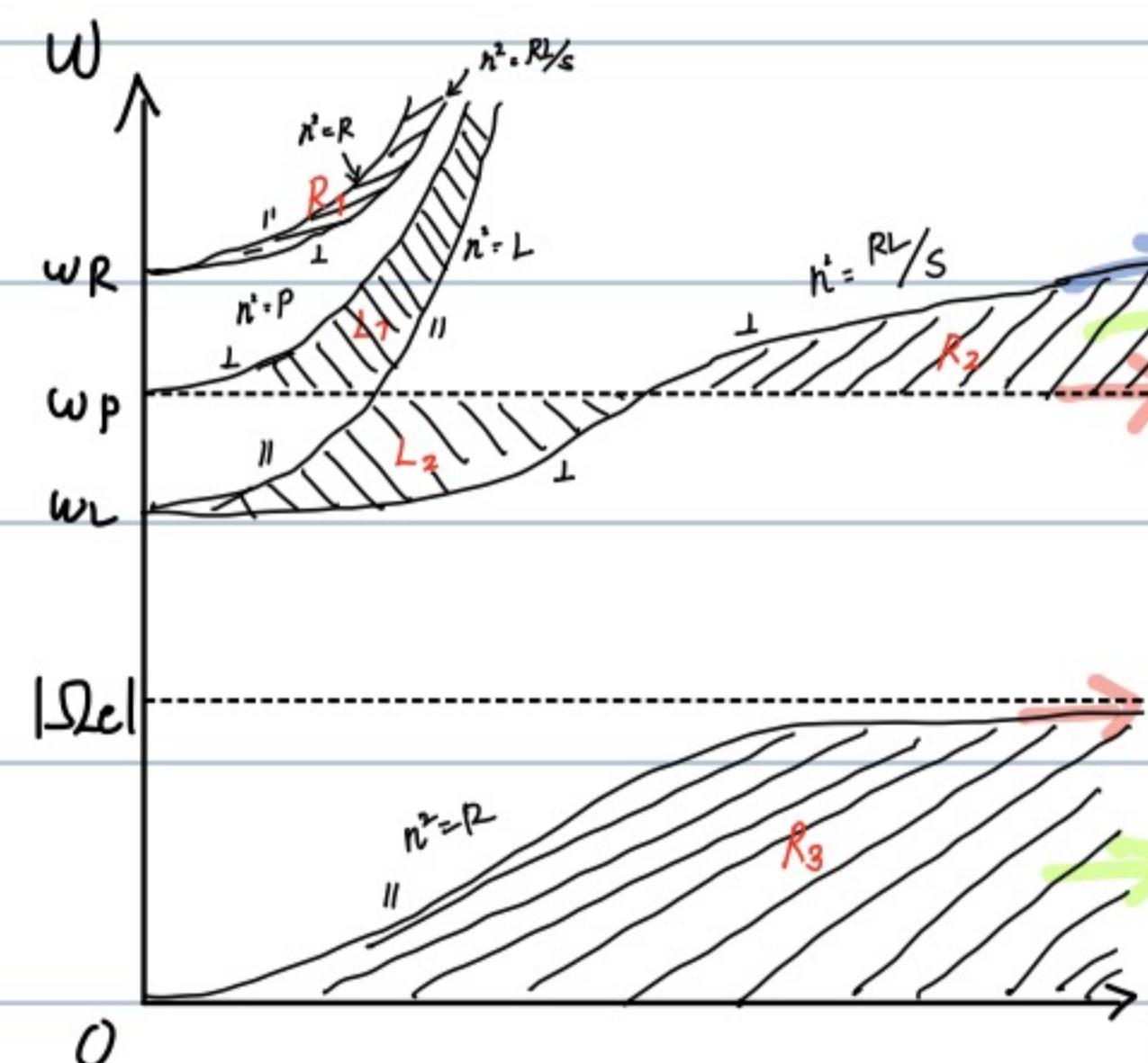
$$\theta = 0^\circ \rightarrow P = 0 \quad \text{or} \quad S = \infty$$

$$\begin{cases} P = 0 \dots \omega = \omega_p & \text{プラズマ周波数での共鳴} \\ S = \infty \dots 1 - |\gamma|^2 = 0 \rightarrow \omega = |\Omega_e| & \text{電子サイクロトロン共鳴} \end{cases}$$

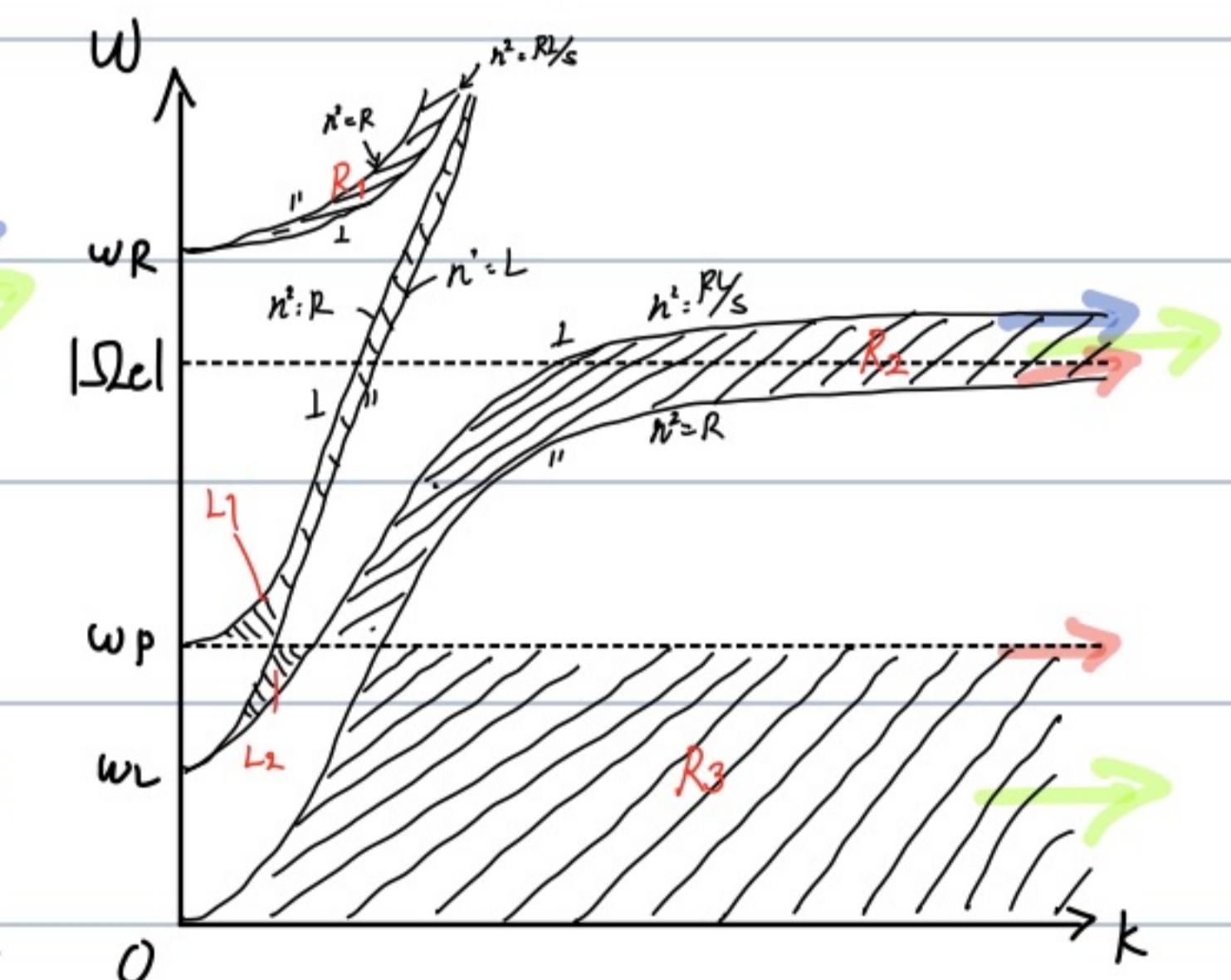
(他のサイクロトロン周波数でも共鳴が起きる)

図との対応...

i) $\omega_p = 2|\Omega_e|$ の場合



ii) $\omega_p = 0.5|\Omega_e|$ の場合



$$\theta = 90^\circ \rightarrow S = 0 \dots X = 1 - |\gamma|^2$$

$$\rightarrow \omega = \omega_{VHR} = \sqrt{\omega_p^2 + \Omega_e^2} \quad \text{上部へ行けり, ト共鳴} \quad (5.91)$$

任意の角に対して...

$\omega_p > |\Omega_{el}|$ の場合

$\rightarrow \omega_{UHR} \approx \omega_p$ の向 + $\omega < |\Omega_{el}|$

$\Rightarrow k \rightarrow \infty$ と見なす

こうして光鳴

$\omega_p < |\Omega_{el}|$ の場合

$\rightarrow \omega_{UHR} \approx |\Omega_{el}|$ の向 + $\omega < \omega_p$

$\theta \neq 0$ のとき (5.35) は...

$$-n^2 E_L + K(E_K + E_\perp) = 0$$

(5.92)

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ K(E_K + E_\perp) \end{array} - \begin{array}{l} \textcircled{2} \\ n^2 E_L \end{array}$$

$\rightarrow E_K > E_L$

光鳴時に S, D, P はいづれも $n^2 \gg S, D, P$ (K の各要素) と
(5.93)

$$|E_L| / |E_K| \ll 1 \quad (\text{lk べたるがんばる})$$

→ 縦波的性格のモード

5.4.6 QL 近似と QT 近似

伏近視アラスズ中

電波の屈折率 ... Appleton - Hartree の式

→ 磁場と伝搬ベクトルの間の角に依存



$\theta = 0^\circ$ ($B \parallel k$) ... 縦伝搬

$\theta = 90^\circ$ ($B \perp k$) ... 横伝搬

θ が中間のとき... 近似的に
準縦方向伝搬 (QL 近似)
準横方向伝搬 (QT 近似)

この条件は、屈折率の式(5.39)の分母中の根号内で..

$$n^2 = 1 - \frac{2X}{2(1-jz) - \frac{Y_T^2}{1-X-jz} \pm \sqrt{\frac{Y_T^4}{(1-X-jz)^2} + 4Y_L^2}} \quad \text{.. 分数内乗式} \\ \text{(磁場あり).衡定あり)} \quad (15.39)$$

Appleton - Hartree の式 (木村先生の D 講 5 章)

$$\left| (1-x-jz)/Y \right| \gg \sin^2 \theta / 2 \cos \theta \quad \dots \text{QL 近似} \quad (5.94)$$

$$|(1-x-jz)/Y| \ll \sin^2 \theta / 2 \cos \theta \quad \dots \quad QT \text{近似} \quad (5.95)$$

屋敷率は ..

$$QI \text{ 近似} ; h^2 = 1 - \frac{X}{1 - jz \pm |Y_L|} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{上符号}, L \in +) \\ (\text{下符号}, R \in -) \end{array} \right. \quad (5.96)$$

$$QT \text{ 近似} ; \quad r^2 = 1 - \frac{x}{1-jz} \quad (\text{上行子}, L \rightarrow +)$$

$$= 1 - \frac{X(1-X-\bar{j}Z)}{(1-\bar{j}Z)(1-X-\bar{j}Z) - Y_T^2} \quad (\text{下符3}, R\bar{e}-\text{L}) \quad (5.97)$$