Problemas importantes de Combi

Ricardo Largaespada

12 Octubre 2024

1. Problemas Propuestos

Problema 1.1. Demuestra que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Problema 1.2. ¿De cuántas maneras puedes sumar a n con enteros positivos (el orden importa)?

Problema 1.3. En un torneo de tenis juegan todos contra todos exactamente una vez. (En cada partido hay un ganador). Demuestra que hay una manera de enlistar los n jugadores en orden de tal manera que cada jugador le ganó al siguiente en la lista.

Problema 1.4. ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 20\}$ no tienen elementos consecutivos?

Problema 1.5. Un rey de ajedrez empieza en la esquina superior izquierda de un tablero de $m \times n$. José y Nico mueven el rey alternadamente, pero el rey no puede regresar a una casilla que ya ocupó. Pierde el primero que no pueda mover. Determina para cada pareja (m, n) quién gana.

Problema 1.6. Demuestra que en una fiesta hay dos personas que conocen a la misma cantidad de personas.

Problema 1.7. Un rectángulo de lados enteros impares se divide en rectángulos de lados enteros. Demuestra que uno de esos rectángulos tiene todos sus lados impares.

Problema 1.8. Una camioneta tiene 20 cubetas (indistinguibles). ¿De cuántas maneras es posible poner pintura roja, azul, y amarilla en las cubetas (un solo tipo por cubeta)?

Problema 1.9. ¿Es posible cubrir un tablero de 10×10 con fichas de 1×4?

Problema 1.10. Hay n fichas en la mesa. Ana y Beto juegan alternadamente a quitar fichas empezando por Ana. En cada turno pueden quitar una cantidad de fichas del conjunto $\{1, 3, 8\}$. Determina el ganador para cada valor de n. Intenta el mismo problema pero con el conjunto de los números no compuestos. ¿Puedes encontrar un algoritmo para resolver el problema con conjuntos más o menos pequeños?

Problema 1.11. En una tira de dígitos $201920192019 \cdots 2019$ con 2019 2019's, ¿de cuántas maneras se puede elegir un 2, un 0, un 1, un 9 que aparezcan en ese orden?

Problema 1.12. Considera todos los puntos en el plano con coordenadas enteras no negativas. Inicialmente, hay un frijol en cada uno de los puntos $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$. En un paso, puedes quitar el frijol de la casilla (x, y) y agregar un frijol en $(x, y + 1)$ y en $(x + 1, y)$ (solo puedes hacer el paso si las casillas donde vas a poner un frijol están vacías y la casilla (x, y) tiene un frijol). Demuestra que después de una cantidad finita de pasos, debe haber un frijol en alguna de las casillas $(0, 0)$, $(0, 1)$ o $(1, 0)$.

Problema 1.13. En Minecraft, una casilla se vuelve agua si y solo si al menos dos de las casillas adyacentes son agua. Tienes una alberca de 20×20. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que tienes que llenar de agua inicialmente para que la alberca se llene completa?

Problema 1.14. Determina la mayor cantidad de reyes que puedes poner en un tablero de ajedrez (8×8) de tal manera que cada rey ataque a menos de dos reyes.

Problema 1.15. En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en orden, de tal manera que en el primer renglón aparecen los números del 1 al n en orden de izquierda a derecha, en el segundo renglón los números del $n+1$ al $2n$, y así sucesivamente. Una operación consiste en escoger dos cuadritos que compartan un lado y sumarles el mismo número (puede ser negativo).

Encuentra todos los valores de n tales que es posible que después de una cantidad finita de operaciones, todos los cuadritos tengan escrito el número 0. En los casos en los que es posible, determina la mínima cantidad de operaciones necesarias.

2. Sugerencias y Soluciones

1.1. Intenta interpretar ambos lados de la identidad combinatoriamente. Considera contar de dos maneras el número de formas de elegir n elementos de un conjunto de $2n$ elementos.

1.2. Piensa en las composiciones de n. Cada suma de enteros positivos cuyo orden importa corresponde a una manera distinta de colocar separadores entre los sumandos. ¿Cuántas posiciones hay para colocar estos separadores?

1.3. Para resolver este problema, representa los resultados del torneo mediante un grafo orientado completo, conocido como un *torneo* en teoría de grafos, donde cada jugador es un vértice y cada partido es una arista dirigida desde el ganador al perdedor.

1.4. Para resolver este problema, piensa en términos de combinatoria. Si seleccionamos elementos sin que sean consecutivos, necesitamos dejar al menos un número sin seleccionar entre cada par de números seleccionados. Esto se asemeja al problema de colocar objetos (los elementos seleccionados) en espacios disponibles, asegurando que no estén juntos.

1.5. Observa que el número total de casillas en el tablero es $m \times n$, y que cada movimiento ocupa una casilla nueva sin repetir. Considera cómo la paridad (si es par o impar) del número total de casillas afecta quién será el último en mover. Piensa en términos de quién tiene ventaja dependiendo de si el número total de casillas es par o impar.

1.6. Considera las posibles cantidades de personas que alguien puede conocer en una fiesta con n personas. Aplica el Principio del Palomar para demostrar que debe haber al menos dos personas con la misma cantidad de conocidos.

1.7. Considera el área total del rectángulo y las áreas de los rectángulos más pequeños. Analiza la paridad (si son pares o impares) de las dimensiones y las áreas de los rectángulos involucrados. Recuerda que el producto de dos números enteros es impar solo si ambos son impares.

1.8. Considera que las cubetas son indistinguibles, por lo que lo único que importa es cuántas cubetas hay de cada color. Esto se convierte en un problema de particiones enteras no negativas. Piensa en el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $r + a + y = 20$, donde r, a, y representan el número de cubetas pintadas de rojo, azul y amarillo, respectivamente.

1.9. Considera utilizar una coloración del tablero que pueda ayudar a demostrar si es posible o no. Una forma común es asignar números a las casillas utilizando aritmética modular y analizar cómo las fichas cubren estas casillas coloreadas.

1.10. Para resolver este tipo de problemas, es útil utilizar el concepto de *estados ganadores* y *estados perdedores*. Puedes construir una tabla para valores pequeños de n y observar patrones. Considera también el uso de los *números de Grundy* o *nimbers* para determinar el estado de cada posición en el juego.

1.11. Observa que la secuencia consiste en repetir el número 2019 un total de 2019 veces. Cada dígito 2, 0, 1, 9 se repite periódicamente cada 4 posiciones. Intenta modelar el problema contando las posiciones de los dígitos y aplicando combinatoria de conteo con reemplazo para determinar el número total de formas de seleccionar los dígitos en orden.

1.12. Considera asignar un peso a cada casilla (x, y), por ejemplo, $w(x, y) = 2^{-x-y}$. Observa cómo este peso total se conserva durante las operaciones y cómo esto puede implicar que siempre debe haber un frijol en una de las casillas iniciales.

1.13. Observa que una casilla necesita al menos dos casillas adyacentes con agua para volverse agua. Considera colocar agua inicial en posiciones estratégicas que maximicen el número de casillas que pueden volverse agua en cada paso. Piensa en utilizar filas y columnas adyacentes para asegurar que las casillas tengan suficientes adyacentes con agua.

1.14. Considera dividir el tablero en bloques de 2×2 y colocar reyes en posiciones específicas dentro de estos bloques. Analiza cómo colocar los reyes para maximizar su número mientras se asegura que cada rey ataque a menos de dos reyes. Piensa en cómo los reyes pueden atacar dentro de estos bloques y cómo evitar que ataquen a más de un rey.

1.15. Para resolver este problema, considera modelarlo mediante un sistema de ecuaciones lineales. Cada operación afecta a dos cuadritos adyacentes sumándoles el mismo número. Nuestro objetivo es encontrar una combinación de operaciones que permita llevar todos los números a cero.

Observa que la paridad del total de la suma de los números en la cuadrícula influye en la posibilidad de alcanzar todos ceros. Analiza cómo las operaciones afectan la suma total y determina para qué valores de n es posible alcanzar la configuración deseada.