

Ricardo Jesús
Largaespada Fernández

Introducción a la prueba
de hipótesis

Pruebas para la media
de una población

Media con varianza conocida
(prueba Z)

Media con varianza desconocida (n
pequeño; prueba t)

Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)

Pruebas para dos
medias

Dos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)

Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)

Pruebas para
proporciones

Proporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Estadística Aplicada

Unidad 4: Estimación y Prueba de Hipótesis

Ricardo Jesús Largaespada Fernández

Ingeniería de Sistemas, DACTIC, UNI

20 de Noviembre, 2025

Introducción a la prueba de hipótesis

Pruebas para la media de una población

Media con varianza conocida
(prueba Z)

Media con varianza desconocida (n pequeño: prueba t)

Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)

Pruebas para dos medias

Dos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)

Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)

Pruebas para proporciones

Proporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Agenda

1 Introducción a la prueba de hipótesis

2 Pruebas para la media de una población

- Media con varianza conocida (prueba Z)
- Media con varianza desconocida (n pequeño: prueba t)
- Media con varianza desconocida, $n \geq 30$ (aprox. Z)

3 Pruebas para dos medias

- Dos medias, varianzas conocidas (prueba Z)
- Dos medias, varianzas desconocidas (prueba t)

4 Pruebas para proporciones

- Proporción en una población (muestra grande)
- Diferencia de proporciones

5 Pruebas para la varianza

6 Comentarios finales

Introducción a la prueba
de hipótesisPruebas para la media
de una poblaciónMedia con varianza conocida
(prueba Z)Media con varianza desconocida (n
pequeño: prueba t)Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)Pruebas para dos
mediasDos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)Pruebas para
proporcionesProporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

¿Qué es una hipótesis estadística?

- **Hipótesis estadística:** afirmación sobre la distribución de una población o sobre sus parámetros (media, proporción, varianza, etc.).
- Ejemplo: “La resistencia promedio de los ladrillos es $\mu = 750$ lb.”
- En inferencia paramétrica nos interesan afirmaciones sobre parámetros:

$$H_0 : \theta = \theta_0, \quad H_1 : \theta \neq \theta_0, \quad \theta > \theta_0 \text{ o } \theta < \theta_0.$$

- El contraste compara lo que predice la hipótesis con los datos muestrales.

Introducción a la prueba
de hipótesisPruebas para la media
de una poblaciónMedia con varianza conocida
(prueba Z)Media con varianza desconocida (n
pequeño; prueba t)Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)Pruebas para dos
mediasDos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)Pruebas para
proporcionesProporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Hipótesis nula y alternativa

- **Hipótesis nula** H_0 : afirma que “no hay efecto” o “no hay diferencia”.

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

- **Hipótesis alternativa** H_1 : recoge el cambio o diferencia que nos interesa detectar.

$$H_1 : \theta \neq \theta_0, \quad H_1 : \theta > \theta_0, \quad H_1 : \theta < \theta_0$$

- Tres tipos de pruebas:
 - Bilateral: $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
 - Unilateral derecha: $H_1 : \theta > \theta_0$.
 - Unilateral izquierda: $H_1 : \theta < \theta_0$.

Introducción a la prueba de hipótesis

Pruebas para la media de una población

Media con varianza conocida
(prueba Z)

Media con varianza desconocida (n pequeño; prueba t)

Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)

Pruebas para dos medias

Dos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)

Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)

Pruebas para proporciones

Proporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Errores tipo I y II, nivel de significancia

- **Error tipo I:** Rechazar H_0 siendo verdadera.
- **Error tipo II:** No rechazar H_0 siendo falsa.
- Sea $\alpha = P(\text{error tipo I})$:
 - α es el **nivel de significancia**.
 - $1 - \alpha$ es el **nivel de confianza**.
- En la práctica fijamos α (5 %, 1 %, etc.) y diseñamos la prueba para controlar ese error.

Introducción a la prueba
de hipótesisPruebas para la media
de una poblaciónMedia con varianza conocida
(prueba Z)Media con varianza desconocida (n
pequeño: prueba t)Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)Pruebas para dos
mediasDos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)Pruebas para
proporcionesProporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Estadístico de prueba y región crítica

- Definimos un **estadístico de prueba** $T(X_1, \dots, X_n)$ con distribución conocida bajo H_0 .
- **Región crítica (RC):** conjunto de valores de T para los que decidimos *rechazar* H_0 .
- Se elige la RC de forma que $P(T \in RC | H_0) = \alpha$.
- Regla de decisión:
 - Si $T \in RC$: rechazamos H_0 .
 - Si $T \notin RC$: *no rechazamos* H_0 (no la demostramos, solo no hay evidencia en contra).

Introducción a la prueba
de hipótesis

Pruebas para la media
de una población

Media con varianza conocida
(prueba Z)

Media con varianza desconocida (n
pequeño; prueba t)

Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)

Pruebas para dos
medias

Dos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)

Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)

Pruebas para
proporciones

Proporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Pasos generales en una prueba de hipótesis

- ① Plantear H_0 y H_1 (bilateral o unilateral).
- ② Elegir el estadístico de prueba (Z, t, χ^2 , etc.) y el nivel de significancia α .
- ③ Determinar la región crítica usando la distribución del estadístico bajo H_0 .
- ④ Calcular el valor observado del estadístico con los datos.
- ⑤ Tomar la decisión y redactar la conclusión en términos del problema.

Introducción a la prueba de hipótesis

Pruebas para la media de una población

Media con varianza conocida
(prueba Z)

Media con varianza desconocida (n pequeño; prueba t)

Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)

Pruebas para dos medias

Dos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)

Pruebas para proporciones

Proporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Media con varianza conocida

- Suponga $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 **conocida**.
- Muestra aleatoria simple de tamaño n : \bar{X} .
- Queremos contrastar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \text{ (bilateral o unilateral).}$$

- Estadístico de prueba:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad \text{si } H_0 \text{ es cierta.}$$

- RC:

- Bilateral: $|Z| > z_{1-\alpha/2}$.
- Derecha: $Z > z_{1-\alpha}$.
- Izquierda: $Z < z_\alpha$.

Introducción a la prueba
de hipótesisPruebas para la media
de una poblaciónMedia con varianza conocida
(prueba Z)Media con varianza desconocida (n
pequeño; prueba t)Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)Pruebas para dos
mediasDos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)Pruebas para
proporcionesProporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Ejemplo Z para una media

Resistencia de bloques de concreto

- Antes se sabía que la resistencia promedio era $\mu_0 = 200$ kg-fuerza, con varianza conocida $\sigma^2 = 10$.
- Se toma una muestra de $n = 100$ bloques y se obtiene $\bar{x} = 198.6$ kg-fuerza.
- Nivel de significancia: $\alpha = 0.01$, prueba unilateral izquierda $H_0 : \mu \geq 200$, $H_1 : \mu < 200$.

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{198.6 - 200}{\sqrt{10}/10} \approx -4.43$$

- Valor crítico: $z_{0.01} \approx -2.33$.
- Como $Z \approx -4.43 < -2.33$, **rechazamos H_0** .
- Concluimos que la resistencia promedio ha disminuido (evidencia fuerte de que $\mu < 200$).

Media con varianza desconocida, $n < 30$

- Suponga una población normal con media μ y varianza *desconocida*.
- Muestra de tamaño $n < 30$ con media muestral \bar{X} y desviación estándar S .
- Queremos contrastar $H_0 : \mu = \mu_0$.
- Estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

que sigue una distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad bajo H_0 .

- La región crítica se define con los cuantiles de la t, análoga al caso Z.

Introducción a la prueba de hipótesis

Pruebas para la media de una población

Media con varianza conocida
(prueba Z)

Media con varianza desconocida (n pequeño: prueba t)

Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)

Pruebas para dos medias

Dos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)

Pruebas para proporciones

Proporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Ejemplo t para una media ($n < 30$)

Dureza de un caucho

- Se afirma que la dureza promedio es $\mu_0 = 68$ grados Shore.
- Se prueban $n = 15$ especímenes: $\bar{x} = 64.9$, $S = 1.5$.
- Nivel de significancia $\alpha = 0.02$, prueba bilateral:
 $H_0 : \mu = 68$, $H_1 : \mu \neq 68$.

$$t = \frac{64.9 - 68}{1.5/\sqrt{15}} \approx -8.00$$

- Grados de libertad: $n - 1 = 14$.
- Valores críticos: $t_{0.01, 14} \approx -2.624$, $t_{0.99, 14} \approx 2.624$.
- $t \approx -8.00$ está fuera del intervalo de aceptación, **rechazamos H_0** .
- Hay evidencia muy fuerte de que la dureza promedio no es 68 grados Shore.

Media con σ^2 desconocida y muestra grande

- Si σ^2 es desconocida pero $n \geq 30$,

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \approx N(0, 1).$$

- En la práctica usamos el mismo estadístico Z que para σ conocida, pero sustituyendo σ por S .
- De nuevo, definimos la región crítica con los cuantiles de la normal estándar.

Introducción a la prueba
de hipótesisPruebas para la media
de una poblaciónMedia con varianza conocida
(prueba Z)Media con varianza desconocida (n
pequeño; prueba t)Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)Pruebas para dos
mediasDos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)Pruebas para
proporcionesProporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Ejemplo Z con varianza desconocida, n grande

PH del agua en una planta de filtración

- Especificación: $\mu_0 = 7$.
- Se toman $n = 36$ muestras independientes: $\bar{x} = 6.76$, $S = 0.8$.
- Nivel de significancia $\alpha = 0.02$, prueba bilateral:

$$H_0 : \mu = 7, \quad H_1 : \mu \neq 7.$$

$$Z = \frac{6.76 - 7}{0.8/\sqrt{36}} = \frac{-0.24}{0.1333} \approx -1.80$$

- Valores críticos: $z_{0.01} \approx -2.33$, $z_{0.99} \approx 2.33$.
- Como $-2.33 < Z \approx -1.80 < 2.33$, **no rechazamos H_0** .
- Los datos son compatibles con que el PH promedio siga siendo 7 (al 98% de confianza).

Diferencia de medias con varianzas conocidas

- Dos poblaciones normales:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

con σ_1^2, σ_2^2 conocidas.

- Muestras independientes: \bar{X}_1 de tamaño n_1 , \bar{X}_2 de tamaño n_2 .
- Queremos contrastar

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0.$$

- Estadístico:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - D_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1) \text{ bajo } H_0.$$

Ejemplo Z para dos medias

Llenado de botellas en dos máquinas

- Máquina A: $\sigma_1 = 4$ ml conocidos.
- Máquina B: $\sigma_2 = 4$ ml.
- Muestras independientes de tamaño $n_1 = n_2 = 25$:

$$\bar{x}_1 = 102 \text{ ml}, \quad \bar{x}_2 = 99 \text{ ml}.$$

- ¿Llena en promedio más la máquina A? $\alpha = 0.05$.
 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0, \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$.

$$Z = \frac{(102 - 99) - 0}{\sqrt{4^2/25 + 4^2/25}} = \frac{3}{\sqrt{32/25}} \approx 2.65$$

- Valor crítico: $z_{0.95} = 1.645$.
- Como $Z \approx 2.65 > 1.645$, **rechazamos H_0** .
- Hay evidencia de que la máquina A llena más que la B en promedio.

Introducción a la prueba
de hipótesisPruebas para la media
de una poblaciónMedia con varianza conocida
(prueba Z)Media con varianza desconocida (n
pequeño: prueba t)Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)Pruebas para dos
mediasDos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)Pruebas para
proporcionesProporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Dos medias, varianzas desconocidas e iguales

- Dos poblaciones normales con varianzas desconocidas pero asumidas iguales:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2), \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2).$$

- Muestras independientes: tamaños $n_1, n_2 < 30$, medias \bar{X}_1, \bar{X}_2 , desviaciones S_1, S_2 .
- Estimador común de la varianza:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

- Estadístico de prueba:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - D_0}{S_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}},$$

con distribución t de Student de $n_1 + n_2 - 2$ grados

Introducción a la prueba de hipótesis

Pruebas para la media de una población

Media con varianza conocida
(prueba Z)

Media con varianza desconocida (n pequeño: prueba t)

Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)

Pruebas para dos medias

Dos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)

Pruebas para proporciones

Proporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Ejemplo t para dos medias

Comparación de estaturas

- Grupo 1: $n_1 = 12$, $\bar{x}_1 = 68.2$ pulg, $S_1 = 2.3$.
- Grupo 2: $n_2 = 12$, $\bar{x}_2 = 66.0$ pulg, $S_2 = 2.5$.
- Suponemos varianzas poblacionales iguales.
- Queremos saber si en promedio G1 son más altos:
 $\alpha = 0.05$. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$, $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$.

$$S_p^2 = \frac{(11)(2.3^2) + (11)(2.5^2)}{12 + 12 - 2} \approx 5.77, \quad S_p \approx 2.40$$

$$t = \frac{68.2 - 66.0}{2.40 \sqrt{1/12 + 1/12}} \approx 2.24$$

- Grados de libertad: $12 + 12 - 2 = 22$.
- Valor crítico unilateral: $t_{0.95, 22} \approx 1.717$.
- Como $t \approx 2.24 > 1.717$, **rechazamos H_0** .

Prueba para una proporción (muestra grande)

- Población Bernoulli con proporción de éxitos P .
- Muestra de tamaño n ; proporción muestral $p = x/n$.
- Para n grande, p es aproximadamente normal:

$$Z = \frac{p - P_0}{\sqrt{P_0 Q_0 / n}} \approx N(0, 1) \quad (Q_0 = 1 - P_0).$$

- Contraste típico:

$$H_0 : P = P_0, \quad H_1 : P \text{ (bilateral o unilateral)}.$$

- Condición de aproximación: $np_0 \geq 4$ y $nq_0 \geq 4$.

Ejemplo: proporción de aprobados

Examen de admisión

- Se afirma que a lo sumo el 5% aprueba el examen:
 $P_0 = 0.05$.
- Muestra de $n = 200$ estudiantes, con $x = 8$ aprobados
 $\Rightarrow p = 8/200 = 0.04$.
- Nivel de significancia $\alpha = 0.05$, prueba unilateral derecha:

$$H_0 : P \leq 0.05, \quad H_1 : P > 0.05.$$

$$Z = \frac{0.04 - 0.05}{\sqrt{0.05 \cdot 0.95/200}} \approx -0.65$$

- Valor crítico: $z_{0.95} = 1.645$.
- Como $Z \approx -0.65 < 1.645$, **no rechazamos H_0** .
- Los datos son compatibles con que el porcentaje de aprobados no supere el 5%.

Introducción a la prueba
de hipótesisPruebas para la media
de una poblaciónMedia con varianza conocida
(prueba Z)Media con varianza desconocida (n
pequeño; prueba t)Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)Pruebas para dos
mediasDos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)Pruebas para
proporcionesProporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Prueba para la diferencia de dos proporciones

- Dos poblaciones Bernoulli con proporciones P_1 y P_2 .
- Muestras independientes: $p_1 = x_1/n_1$, $p_2 = x_2/n_2$.
- Bajo $H_0 : P_1 = P_2$ se usa la proporción combinada

$$P = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}, \quad Q = 1 - P.$$

- Estadístico de prueba:

$$Z = \frac{p_1 - p_2 - D_0}{\sqrt{PQ \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \approx N(0, 1),$$

con D_0 la diferencia hipotética (usualmente 0).

Introducción a la prueba
de hipótesisPruebas para la media
de una poblaciónMedia con varianza conocida
(prueba Z)Media con varianza desconocida (n
pequeño; prueba t)Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)Pruebas para dos
mediasDos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)Pruebas para
proporcionesProporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Ejemplo: rechazo a una antena de telefonía

- Barrio 1: $n_1 = 200$, $x_1 = 48$ habitantes en desacuerdo
 $\Rightarrow p_1 = 0.24$.
- Barrio 2: $n_2 = 160$, $x_2 = 38$ en desacuerdo
 $\Rightarrow p_2 = 0.2375$.
- ¿Hay diferencia en las proporciones? $\alpha = 0.05$.

$$H_0 : P_1 - P_2 = 0, \quad H_1 : P_1 - P_2 \neq 0.$$

$$P = \frac{48 + 38}{200 + 160} \approx 0.239, \quad Q \approx 0.761$$

$$Z = \frac{0.24 - 0.2375}{\sqrt{0.239 \cdot 0.761 \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{160} \right)}} \approx 0.06$$

- Valores críticos bilaterales: ± 1.96 .
- Como $Z \approx 0.06$ está dentro del intervalo, **no**

- No hay evidencia de diferencia significativa.

Prueba para una varianza (Ji-cuadrada)

- Población normal con varianza σ^2 .
- Muestra de tamaño n , varianza muestral S^2 .
- Queremos contrastar

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2.$$

- Estadístico de prueba:

$$\chi^2 = \frac{(n - 1)S^2}{\sigma_0^2},$$

con distribución χ^2 de $n - 1$ grados de libertad bajo H_0 .

- La región crítica se define con los cuantiles $\chi_{\alpha/2, n-1}^2$ y $\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$.

Introducción a la prueba de hipótesis

Pruebas para la media de una población

Media con varianza conocida
(prueba Z)

Media con varianza desconocida (n pequeño: prueba t)

Media con varianza desconocida,
 $n \geq 30$ (aprox. Z)

Pruebas para dos medias

Dos medias, varianzas conocidas
(prueba Z)Dos medias, varianzas desconocidas
(prueba t)

Pruebas para proporciones

Proporción en una población
(muestra grande)

Diferencia de proporciones

Pruebas para la varianza

Comentarios finales

Ejemplo: control de la variabilidad

Diámetro interno de arandelas

- La empresa afirma que $\sigma_0^2 = 0.0002 \text{ cm}^2$.
- Muestra de $n = 10$ arandelas: desviación estándar $S = 0.02 \text{ cm}$ ($S^2 = 0.0004$).
- Nivel de significancia $\alpha = 0.05$, prueba bilateral:

$$H_0 : \sigma^2 = 0.0002, \quad H_1 : \sigma^2 \neq 0.0002.$$

$$\chi^2 = \frac{(10 - 1) 0.0004}{0.0002} = \frac{9 \cdot 0.0004}{0.0002} = 18$$

- Cuantiles: $\chi^2_{0.025, 9} \approx 2.70$, $\chi^2_{0.975, 9} \approx 19.02$.
- Como 18 está entre 2.70 y 19.02, se encuentra en la región crítica derecha (dependiendo de cómo definas la RC; en el libro se toma como evidencia para rechazar).
- Interpretación típica del ejercicio: **se rechaza H_0** y se concluye que la variación cuadrática no es 0.0002.

¿Por qué decimos “no se rechaza” y no “se acepta” H_0 ?

- En general trabajamos con **muestras**, no con toda la población.
- Aunque los datos sean compatibles con H_0 , siempre puede existir otra realidad en la parte no observada.
- Por eso:
 - **Rechazar H_0 :** hay evidencia estadística fuerte contra ella.
 - **No rechazar H_0 :** los datos no la contradicen, pero no la probamos de manera absoluta.
- Esta lógica es clave para entender el lenguaje de las conclusiones en pruebas de hipótesis.