Métodos Numéricos - Integración y Diferenciación Numérica

Ricardo Largaespada

14 de noviembre de 2018

Uno de los problemas estudiados en el curso de Cálculo Integral en Matemática II, es el problema de encontrar el área bajo una curva en un intervalo conocido. Hablamos de la integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx$$

En esta ocasión nuestro objetivo será resolver este mismo problema desde un enfoque númerico y de cómo implementar algoritmos para alcanzar el resultado deseado.

1. Introducción

La integración numérica, conocida también como *cuadratura*, es un procedimiento más preciso que la diferenciación numérica. Las cuadraturas aproximan la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

por la suma

$$I = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

donde las abscisas nodales x_i y los *pesos* A_i dependen de la regla particular usada para la cuadratura. Todas las reglas de cuadraturas son derivadas de polinomios de interpolación del integrado. Por lo tanto, estos funcionan mejor si $f(x)$ puede ser aproximado por un polinomio.

Los métodos de integración numérica pueden ser divididos en dos grupos: Fórmulas de Newton-Cotes y cuadratura Gaussiana. Las fórmulas de Newton-Cotes que son caracterizadas por abscisas equiespaciadas, estas incluyen los métodos más conocidos como la regla del trapecio y la regla de Simpson. Ellos son más útiles si $f(x)$ ha sido calculado en intervalos iguales, o pueden ser calculados a bajo costo computacional. Puesto que las fórmulas de Newton-Cotes son basadas en interpolación local, estos requieren solamente un tramo para ajustar un polinomio.

En la cuadratura Gaussiana las localizaciones de las abscisas son seleccionadas para llegar a la mejor precisión posible. Debido a que la cuadratura Gaussiana requiere pocas evaluaciones del integrando para un dado nivel de precisión, es común en casos en donde $f(x)$ es muy costoso para evaluar. Otra ventaja de la cuadratura Gaussiana es que permite manejar singularidades en el integrando, posibilitando evaluar expresiones como

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

dado que $g(x)$ es una función continua.

2. Fórmulas de Newton-Cotes

Las *fórmulas de Newton-Cotes* son los tipos de integración numérica más comunes. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar:

$$I = \int_a^b f(x)dx \equiv \int_a^b f_n(x)dx$$

donde $f_n(x)$ es un polinomio de la forma

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

donde n es el grado del polinomio.

La integral también se puede aproximar usando un conjunto de polinomios aplicados por trozos a la función o datos, sobre segmentos de longitud constante.

Existen formas cerradas y abiertas de las fórmulas de Newton-Cotes. Las *formas cerradas* son aquellas donde se conocen los datos al inicio y al final de los límites de integración. Las *formas abiertas* tienen límites de integración que se extienden más allá del intervalo de los datos.

Considere la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

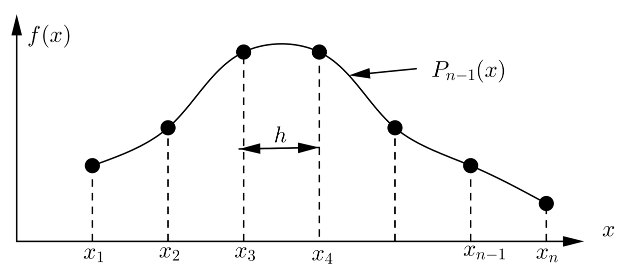


Figura 1: Aproximación Polinomica de $f(x)$

Si dividimos el rango de integración (a,b) en $n-1$ intervalos iguales de longitud $h = (b-a)/(n-1)$ cada uno, como se muestra en la figura (1), y denotemos las abscisas de los nodos resultantes por $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ahora procedemos a aproximar $f(x)$ por un polinomio de grado $n-1$ que intersecte a todos los nodos. La forma de Lagrange de este polinomio es

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)l_i(x)$$

donde $l_i(x)$ son las funciones cardinales. Por lo tanto, una aproximación a la integral en (1) es

$$I = \int_a^b P_{n-1}(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\int_a^b l_i(x)dx\right] = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \tag{2}$$

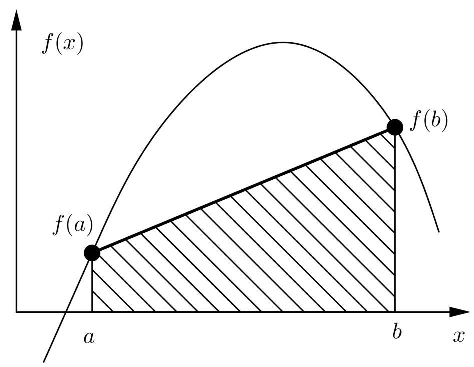


Figura 2: Representación gráfica de la regla del trapecio.

donde

$$A_i = \int_a^b l_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

Las ecuaciones (2) y (3) son las fórmulas de Newton-Cotes. Los ejemplos clásicos de estas fórmulas son la regla trapezoidal (n = 2), la regla de Simpson (n = 3) y la regla de 3/8 de Simpson (n = 4). La más importante de estas es la regla trapezoidal. Se puede combinar con la extrapolación de Richardson en un algoritmo eficiente conocido como integración de Romberg, lo que hace que las otras reglas clásicas sean algo redundantes.

2.1. La regla del Trapecio

Si $n = 2$, tenemos que $l_1(x) = (x - x_2)/(x_1 - x_2) = -(x - b)/h$. De donde

$$A_1 = -\frac{1}{h}\int_a^b (x-b)dx = \frac{1}{2h}(b-a)^2 = \frac{h}{2}$$

También $l_2(x) = (x - x_1)/(x_2 - x_1) = (x - a)/h$. De donde

$$A_2 = \frac{1}{h}\int_a^b (x-a)dx = \frac{1}{2h}(b-a)^2 = \frac{h}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) nos lleva a

$$I = [f(a) + f(b)]\,\frac{h}{2} \tag{4}$$

que es conocida como la *regla del trapecio*. Esto representa el área del trapecio en la figura (2).

El error en la regla del trapecio

$$E = \int_a^b f(x)dx - I$$

es el área de la región entre $f(x)$ y la línea de interpolación, como se muestra en la figura (2). Este puede ser obtenido al integrar el error de intepolación:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2!}\int_a^b (x-x_1)(x-x_2)f''(\varepsilon)dx = \frac{1}{2}f''(\varepsilon)\int_a^b (x-a)(x-b)dx \\ &= -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\varepsilon) = -\frac{h^3}{12}f''(\varepsilon) \end{aligned}$$

2.1.1. La regla del Trapecio de aplicación múltiple

En la práctica, la regla trapezoidal se aplica por partes. La figura (3) muestra la región (a, b) dividida en $n-1$ paneles, cada uno de ancho h. La función $f(x)$ a integrar se aproxima mediante una línea recta en cada panel. De la regla trapezoidal obtenemos para el área aproximada de un panel típico

$$I_i = [f(x_i) + f(x_{i+1})]\frac{h}{2}$$

Aquí el área total, representando a $\int_a^b f(x)dx$, es

$$I = \sum_{i=1}^{n-1} I_i = [f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\,\frac{h}{2} \tag{5}$$

es la *regla del trapecio compuesta*.

El error de truncamiento en el área de cada panel es $E_i = -\frac{h^3}{12}f''(\varepsilon_i)$ donde ε_i está en (x_i, x_{i+1}). Por tanto el error de truncamiento en la ecuación (5) es

$$E = \sum_{i=1}^{n-1} E_i = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n-1} f''(\varepsilon_i)$$

Pero

$$\sum_{i=1}^{n-1} f''(\varepsilon_i) = (n-1)\overline{f''}$$

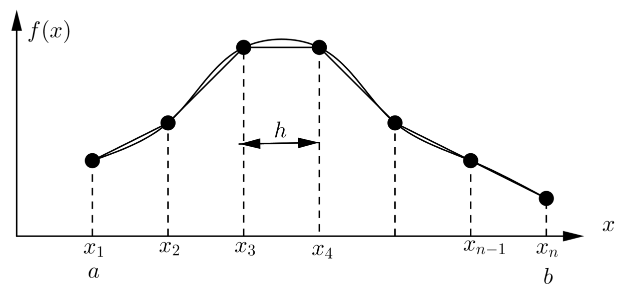


Figura 3: Regla de Trapecio compuesta

donde $\overline{f''}$ es la media aritmética de las segundas derivadas. Si $f''(x)$ es continua, debe de haber un punto ε en (a, b) en el cual $\overline{f''} = f''(\varepsilon)$, nos permite escribir

$$\sum_{i=1}^{n-1} f''(\varepsilon_i) = (n-1)\overline{f''} = \frac{b-a}{h}f''(\varepsilon)$$

Por lo tanto,

$$E = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\varepsilon).$$

2.1.2. Regla del Trapecio Recursiva

Sea I_k la integral evaluada con la regla del trapecio compuesta usando 2^{k-1} paneles. Note que si k es incrementado en uno, el número de paneles se duplica. Usando la notación $H = b - a$ obtenemos de la ecuación (5) los siguientes resultados para $k = 1, 2$ y 3.

$k = 1$ (1 panel):

$$I_1 = [f(a) + f(b)]\frac{H}{2}$$

$k = 2$ (2 paneles):

$$I_2 = \left[f(a) + 2f\left(a + \frac{H}{2}\right) + f(b)\right]\frac{H}{4} = \frac{1}{2}I_1 + f\left(a + \frac{H}{2}\right)\frac{H}{2}$$

$k = 1$ (4 paneles):

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \left[f(a) + 2f\left(a + \frac{H}{4}\right) + 2f\left(a + \frac{H}{2}\right) + 2f\left(a + \frac{3H}{4}\right) + f(b) \right] \frac{H}{8} \\
&= \frac{1}{2} I_2 + \left[f\left(a + \frac{H}{4}\right) + f\left(a + \frac{3H}{4}\right) \right] \frac{H}{4}
\end{aligned}
$$

Podemos ver que para cualquier $k > 1$ tenemos que

$$
I_k = \frac{1}{2} I_{k-1} + \frac{H}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \frac{(2i-1)H}{2^{k-1}}\right), \quad k = 2, 3, \ldots \tag{6}
$$

que es la *regla del trapecio recursiva*. Observe quye la suma contiene solamente los nuevos nodos que son creados cuando el número de paneles se duplica. Además, el cálculo de la secuencia $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_k$ de la ecuación (6) involucran la misma cantidad de álgebra que la ecuación (5). La ventaja del uso de la regla del trapecio recursiva es que nos permite controlar la convergencia y terminar el proceso cuando la diferencia entre I_{k-1} y I_k se vuelve lo suficientemente pequeña.

2.1.3. Algoritmo Regla del Trapecio recursiva

La función trapezoid calcula $I(h)$, dado $I(2h)$ de la ecuación (6). Podemos calcular $\int_a^b f(x)dx$ llamando a trapezoid repetidamente con $k = 1, 2, \ldots$ hasta que se logra la precisión deseada

```
function Ih = trapezoid(func,a,b,I2h,k)
% Regla del Trapecio recursiva.
%USAGE: Ih = trapezoid(func,a,b,I2h,k)
% func = funcion que maneja el integrando.
% a,b = limites de integracion.
% I2h = integral con 2^(k-1) paneles.
% Ih = integral con 2^k paneles.

if k == 1
        fa = feval(func,a); fb = feval(func,b);
        Ih = (fa + fb)*(b - a)/2.0;
else
        n = 2^(k-2 );   % Numero de puntos nuevos
        h = (b - a)/n ; % Espaciado de nuevos puntos
        x = a + h/2.0; % Coord. del 1er punto nuevo
        sum = 0.0;
        for i = 1:n
                fx = feval(func,x);
                sum = sum + fx;
                x = x + h;
        end
        Ih = (I2h + h*sum)/2.0;
end
```

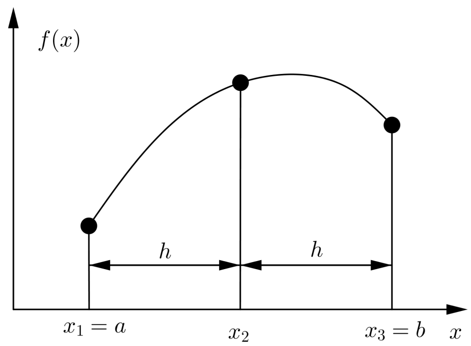


Figura 4: Regla de Simpson 1/3

2.2. La regla de Simpson

Las regla de Simpson 1/3 puede ser obtenida de las fórmulas de Newton-Cotes con $n = 3$ esto es, haciendo una interpolación parabólica a través de tres nodos adyacentes, como se muestra en la figura (4). El área bajo la parábola, que representa una aproximación de $\int_a^b f(x)dx$, es

$$I = \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \frac{h}{3}$$

Para obtener la *regla de simpson 1/3 compuesta*, el rango de integración (a, b) es dividido en $n-1$ paneles (n impar) de tamaño $h = (b-a)/(n-1)$ cada uno, como se ve en la figura (5). Aplicando la ecuación anterior a dos paneles adjuntos, tenemos

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx [f(x_i) + 4f(x_{i+1} + f(x_{i+2}))] \frac{h}{3}$$

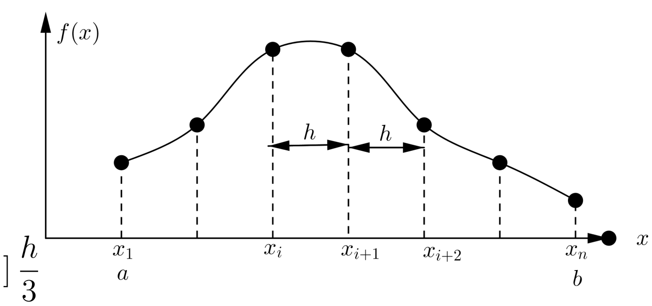


Figura 5: Regla de Simpson 1/3 compuesta

Sustituyendo en la ecuación:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_1}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1,3,\ldots}^{n-2} \left[\int_{x_1}^{x_{i+2}} f(x)dx \right]$$

llevandonos a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \approx I = [f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \cdots \\ \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \frac{h}{3} \end{aligned} \tag{7}$$

La regla de simpson 1/3 compuesta en la ecuación (7) es quizás conocido como el mejor método de integración numérica. Su reputación es de hecho inmerecida, ya que la regla del trapecio es más robusta, y la integración de Romberg más eficiente.

El error en la regla de Simpson es

$$E = \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\varepsilon)$$

de donde concluimos que que la ecuación (7) es exacta si $f(x)$ es un polinomio de grado tres o menor.

La regla de Simpson 1/3 requiere que el número de paneles sea par. Si esta condición no se cumple, podemos integrar sobre los primeros (o últimos) tres paneles con la *regla de Simpson 3/8*:

$$I = [f(x_1) + 3f(x_2) + 3f(x_3) + f(x_4)]\frac{3h}{8} \tag{8}$$

y usar la regla de Simpson 1/3 para los restantes paneles.

Ejemplo 2.1. Evalué los límites de $\int_0^\pi \sin(x)dx$ con la regla del trapecio compuesta usando (a) ocho paneles y (b) usando dieciséis paneles.

Solución parte (1) Con 8 paneles hay 9 nodos espaciados a $h = \pi/8$. Las abscisas de los nodos son $x_i = (i-1)\pi/8$, $i = 1, 2, \ldots, 9$. De las ecuación (5) obtenemos

$$I = \left[\sin 0 + 2\sum_{i=1}^{7} \sin\frac{i\pi}{8} + \sin\pi\right]\frac{\pi}{16} = 1.974231602$$

El error está dado por

$$E = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\varepsilon) = -\frac{(\pi-0)(\pi/8)^2}{12}(-\sin\varepsilon) = \frac{\pi^3}{768}\sin\varepsilon$$

donde $0 < \varepsilon < \pi$. Ya que no sabemos el valor de ε, no podemos evaluar E, pero podemos determinar sus límites:

$$E_{\text{mín}} = \frac{\pi^3}{768}\sin(0) = 0 \qquad E_{\text{máx}} = \frac{\pi^3}{768}\sin(\frac{\pi}{2}) = 0.040372756$$

Por lo tanto, $I + E_{\text{mín}} < \int_0^\pi \sin(x)dx < I + E_{\text{máx}}$, o

$$1.974231602 < \int_0^\pi \sin(x)dx < 2.014604358$$

La integral exacta es por supuesto 2.

Solución parte (2) Los nuevos nodos creados por duplicar los paneles son localizados en los puntos medios de los antiguos paneles. Sus abscisas son

$$x_j = \frac{\pi}{16} + (j-1)\frac{\pi}{8} = (2j-1)\frac{\pi}{8},\ \ j = 1, 2, \ldots, 8$$

Usando la regla del trapecio recursiva, obtenemos

$$I = \frac{1.974231602}{2} + \frac{\pi}{16}\sum_{j=1}^{8}\sin\frac{(2j-1)\pi}{16} = 1.993570344$$

Y los límites del error se vuelven (note que el error se divide por 4 al dividir h en dos) $E_{\text{mín}} = 0$ y $E_{\text{máx}} = 0.010093189$. De aquí

$$1.993570344 < \int_0^\pi \sin(x)dx < 2.003663533$$

Ejemplo 2.2. Estime $\int_0^{2.5} f(x)dx$ de los datos

x	0	0.5	1	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	1.5000	2.0000	2.0000	1.6364	1.2500	0.9565

Solución Usaremos las reglas de Simpson, ya que son más precisas que la regla del trapecio. Debido a que el número de paneles es impar, calculamos la integral sobre los primeros tres paneles por la regla de 3/8 de Simpson, y usamos la regla 1/3 para los dos últimos paneles:

$$\begin{aligned} I &= [f(0) + 3f(0.5) + 3f(1) + f(1.5)]\frac{3(0.5)}{8} \\ &+ [f(1.5) + 4f(2) + f(2.5)]\frac{0.5}{3} \\ &= 2.8381 + 1.2655 = 4.1036 \end{aligned} \tag{9}$$

Ejemplo 2.3. Use la regla del trapecio recursiva para evaluar $\int_0^{\pi} \sqrt{x}\cos x dx$ a seis cifras decimales. ¿Cuántas evaluaciones en la función son requeridas para obtener este resultado?

Solución. El programa enumerado a continuación utiliza la función trapezoid. Además del valor de la integral, muestra el número de evaluaciones de la función utilizadas en el cálculo

```
% Ejemplo 1.2 (Regla del trapecio recursiva)
format long       % Muestra extra precision
I2h = 0;
for k = 1:20
        Ih = trapezoid(@fej6_4,0,pi,I2h,k);
        if (k > 1 && abs(Ih - I2h) < 1.0e-6)
                Integral = Ih
                No_de_evaluaciones = 2^(k-1) + 1
                return
        end
        I2h = Ih;
end
error('Muchas iteraciones')
```

El archivo M que contiene a la función del integrando es

```
function y = fej6_4_1(x)
% Funcion usada en Ejemplo 1.2
y = 2(x^2)*cos(x^2);
```

Los resultados son:

```
Integral =
  -0.894831664853286
No_de_evaluaciones =
         32769
```

Redondeando a seis cifras decimales, tenemos que $\int_0^{\pi} \sqrt{x}\cos x dx = -0.894832$. El número de evaluaciones es inusualmente grande en este problema. La lentitud en la convergencia es el resultado de las derivadas de $f(x)$ cerca de la singularidad $x = 0$. Dificultades de esta naturaleza pueden a veces remediarse por un cambio de variables. En este caso, si introducimos $t = \sqrt{x}$, entonces $dt = dx/(2\sqrt{x}) = dx/(2t)$, o $dx = 2tdt$. Entonces

$$\int_0^{\pi} \sqrt{x}\cos x dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2t^2 \cos t^2 dt$$

La evaluación de la integral del lado derecho requiere 4097 evaluaciones en la función.

3. Integración de Romberg

La integración de Romberg es una técnica diseñada para obtener integrales numéricas de funciones de manera eficiente. Es muy parecida a las técnicas analizadas en las fórmulas de Newton-Cotes, en el sentido de que se basa en aplicaciones sucesivas de la regla del trapecio. Sin embargo, a través de las manipulaciones matemáticas, se alcanzan mejores resultados con menos trabajo.

La integración de Romberg combina la regla del trapecio compuesta con la Extrapolación de Rihchardson. Primero introduzcamos la notación

$$R_{i,1} = I_i$$

donde, como antes, I_i representa la aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ calculada por la regla del trapecio recursiva usando 2^{i-1} paneles. Recordemos que el error en esta aproximación es $E = c_1h^2 + c_2h^4 + \cdots$, donde

$$h = \frac{b-a}{2^{i-1}}$$

es el tamaño de un panel.

La integración de Romberg inicia con el cálculo de $R_{1,1} = I_1$ (un panel) y $R_{2,1} = I_2$ (dos paneles) de la regla del trapecio. El error principal en este cálculo es c_1h^2 es eliminado por extrapolación de Rihchardson. Usando $p = 2$ (el exponente en el término del error) y denotando a $R_{2,2}$, obtenemos

$$R_{2,2} = \frac{2^2 R_{2,1} - R_{1,1}}{2^2 - 1} = \frac{4}{3}R_{2,1} - \frac{1}{3}R_{1,1}$$

Es conveniente almacenar los resultados en un arreglo en la forma

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & \\ R_{2,1} & R_{2,2} \end{bmatrix}$$

El siguiente paso será calcular $R_{3,1} = I_3$ (cuatro paneles) y repetir extrapolación de Richardson con $R_{2,1}$ y $R_{3,1}$, almacenando el resultado como $R_{3,2}$:

$$R_{3,2} = \frac{4}{3}R_{3,1} - \frac{1}{3}R_{2,1}$$

los elementos calculados hasta ahora son

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & \\ R_{2,1} & R_{2,2} \\ R_{3,1} & R_{3,2} \end{bmatrix}$$

Ambos elementos en la segunda columna tienen un error de la forma c_2h^4, el cual también puede ser eliminado con extrapolación de Richardson. Usando $p = 4$, obteniendo

$$R_{3,3} = \frac{2^4 R_{3,2} - R_{2,2}}{2^4 - 1} = \frac{16}{15}R_{3,2} - \frac{1}{15}R_{2,2}$$

Este resultado tiene un error de $\mathcal{O}(h^6)$. El arreglo ahora se extiende hasta

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} \end{bmatrix}$$

Después de otra ronda de cálculos obtendríamos

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} \end{bmatrix}$$

donde el error en $R_{4,4}$ es $\mathcal{O}(h^8)$. Note que el estimado más preciso de la integral es siempre el último término en la diagonal. Este proceso es continuado hasta que la diferencia entre dos términos sucesivos en diagonal se vuelvan suficientemente pequeños. La extrapolación general usada en este esquema es

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1} R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, \; i > 1, j = 2, 3, \ldots, i$$

El arreglo triangular es conveniente para cálculos manuales, pero la implementación computacional del algoritmo de Romberg puede ser ejecutado en un arreglo unidimensional. Después de la primera extrapolación $R_{1,1}$ nunca es utilizado otra vez, entonces este puede ser reemplazado por $R_{2,2}$. Como resultado, tendremos el arreglo

$$\begin{bmatrix} r_1 = R_{2,2} \\ r_2 = R_{2,1} \end{bmatrix}$$

En la segunda extrapolación, $R_{3,2}$ reescribe a $R_{2,1}$ y $R_{3,3}$ reemplaza a $R_{2,2}$, y ahora el arreglo contiene

$$\begin{bmatrix} r_1 = R_{3,3} \\ r_2 = R_{3,2} \\ r_3 = R_{3,1} \end{bmatrix}$$

y así sucesivamente. De esta manera, r_1 contiene siempre el mejor resultado actual. La fórmula de extrapolación para la ronda k-ésima es

$$r_j = \frac{4^{k-j} r_{j+1} - r_j}{4^{k-j} - 1}, \;\; j = k-1, k-2, \ldots, 1$$

3.1. Algoritmo de Romberg

El algoritmo para la integración de Romberg es implementada en la función romberg. Este regresa el valor de la integral y el número de evaluaciones en la función. La extrapolación de Richardson es realizada por la subfunción richardson.

```
function [I,numEval] = romberg(func,a,b,tol,kMax)
% Integracion de Romberg.
%USAGE: [I,numEval] = romberg(func,a,b,tol,kMax)
%INPUT:
% func = funcion que maneja el integrando.
% a,b = limites de integracion.
% tol = error de tolerancia (default es 1.0e-8).
% kMax = limite en el numero de duplicaciones de paneles
% (default es 20).
%OUTPUT:
% I = valor de la integral.
% numEval = numero de evaluaciones en la funcion.
```

```
if nargin < 5; kMax = 20; end
if nargin < 4; tol = 1.0e-8; end
r = zeros(kMax);
r(1) = trapezoid(func,a,b,0,1);
rOld = r(1);
for k = 2:kMax
        r(k) = trapezoid(func,a,b,r(k-1),k);
        r = richardson(r,k);
        if abs(r(1) - rOld) < tol
                numEval = 2^(k-1) + 1; I = r(1);
                return
        end
rOld = r(1);
end
error('Convergencia Falla')

function r = richardson(r,k)
% Extrapolacion de Richardson.
for j = k-1:-1:1
        c = 4^(k-j); r(j) = (c*r(j+1) - r(j))/(c-1);
end
```

Ejercicios Resueltos

Ejemplo 3.1. Use la integración de Romberg para evaluar $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x^2 \cos x^2 dx$ y compare el resultado con el Ejemplo 1.2.

Solución

```
format long
[Integral,numEval] = romberg(@fej1_3,0,sqrt(pi))
Integral =
  -0.894831469484157
numEval =
   129
```

Aquí el archivo M que define a la función a integrar es

```
function y = fej1_3(x)
% Function useda en Ejemplo 1.3
y = 2*(x^2)*cos(x^2);
```

Es claro que la integración de Romberg es considerablemente más eficiente que la regla del trapecio. Esta requiere 129 evaluaciones en la función comparadas con las 4097 evaluaciones de la regla del trapecio compuesta del ejemplo 1.3.

Problema 3.1. Integre la función siguiente en forma analítica y con el empleo de la regla del trapecio, con $n = 1, 2, 3$ y 4:

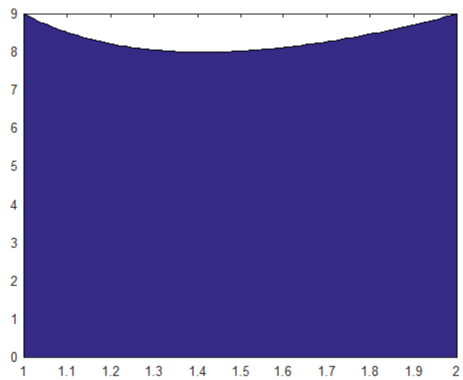
$$\int_1^2 (x + 2/x)^2 dx.$$

Use la solución analítica para calcular los errores relativos porcentuales verdaderos para evaluar la exactitud de las aproximaciones de la regla del trapecio.

Solución. Veamos primeramente que lo que nos piden es evaluar el área bajo la curva de $f(x) = (x + 2/x)^2$. Analicemos su gráfica:

```
x=linspace(1,2,100);
y=(x+2./x).^2;
area(x,y)
```

Y el resultado es:



Si $n = 1$, tendremos que, aproximamos el área mediante el trapecio generado bajo la línea:

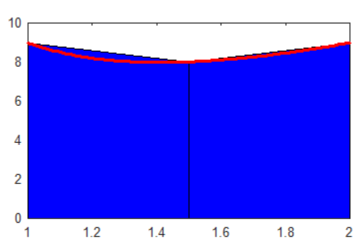
x	$f(x)$
$a = 1$	9
$b = 2$	9

Según la fórmula de la regla del trapecio tendremos que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)$$

$$\int_1^2 (x + 2/x)^2 dx \approx \frac{9 + 9}{2}(2 - 1) = 9$$

Si $n = 2$, entonces tendremos que considerar dos intervalos dentro del intervalo de integración que para nuestro problema es de 1 a 2 (límites de integración), gráficamente, será aproximar el área mediante dos trapecios:



x	$f(x)$
$a = 1$	9
1.5	8.027777778
$b = 2$	9

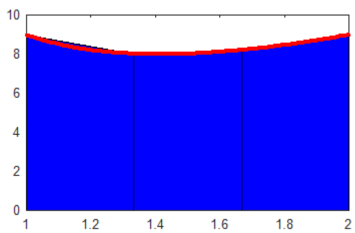
Según la fórmula de la regla del trapecio tendremos que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx [f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1} + f(x_n))]\,\frac{h}{2}$$

De la fórmula anterior concluiremos lo siguiente, para aproximar el área vamos a dividir el intervalo de integración en segmentos de longitud h, y además necesitamos hacer evaluaciones en la función, para el caso $n = 2$ se necesitan 3 evaluaciones en la función, a saber: $f(1)$, $f(1.5)$ y $f(2)$. Observe que la función evaluada en los límites de integración tiene coeficiente 1 en la fórmula, mientras que los demás tienen coeficiente 2.

$$\int_1^2 (x + 2/x)^2 \approx [f(1) + 2f(1.5) + f(2))] \,\frac{0.5}{2} = 8.513888889.$$

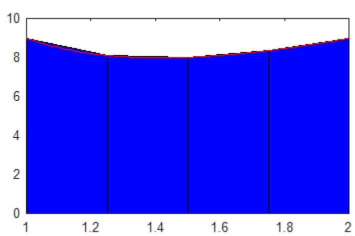
Si $n = 3$, aproximaremos el área mediante tres trapecios, para este caso $h = (2 - 1)/3 = 0.333333333$, gráficamente tenemos:



x	$f(x)$
$a = 1$	9
$\frac{4}{3}$	8.027777778
$\frac{5}{3}$	8.217777778
$b = 2$	9

$$\int_1^2 (x + 2/x)^2 \approx \left[f(1) + 2f(\frac{4}{3}) + 2f(\frac{5}{3}) + f(2))\right] \frac{1/3}{2} = 8.415185185.$$

Si $n = 4$, aproximaremos el área mediante cuatro trapecios, para este caso $h = (2 - 1)/4 = 0.25$, gráficamente tenemos:



x	$f(x)$
$a = 1$	9
1.25	8.1225
1.5	8.027777778
1.75	8.368622449
$b = 2$	9

$$\int_1^2 (x + 2/x)^2 \approx [f(1) + 2f(1.25) + 2f(1.5) + 2f(1.75) + f(2))] \,\frac{1/4}{2} = 8.379725057.$$

Por otro lado si analizamos analíticamente tendremos que:

$$\int_1^2 (x + 2/x)^2 dx = \int_1^2 (x^2 + 4 + 4x^{-2})dx = \left[\frac{x^3}{3} + 4x - \frac{4}{x}\right]_1^2 = (\frac{2^3}{3} + 4\cdot 2 - \frac{4}{2}) - (\frac{1^3}{3} + 4\cdot 1 - \frac{4}{1})$$
$$= \frac{26}{3} - \frac{1}{3} = \frac{25}{3} = 8.333333333$$

Si calculamos los errores relativos porcentuales tendremos:

n	I_n	ε_t
1	9	8 %
2	8.513888889	2.1667 %
3	8.415185185	0.9822 %
4	8.379725057	0.5567 %

Comentarios. Es claro que podemos realizar todos estos cálculos directamente en un archivo M. Por ejemplo, si construimos[1] una función llamada *trapecio* que pedirá, una función manejable del integrando, los limites de integración y la cantidad de paneles.

```
function Integral=trapecio(f,a,b,n)
x=linspace(a,b,n+1);
fx=zeros(1,n+1);
for i=1:n+1
        fx(i)=feval(f,x(i));
end
coeficientes=2*ones(n+1,1);
coeficientes(1)=1;
coeficientes(n+1)=1;
Integral=fx*coeficientes*(b-a)/(2*n);
```

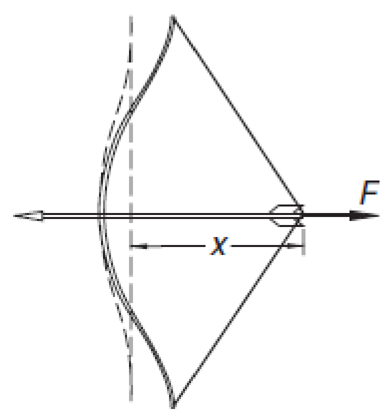
Tendremos así una función que calcula las aproximaciones, para el caso $n = 4$.

```
format long
trapecio(@(x) (x+2/x)^2,1,2,4)
ans =
    8.379725056689342
```

Ejemplo 3.2. La tabla a continuación da el tirón F del arco en función del estiramiento x. Si el arco es estirado 0.5 m, determine la velocidad de la flecha de 0.075 kg cuando sale del arco. Sugerencia: la energía cinética de la flecha es igual al trabajo realizado al dibujar el arco; es decir, $mv^2/2 = \int_0^{0.5} F dx$.

x (m)	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
F (N)	0	37	71	104	134	161	185	207	225	239	250

Solución. Veamos que hay 11 nodos, por tanto, podemos construir 10 paneles. Para más exactitud utilizaremos la regla de Simpson 1/3.



Luego

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[f(x_0) + 4\sum_{1,3,\ldots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,\ldots}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right] \frac{b-a}{3n}$$

Para nuestro problema, tenemos que $a = 0$, $b = 0.5$, el número de paneles es 10 y también los valores de x están equiespaciados. Por tanto:

$$\int_0^{0.5} F dx \approx \left[0 + 4\underbrace{(37 + 104 + 161 + 207 + 239)}_{f(x_i) \text{ con } i \text{ impar}} + 2\underbrace{(71 + 134 + 185 + 225)}_{f(x_i) \text{ con } i \text{ par}} + 250 \right] \frac{0.5 - 0}{3 \cdot 10}$$

$$\int_0^{0.5} F dx \approx 74.533333333$$

[1]Existen muchas maneras de construir esta función y se puede modificar la forma en que se piden los datos al usuario

Ahora para calcular la velocidad[2] de salida de la flecha:

$$v = \sqrt{\frac{2I}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 74.5\overline{3}}{0.075}} = 44.582009326.$$

Supongamos ahora que deseamos construir un programa[3] para calcular la integral dado los nodos

```
function Integral = simpson1_3(X,Y)
n = length(X);
coeficientes=ones(n,1);
for i=2:2:n-1
coeficientes(i)=4;
end
for i=3:2:n-1
coeficientes(i)=2;
end
Integral = Y*coeficientes*(X(n)-X(1))/((n-1)*3);
```

Así, podemos evaluar por la regla de Simpson 1/3 usando el comando:

```
simpson1_3([0 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30 0.35 0.40 0.45
    0.50],[0 37 71 104 134 161 185 207 225 239 250])
ans =
74.5333
```

Problema 3.2. Use un programa para evaluar

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

con integración de Romberg. Sugerencia: use la transformación $\sin x = t^2$.

Solución. Haciendo $t^2 = \sin x$, de donde $2tdt = \cos x dx$, de donde $dx = \frac{2tdt}{\cos x}$ pero como $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - t^4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}} \frac{2dt}{\sqrt{1 - t^4}}$$

Con el algoritmo romberg ya escrito ejecutamos:

```
format long
[Integral, numEval] = romberg(@fej7_5_3,0,2^(-0.25))
Integral =
    1.791161338113342
numEval =
    129
```

[2] Las unidades de medida para la velocidad calculada son m/s.

[3] Supuestos: X e Y deben ser vectores fila y además los valores de X son equiespaciados.

Problemas Propuestos

Problema 3.3. Evalúe la integral siguiente:

$$\int_0^4 (1 - e^{-2x})dx$$

a) en forma analítica, b) con una sola aplicación de la regla del trapecio, c) con aplicación de la regla del trapecio compuesta, con $n = 2$ y 4, d) con una sola aplicación de la regla de Simpson 1/3, e) con la aplicación múltiple de Simpson 1/3, con $n = 4$, f) con una sola aplicación de la regla de Simpson 3/8. Para los incisos del b) al f), determine el error relativo porcentual de cada una de las estimaciones numéricas, con base al resultado del inciso a).

Problema 3.4. Integre la función siguiente tanto en forma analítica como numérica. Emplee las reglas del trapecio y de Simpson 1/3 para integrar numéricamente la función. Para ambos casos, utilice la versión múltiple, con 4 paneles. Calcule los errores relativos porcentuales para los resultados numéricos.

$$\int_0^3 x^2 e^x dx$$

Problema 3.5. Use la regla del trapecio recursiva para evaluar $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)dx$. Explique los resultados.

Problema 3.6. Evalué $\int_{-1}^{1} \cos(2\cos^{-1} x)dx$ con la regla de Simpson 1/3 usando 2, 4 y 6 paneles. Explique los resultados.

Problema 3.7. Estime $\int_0^{\pi} f(x)dx$ tan preciso como sea posible, donde $f(x)$ es definido por los datos

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	1.0000	0.3431	0.2500	0.3431	1.0000

Problema 3.8. Evalúe

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

con integración de Romberg. *Pista:* use la transformación de variables para eliminar la indeterminación en $x = 0$.

Problema 3.9. Un estudio de ingeniería del transporte requiere que usted determine el número de autos que pasan por una intersección cuando viajan durante la hora pico de la mañana. Usted se para al lado de la carretera y cuenta el número de autos que pasan cada cuatro minutos a varias horas, como se muestra en la tabla a continuación. Utilice el mejor método numérico para determinar a) el número total de autos que pasan entre las 7:30 y las 9:15, y b) la tasa de autos que cruzan la intersección por minuto. (Recomendación: tenga cuidado con las unidades.)

Tiempo (h)	7:30	7:45	8:00	8:15	8:45	9:15
Tasa (autos por 4 min)	18	24	14	24	21	9

Problema 3.10. La tabla muestra la potencia P aplicada a las ruedas de un auto como función de la velocidad v. Si la masa del auto es $m = 2000kg$, determine el tiempo Δt que le toma al auto acelerar de 1 m/s a 6 m/s. Use la regla del trapecio para la integración. *Pista:*

$$\Delta t = m \int_{1s}^{6s} (v/P)dv$$

la cual puede ser derivada de la Ley de Newton $F = m(dv/dt)$ y la definición de potencia $P = Fv$.

v (m/s)	0	1.0	1.8	2.4	3.5	4.4	5.1	6.0
P (KW)	0	4.7	12.2	19.0	31.8	40.1	43.8	43.2

Problema 3.11. Desarrolle un programa de computadora amigable para el usuario para la aplicación múltiple de la regla del trapecio.

Problema 3.12. Desarrolle un programa de computadora amigable para el usuario a fin de integrar datos espaciados en forma desigual.