Objetivo: Obtener una aproximación exterior de una función de mejor *calidad* que la entregada por la técnica del estado de arte basada en Taylor.

Idea: Combinar dos linealizaciones de Taylor: 1) usando las esquinas (X-Taylor) y 2) en cualquier punto de la función (por ejemplo el punto medio), de manera de construir un hiperplano que pase a través de la intersección de las dos linealizaciones.

1 Linealización en una dimensión

1.1 Paso 1: Realizar la linealización de X-Taylor

Sea $f(x) \leq 0$ una restricción univariada definida en el intervalo $\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$. Primero, realizamos la linealizacion de X-Taylor, usando como punto de expansión las esquinas de $\boldsymbol{x}$, obteniendo las siguientes dos rectas (ver Figura 1):

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(\underline{x}) + \underline{\tfrac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} \cdot (x - \underline{x}) \quad \leq f(x) \\ f_2(x) &= f(\overline{x}) + \overline{\tfrac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} \cdot (x - \overline{x}) \quad \leq f(x) \end{aligned} \tag{1}$$

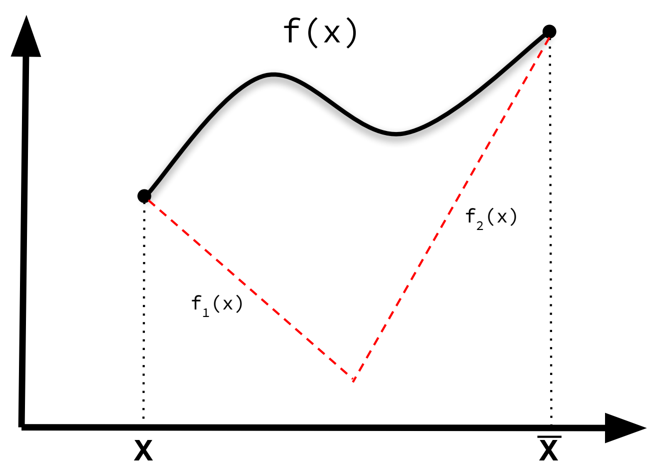

Figure 1: Construcción de f_1 y f_2 (líneas rojas) usando la linealización de X-Taylor en los puntos extremos

1.2 Paso 2: Utilizar Taylor en el punto $\hat{\boldsymbol{x}}$

Continuando con la técnica, ahora aplicamos Taylor utilizando como punto de expansión $\hat{x}$ ($\underline{x} < \hat{x} < \overline{x}$), obteniendo (ver Figura 2):

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \overline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} \cdot (x - \hat{\boldsymbol{x}}) &\leq f(x) \quad &, \text{if } x \leq \hat{\boldsymbol{x}} \\ f_4(x) &= f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \underline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} \cdot (x - \hat{\boldsymbol{x}}) &\leq f(x) \quad &, \text{if } x \geq \hat{\boldsymbol{x}} \end{aligned} \tag{2}$$

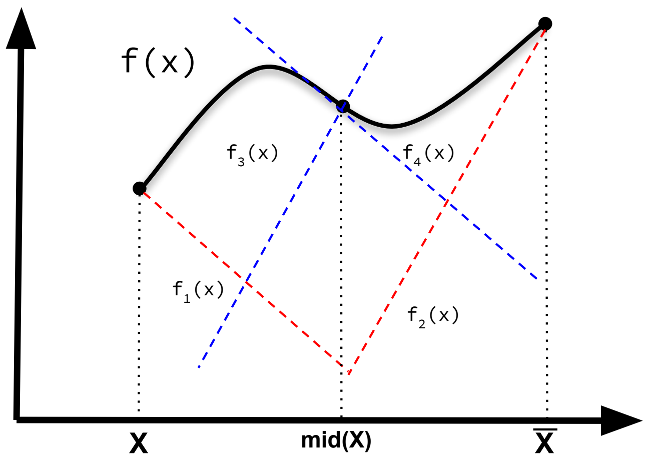

Figure 2: Construcción de f_3 y f_4 (líneas azules) por Taylor en el punto $\hat{\boldsymbol{x}}$

1.3 Paso 3: Encontrar los puntos de intersección

Sea x_1 (respectivamente x_2) el punto de intersección entre $f_1(x)$ and $f_3(x)$ (respectivamente entre $f_2(x)$ y $f_4(x)$). Para encontrar estos puntos (ver Figura 3), necesitamos resolver el sistema combinando (1) y (2), donde $f_1(x_1) = f_3(x_1)$ (respectivamente $f_2(x_2) = f_4(x_2)$). El sistema se define a continuación:

$$\begin{cases} f(\underline{x}) + \underline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} \cdot (x_1 - \underline{x}) &= f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \overline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} \cdot (x_1 - \hat{\boldsymbol{x}}) \\ \\ f(\overline{x}) + \overline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} \cdot (x_2 - \overline{x}) &= f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \underline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} \cdot (x_2 - \hat{\boldsymbol{x}}) \end{cases} \tag{3}$$

Aislando x_1 de la primera ecuación de (3) se obtiene:

$$f(\underline{x}) + x_1 \underline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} - \underline{x}\,\underline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} = f(\hat{\boldsymbol{x}}) + x_1 \overline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} - \hat{\boldsymbol{x}}\,\overline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})}$$

$$x_1 \underline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} - x_1 \overline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} = f(\hat{\boldsymbol{x}}) - f(\underline{x}) + \underline{x}\,\underline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} - \hat{\boldsymbol{x}}\,\overline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})}$$

$$\rightarrow \qquad x_1 = \frac{f(\hat{\boldsymbol{x}}) - f(\underline{x}) + \underline{x}\,\underline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} - \hat{\boldsymbol{x}}\,\overline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})}}{\underline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} - \overline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})}}$$

Respectivamente para x_2 se obtiene:

$$x_2 = \frac{f(\hat{\boldsymbol{x}}) - f(\overline{x}) + \overline{x}\,\overline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} - \hat{\boldsymbol{x}}\,\underline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})}}{\overline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})} - \underline{\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\boldsymbol{x})}}$$

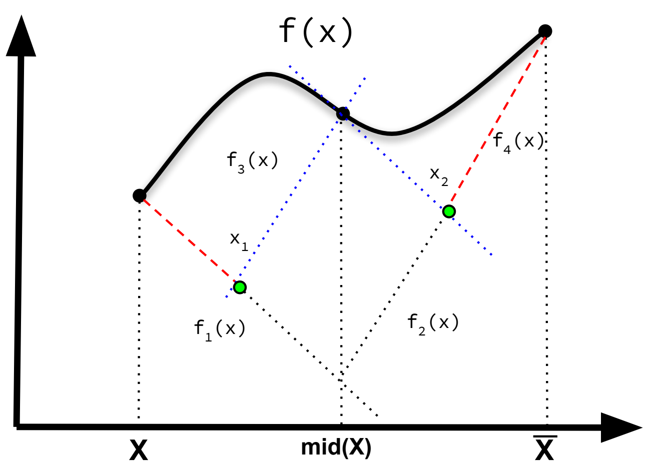

Figure 3: Puntos de intersección entre dos linealizaciones basadas en Taylor

1.4 Paso 4: Construir una línea recta entre los dos puntos previos

Ahora podemos contruir la línea recta que pasa a través de los puntos $(x_1, f_1(x_1)$ y $(x_2, f_2(x_2)$. Llamemos a $f_5(x)$ a esta función (ver Figura 4), entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
f_5(x) - f_1(x_1) &= \tfrac{f_2(x_2)-f_1(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) \\
f_5(x) &= \tfrac{f_2(x_2)-f_1(x_1)}{x_2-x_1}x - \tfrac{f_2(x_2)-f_1(x_1)}{x_2-x_1}x_1 + f_1(x_1)
\end{aligned} \tag{4}
$$

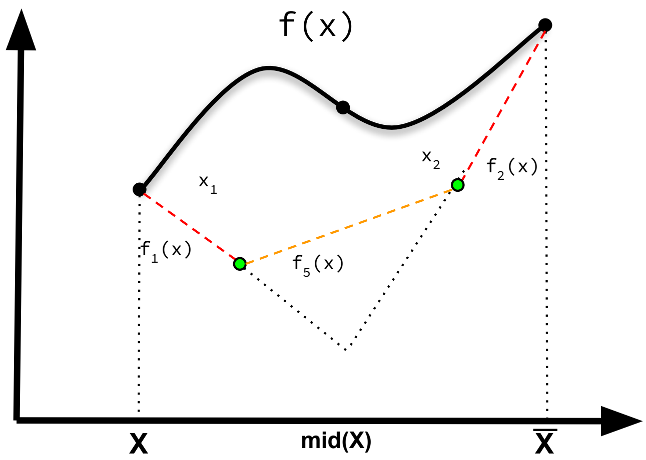

Figure 4: Puntos de intersección entre las dos linealizaciones de Taylor

Finalmente, en la Figura 5 podemos ver una comparación entre ambas linealizaciones. Notar que ambas linealizaciones son convexas.

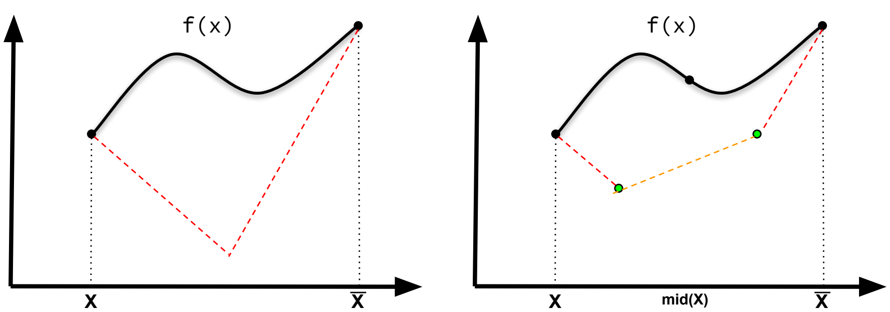

Figure 5: Linealizaciones exteriores utilizando formas de Taylor. (izquierda) Generada por Taylor utilizando los extremos, (derecha) generada por XM-Taylor

1.5 Ejemplo

Sea $f(x_1) = x_1^3 - x_1^2 + 2$ una función univariada, definida en $\boldsymbol{x}_1 = [-1, 1.5]$ (Ver Figura 6).

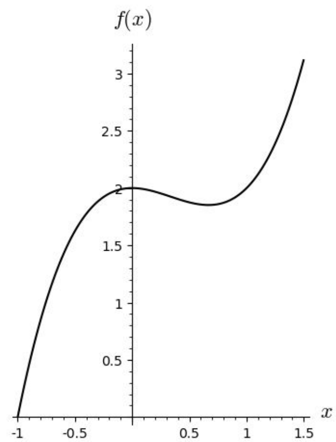

Figure 6: Gráfica de la función $f(x) = x_1^3 - x_1^2 + 2$

La gráfica utilizando X-Taylor en los puntos extremos y expandiendo en $\hat{\boldsymbol{x}}$ =mid($\boldsymbol{x}$) puede verse en la Figura 1.5.

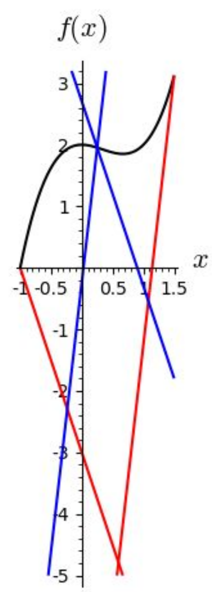

Figure 7: Multiples linealizaciones de $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ utilizando Taylor

Utilizando la técnica, primero calculamos los puntos x_1 y x_2:

$$x_1 = \frac{1.953125 - 1 \cdot -3 - 0.25 \cdot 8.75}{-3 - 8.75}$$
$$x_1 = -0.235372340425532$$

$$x_2 = \frac{1.953125 - 3.125 + 1.5 \cdot 8.75 - 0.25 \cdot -3}{8.75 + 3}$$
$$x_2 = 1.081117021276596$$

Adicionalmente calculamos la evaluación de estos puntos:

$$f(x_1) = -2.29388297872$$

$$f(x_2) = -0.54022606383$$

Finalmente calculamos las rectas que pasan a través de estos puntos. Primero calculamos la pendiente $m = 1.33207$, y la recta estaría definida por:

$$\begin{aligned} f_5(x) &= 1.33207x - 1.33207 \cdot -0.235372340425532 - 2.29388297872 \\ f_5(x) &= 1.33207x - 1.9803505 \end{aligned}$$

La gráfica de esta línea esta dada en la Figura 8, en verde.

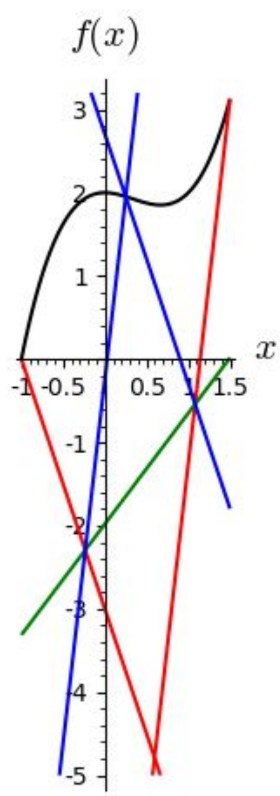

Figure 8: Linealización utilizando nuestra técnica

2 Linealización en dos dimensiones

2.1 Paso 1: Realizar la linealización de X-Taylor

Sea $f(x_1, x_2)$ una función. Como en el caso previo, escribimos ambas linealizaciones de Taylor en las esquinas de la caja $\boldsymbol{x}$ (osea para $(\underline{x_1}, \underline{x_2})$ y $(\overline{x_1}, \overline{x_2})$), obteniendo:

$$\mathrm{XT}^-(x_1, x_2) = f(\underline{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{2} \underline{a_i(\boldsymbol{x})} \cdot (x_i - \underline{x_i}) \leq f(x_1, x_2) \tag{5}$$

$$\mathrm{XT}^+(x_1, x_2) = f(\overline{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{2} \overline{a_i(\boldsymbol{x})} \cdot (x_i - \overline{x_i}) \leq f(x_1, x_2) \tag{6}$$

2.2 Paso 2: Utilizar Taylor en el punto $\hat{\boldsymbol{x}}$

Ahora utilizamos Taylor en el punto $\hat{\boldsymbol{x}}$, obteniendo las siguientes ecuaciones:

$$\mathrm{XM}^+(x_1, x_2) = f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{2} \overline{a_i(\boldsymbol{x})} \cdot (x_i - \hat{x}_i) \leq f(x_1, x_2) \tag{7}$$

$$\mathrm{XM}^-(x_1, x_2) = f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{2} \underline{a_i(\boldsymbol{x})} \cdot (x_i - \hat{x}_i) \leq f(x_1, x_2) \tag{8}$$

Notar que la ecuación (7) (respectivamente la ecuación (8)) es solo verdad en la esquina superior $\overline{x}$ (respectivamente en la esquina inferior $\underline{x}$).

2.3 Paso 3: Encontrar los rectas de intersección

A diferencia del caso univariado, la intersección ahora corresponderá a dos rectas. Para encontrar la primera recta L_1 necesitamos combinar las ecuaciones (5) y (7) (respectivamente (6) y (8)). Para escribir la igualdad entre $\mathrm{XT}^-(x_1, x_2)$ y $\mathrm{XM}^+(x_1, x_2)$, introducimos el parámetro real t_1:

$$\begin{cases} t_1 & = f(\underline{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{2} \underline{a_i(\boldsymbol{x})} \cdot (x_i - \underline{x_i}) \\ t_1 & = f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{2} \overline{a_i(\boldsymbol{x})} \cdot (x_i - \hat{x}_i) \end{cases} \tag{9}$$

Desarrollando (9) obtenemos[1]:

$$\begin{aligned} t_1 &= f(\underline{\boldsymbol{x}}) + \underline{a_1}x_1 + \underline{a_2}x_2 - \underline{a_1 x_1} - \underline{a_2 x_2} \\ t_1 &= f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2 - \overline{a_1}\hat{x}_1 - \overline{a_2}\hat{x}_2 \end{aligned} \tag{10}$$

Multiplicando la primera ecuación por $-\overline{a_1}$ y la segunda por $\underline{a_1}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} -\overline{a_1}t_1 &= -\overline{a_1}f(\underline{\boldsymbol{x}}) - \overline{a_1}\underline{a_1}x_1 - \overline{a_1}\underline{a_2}x_2 + \overline{a_1}\underline{a_1 x_1} + \overline{a_1}\underline{a_2 x_2} \\ \underline{a_1}t_1 &= \underline{a_1}f(\hat{\boldsymbol{x}}) + \underline{a_1}\overline{a_1}x_1 + \underline{a_1}\overline{a_2}x_2 - \underline{a_1}\overline{a_1}\hat{x}_1 - \underline{a_1}\overline{a_2}\hat{x}_2 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones pordemos eliminar la variable x_1, obteniendo lo siguiente:

$$(\underline{a_1} - \overline{a_1})t_1 = (\underline{a_1}\overline{a_2} - \overline{a_1}\underline{a_2})x_2 + \underline{a_1}f(\hat{\boldsymbol{x}}) - \overline{a_1}f(\underline{\boldsymbol{x}}) + \overline{a_1}\underline{a_1 x_1} + \overline{a_1}\underline{a_2 x_2} - \underline{a_1}\overline{a_1}\hat{x}_1 - \underline{a_1}\overline{a_2}\hat{x}_2 \tag{11}$$

Definamos $K_1 \in \mathbb{R}$ como sigue:

$$K_1 = \underline{a_1}f(\hat{\boldsymbol{x}}) - \overline{a_1}f(\underline{\boldsymbol{x}}) + \overline{a_1}\underline{a_1 x_1} + \overline{a_1}\underline{a_2 x_2} - \underline{a_1}\overline{a_1}\hat{x}_1 - \underline{a_1}\overline{a_2}\hat{x}_2 \tag{12}$$

Podemos reescribir la ecuación (11) usando (12):

$$(\underline{a_1} - \overline{a_1})x_3 = (\underline{a_1}\overline{a_2} - \overline{a_1}\underline{a_2})x_2 + K_1 \tag{13}$$

Luego para expresar x_2 en términos de t_1 usamos (13), obteniendo:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})t_1 - K_1}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} \\ x_2 &= \frac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}t_1 - \frac{K_1}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} \end{aligned} \tag{14}$$

De manera similar, para x_1 usamos la primera ecuación de (10), obteniendo:

$$\begin{aligned} x_3 &= f(\underline{\boldsymbol{x}}) + \underline{a_1}x_1 + \underline{a_2}x_2 - \underline{a_1 x_1} - \underline{a_2 x_2} \\ \underline{a_1}x_1 &= x_3 - f(\underline{\boldsymbol{x}}) - \underline{a_2}x_2 + \underline{a_1 x_1} + \underline{a_2 x_2} \end{aligned}$$

Reemplazando x_3 por t_1 y x_2 por el resultado obtenido en (14), obtenemos:

$$\begin{aligned} \underline{a_1}x_1 &= t_1 - f(\underline{\boldsymbol{x}}) - \underline{a_2}\left(\frac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}t_1 - \frac{K_1}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}\right) + \underline{a_1 x_1} + \underline{a_2 x_2} \\ \underline{a_1}x_1 &= \left(1 - \frac{\underline{a_2}(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}\right)t_1 + \frac{\underline{a_2}K_1}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} - f(\underline{\boldsymbol{x}}) + \underline{a_1 x_1} + \underline{a_2 x_2} \\ x_1 &= \left(\frac{1}{\underline{a_1}} - \frac{\underline{a_2}(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{\underline{a_1}(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}\right)t_1 + \frac{\underline{a_2}K_1}{\underline{a_1}(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} - \frac{f(\underline{\boldsymbol{x}})}{\underline{a_1}} + \frac{\underline{a_1 x_1}}{\underline{a_1}} + \frac{\underline{a_2 x_2}}{\underline{a_1}} \end{aligned}$$

[1] para simplificar la notación consideraremos que $\underline{a_1(x)}$ es igual a $\underline{a_1}$

Definamos $K_2 \in \mathbb{R}$ como sigue:

$$K_2 \;= \tfrac{\underline{a_2}K_1}{\underline{a_1}(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} - \tfrac{f(\underline{\boldsymbol{x}})}{\underline{a_1}} + \tfrac{\underline{a_1 x_1}}{\underline{a_1}} + \tfrac{\underline{a_2 x_2}}{\underline{a_1}}$$

Luego:

$$x_1 \;= (\tfrac{1}{\underline{a_1}} - \tfrac{\underline{a_2}(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{\underline{a_1}(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})})t_1 + K_2 \tag{15}$$

Finalmente podemos definir nuestra primera recta L_1, combinando las ecuaciones (14) y (15) como sigue:

$$L_1 = ((\tfrac{1}{\underline{a_1}} - \tfrac{\underline{a_2}(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{\underline{a_1}(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})})t_1 + K_2, \tfrac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}t_1 - \tfrac{K_1}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, t_1)$$

$$L_1 = (\tfrac{\overline{a_2}-\underline{a_2}}{\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2}})t_1 + K_2, \tfrac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}t_1 - \tfrac{K_1}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, t_1)$$

$$L_1 = (K_2, -\tfrac{K_1}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, 0) + t_1(\tfrac{\overline{a_2}-\underline{a_2}}{\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2}}, \tfrac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, 1)$$

Respectivamente, para L_2 tenemos:

$$L_2 = ((\tfrac{1}{\overline{a_1}} - \tfrac{\overline{a_2}(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{\overline{a_1}(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})})t_2 + K_4, \tfrac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}t_2 + \tfrac{K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, t_2)$$

$$L_2 = ((\tfrac{\overline{a_2}-\underline{a_2}}{\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2}})t_2 + K_4, \tfrac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}t_2 + \tfrac{K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, t_2)$$

$$L_2 = (K_4, \tfrac{K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, 0) + t_2(\tfrac{\overline{a_2}-\underline{a_2}}{\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2}}, \tfrac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, 1)$$

donde K_3 y K_4 son definidas como sigue:

$$K_3 \;= \overline{a_1}f(\hat{\boldsymbol{x}}) - \underline{a_1}f(\overline{\boldsymbol{x}}) + \overline{a_1}\underline{a_1}\overline{x_1} + \underline{a_1}\overline{a_2 x_2} - \underline{a_1}\overline{a_1}\hat{x}_1 - \overline{a_1}\underline{a_2}\hat{x}_2$$

$$K_4 \;= -\tfrac{\overline{a_2}K_3}{\overline{a_1}(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} - \tfrac{f(\overline{\boldsymbol{x}})}{\overline{a_1}} + \tfrac{\overline{a_1 x_1}}{\overline{a_1}} + \tfrac{\overline{a_2 x_2}}{\overline{a_1}}$$

Notar que ambos vectores directores son los mismos, lo que implica que un plano puede ser construido a partir de estas dos rectas.

2.4 Paso 4: Generando el plano

Para poder construir el plano necesitamos dos vectores. El primer vector es obtenido restando ambos puntos iniciales, obteniendo:

$$\begin{aligned} \vec{m_1} &= (K_2, -\tfrac{K_1}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, 0) - (K_4, \tfrac{K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, 0) \\ \vec{m_1} &= (K_2 - K_4, \tfrac{-K_1-K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, 0) \end{aligned} \tag{16}$$

El segundo vector $\vec{m_2}$ es obtenido a partir del vector director de las rectas:

$$\vec{m_2} \;= \left(\frac{\overline{a_2}-\underline{a_2}}{\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2}}, \frac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, 1\right) \tag{17}$$

Finalmente, combinando (16) y (17) el plano puede ser expresado en una forma paramétrica como sigue:

$$\Pi \;= (K_2, -\frac{K_1}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, 0) + t_1(K_2 - K_4, \frac{-K_1-K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, 0) + t_2(\frac{\overline{a_2}-\underline{a_2}}{\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2}}, \frac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, 1) \tag{18}$$

donde $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Pára poder encontrar la formula implícita, necesitamos calcular:

$$\vec{n} = \vec{m_1} \times \vec{m_2} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\overline{a_2}-\underline{a_2}}{\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2}} & \frac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} & 1 \\ K_2 - K_4 & \frac{-K_1-K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{i}} \begin{vmatrix} \frac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} & 1 \\ \frac{-K_1-K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} & 0 \end{vmatrix} - \hat{\boldsymbol{j}} \begin{vmatrix} \frac{\overline{a_2}-\underline{a_2}}{\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2}} & 1 \\ K_2 - K_4 & 0 \end{vmatrix} + \hat{\boldsymbol{k}} \begin{vmatrix} \frac{\overline{a_2}-\underline{a_2}}{\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2}} & \frac{(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} \\ K_2 - K_4 & \frac{-K_1-K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{K_1+K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}\hat{\mathbf{i}} + (K_2 - K_4)\hat{\mathbf{j}} + (\frac{(\overline{a_2}-\underline{a_2})(-K_1-K_3)}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})^2} - \frac{(K_2-K_4)(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})})\hat{\boldsymbol{k}}$$

Finalmente el plano, de manera implícita, puede ser definido como sigue:

$$< \frac{K_1+K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, (K_2 - K_4), (\frac{(\overline{a_2}-\underline{a_2})(-K_1-K_3)}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})^2} - \frac{(K_2-K_4)(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}) > \cdot < x_1 - K_2, x_2 + \frac{K_1}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}, x_3 >= 0$$

$$\frac{K_1+K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}(x_1 - K_2) + (K_2 - K_4)(x_2 + \frac{K_1}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}) + (\frac{(\overline{a_2}-\underline{a_2})(-K_1-K_3)}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})^2} - \frac{(K_2-K_4)(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})})x_3 = 0$$

$$\mathcal{H}(x_1, x_2) : \frac{\frac{K_1+K_3}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}}{(-\frac{(\overline{a_2}-\underline{a_2})(-K_1-K_3)}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})^2} + \frac{(K_2-K_4)(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})})}x_1 + \frac{(K_2-K_4)}{(-\frac{(\overline{a_2}-\underline{a_2})(-K_1-K_3)}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})^2} + \frac{(K_2-K_4)(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})})}x_2 + \frac{\frac{-K_1K_4-K_3K_2}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})}}{(-\frac{(\overline{a_2}-\underline{a_2})(-K_1-K_3)}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})^2} + \frac{(K_2-K_4)(\underline{a_1}-\overline{a_1})}{(\underline{a_1}\overline{a_2}-\overline{a_1}\underline{a_2})})} \tag{19}$$

2.5 Ejemplo

Sea $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3$ y la caja $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Primero calculamos los siguientes valores:

$$\begin{array}{lll} a_1 = [-80, 380] & & a_2 = [-40, 40] \\ f(\underline{x}) = -797 & f(\overline{x}) = 1203 & f(\hat{x}) = 3 \end{array}$$

En la Figura 9 mostramos la linealización (en azul) de la función $f(x_1, x_2)$ obtenida por Taylor usando las esquinas de la caja. Ahora calculamos la linealización utilizando nuestra técnica. Primero calculamos los valores K_i, con $i = 1, 2, 3, 4$ definidos en la Sección 2.3:

$$\begin{array}{ll} K_1 = 758620 & K_2 = 6.646666 \\ K_3 = -238620 & K_4 = 9.979999 \end{array}$$

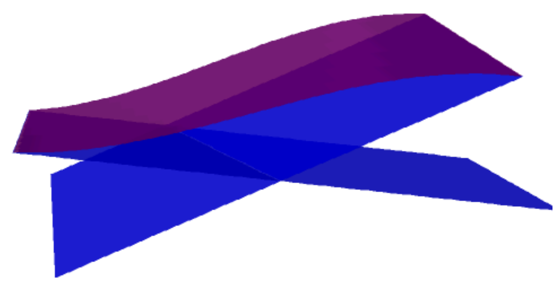

Figure 9: Construcción de dos hiperplanos utilizando Taylor, utilizando como punto de expansión las esquinas de $\boldsymbol{x}$

Utilizando estos valores podemos calcular las dos rectas, obteniendo:

$$\begin{aligned} L_1 = & \quad (6.646666, -63.218333, 0) + t_1(0.00667, -0.0383, 1) \\ L_2 = & \quad (9.979999, -19.885000, 0) + t_2(0.00667, -0.0383, 1) \end{aligned}$$

Realizando el calculo de la Sección 2.4, podemos calcular nuestro hiperplano $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(x_1, x_2) = \quad 104.09986x_1 - 8.00784x_2 - 1198.14955$$

Este hiperplano se muestra en la Figura 10. Finalmente una comparación entre ambas linealizaciones es mostrada en la Figura 11.

Figure 10: Construcción del hiperplano utilizando XM-Taylor

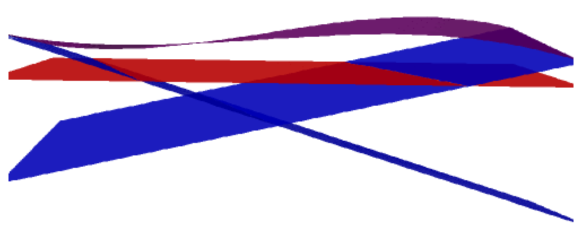

Figure 11: Comparación entre diferentes linealizaciones basadas en Taylor y XM-Taylor