DEF: EQUAZIONE É UN UGUALIANZA CHE PUÓ ESSERE VERA PER ALCUNI VALORI DELLE VARIABILI

DEF: IDENTITÁ É UN UGUALIANZA SEMPRE VERA, INDIPENDENTEMENTE DAI VALORI DELLE VARIABILI

ESEMPIO: $(x-2)^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 3$

$\cancel{x^2} - 4x + 4 + 2x - 1 = \cancel{x^2} - 2x + 3$

$-4x + 2x + 2x = -4 + 1 + 3$

$0 = 0$ ---> QUALSIASI VALORE DI x UTILIZZIAMO IL RISULTATO NON CAMBIA

OSS: $(x-2)^2 + 2x - 1 = x^2 - 2x$

$\cancel{x^2} + 4 - 4x + 2x - 1 = \cancel{x^2} - 2x$

$-4x + 2x + 2x + 4 - 1 = 0$

$3 = 0$ ---> NON É UN IDENTITÁ É UN EQ. IMPOSSIBILE

$(x-2)^2 + 2x - 1 = 3$

$x^2 + 4 - 4x + 2x - 1 = 3$

$x^2 - 2x = 3 - 4 + 1$

$x^2 - 2x = 0$ ---> EQ. DI SECONDO GRADO (AMMETTE 2 VALORI DI x)

• EQ. 2 GRADO

- SONO EQ. CHE PRESENTA ESCLUSIVAMENTE POLINOMI E/O FRAZIONI
- TUTTE L'EQ, SI POSSONO RIDURRE AD EQ. DI SECONDO GRADO, DI CUI ABBIAMO UNA FORMULA PER IL CALCOLO DELLE VARIABILI

$ax^2 + b^x + c = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ---> Δ

$\Delta \begin{cases} \Delta = 0 & x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} \\ \Delta > 0 & x_1 \neq x_2 \quad e \quad x_{1,2} \in \mathbb{R} \\ \Delta < 0 & x_1 \neq x_2 \quad e \quad x_{1,2} \notin \mathbb{R} \end{cases}$

---> OSS: ESISTONO SEMPRE 2 RADICI $(x_{1,2})$ MA SONO COINCIDENTI

PROP:

1) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$
2) $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

$\Longrightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

DEF: NON SONO FUNZIONI ALGEBRICHE FUNZIONI CHE CONTENGONO:
- SENO E COSENO
- L'ARCO TANGENTE
- LOGARITMI
- ESPONENZIALI

DEF: FUNZIONI ALGEBRICHE INTERE ---> INCOGNITA NON É PRESENTE NEL DOMINATORE $\dfrac{x^2 + 2x}{2} = 0$

DEF: FUNZIONI ALGEBRICHE FRATTE ---> INCOGNITA PRESENTE NEL DOMINATORE $\dfrac{x-3}{x^2+3x} = \dfrac{1}{x}$

EQ. FRATTE

• COME RISOLVERE UN' EQ. FRATTA DEVO:

1) SCOMPORRE I DENOMINATORI ---> PRODOTTI NOTEVOLI, TRINOMI PARTICOLARI, RACCOGLIMENTI, RUFFINI...
2) m.c.m TRA I POLINOMI DEI DENOMINATORI
3) IMPORRE CONDIZIONI DI ESISTENZA
4) RIMUOVERE DENOMINATORE E RISOLVERE L'EQ.
5) VEDERE SE LE SOLUZIONI SONO COMPATIBILI CON LE CONDIZIONI DI ESISTENZA

ESEMPIO: $\dfrac{x}{x^2-1} + \dfrac{2x-3}{x^2-2x+1} = \dfrac{3}{x+1}$

1) $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)} + \dfrac{2x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{x+1}$

2) $\dfrac{x(x-1) + (2x+3)(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{3(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$

2) C.E. $(x-1)^2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 1$

$x + 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -1$

3) $x(x-1) + (2x-3)(x+1) = 3(x-1)^2$

$\cancel{x^2} - x + \cancel{2x^2} + 2x - 3x - 3 = \cancel{3x^2} - 6x + 3$

$-x + 2x - 3x + 6x = +3 + 3$

$4x = 6$

5) $x = \dfrac{3}{2}$

---> É LEGALE (RISPETTA LE C.E.)

Disequazioni

- Sono relazioni di disuguaglianza tra due espressioni che contengono delle incognite.

• 1° grado: $ax+b \geq 0$

$ax \geq -b$

$a>0 \longrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$ ---> verso non cambia

$a<0 \longrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$ ---> verso cambia

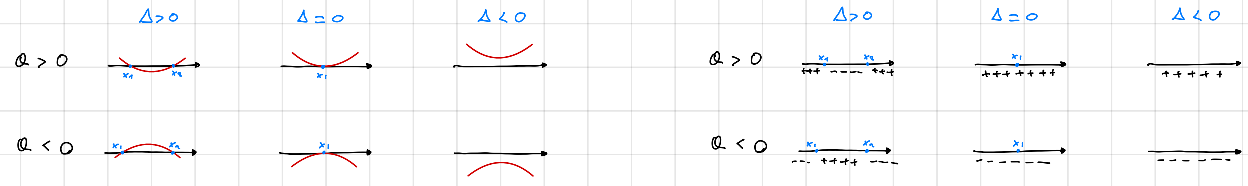
OSS:
- quando moltiplichiamo la disequazione per un valore positivo il verso non cambia
- quando moltiplichiamo la disequazione per un valore negativo si inverte il verso

• esempio: 1) $2x-2>0$ 2) $3-x \geq 0$

$\frac{2x}{2} > \frac{2}{2}$ $-x \geq -3$

$\frac{x-2}{3-x}$ $x>1$ $x \leq 3$ ------→ si inverte il segno

• 2 grado $ax^2+bx+c \geq 0$

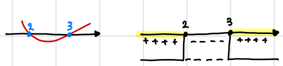


esempi:

1) $x^2-5x+6>0$

$a=1 \rightarrow a>0 \Rightarrow$ ◡

$\Delta = 25-24 = 1 \Longrightarrow$ (Δ>0) 2 intersezioni con l'asse x $\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$



$S=\{x \in \mathbb{R} \mid x<2 \vee x>3\}$

2) $-x^2+3x \geq 0$

$a=-1 \longrightarrow a<0 \Longrightarrow$ ◠

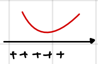
$\Delta = b^2-4ac = 9-0 = 9 \Longrightarrow$ (Δ>0) 2 intersezioni con l'asse x $\Longrightarrow -x^2+3x=0 \Longrightarrow -x(x-3)=0 \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=3 \end{cases}$

$S=\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$

3) $3x^2+2x<0$

$a=3 \Rightarrow 3>0 \Rightarrow$ ◡

$\Delta = 4-24 = -20 \Longrightarrow$ (Δ<0) nessuna intersezione con l'asse x $\Longrightarrow$



$S=\emptyset$

• Grado superiore al 2°

- Non esistono formule standard per risolvere un equazione di 3° grado o superiore
- Quindi dobbiamo abbassare il grado del equazione (Ruffini o divisione polinomiale)

1) Ridurre il grado dell' eq.
2) Studio del segno sulle singole disequazioni
   OSS: segno sempre positivo stretto
3) Unire i grafici
4) Calcolare risultato

1) $x^3+3x^2-x-3<0$

se $x=1 \Rightarrow 1+3-1-3=0$

	1	3	-1	-3
1		1	4	3
	1	4	3	0

$(x-1)(x^2+4x+3)<0$

2) $x-1>0$

$x>1$

$x^2+4x+3>0$

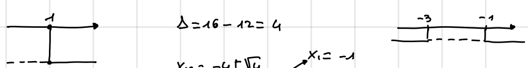
$a>1$ ◡

$\Delta = 16-12 = 4$

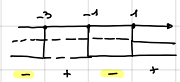
$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-3 \end{cases}$

b^2-4ac

$16-4$



3)



4) $R=\{x \in \mathbb{R} \mid -3>x \vee -1<x<1\}$

· Disequazioni con Prodotti

– Metodo:

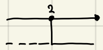
1) Semplificare
2) Studio del segno dei fattori

   Oss: segno sempre positivo stretto
3) Unire i grafici
4) Trovare soluzione

• Esempio: $(x-2)(x+1) \geq 0$

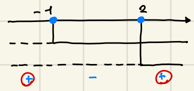
1) //

2) $x-2>0$ $\quad x>2$



$x+1>0$ $\quad x>1$

3)



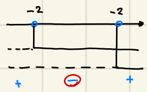
4) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \vee x \geq 2\}$

• Esempio: $(x-2)(x+1) < 0$

1) //

2) //

3)



4) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$

•Disequazioni Fratte

– Metodo

1) Semplificare numeratore e denominatore
2) C.E --> condizioni di esistenza
3) Studio del segno separato tra N e D

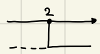
   Oss: segno sempre positivo stretto
4) Unire i grafici
5) Trovare soluzione

•Esempio $\frac{x-2}{3-x} \geq 0$

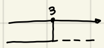
1) //

2) C.E: $3-x \neq 0$ $\quad x \neq 3$

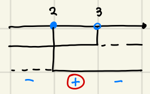
3) N: $x-2 > 0$ $\quad x > 2$



D: $3-x>0$ $\quad x<3$



4)



5) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$

Def: Valore Assoluto $|a|$ è il valore di a con segno sempre positivo.

$$|a| = \begin{cases} |a| = a & \text{se } a \geq 0 \\ |a| = -a & \text{se } a \leq 0 \end{cases}$$

•Scrittura alternativa: $|a| = \sqrt{a^2}$

•Valore assoluto nelle equazioni:

– non esiste un metodo standard

– esempi per aiutare intuizione:

1) $|x| = x+1$

•3 casi:

$x>0$ ---> $|x|>0$ ---> $x=|x|=+x$ ---> $\cancel{x} = \cancel{x}+1$ ---> $0=1$ IMP.

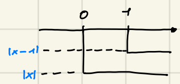
$x=0$ ---> $|x|=0$ ---> $x=|x|=0$ ---> $0=0+1$ ---> $0=1$ IMP.

$x<0$ ---> $|x|>0$ ---> $x \neq |x|$ e $|x|=-x$ ---> $-x=x+1$ ---> $-2x=1$ $\quad x=-\frac{1}{2}$

2) $|x-1| = |x|-1$

--> positivo se $x>1$

--> positivo se $x>0$



5 casi:

$x<0$ --> $|x-1|=-(x-1)$ e $|x|=-x$ ⟶ $\cancel{-x}+1 = \cancel{-x}-1$ ⟶ $0=2$ IMP

$x=0$ --> $|x-1|=1$ e $|x|=0$ ⟶ $1=0-1$ IMP.

$0<x<1$ --> $|x-1|=-(x-1)$ e $|x|=x$ ⟶ $-x+1=x-1$ $\quad 2x=2$

$x=1$ --> $|x-1|=0$ e $|x|=1$ ⟶ $0=1-1$ $\quad 0=0$

$x>1$ --> $|x-1|=x-1$ e $|x|=x$ ⟶ $\cancel{x}-1=\cancel{x}+1$ IMP.

•Valore assoluto nelle disequazioni:

– non esiste un metodo standard

– esempi per aiutare intuizione:

1) $|x| > x+1$

•3 casi:

$x>0$ ---> $|x|>0$ ---> $x=|x|=+x$ ---> $\cancel{x} > \cancel{x}+1$ ---> $0>1$ IMP.

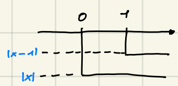
$x=0$ ---> $|x|=0$ ---> $x=|x|=0$ ---> $0>0+1$ ---> $0>1$ IMP.

$x<0$ ---> $|x|>0$ ---> $x \neq |x|$ e $|x|=-x$ ---> $-x>x+1$ ---> $-2x>1$ $\quad x<-\frac{1}{2}$

2) $|x-1| = |x|-1$

--> positivo se $x>1$

--> positivo se $x>0$



5 casi:

$x<0$ --> $|x-1|=-(x-1)$ e $|x|=-x$ ⟶ $\cancel{-x}+1 = \cancel{-x}-1$ ⟶ $0=2$ IMP

$x=0$ --> $|x-1|=1$ e $|x|=0$ ⟶ $1=0-1$ IMP.

$0<x<1$ --> $|x-1|=-(x-1)$ e $|x|=x$ ⟶ $-x+1=x-1$ $\quad 2x=2$

$x=1$ --> $|x-1|=0$ e $|x|=1$ ⟶ $0=1-1$ $\quad 0=0$

•Sistemi di equazioni a più variabili

– Risolvere un sistema lineare significa trovare le soluzioni comuni

•Sistema a due equazioni lineari con due incognite (a, b)

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

• 2 domande: ① il sistema ha soluzioni? ② quante soluzioni ha?

NOTA: un sistema senza soluzioni si dice impossibile:

Es: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

•Regola di Cramer

•Per risolvere un sistema

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}_{\text{determinante del secondo ordine}}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

OSS: $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a \cdot b' - a' \cdot b$

OSS: $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ ---> sistema impossibile (0 soluzioni)
---> sistema con infinite soluzioni

$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ ---> sistema ammette soluzioni

•Esempi:

1) Sistema impossibile: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

2) Sistema infinite soluzioni: $\begin{cases} x + y = 2 \quad ① \\ 2x + 2y = 4 \quad ② \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

OSS: in realtà ① e ② sono la stessa equazione, quindi il sistema ha infinite soluzioni

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

3) Sistema con soluzioni finite $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$ ---> ammette soluzioni

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 - 1 \cdot 1} = \frac{9-2}{6-1} = \frac{7}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 2 - 1 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 1 \cdot 1} = \frac{4-3}{6-1} = \frac{1}{5}$$

•Sistema con 2 eq. lineari con 3 incognite

Esempio:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = z + 1 \\ 2x + y = -z \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$ ---> esistono soluzioni

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ -z & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1 + z + z}{-1} = -1 - 2z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 2 & -z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-z - 2(1+z)}{-1} = \frac{-z - 2 - 2z}{-1} = 2 + 3z$$

OSS: questo sistema ha infinite soluzioni (infatti esiste una soluzione diversa per ogni z)

DEF: Sistema impossibile è un sistema senza soluzioni

DEF: Sistema determinato è un sistema con una singola soluzione

• EQ. IRRAZIONALI

– Le eq. irrazionali sono eq. che contengono nel radicando l'indeterminata

es: $\sqrt{x^2+x-2} = x+1$

NOTE UTILI:

- se $a \geq 0 \longrightarrow \sqrt[n]{a}$ quel numero reale >0 t.c. elevato ad n da a
- se $x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sqrt{x^2} = |x|$ es: $\sqrt{x^4y^6} = x^2|y^3|$ dove $x,y \in \mathbb{R}$

oss: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ma $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$ infatti $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

• Esistono 2 metodi per risolvere $\sqrt{A(x)} = B(x)$

1) Metodo intuitivo

Utilizzo una potenza per rimuovere i radicandi

- $\sqrt{A(x)} = B(x)$
- $\left(\sqrt{A(x)}\right)^2 = B(x)^2$
- $A(x) = B(x)^2$

NOTA: utilizzando potenze pari si possono aggiungere soluzioni estranee all'equazione.

– quindi non é detto che tutte le soluzioni di $A(x) = B(x)^2$ siano anche soluzioni di $\sqrt{A(x)} = B(x)$

– Allora dobbiamo effettuare un test sulle soluzioni e verificare quali siano leggittime

– ES • $A(x) - B(x)^2 = 0 \Longrightarrow$ sol: $x_1, x_2, \dots$

• Verifica $= \sqrt{A(x_1)} = B(x_1)$ e $\sqrt{A(x_2)} = B(x_2)$ e ...

$\hookrightarrow$ verifico quali sol. rispettano l'uguaglianza $\sqrt{A(x)} = B(x)$ sia rispettata, se una soluzione risulta falsa la rimuovo

2) Metodo matematico $\sqrt{A(x)} = B(x)$

• Creo le condizioni di esistenza t.c.

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x)^2 \end{cases}$$

• Risolvo l'eq. $A(x) - B(x)^2 = 0$

• Verifico che le soluzioni ottenute rispettino le C.E. $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$

• ESEMPIO METODO INTUITIVO:

$\sqrt{x^2+x-2} = x+1$

$\sqrt{x^2+x-2}^{\,2} = (x+1)^2 \longrightarrow \cancel{x^2}+x-2 = \cancel{x^2}+2x+1 \longrightarrow -x = 3$

$x = -3$ ----> sol. di $x^2+2x-2 = (x+1)^2$

– Dobbiamo verificare che sia sol. di $\sqrt{x^2+2x-2} = x+1$

$\hookrightarrow \sqrt{(-3)^2-3-2} = -3+1 \longrightarrow \sqrt{9-3-2} = -2$

$\sqrt{4} = -2$ é falso, quindi $x=-3$ non é soluzione di $\sqrt{x^2+2x-2} = x+1$

• quindi $\sqrt{x^2+2x-2} = x+1$ non ha soluzioni

• ESEMPIO METODO MATEMATICO:

$\sqrt{x^2+2x-2} = x+1$ C.E. $\begin{cases} x^2+x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x^2+x-2 = (x+1)^2 \end{cases}$

$x^2+x-2 = x^2+2x+1$

$x = -3$

• Verifichiamo le C.E.

1) $-3^2-3 \geq 0 \longrightarrow 9-3 \geq 0$ VERO

2) $-3+1 \geq 0 \longrightarrow -2 \geq 0$ FALSO

quindi $x=-3$ non é soluzione

oss: se eq. contiene più radicali allora si semplifica fino a quando non si ottiene un solo radicale e poi si usano le tecniche appena citate per risolvere

es: $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} - \sqrt{C(x)} = 0 \longrightarrow \left(\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)}\right)^2 = \left(\sqrt{C(x)}\right)^2 \longrightarrow A(x) + B(x) + 2\sqrt{A(x)B(x)} = C(x) \longrightarrow 2\sqrt{A(x)B(x)} = C(x) - A(x) - B(x)$

NOTA: gli esempi sono stati fatti con radici quadre, ma questi metodi funzionano anche con radici superiori

• DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

• METODO PER RISOLVERE $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$

1) SCRIVERE C.E $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B(x)^2 \end{cases}$ $\dashrightarrow$ OSS: $\cancel{\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}}$ IMPOSSIBILE

2) RISOLVERE LE C.E. COME SE FOSSE UN SISTEMA DI DISEQUAZIONI

- LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO ANCHE SOLUZIONI DI $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$

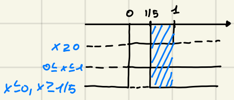
• METODO PER RISOLVERE $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$

1) SCRIVERE C.E. $\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B(x)^2 \end{cases}$

2) RISOLVERE LE C.E. COME SE FOSSE UN SISTEMA DI DISEQUAZIONI

- LE SOLUZIONI DEL SISTEMA SONO ANCHE SOLUZIONI DI $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$

ESEMPI: 1) $\sqrt{x-x^2} \leq 2x$ C.E $\begin{cases} x-x^2 \geq 0 \\ 2x \geq 0 \\ x-x^2 \leq 4x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} // \\ // \\ x-5x^2 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \geq 0 \\ x \leq 0,\ x \geq 1/5 \end{cases}$

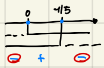


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 \leq x \leq 1\}$

$x(1-5x) = 0$

$x > 0$

$-5x > -1 \longrightarrow x < \frac{1}{5}$



$x \leq 0\ ,\ x \geq 1/5$

2) $\sqrt{x-1} > -3$ C.E. $\{x-1 \geq 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

EQ. E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

- LE INCOGNITE SONO L' ESPONENTE $a^x = b$

OSS: LA SOLUZIONE DI UN EQ. ESPONENZIALE È UN LOGARITMO

$$a^x = b \implies x = \log_a b$$

> NOTE UTILI: $a > 0$
>
> - $a^x = a^2 \implies x = 2$
> - SE $\begin{cases} a > 1 \implies m > n \implies a^m > a^n \longrightarrow \text{CRESCENTE} \\ a < 1 \implies m > n \implies a^m < a^n \longrightarrow \text{DECRESCENTE} \end{cases}$

ESEMPI:

1) $3^{x^2-1} = 27 \longrightarrow 3^{x^2-1} = 3^3 \longrightarrow x^2 - 1 = 3 \longrightarrow x^2 = 4 \longrightarrow x = 2$

2) $2^{x-|x|} \geq 4 \longrightarrow 2^{x-|x|} \geq 2^2 \longrightarrow x - |x| \geq 2 \longrightarrow \cancel{\begin{cases} x \geq 0 \\ x - x \geq 2 \end{cases}}$ IMP.

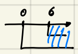
$\begin{cases} x < 0 \\ x + x \geq 2 \end{cases} \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x \geq 2 \end{cases} \cancel{\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}}$ IMP.

3) $3^{2x} - 3^{x+2} + 3 + 15 = 0 \longrightarrow (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x + 15 = 0 \quad 3^x = z \longrightarrow z^2 - 8z + 15 = 0 \longrightarrow z = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = \begin{cases} 3 \longrightarrow 3^x = 3 \\ 5 \longrightarrow 3^x = 5 \longrightarrow x = \log_3 5 \end{cases}$

4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = 5 \longrightarrow 3^{-x-2} = 5 \longrightarrow -x - 2 = \log_3 5 \longrightarrow x = -2 - \log_3 5$

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \leq 5 \longrightarrow 3^{-x-2} \leq 5 \longrightarrow -x - 2 \leq \log_3 5 \longrightarrow x \geq -2 - \log_3 5$

6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}+1} \leq 2^{x-7} \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-x} \longrightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 7 - x \longrightarrow \sqrt{x} \geq 6 - x \longrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 6 - x \leq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 6 \end{cases}$



$x \geq 6$ $\longrightarrow$ $S = \{ x \in \mathbb{R} |$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \\ x \geq (6-x)^2 \end{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \\ x \geq x^2 - 12x + 36 \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ '' \\ x^2 - 13x + 36 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \\ 4 \leq x \leq 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 4 \leq x \leq 9 \end{cases}$

$\Delta = 25$

$x = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} 4 \\ 9 \end{cases}$