Lycée pilote -Sfax	Devoir de contrôle N° 1	Classe : 2Sc3-5
Mme Fehri	Mathématiques	Durée : 1heure

Algèbre : 12points

I/1/ Vérifier que pour tout réel x : $x^2-6x+6=(x-3)^2-3$.

2/ Résoudre dans IR l'équation $x^3-8+7x(2-x)=x^2-4x+4$.

3/ On donne $|x|<2$, encadrer x^2-6x+6.

II/ On donne $a=\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ et $b=\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

1/ Ecrire a sous la forme $x-\sqrt{y}$ où x et y sont deux entiers.

2/ Ecrire b sans radical au dénominateur.

3/ Montrer que a et b sont des inverses.

III/ Soit n un entier naturel non nul.

1/ Montrer que $1-\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n+1}{n}$

2/ Calculer alors $P=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\times\ldots\ldots\times\left(1-\dfrac{1}{100^2}\right)$.

IV/1/ Soit x un réel strictement positif, montrer que $\sqrt{x}\leq\dfrac{x+1}{2}$.

2/ En déduire que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{4}}{5}+\ldots\ldots+\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}\leq\dfrac{n}{2}$.

Géométrie : 8points

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les points A(3,-2) ; B(0,-1) ; C(4,1) et D(-2,3).

1/ Montrer que BCD est un triangle rectangle et isocèle.

2/ Montrer que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

3/ Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles puis déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AD}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

4/ Soit E le point défini par : $-6\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$.

a/ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AE}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

b/ En déduire que les points A, D et E sont alignés.

5/ Soit x un réel et M(x, 2x+1), déterminer x pour que le point M appartient à la perpendiculaire à (AC) passant par B.

Devoir de Contrôle N°1

Exercice 1 : (Algèbre 12 pts)

I/ 1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$(x-3)^2 - 3 = x^2 - 6x + 9 - 3 = x^2 - 6x + 6$

Donc Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 6x + 6 = (x-3)^2 - 3$.

2) $x^3 - 8 + 7x(2-x) = x^2 - 4x + 4$

équivaut : $(x-2)(x^2+2x+4) - 7x(x-2) = (x-2)^2$

équivaut : $(x-2)(x^2+2x+4-7x) - (x-2)^2 = 0$

équivaut : $(x-2)(x^2+2x+4-7x-x+2) = 0$

équivaut : $(x-2)(x^2-6x+6) = 0$

équivaut : $x-2=0$ ou $(x-3)^2-3=0$

$x=2$ ou $x-3=\sqrt{3}$ ou $x-3=-\sqrt{3}$

$x=2$ ou $x=3+\sqrt{3}$ ou $x=3-\sqrt{3}$

Donc $S_{\mathbb{R}} = \{3-\sqrt{3} ; 2 ; 3+\sqrt{3}\}$

$|x| < 2$ équivaut $-2 < x < 2$

$-5 < x-3 < -1$

$1 < (x-3)^2 < 25$

$-2 < (x-3)^2 - 3 < 22$

Donc $-2 < x^2 - 6x + 6 < 22$

c'est un encadrement de x^2-6x+6 d'amplitude 24.

II/ 1) $a = \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2 - 2\times 3 \times \sqrt{5}}$

$= \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = |3-\sqrt{5}|$

Donc $a = 3 - \sqrt{5}$ $(3 > \sqrt{5})$

2) $b = \dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

$= \dfrac{\sqrt{5}(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} - \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$= \dfrac{3\sqrt{5}+5}{4} - \dfrac{2\sqrt{5}+2}{4} = \dfrac{\sqrt{5}+3}{4}$

Donc $b = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$

3) $a \cdot b = (3-\sqrt{5}) \cdot \dfrac{3+\sqrt{5}}{4} = 1$

Donc a et b sont des inverses

III/ 1) $1-\frac{1}{n^2} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$

2) $P = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{1}{99^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\dots\times\left(\frac{98}{99}\times\frac{100}{99}\right)\times\left(\frac{99}{100}\times\frac{101}{100}\right)$

$= \left[\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\dots\times\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}\right]\times\left[\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\dots\times\frac{100}{99}\times\frac{101}{100}\right]$

$= \frac{1}{100}\times\frac{101}{2}$ Donc $P = \frac{101}{200} = 0,505$

IV/ 1) $\frac{x+1}{2}-\sqrt{x} = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2}$

$(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$ et $x>0$ Donc $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$.

2) Pour tout $x>0$, $\sqrt{x} < \frac{x+1}{2}$ Donc $\frac{\sqrt{x}}{x+1} < \frac{1}{2}$ $(x+1>0)$

$\{1;2;\dots;n\}\subset\mathbb{N}$ Donc $\frac{\sqrt{1}}{2}<\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}<\frac{1}{2}$, …, $\frac{\sqrt{n}}{n+1}<\frac{1}{2}$

Donc $\frac{\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}+\dots+\frac{\sqrt{n}}{n+1} < \frac{1}{2}\times n$.

Exercice 2 : (Géométrie 8 pts)

1) $\vec{BC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{BD}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

Donc $BC = BD = \sqrt{20}$ et $xx'+yy' = 4(-2)+2\times4 = 0$

Donc $BC = BD$ et $\vec{BC}\perp\vec{BD}$

Par suite le triangle BCD est rectangle isocèle en B

2) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$xy'-x'y = -9-1 = -10 \neq 0$

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

Par suite le couple $(\vec{AB};\vec{AC})$ est une base de V.

3) a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ Donc $\vec{CD} = -2\vec{AB}$

Par conséquent $\vec{CD}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires et $(CD)\parallel(AB)$

b) $\vec{AD} = \vec{AC}+\vec{CD}$

$= -2\vec{AB}+\vec{AC}$

Donc $\vec{AD}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}_{(\vec{AB};\vec{AC})}$

4) a) $6\vec{EA} + 2\vec{EB} + \vec{EC} = \vec{0}$

$= 6\vec{EA} + 2(\vec{EA} + \vec{AB}) + (\vec{EA} + \vec{AC}) = \vec{0}$

$= 3\vec{EA} - 2\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{0}$

$\vec{AE} = -\frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$ Donc $\vec{AE}\begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}_{(A; \vec{AB}, \vec{AC})}$

(6 pts)

b) $\vec{AD}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{(A; \vec{AB}, \vec{AC})}$ et $\vec{AE}\begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}_{(A; \vec{AB}, \vec{AC})}$

$\vec{AD} = -3\vec{AE}$ (on peut calculer le déterminant)

Résultat A, D et E sont alignés.

5) M appartient à la perpendiculaire à (AC) passant par B Donc $\vec{BM} \perp \vec{AC}$

(2 pts)

Comme $\vec{BM}\begin{pmatrix} x \\ 2x+2 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$

et puisque $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée

Alors $aa' + bb' = 0$

$x \cdot 1 + 3 \cdot (2x+2) = 0$

$x = -\frac{6}{7}$

Donc pour $x = -\frac{6}{7}$, le point M appartient à la perpendiculaire à (AC) passant par B.

Dans ce cas M a pour coordonnées

$\left(-\frac{6}{7} ; -\frac{5}{7}\right)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$