Mr. Saïdi Ammar
Lycée: Imem Moslem

Serie : Fonctions de références

2Science
2022/2023

Exercice 1 :

Soient les fonctions f et g définie par $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ et $g(x)=\frac{-1}{4}x^2+2$

1) Etudier les fonctions f et g et tracer ζ_f et ζ_g leurs représentations graphiques dans un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$.
2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ζ_f et ζ_g.
3) Soit $h(x)=\sup(f(x),g(x))$.
   a) Tracer ζ_h dans le même repère.
   b) Etudier les variation de h.
   c) Discuter suivant les valeurs de m le nombre des solution de l'équation h(x) = m.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=ax^2+b$

1) Déterminer les réels a et b tels que f(-1) = 2 et le point $\left(2,\frac{1}{2}\right)\in\zeta_f$ courbe de f.
2) Pour les valeurs de a et b trouvées. Etudier f et construire ζ_f.
3) Soit $g(x)=\left|\frac{x^2-5}{2}\right|$. Déduire la courbe de g à partir de ζ_f et ces variations.
4) a) Tracer la droite $\Delta : y=x+1$ dans le même repère
   b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ζ_f et Δ.
   c) Résoudre graphiquement l'inéquation $(I): x^2+2x-3<0$

Exercice 3:

Soient les fonctions f et g définie par $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2$ et $g(x)=(x-1)^2$

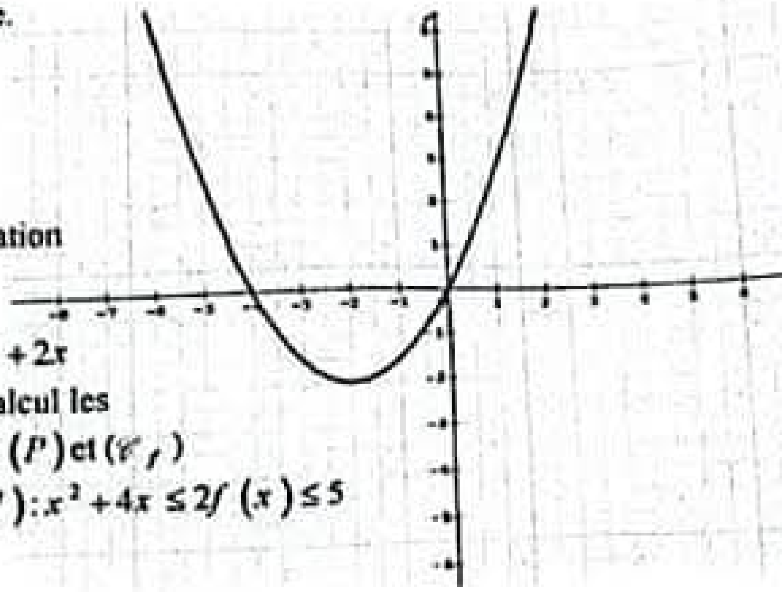
1) Etudier les fonctions f et g et tracer ζ_f et ζ_g leurs représentations graphiques dans Le même repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$.
2) a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ζ_f et ζ_g.
   b) Résoudre graphiquement l'inéquation $(I): 5x^2-8x-4\le 0$
3) a) Soit $h(x)=\left|\frac{1}{4}x^2-2\right|$.Déduire la courbe de h à partir de ζ_f.
   b) Déterminer graphiquement les variation de h.

Exercice 4 :

Soit un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$ de Plan. la fonction f définie par $f(x)=ax^2+b$

1) Déterminer les réels a et b pour que la parabole (P) d'équation $y=ax^2+b$ passe par les point $S(0,2)$ *et* $A(2,1)$ puis tracer (P).
2) Déterminer les réels a' et α pour que la parabole (P') d'équation $y=a'(x+\alpha)^2$ passe par les point $S'(1,0)$ *et* $B(0,1)$ puis tracer (P').

Exercice n°5 : (Devoir : 10-11)



1. dans le graphe ci-contre (P) est une parabole.
   Déterminer l'équation de (P)
2. Soit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$
   a) Etudier les variations de f sur $]-\infty, 0]$
   b) Tracer dans le même repère la représentation Graphique de f $(\mathscr{C}_f)$
3. on admet que (P) a pour équation : $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$
   a) Déterminer graphiquement puis par le calcul les Coordonnés des points d'intersection de (P) et $(\mathscr{C}_f)$
   b) Résoudre graphiquement l'inéquation $(I): x^2 + 4x \leq 2f(x) \leq 5$
4. Soit $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2|x|$
   a) Montrer que g est paire
   b) Déduire la représentation graphique de g $(\mathscr{C}_g)$ à partir de (P)
   c) Déterminer graphiquement les réels m pour lesquels l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux racines opposées.
5. Soit $h(x) = \sqrt{x+4}$
   a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.et Etudier ces variations sur D_f.
   b) Tracer dans le même repère la représentation Graphique de h ζ_h.
   c) Déterminer par le calcul les Coordonnés des points d'intersection de (P) et ζ_h
      (on remarquons que le point $(-4,0) \in (P) \cap \zeta_h$)
   d) Résoudre graphiquement l'inéquation $(I'): 2h(x) \leq x^2 + 4x$.

Exercice 6:

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et D la droite d'équation : $y = x - 3$

1) a) Etudier f et tracer ζ_f et D dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   b) Déterminer par le calcul les Coordonnés des points d'intersection de D et ζ_f.
   c) Résoudre graphiquement l'inéquation $(I): x^2 - 3x \leq 0$.
2) Soit $g(x) = (x+1)|x-3|$
   a) Exprimer pour $x \geq 3$, puis pour $x \leq 3$ g(x) en fonction de f(x).
   b) Tracer alors ζ_g dans le même repère.
   c) Résoudre graphiquement l'inéquation $\frac{x-3}{|x-3|} \leq x+1$.

3/ $g(x) = \left|\frac{x^2-5}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}\right| = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x)\geq 0 \\ -f(x) \text{ si } f(x)\leq 0 \end{cases}$

~~donc C_g est le symétrique de C_f~~

4/ a) $\Delta : y = x+1$ $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$

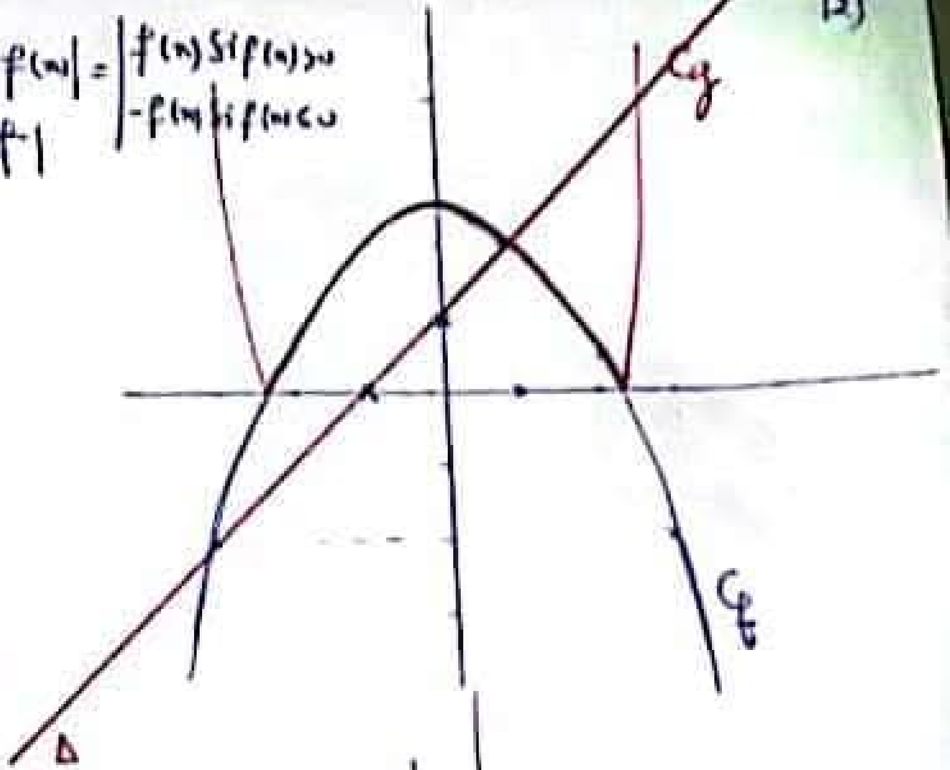
b) $M(x,y) \in \Delta \cap C_f \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = x+1 \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2} = x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = x+1 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ x' = 1 \text{ ou } x'' = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta \cap C_f = \{(1,2), (-3,-2)\}$



(I) . $x^2+2x-3<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} > x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} > x+1$

$\Leftrightarrow f(x) > x+1$ alors x est l'abscisse des points de C_f situé au dessus de Δ

$\Leftrightarrow x \in]-3, 1[$.

Exercice n°3 :

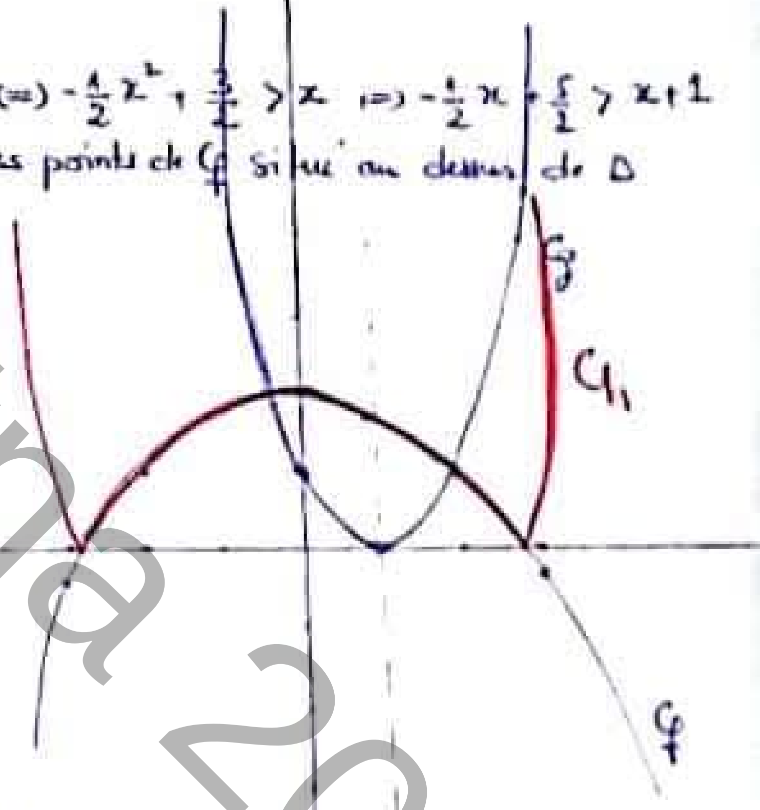
1/ $f(x) = -\frac{1}{4}x^2+2$ et $g(x) = (x-1)^2$

1) C_f est une parabole de sommet $S(0,2)$ d'axe $x=0$

C_g est une parabole de sommet $S(1,0)$ d'axe $x=1$.

x	0	1	2	3
$f(x)$	2	$\frac{7}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$

x	1	2	3
$g(x)$	0	1	4



2/ a) $M(x,y) \in C_f \cap C_g \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (x-1)^2 \\ -\frac{1}{4}x^2+2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (x-1)^2 \\ x^2-2x+1+\frac{1}{4}x^2-2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = (x-1)^2 \\ \frac{5}{4}x^2-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (x-1)^2 \\ \Delta' = 1+\frac{5}{4} = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow x' = \frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{2}{5}$

$x'' = \frac{1+\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{5/2}{\frac{5}{4}} = 2$

donc $C_f \cap C_g = \{(-\frac{2}{5}, \frac{49}{25}) (2,1)\}$

b) $5x^2-8x-4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2-2x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+\frac{1}{4}x^2-2 \leq 0$

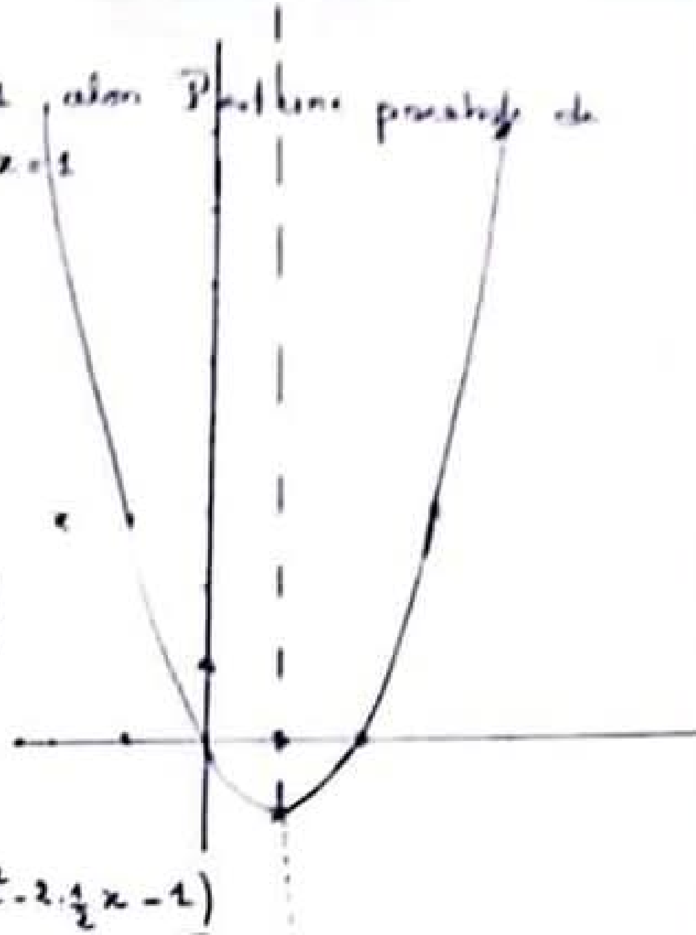
$\Leftrightarrow x^2-2x+1 \leq -\frac{1}{4}x^2+2 \Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \Rightarrow x$ est l'abscisse des points de C_f au dessus de C_g. $\Leftrightarrow x \in [-\frac{2}{5} ; 2]$

3/ a) $h(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ si } f(x) \leq 0 \end{cases}$

Exercice n°7 P 69

a) $P : y = x^2 - 2x \Leftrightarrow y = (x-1)^2 - 1$, alors P est une parabole de Sommet $S(1,-1)$ d'axe de symétrie $x = 1$

x	1	2	3	4
y	-1	0	3	8



b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x = \frac{1}{2}(x^2 + 6x)$

$= \frac{1}{2}\left[(x+3)^2 - 9\right] = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{9}{2}$

alors P est une parabole de Sommet $S(-3, -\frac{9}{2})$ d'axe $x = -3$

x	-3	-2	-1	0
y	$-\frac{9}{2}$			

et compléter et Tracer P

c) $y = -x^2 + x + 1 = -(x^2 - x - 1) = -(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x - 1)$

$\Rightarrow y = -\left[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}\right] = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$ alors P est une parabole de Sommet $S(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ d'axe $x = \frac{1}{2}$

Exercice n°7 P 69

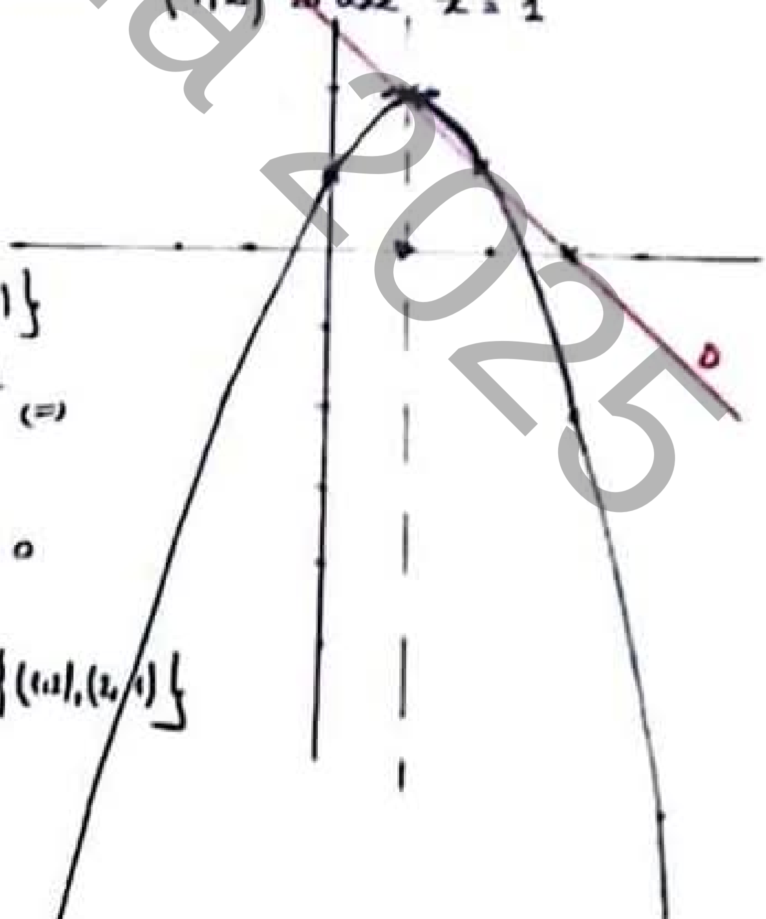
a) $P : y = -x^2 + 2x + 1 = -(x^2 - 2x - 1) = -\left[(x-1)^2 - 2\right] = -(x-1)^2 + 2$

donc P est une parabole de Sommet $S(1,2)$ d'axe $x = 1$

x	1	2	3	4
y	2	1	-2	-7

$D : y = -x + 3$

x	0	3
y	3	0



b) Graphiquement $D \cap P = \{(1,2)(2,1)\}$

c) $M(x,y) \in P \cap D \Rightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = -x + 3 \\ -x^2 + 2x + 1 = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 3 \\ -x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}$

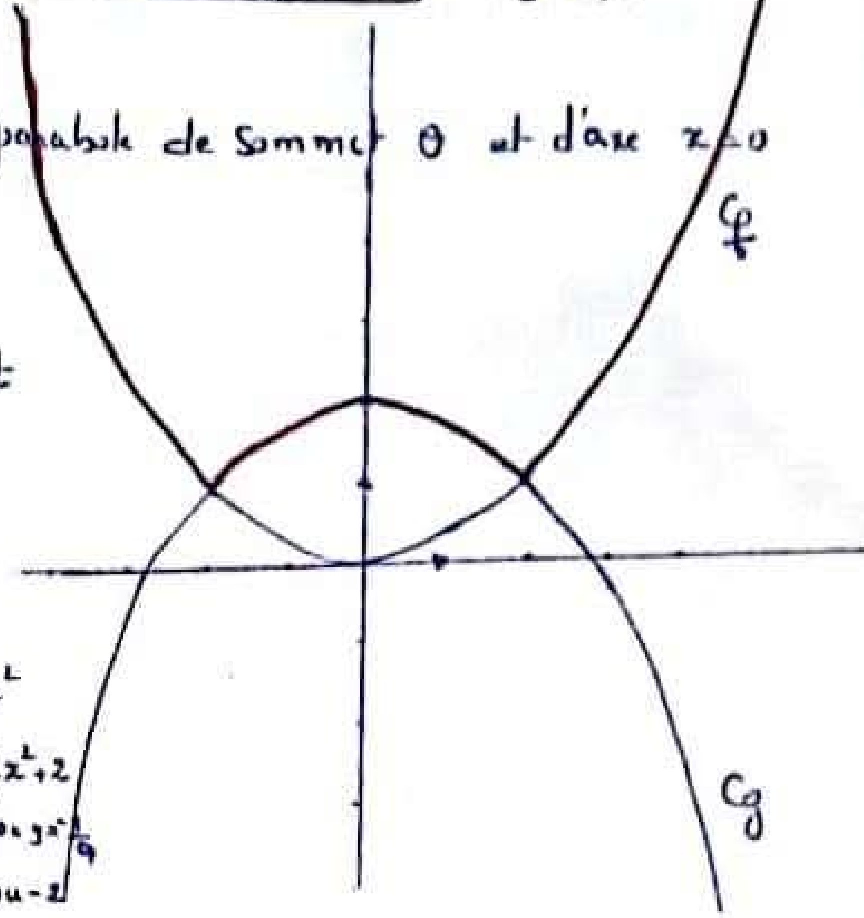
$\Rightarrow \begin{cases} y' = 2 & y'' = 1 \\ x' = 1 \text{ ou } x'' = 2 \end{cases} \Rightarrow P \cap D = \{(1,2),(2,1)\}$

Serie : Fonctions de références (2Sc)

Exercice n°1 :

1/ $f(x) = \frac{1}{4}x^2$. $\mathcal{C}_f$ est une parabole de sommet O et d'axe $x=0$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4



$\mathcal{C}_g$ aussi est une parabole de sommet $S(0,2)$ d'axe $x=0$

x	0	1	2	3
$g(x)$	2	$\frac{7}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$

/ $M(x,y) \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g \Leftrightarrow$

$\begin{cases} M \in \mathcal{C}_f \\ M \in \mathcal{C}_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ \frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{4}x^2 + 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ \frac{1}{2}x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1 \\ x = 2 \text{ ou } -2 \end{cases}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g = \{(2,1)\ (-2,1)\}$

~~Exercice n°2~~ : 3/a) $h(x) = \sup(f(x), g(x)) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geq g(x) \\ g(x) \text{ si } g(x) \geq f(x) \end{cases} = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in]-\infty,-2] \\ g(x) \text{ si } x \in]-2,2] \\ f(x) \text{ si } x \in [2,+\infty[\end{cases}$

b) h est décroissante sur $]-\infty,-2]$

h est croissante sur $]-2, 0]$

h est décroissante sur $]0, 2]$

h est croissante sur $]2,+\infty[$

c/ $h(x) = m$ graphiquement c'est l'intersection de $\mathcal{C}_h$ avec la droite $y = m$.

Si $m < 1$ L'équation $h(x) = m$ admet zéro solution.

Si $m = 1$ ------------------ 2 Solutions

Si $1 < m < 2$ ------------------ 4 Solutions.

Si $m = 2$ ------------------ 3 Solutions

Si $m > 2$ ------------------ 2 Solutions.

Exercice n°2 :

$f(x) = ax^2 + b$

1) $\begin{cases} f(-1) = 2 \\ (2, \frac{1}{2}) \in \mathcal{C}_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(2) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 4a + b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -\frac{3}{2} \\ b = 2 - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$

donc $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}$

2) $\mathcal{C}_f$ est une parabole de sommet $S(0, \frac{5}{2})$ d'axe $x = 0$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{5}{2}$	2	$1/2$	-2

Exercice n°4 $f(x) = ax^2+b$; $\mathcal{P}$

1/ $\begin{cases} S(0,2)\in\mathcal{P} \\ A(2,1)\in\mathcal{P}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ 4a+b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ b=2\end{cases} \Rightarrow \mathcal{P} : y=-\frac{1}{4}x^2+2$

2/ $y=a'(x+\alpha)^2$ passe par S' et B' $\Leftrightarrow \begin{cases} a'(1+\alpha)^2=0 \\ a'\alpha^2=1\end{cases}$ $a'\neq 0 \Rightarrow \alpha=-1$, $a'=1$

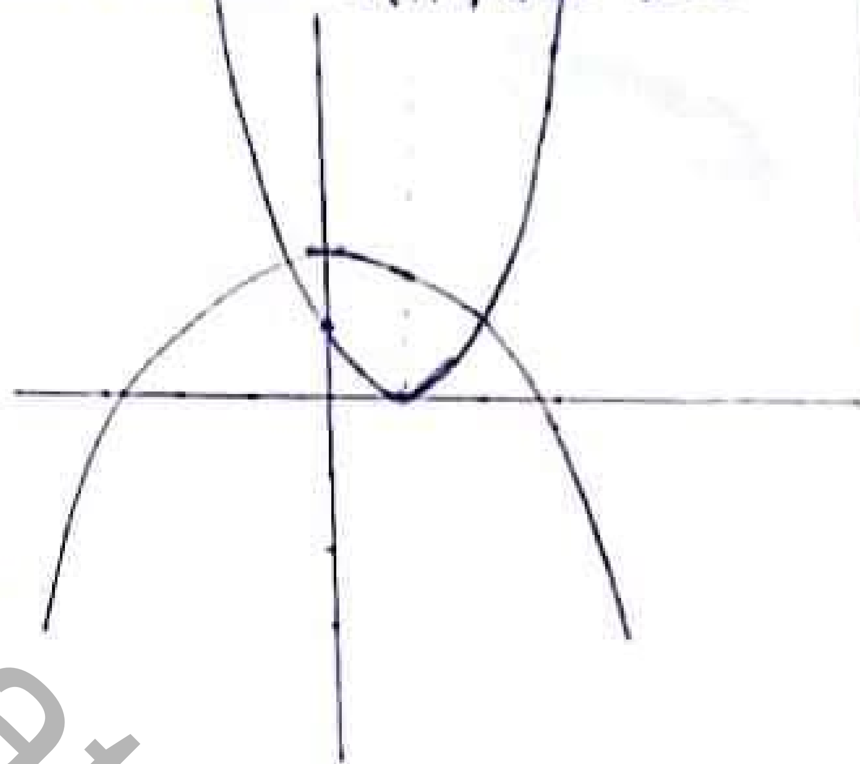
$\Rightarrow \mathcal{P}' : y=(x-1)^2$ est une parabole de Sommet $S'(1,0)$ d'axe $x=1$

$\mathcal{P}'$:

x	1	2	3	4
y	0	1	4	9

$\mathcal{P}$:

x	0	1	2	3
y	2	7/4	1	$-\frac{1}{4}$



Exercice n°5 :

1) $\mathcal{P}$ est une parabole de Sommet $S(-2,-2)$ d'axe $x=-2$

donc $\mathcal{P}$: $y=a(x+2)^2-2$

$(0,0)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow 0=4a-2 \Leftrightarrow 4a=2$

$\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$ alors

$\mathcal{P}$: $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$

2/ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3$

a/ $a,b\in\,]-\infty,0]$ avec $a\leq b\leq 0$ comparons $f(a)$ et $f(b)$?

$a\leq b\leq 0 \Leftrightarrow a^2\geq b^2\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a^2\leq -\frac{1}{2}b^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a^2+3\leq -\frac{1}{2}b^2+3$

$\Rightarrow f(a)\leq f(b)$ donc f est croissante sur $]-\infty,0]$

b/ $\mathcal{C}_f$ est une parabole de sommet $S(0,3)$

3/ $\mathcal{P}$: $y=\frac{1}{2}x^2+2x$

a) graphiquement $\mathcal{C}_f\cap\mathcal{P}=\{(1,5/2),(-3,-\frac{3}{2})\}$

Par calcul $M(x,y)=\mathcal{C}_f\cap\mathcal{P} \Rightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=\frac{1}{2}x^2+2x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+3 \\ -\frac{1}{2}x^2+3=\frac{1}{2}x^2+2x\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+3 \\ x^2+2x-3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+3 \\ x'=1 \quad x''=-3\end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{C}_f\cap\mathcal{P}=\{(1,\frac{5}{2}),(-3,-\frac{3}{2})\}$

b) (I) : $x^2+4x\leq 2f(x)\leq\frac{5}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2x\leq f(x)\leq\frac{5}{2} \Leftrightarrow \mathcal{C}_f$ au dessus de $\mathcal{P}$ et au dessous de la droite $y=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x\in[-3,-1]\cup\{1\}$

4/a) $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|$; $-x\in D_g=\mathbb{R}$ et $g(-x)=\frac{1}{2}x^2-2|x|=g(x)$

donc g est paire

b) Si $x\leq 0$: $g(x)=\frac{1}{2}x^2+2x \Rightarrow C_g=\mathcal{P}$ pour $x\leq 0$

c) $g(x)=m$ admet exactement deux racines opposées $\Leftrightarrow m>0$