Série N°: 17 ' 2ec [redacted] Lycée Pilote Sfax Mr Abdelmoula

Ex1 Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = 2n - 8$

1) a) Montrer que U est une suite arithmétique

b) Déterminer les termes consécutifs de la suite ayant un produit égal à 48

2) Soit $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Déterminer l'entier n pour que $S_n = 22$

3) Calculer la somme des 20 premiers multiples de 2.

4) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_{3n+1}$

a) Montrer que V est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme

b) Calculer la somme $T = U_1 + U_4 + U_7 + \dots + U_{40}$

Ex2 Soit la suite arithmétique U telle que $U_0 = 1$ et $U_1 + U_2 + U_3 = 15$

1) Déterminer la raison de U.

2) Exprimer U_n en fonction de n

3) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Déduire la valeur de $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 61 + 63$

Ex3 Soit (U_n) une suite arithmétique telle que $U_3 + U_9 = -38$ et $U_{10} = -3$

1) a) Calculer la raison et le 1er terme de la suite (U_n)

b) Exprimer U_n en fonction de n

2) a) Calculer $S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{30}$

b) Calculer $S_1 = U_{10} + U_{11} + \dots + U_{30}$

c) en déduire $S_2 = U_0 + U_1 + \dots + U_9$ puis $S_3 = -10 - 2 + 6 + 14 \dots + 6$

3) a) Calculer $S_n = U_2 + U_3 + \dots + U_{n-1}$ en fonction de n

b) Déterminer n pour que l'on ait $S_n = -210$

4) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = 10n - 1 + U_{2n}$

montrer que (V_n) est une suite arithmétique puis calculer $A = V_7 + V_8 + \dots + V_{15}$

Ex4 ABC est un triangle rectangle en A de sens direct tel que $\widehat{CBA} = \frac{\pi}{3}$ et $AB = 5$. Soient I le milieu de [BC] et R la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Montrer que le triangle AIB est équilatéral, en déduire que $R(B) = I$

2) La parallèle à (BC) passant par A et la parallèle à (AI) passant

par C se coupent en D

a) Montrer que $r(I) = D$

b) Soit J le milieu de $[IB]$, Construire le pt $J' = r(J)$ et montrer que les pts J', I et D sont alignés

3) Soit E le projeté orthogonal de J sur (AI), la parallèle à (DI) passant par E coupe (AD) en F. Montrer que les droites (J'F) et (AD) sont perpendiculaires

Ex 5 ABC un triangle rectangle isocèle en A. La bissectrice [Cx) de l'angle $A\hat{C}B$ coupe la parallèle à (AC) issue de B en C'. La droite (BC) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC'] en A'

1) a) Montrer que le triangle BCC' est isocèle en B

b) Soit r la rotation directe de centre B telle que $r(C) = C'$ trouver la mesure de son angle en radians.

2) a) Montrer que $r(A) = A'$

b) Les droites (AC) et (A'C') se coupent en E. Donner la nature du triangle CEA'

3) Soit E' l'image de E par r.

a) Montrer que E et E' sont symétriques par rapport à (BC)

b) Montrer que les pts B, A, E et A' sont situés sur un même cercle $\mathscr{C}_1$ que l'on précisera puis construire $\mathscr{C}_1' = r(\mathscr{C}_1)$

Ex 6

ABD est un triangle équilatéral direct. Soit I le milieu de [BD] et G le centre de gravité du triangle ABD. Soit r la rotation directe de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$

1) a) Construire $C = r(B)$

b) Montrer que $r(C) = D$

2) a) Construire le pt $J = r(I)$

b) Montrer que les pts A, J et D sont alignés

3) a) Construire le pt $E = r(D)$

b) Montrer que (AD) est la médiatrice de [CE]

4) Soit G' le barycentre des pts (A, 1) et (J, 2), montrer que $r(G) = G'$

Ex N° 1:

1°) a) $u_n = 2n - 8 \quad n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = (2(n+1) - 8) - (2n - 8)$
$= 2$

donc (u_n) est une S.A de raison $r = 2$ et de 1ère terme $u_0 = 2\times 0 - 8 = -8$

b) $u_5 = 10 - 8 = 2$

$u_6 = 12 - 8 = 4$

$u_7 = 14 - 8 = 6$

$u_5 \times u_6 \times u_7 = 2\times 4\times 6 = 48$

2°) a) $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{-8 + 2n - 8}{2}\right)$

$= (n+1)\left(\frac{n-8}{2}\right)$

car S_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite A (u_n)

b) $S_n = 22$ ssi $(n+1)\left(\frac{n-8}{2}\right) = 26$

$(n+1)(n-8) = 52$

ssi $n^2 - 8n + n - 8 - 52 = 0$

ssi $n^2 - 7n - 60 = 0$

$\Delta = 49 + 240 = 289$

$n = \frac{7 - 17}{2} = -5$ imp

$\boxed{n = \frac{7+17}{2} = 12}$

b) $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{20}$

$= 21\times\left(\frac{u_0 + u_{20}}{2}\right)$

$S = 21\times\left(\frac{-8 + 32}{2}\right) = 21\times 12 = 252$

4) a) $V_n = u_{3n+1}$

$= 2(3n+1) - 8 = 6n + 2 - 8$

$= 6n - 6 \ (n \in \mathbb{N})$

$V_{n+1} - V_n = (6(n+1) - 6) - (6n - 6)$

$= 6$

d'où (V_n) est une S.A de raison $r' = 6$ et de 1er terme $V_0 = -6$

b) $T = u_1 + u_4 + u_7 + \dots + u_{40}$

$= u_{3\times 0+1} + u_{3\times 1+1} + u_{3\times 2+1} + \dots + u_{3\times 13+1}$

$= V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{13}$

$= 14\times\left(\frac{V_0 + V_{13}}{2}\right) = 14\left(\frac{-6 + 6\times 13 - 6}{2}\right)$

$= 14\times 33 = 462$

Ex N° 2:

1°) $u_0 = 1$.

$u_1 + u_2 + u_3 = 15$

$u_0 + r + u_0 + 2r + u_0 + 3r = 15$

car (u_n) est une S.A de raison r et de 1er terme u_0 donc $u_n = u_0 + nr \quad n \in \mathbb{N}$

$3u_0 + 6r = 15$

$r = \frac{15 - 3u_0}{6} = \frac{15 - 3}{6} = \frac{12}{6} = 2$

2°) $u_n = u_0 + nr$

$\boxed{u_n = 1 + 2n \quad n \in \mathbb{N}}$

3°) a) $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$

$= (n+1)\left(\frac{1 + 1 + 2n}{2}\right) = (n+1)(n+1) = (n+1)^2$

b) $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 61 + 63$

$= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{30} + u_{31}$

$= S_{31} = (31+1)^2 = 32^2 = 1024$

Librairie 18 Janvier
Rue Tahar Kammoun
Immeuble Rahma-SFAX
Tél:22 740 480

Ex N° 3.

1°) a) $\begin{cases} u_3 + u_9 = -38 \\ u_{10} = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} u_0 + 3r + u_0 + 9r = -38 \\ u_0 + 10r = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2u_0 + 12r = -38 \\ u_0 + 10r = -3 \end{cases}$

$\begin{cases} u_0 + 6r = -19 \\ u_0 + 10r = -31 \end{cases}$

$4r = -12 \longrightarrow r = \frac{-12}{4} = -3$

$u_0 = -31 - 10r$

$= -31 + 30 = -1$

d'où $u_0 = -1$ et $r = -3$

$(\underbrace{u_n = u_0 + nr \quad n \in \mathbb{N}}_{S.A})$

b) (u_n) est une S.A de raison $r = -3$ et de 1er terme $u_0 = -1$

donc $u_n = u_0 + nr \quad n \in \mathbb{N}$

$\boxed{u_n = -1 - 3n \quad n \in \mathbb{N}}$

2°) a) $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$

$= 31 \times \left(\frac{u_0 + u_{30}}{2}\right)$ (Som de 31 1er termes de la S.A (u_n))

$= 31 \times \left(\frac{-1 - 1 - 3 \times 30}{2}\right)$

$= 31 \times (-44) = -1364$

b) $S_1 = u_{10} + u_{11} + \dots + u_{30}$

$= 21 \times \left(\frac{u_{10} + u_{30}}{2}\right)$

$= 21 \times \left(\frac{-1 - 3\times 10 - 1 - 3 \times 30}{2}\right)$

$= 21 \times (-61) = -1281$

c) $S_1 - S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$

$= -1364 - (-1281)$

$= -1364 + 1281 = -83$

3) a) $S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1}$

$= (n-2)\left(\frac{u_2 + u_{n-1}}{2}\right)$

$= (n-2)\left(\frac{-7 - 1 - 3(n-1)}{2}\right)$

$= (n-2)\left(\frac{5 - 3n}{2}\right)$

b) $S_n = -187$?

$(n-2)\left(\frac{5-3n}{2}\right) = -187$

$(n-2)(5-3n) = -374$

$5n - 3n^2 - 10 + 6n = -374$

$-3n^2 + 11n - 10 + 374 = 0$

$-3n^2 + 11n + 364 = 0$

$\Delta = 11^2 + 12 \times 364 = 4489$

$n = \frac{-11 - 67}{-6} = \frac{78}{6} = 13$

$n = \frac{-11 + 67}{-6}$ (à rej.)

4) $v_n = 10n - 1 - 1 - 6n$

$v_n = -2 + 4n \quad n \in \mathbb{N}$

$v_{n+1} - v_n = (-2 + 4(n+1)) - (-2 + 4n)$

$= 4$

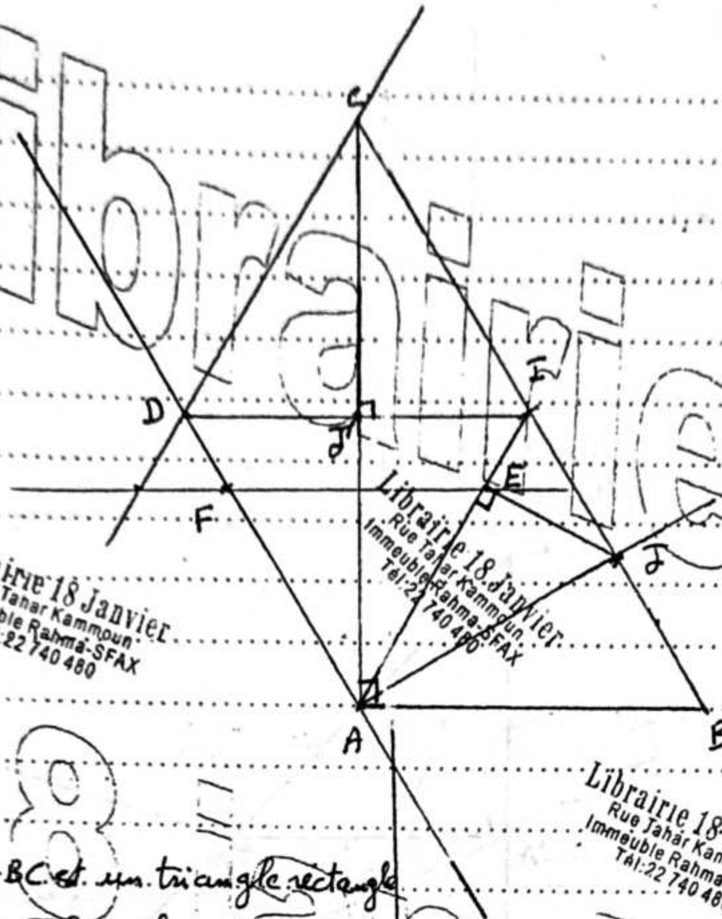
d'où (v_n) est une S.A de raison $r' = 4$

$A = v_7 + v_8 + \dots + v_{15}$

$= 9 \times \left(\frac{v_7 + v_{15}}{2}\right) = 9 \times \left(\frac{26 + 58}{2}\right)$

$A = 378$

Ex N°4 :



1°) on a ABC est un triangle rectangle en A et I le milieu de [BC]

donc IA = IB = IC

d'où : IA = IB et $\widehat{ABI} = \frac{\pi}{3}$

donc IAB est un triangle équilatérale

* on a le triangle AIB est équilatéral donc AB = AI

et $\widehat{BAI} = \frac{\pi}{3}$ (sens direct)

donc r(B) = I

2°) a) on a IADC est un losange

car IADC est un # ((AI)//(DC) et (AD)//(IC))

et IA = IC

on a $\widehat{DAI} = \widehat{AIB} = \frac{\pi}{3}$ (Alterne-interne)

d'où AID est un triangle equilatérale

donc AI = AD et $\widehat{IAD} = \frac{\pi}{3}$ (sens direct)

d'où r(I) = D

b) on a J est le milieu de [IB]

or r(J) = J' r(I) = D et r(B) = I

donc J' est le milieu de [ID]

d'où J', I et D sont alignés

3°) on a : $\frac{AE}{AI} = \frac{AF}{AD}$ (Th de Thalès sur le triangle AID et (EF)//(ID), E ∈ (AI) et F ∈ (A

or AI = AD d'où AE = AF

et $\widehat{EAF} = \widehat{IAD} = \frac{\pi}{3}$ car r(I) = D

d'où AE = AF et $\widehat{EAF} = \frac{\pi}{3}$

donc r(E) = F

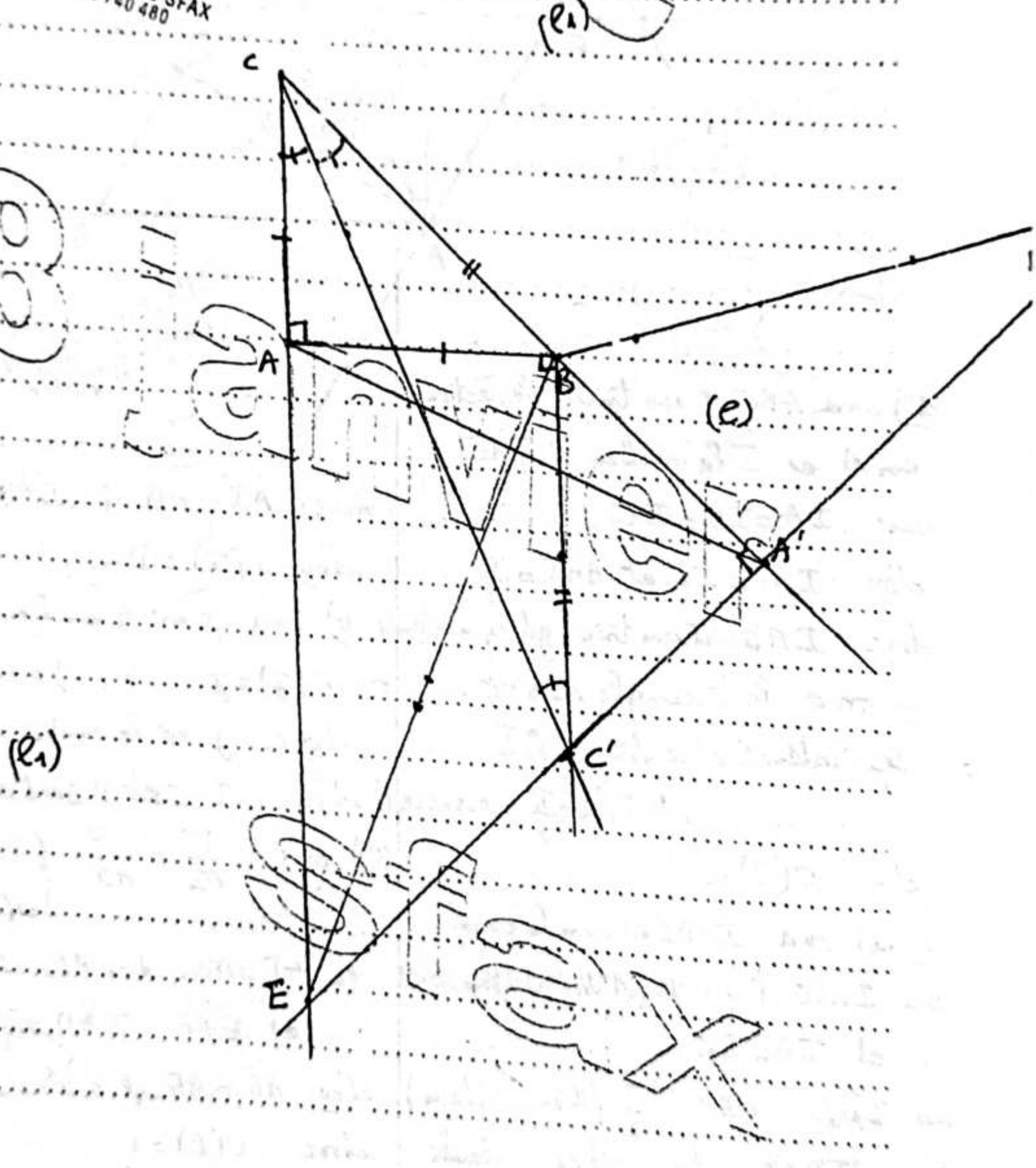
on a $(EJ) \perp (AI)$

et $r((EJ)) = (FJ')$

et $r((AI)) = (AD)$

d'où $(AD) \perp (FJ')$

Ex N° 5 :



1°) a) on a $\widehat{ACC'} = \widehat{CC'B}$ (Alt_int)

car $(AC) // (BC')$ et (CC') leur sécante

or $\widehat{ACC'} = \widehat{C'CB}$

d'où $\widehat{CC'B} = \widehat{C'CB}$

donc le triangle BCC' est isocèle en B.

b) $r(C) = C'$

l'angle de la rotation r est :

$\widehat{CBC'} = \widehat{CBA} + \widehat{ABC'}$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

($\widehat{CBA} = \frac{\pi}{4}$ car ABC est un T. rect. et isocèle en A)

2°) a) on a $\widehat{A'BC'} = \widehat{BCA} = \frac{\pi}{4}$

car $\widehat{A'BC'}$ et $\widehat{BCA}$ angles correspondants et $(AC) // (BC')$ et (CB) leur sécante

d'où $\widehat{ABA'} = \widehat{ABC'} + \widehat{C'BA'}$

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

on a donc $r((AB)) = (A'B)$

or $r((AC))$ est une d^te passant par $C' = r(C)$ et $\perp$ à $(A'B)$

car $(AB) \perp (AC)$

d'où $r((AC)) = (A'C')$

donc on a $\{A\} = (AB) \cap (AC)$

d'où $r(A) \in r((AB)) \cap r((AC))$

$\qquad (A'B) \cap (A'C') = \{A'\}$

alors $r(A) = A'$

b) Le triangle $BA'C'$ est rectangle et isocèle en A'

car $BA'C'$ est rectangle en A'

et $\widehat{A'BC'} = \widehat{BCA} = \frac{\pi}{4}$ (angles correspondants et $(AC) // (BC')$)

d'où $\widehat{A'C'B} = \frac{\pi}{4} = \widehat{A'BC'}$

et on a $\frac{A'B}{A'C} = \frac{A'C'}{A'E}$ (Th de Thalès sur le triang $A'CE$)

or $A'B = A'C'$ donc $A'C = A'E$

d'où le triangle CEA' est rectangle et isocèle en A'

3°) a) on a $r(E) = E'$; $r(A) = A'$ et $r(E) = E'$ et $r(C) = C'$

on a A, C et E sont alignés

donc A', C' et E' sont alignés

or A', C' et E sont alignés

d'où E, A' et E' sont alignés

et on a $(A'B) \perp (EE')$

car $(AB) \perp (AC)$ et $r((AB)) = (A'B)$ et $r((AC)) = (EE')$

or EBE' est isocèle en B

d'où $(BA') = \text{méd}[EE']$
$\qquad (BC)$

donc E et E' sont symétriques % à (BC)

b) on a ABE est un triangle rectangle en

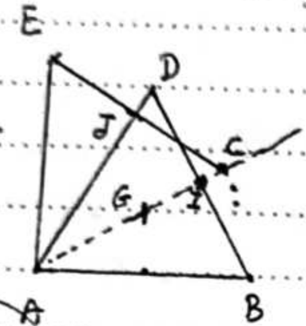
donc $[EB]$ est l'hyp diamètre de ABE

qui est un diamètre du triangle rectangle $A'BE$

d'où A, B, E et A' se situent sur le même cercle $(\mathcal{C}_1)$ de diamètre [EB]

$(\mathcal{C}'_1) = r(\mathcal{C}_1)$ est un cercle de diamètre [E'B]

Ex N°6



1°) a) $C = r(B)$ donc $AC = AB$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$ (sens direct)

b) on a $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$

et ABD triangle équilatéral

et I est le milieu de [BD]

donc $\widehat{BAI} = \frac{\pi}{6}$

d'où $C \in (AI)$

donc $\widehat{CAD} = \frac{\pi}{6}$ et $AC = AD$

d'où $r(C) = D$ car $AB = AD$ et $AB = AC$

2°) a) $r(I) = J$ donc $AJ = AI$ et $\widehat{IAJ} = \frac{\pi}{6}$ (sens direct)

b) on a $I \in [AC]$

donc $r(I) = J \in r([AC]) = [AD]$

donc $J \in [AD]$ tque $AJ = AI$

d'où A, J et D sont alignés

3°) a) $E = r(D)$ donc $AE = AD$ et $\widehat{DAE} = \frac{\pi}{6}$ (sens direct)

b) $\widehat{CAE} = \widehat{CAD} + \widehat{DAE} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

et on a $AC = AD$ car $r(C) = D$

et $AD = AE$ car $r(D) = E$

d'où $AC = AE$ et $\widehat{CAE} = \frac{\pi}{3}$

donc le triangle CAE est équilatérale

et [AD) est la bissectrice de $\widehat{CAE}$

d'où $(AD) = $ méd. [CE]

4°) on a G est le centre de gravité du triangle ABD et $I = B * D$

donc $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

ssi $3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AI} = \vec{0}$

ssi $3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$

ssi $\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$

ssi $-\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$

ssi $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}$

ssi G est le b.p.p. (A,1) et (I,2)

donc $r(G)$ est le b.p.p. (A,1) et (J,2)

car $r(A) = A$ et $r(I) = J$

on a G' est le b.p.p. (A,1) et (J,2)

d'où $r(G) = G'$