Prof : Meftah Mongi | Classe : 2sc2

Devoir de controle n°

L.P.S

Exercice n°1 : *Choisir la seule bonne réponse*

1) La courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{x+1}$ dans $(o, \vec{i}, \vec{j})$ est une hyperbole de centre :

a) $\Omega(-1;1)$ *b)* $\Omega(1;1)$ *c)* $\Omega(-1;-1)$

5/ On donne $g(x) = f(x-3)$ pour tout x de IR alors ζ_g est l'image de ζ_f par la translation de vecteur :

a) $3\vec{i}$ b) $3\vec{j}$ c) $-3\vec{i}$

Exercice n°2

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, on désigne par C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/a)Vérifier que $f(x) = (x-1)^2 - 4$

b)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de C_f puis la construire

~~2/a) Etudier les variations de g sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$~~

$a + \frac{2}{x-1}$

b) Dresser le tableau de variation de g puis construire C_g

c) Résoudre graphiquement dans IR : g(x)<0 puis $|g(x)| < 1$

3/a) Déterminer les réels b et c tels que $x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = (x+1)(x^2 + bx + c)$

b) En déduire les coordonnées des points communs de C_f et C_g

4/ Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} h(x) = \inf(f(x); g(x)) & \text{si } x \in]-\infty;-1] \cup [2+\sqrt{2};+\infty[\\ h(x) = |f(x)| & \text{si } x \in [-1; 2+\sqrt{2}] \end{cases}$

a)Construire C_h puis dresser son tableau de variation

b)Déterminer les réels p admettant exactement deux antécédents par h de même signe graphique

Exercice n° 3

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé on donne les points A (4 , -2) ; B (2 ,4)

1/ Donner une équation de cercle (C) de diamètre $[AB]$

2/ a) Donner une équation de la médiatrice D de $[OA]$

b) déterminer les coordonnées des points communs E et F de D de (C)

3/ Soit le cercle (C') : $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$

a) Montrer que (C') est un cercle dont déterminera son centre I et son rayon R

b) Montrer que (C') et D sont tangents

c) Montrer que les cercles (C) et (C') sont sécants en deux points P et Q que l'on précisera

d) Calculer l'aire du triangle IEF

4/ Soit la droite D_m : $x + (1 - m)y + 3 = 0$

Etudier la position de (C) et D_m

5/ Soit Cm l'ensemble des points M(x , y) tel que $x^2 + y^2 + 2mx + 2y + m^2 + 4m - 3 = 0$ où $m \in IR$

a)Déterminer suivant m ; la nature de C_m

b)Lorsque Cm est un cercle étudier la position de C_m et C

c)Déterminer les points communs de C_{-1} et D

Math

Correction du devoir de contrôle n°6

Classe : 2 sc

Exercice n°1

1) a)

2) c)

Exercice n°2

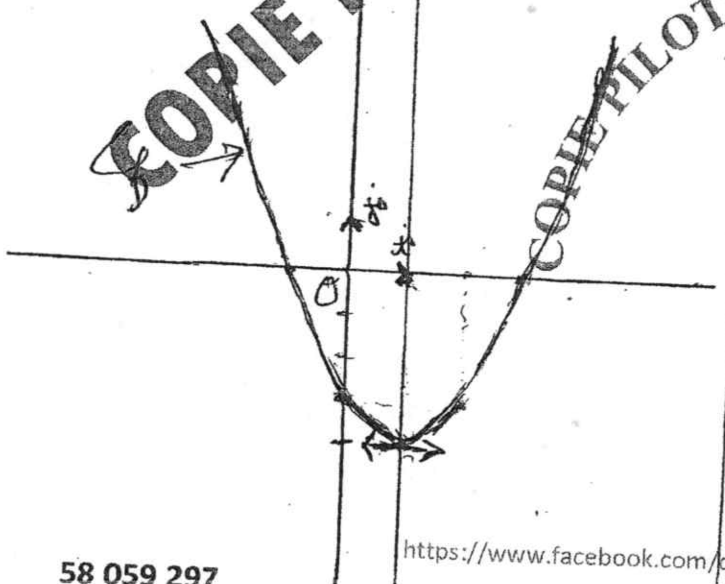
$f(x) = x^2 - 2x - 3$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

1) a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
$= x^2 - 2x + 1 - 4$
$= (x-1)^2 - 4$

b) [illegible]

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	-3	-4	-3	0

$\Rightarrow$ C_f est une parabole de sommet $(1, -4)$ et d'axe de symétrie $x = 1$



2) a) g existe si et seulement si $x - 1 \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$g(x) = \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1+2}{x-1} = \dfrac{x-1}{x-1} + \dfrac{2}{x-1}$

$= 1 + \dfrac{2}{x-1}$

Soient $a, b \in \,]-\infty, 1[$ tq $a \leq b$

$g(b) - g(a) = 1 + \dfrac{2}{b-1} - \left(1 + \dfrac{2}{a-1}\right)$

$= \dfrac{2}{b-1} - \dfrac{2}{a-1} = \dfrac{2(a-b)}{(b-1)(a-1)} \leq 0$

de même sur $]1, +\infty[$

$\Rightarrow$ g est décroissante sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$

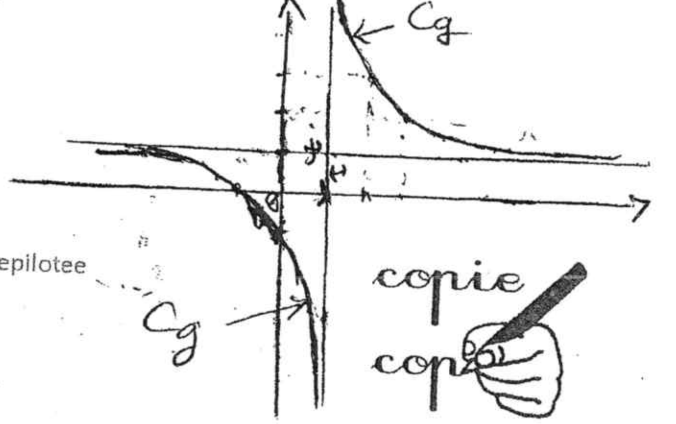
x	$-\infty$		1		$+\infty$
g	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \dfrac{2}{x-1} = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 1 + \dfrac{2}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1 + \dfrac{2}{x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{2}{x-1} = 1$



c) $g(x) < 0$ signifie que C_g est au dessous de l'axe des abscisses signifie $x \in]-1,1[$

$\Rightarrow S_{\mathbb{R}} =]-1,1[$

d) $|g(x)| < 1 \Rightarrow -1 < g(x) < 1$

$\Rightarrow x \in]-\infty, 0[$

donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, 0[$

3) a) $x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = (x+1)(x^2 + bx + c)$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = x^3 + bx^2 + cx + x^2 + bx + c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (b+1) = -3 \\ c+b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 2 \end{cases}$

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = \frac{x+1}{x-1}$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3)(x-1) = x+1$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 3x + 3 = x+1$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = x + 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 2) = 0$

$\Delta' = 2^2 - 2 = 2$

donc $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ et

donc $(x+1)(x^2 - 4x + 2)$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $2 - \sqrt{2}$ ou $2 + \sqrt{2}$

donc les coordonnés des points communs de C_f et C_g sont $(-1, g(-1))$, $(2-\sqrt{2}, g(2-\sqrt{2}))$ et $(2+\sqrt{2}, g(2+\sqrt{2}))$

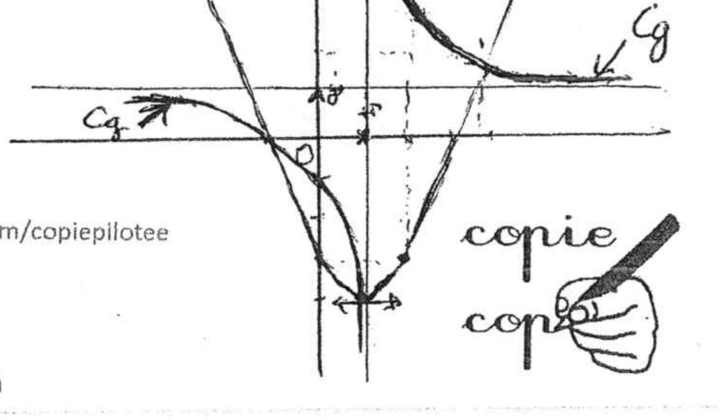
$g(-1) = 0$

$g(2-\sqrt{2}) = \frac{2-\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}-1} = \frac{3-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

$g(2+\sqrt{2}) = \frac{2+\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}-1} = \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

donc $(-1, 0)$, $\left(2-\sqrt{2}, \frac{3-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)$ et $\left(2+\sqrt{2}, \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\right)$ sont les coordonnés des points communs de C_f et C_g.

4/ $h(x) = \begin{cases} \inf(f(x); g(x)) \text{ si } x \in]-\infty, -1] \cup [2+\sqrt{2}, +\infty[\\ |f(x)| \text{ si } x \in [-1, 2+\sqrt{2}] \end{cases}$



$d(I,\Delta) = IF =$ le rayon de C

$\Rightarrow \Delta$ est tangente à (C)

$M(x,y) \in \Delta \cap (C) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-2 \\ (x-2)^2+(y-4)^2=20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-2 \\ (x-2)^2+(-2x-2-4)^2=20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-2 \\ x^2-4x+4+4x^2+24x+36=20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-2 \\ 5x^2+20x+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-2 \\ x^2+4x+4=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-2 \\ (x+2)^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-2 \end{cases}$ donc $\Delta \cap (C) = \{(-2,2)\} = \{F\}$

2)a/ Δ' médiatrice de $[FJ]$

$M(x,y) \in \Delta' \Rightarrow FM = JM$

$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+y^2}$

$\Rightarrow (x+2)^2+(y-2)^2 = (x-4)^2+y^2$

$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-4y+4 = x^2-8x+16+y^2$

$\Rightarrow 10x-4y-8=0$

donc $(\Delta') : 5x-2y-4=0$

b/ $K(x,y) \in \Delta \cap \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-2 \\ 5x-2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-2 \\ 5x-2(-2x-2)-4=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y=-2x-2 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=0 \end{cases}$ donc $K(0,-2)$

on sait $(IF) \perp (FK)$ car Δ est tangente à (C) en F

$\vec{FI}=\binom{4}{2}$ et $\vec{KJ}=\binom{4}{2} \Rightarrow \vec{FI}=\vec{KJ}$

$\Rightarrow$ FIJK est un rectangle

or KI = KF car $K \in \Delta'$ med $[FJ]$

$\Rightarrow$ FIJK est un carré.

c/ la tangentes à C issues de K

sont $(KF) = \Delta$ et (KJ)

4) $C' \{ M(x,y) \in P / MF^2 + MJ^2 = 40 \}$

a/ $MF^2 + MJ^2 = \left(\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-4)^2 + y^2}\right)^2$

$= (x+2)^2 + (y-2)^2 + (x-4)^2 + y^2$

$= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + x^2 - 8x + 16 + y^2$

$= 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 24$

$MF^2 + MJ^2 = 40 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 24 = 40$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 16 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$

donc $(C') : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$

b/ $x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 8 = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10 = (\sqrt{10})^2$

$\Rightarrow (C') : (x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{10})^2$

si $H = F * J$ $\quad H(1,2)$

$\Rightarrow$ H est le centre de (C') et H est le centre du carré FIJK

donc (C') est le cercle circonscrit au carré FIJK.