Lycée Pilote Sfax	Devoir de synthèse n°1 Mathématiques	1ère année
8.Décembre 2014		Durée : 1 H 30

1O4

Exercice 1 : (5 points)

1) a) Développer $(\sqrt{15}-3\sqrt{5})^2$ *et* $(5-3\sqrt{3})^2$

b) Comparer les réels $\sqrt{15}-3\sqrt{5}$ *et* $5-3\sqrt{3}$

2) Soient les réels a , b *et* c tels que $a=\frac{\sqrt{60-30\sqrt{3}}}{\sqrt{5}}$; $b=\frac{4\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ et $c=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

a) Simplifier a *et* b.

b) Montrer que a *et* b sont opposés et que a *et* c sont inverses.

c) Calculer alors la valeur de $A=\left(\frac{a^2c}{b}\right)^5\left(\frac{b}{a^2c}\right)^4$

Exercice n°2 : (3,5 points)

Soit $A=(x+2)^2-25+(x-3)^2$ *et* $B=(x-2)^3-1-(x-3)(x-1)$

1) Factoriser A et B.
2) Vérifier que $B-A=x(x-3)(x-6)$.
3) Sachant que $|2x-3|\leq 1$, encadrer $B-A$.

Exercice n°3 : (3,5 points)

Soient x et y deux réels strictement négatifs tel que $x<y$.

1) a) Comparer $\frac{x}{y}$ *et* $\frac{y}{x}$.

b) En déduire que $\frac{x+2y}{y}>\frac{2x+y}{x}$.

2) Montrer que $\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}<y-x$

Exercice n°4 : (8 points)

ABC est un triangle isocèle en A tel que AB= AC = 6 et $\widehat{BAC}=30°$.

Soit I le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de B sur (AC).

1) Calculer AH , BH et HC.

2) a) Evaluer l'angle $\widehat{HCB}$.

b) Montrer alors que $tan 75°=2+\sqrt{3}$.

3) Les droites (BH) et (AI) se coupent en un point L.

a) Evaluer l'angle $\widehat{ALH}$.

b) Calculer alors LH.

4) Soit E le point de la demi-droite [AB) tel que $AE=4\sqrt{3}$.

Montrer que les droites (BH) et (EC) sont parallèles.

5) La parallèle à la droite (AB) passant par C coupe (AI) en J.

a) Montrer que le triangle AJC est isocèle en C.

b) Les droites (AJ) et (EC) se coupent en K. Montrer que $\frac{KE}{KC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

11

Lycée Pilote Sfax — **Devoir de synthèse n° 1** — $1^{ère}$ année

Exercice 1

1) a) • $(\sqrt{15}-3\sqrt{5})^2=(\sqrt{5}\times\sqrt{3}-3\sqrt{5})^2=[\sqrt{5}\times\sqrt{3}(1-\sqrt{3})]^2=\sqrt{5}^2\times\sqrt{3}^2\times(1-\sqrt{3})^2=5\times3\times(1^2+\sqrt{3}^2-2\times1\times\sqrt{3})$

$=15(4-2\sqrt{3})=60-30\sqrt{3}$

• $(5-3\sqrt{3})^2=5^2+(3\sqrt{3})^2-2\times5\times3\sqrt{3}=25+27-30\sqrt{3}=52-30\sqrt{3}$

b) On a : $52<60$ donc $52-30\sqrt{3}<60-30\sqrt{3}$ d'où $(5-3\sqrt{3})^2<(\sqrt{15}-3\sqrt{5})^2$

$27>25$ donc $3\sqrt{3}>5$ et $45>15$ donc $3\sqrt{5}>\sqrt{15}$ d'où $5-3\sqrt{3}<0$ et $\sqrt{15}-3\sqrt{5}<0$

et par suite $\sqrt{15}-3\sqrt{5}<5-3\sqrt{3}$

2) a) $a=\dfrac{\sqrt{60-30\sqrt{3}}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{15}-3\sqrt{5})^2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{|\sqrt{15}-3\sqrt{5}|}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}-\sqrt{15}}{\sqrt{5}}=3-\sqrt{3}$

$b=\dfrac{4\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{2}(2\sqrt{3}-3)}{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}=\dfrac{2(2\sqrt{3}-3)}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{2(2\sqrt{3}-3)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\dfrac{2(2\sqrt{3}+2\sqrt{3}^2-3-3\sqrt{3})}{1^2-\sqrt{3}^2}$

$b=\dfrac{2(2\sqrt{3}+2\times3-3-3\sqrt{3})}{1-3}=\dfrac{2(3-\sqrt{3})}{-2}=\sqrt{3}-3$

b) • $a+b=3-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3=0$ donc a et b sont opposés

• $a\times c=\dfrac{(3-\sqrt{3})\times(3+\sqrt{3})}{6}=\dfrac{3^2-\sqrt{3}^2}{6}=\dfrac{9-3}{6}=\dfrac{6}{6}=1$ donc a et b sont inverses

c) $b=-a$ et $a\times c=1$

$A=\left(\dfrac{a^2c}{b}\right)^5\times\left(\dfrac{b}{a^2c}\right)^4=\left(\dfrac{a^2c}{-a}\right)^5\times\left(\dfrac{-a}{a^2c}\right)^4=(-ac)^5\times\left(\dfrac{-1}{ac}\right)^4=(-1)^5\times(-1)^4=(-1)^9=-1$

Exercice n° 2

1) $A=(x+2)^2-25+(x-3)^2=(x+2)^2-5^2+(x-3)^2=(x+2-5)(x+2+5)+(x-3)^2$

$A=(x-3)(x+7)+(x-3)(x-3)=(x-3)(x+7+x-3)=(x-3)(2x+4)=2(x-3)(x+2)$

$B=(x-2)^3-1-(x-3)(x-1)=(x-2)^3-1^3-(x-3)(x-1)=(x-2-1)((x-2)^2+(x-2)+1^2)$

$-(x-3)(x-1)=(x-3)(x^2-4x+4+x-2+1)-(x-3)(x-1)=(x-3)(x^2-3x+3-x+1)$

$B=(x-3)(x^2-4x+4)=(x-3)(x-2)^2$

2) $B-A=(x-3)(x^2-4x+4)-(x-3)(2x+4)=(x-3)(x^2-4x+4-2x-4)=(x-3)(x^2-6x)$

$B-A=x(x-3)(x-6)$

3) $|2x-3|\leq1$ éq $-1\leq2x-3\leq1$ éq $-1+3\leq2x\leq1+3$ éq $2\leq2x\leq4$ éq $1\leq x\leq2$

donc • $1-3\leq x-3\leq2-3$ éq $-2\leq(x-3)\leq-1$ éq $1\leq(3-x)\leq2$

$1-6 \leq x-6 \leq 2-6$ éq $-5 \leq (x-6) \leq -4$ éq $4 \leq (6-x) \leq 5$

$B-A = x(x-3)(x-6) = x(3-x)(6-x)$ et $1 \leq x \leq 2$; $1 \leq (3-x) \leq 2$; $4 \leq (6-x) \leq 5$

d'où $1 \times 1 \times 4 \leq B-A = x(3-x)(6-x) \leq 2 \times 2 \times 5$ soit $4 \leq B-A \leq 20$

Exercice n°3

$x < y < 0$ donc $xy > 0$ et $x^2 > y^2$

1) a) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{x^2-y^2}{xy} > 0$ car $x^2 > y^2$ d'où $\frac{x}{y} > \frac{y}{x}$

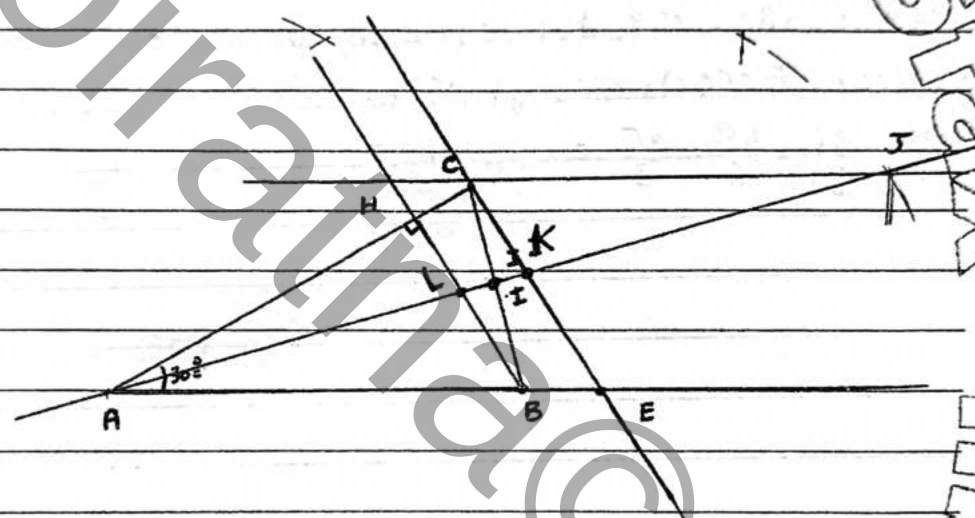
b) on a : $\frac{x}{y} > \frac{y}{x}$ donc $\frac{x}{y} + 2 > \frac{y}{x} + 2$ d'où $\frac{x+2y}{y} > \frac{y+2x}{x}$

2) $\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = \frac{x^3-y^3}{xy} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy} < 0$ car $x < y < 0$; $x^2 > 0$; $xy > 0$ et $y^2 > 0$

$y - x > 0$ car $y > x$.

Conclusion $\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} < 0 < y-x$ d'où $\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} < y-x$

Exercice n°4



1) on a ABC est isocèle en A ; $AB = AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 30°$.

H le projeté orthogonal de B sur (AC) donc ABH est rectangle en H

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AH}{AB}$ donc $\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{6}$ d'où $AH = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

$\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BH}{AB}$ donc $\sin(30) = \frac{1}{2} = \frac{BH}{6}$ d'où $BH = 6 \times \frac{1}{2} = 3$

$HC = AC - AH = 6 - 3\sqrt{3}$

2) a) ABC est isocèle en A et $\widehat{BAC} = 30°$ donc $\widehat{HCB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}(180 - \widehat{BAC})$

$\widehat{HCB} = \frac{1}{2}(180 - 30) = \frac{1}{2} \times 150 = 75°$

b) $\tan(75) = \tan H\hat{C}B = \frac{BH}{CH} = \frac{3}{6-3\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \frac{2+\sqrt{3}}{1} = 2+\sqrt{3}$

3) a) $L = (BH) \cap (AI)$; I est le milieu de [BC] et ABC isocèle en A donc [AI] est la bissectrice de $B\hat{A}C$ d'où $H\hat{A}L = \frac{1}{2} \times B\hat{A}C = \frac{1}{2} \times 30° = 15°$

le triangle AHL est rectangle en H donc $A\hat{L}H = 90° - H\hat{A}L = 90 - 15 = 75°$

b) $\tan(75) = 2+\sqrt{3}$ donc $\tan(A\hat{L}H) = \frac{AH}{HL} = \frac{3\sqrt{3}}{HL} = 2+\sqrt{3}$ d'où $LH = \frac{3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

$LH = \frac{3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{3}-3\sqrt{3}^2}{2^2-\sqrt{3}^2} = \frac{6\sqrt{3}-3\times3}{4-3} = \frac{6\sqrt{3}-9}{1} = 6\sqrt{3}-9$

4) $\frac{AE}{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{AC}{AH} = \frac{6}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ donc $\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AH}$ d'où d'après la réciproque de Thalès (BH) // (CE)

5) a) (CJ) // (AB) ; $C\hat{J}A$ et $B\hat{A}J$ sont alternes internes donc $C\hat{J}A = B\hat{A}J$

or $B\hat{A}J = B\hat{A}I = I\hat{A}C = 15°$ d'où $C\hat{J}A = C\hat{A}J$ par suite AJC est isocèle en C

b) (CJ) // (AE) ; $E \in (CK)$; $A \in (KJ)$ d'après Thalès

$\frac{KE}{KC} = \frac{KA}{KJ} = \frac{AE}{JC} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ car $JC = CA = 6$