Lycée Pilote Sfax	Devoir contrôle 3	1année: 1 -8
06 -03- 2017	Mathématiques	M^R : Hadjkacem

Exercice 1 : (8 points) 5

Soit f la fonction linéaire de coefficient $\frac{-2}{3}$

1) a) Déterminer l'image de -12 par f

   b) Déterminer l'antécédent de $4\sqrt{3}$ par f

   c) Résoudre dans IR : $\frac{1}{3}x^2 < |f(x)| \leq x^2$

2) Soit Δ la représentation graphique de f dans un repère (O, I, J)

   a) Tracer Δ

   b) Déterminer graphiquement l'image de 6 par f et l'antécédent de 2 par f

   c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 2$

3) a) Le point A $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$ appartient-il à Δ ?

   b) Déterminer m pour que les points E $(|m|, \frac{2}{3}m)$ et F $(2m^3, -\frac{1}{3}m)$ soient *sur* Δ

Exercice 2 : (4 points)

Ci-dessous le tableau de signe d'une expression de la forme $ax + b$, $(a \neq 0$ *et* $b \in IR)$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$ax+b$		+	0	−	

1) Déterminer le signe de a et b

2) Comparer les réels $\left|\frac{a}{b}\right|$ *et* $\frac{1}{\pi}$

2) Résoudre dans IR : a) $|ax + b| = ax + b$; b) $(a x+ b) (x- 3) < 0$

Exercice 3 : (8 points)

Soit un triangle ABC isocèle en A et H son orthocentre et on désigne par O le milieu de $[BC]$

1) Construire B' et C' images respectives de B et C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$

2) Montrer que le quadrilatère BCC'B' est un rectangle

3) a) Déterminer et construire les droites Δ *et* D images respectives de (BH) et (CH) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$

   b) Montrer que les droites Δ et D sont sécantes en un point H' et que H est le milieu de $[AH']$

4) Soit O' le milieu du segment $[B'C']$.
   Montrer que O' est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$

5) Soient (ζ) et (ζ') les cercles de diamètres respectifs $[BC]$ *et* $[B'C']$
   La droite (CH) recoupe (ζ) en E et la droite (C'H') recoupe (ζ') en E'
   Montrer que E $\in (AB)$ et que E' est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$

Lycée Pilote Sfax ⑥ $1^{ère}$ année

Devoir de Contrôle 3

Exercice 1

$f(x) = -\frac{2}{3}x$; pour tout $x \in \mathbb{R}$

1) a) $f(-12) = -\frac{2}{3} \times (-12) = 8$

b) $\left.\begin{array}{l} f(x) = -\frac{2}{3}x \\ f(x) = 4\sqrt{3} \end{array}\right\}$ donc $-\frac{2}{3}x = 4\sqrt{3}$ éq à $x = -6\sqrt{3}$

c) $\frac{1}{3}x^2 < |f(x)| \leq x^2$ éq à $\frac{1}{3}x^2 < \frac{2}{3}|x| \leq x^2$ éq $x^2 < 2|x| \leq 3x^2$

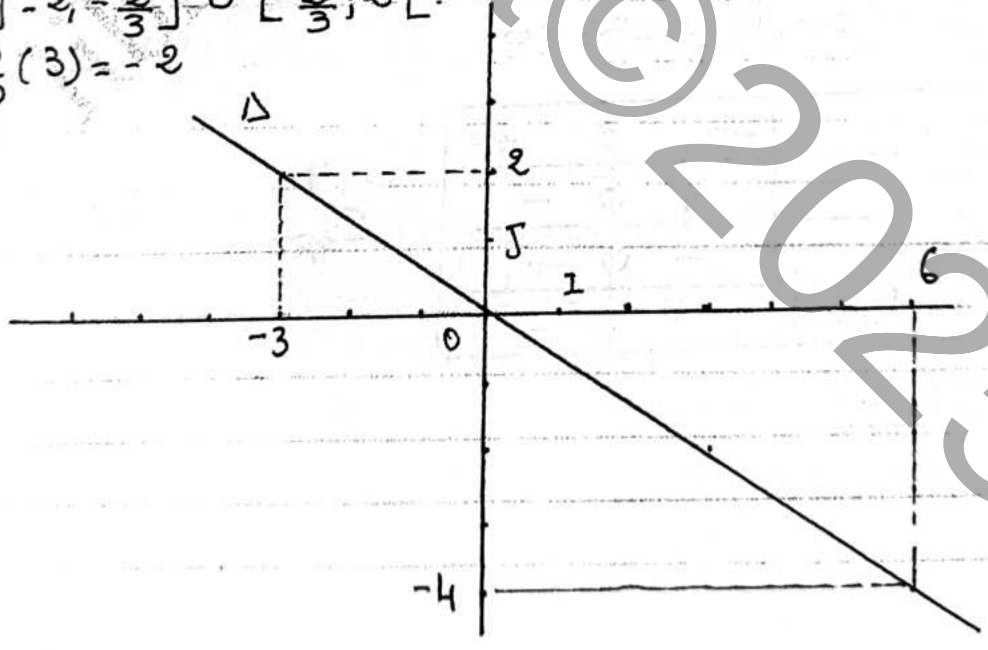
• $x^2 < 2|x|$ éq à $|x|^2 < 2|x|$ éq à $|x|^2 - 2|x| < 0$ éq à $|x|(|x| - 2) < 0$ éq à $|x| - 2 < 0$ et $|x| \neq 0$ éq $|x| < 2$ et $x \neq 0$ éq $x \in]-2,0[\cup]0,2[$

•• $2|x| \leq 3x^2$ éq à $2|x| \leq 3|x|^2$ éq $2|x| - 3|x|^2 \leq 0$ éq à $|x|(2 - 3|x|) \leq 0$ éq à $|x| = 0$ ou $2 - 3|x| \leq 0$ éq à $x = 0$ ou $\frac{2}{3} \leq |x|$ éq à $x = 0$ ou $x \in]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, +\infty[$.

Conclusion $\frac{1}{3}x^2 < |f(x)| \leq x^2$ éq à $(x^2 < 2|x|)$ et $(2|x| \leq 3x^2)$ éq à $(x \in]-2,0[\cup]0,2[)$ et $(x \in]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, +\infty[\cup \{0\})$

$S_{\mathbb{R}} = (]-2,0[\cup]0,2[) \cap (]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, +\infty[\cup \{0\})$
$=]-2, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3} ; 2[$.

2) a) $f(3) = -2$



b) $f(6)=-4$; image de 6 est -4
$f(-3)=2$; l'antécedent de 2 est -3

c) $f(x)<2$; $S_{\mathbb{R}}=]-3,+\infty[$

3) a) $A\left(\frac{3}{\sqrt{2}};-\sqrt{2}\right)$

$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{2}{3}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$ donc $A\in\Delta$

b) $E\left(|m|;\frac{2}{3}m\right)\in\Delta$; $F\left(2m^3;-\frac{1}{3}m\right)\in\Delta$ donc $f(|m|)=\frac{2}{3}m$ et $f(2m^3)=-\frac{1}{3}m$ d'où $-\frac{2}{3}|m|=\frac{2}{3}m$ et $-\frac{2}{3}\times 2m^3=-\frac{1}{3}m$ soit $|m|=-m$ et $4m^3=m$. et par suite $m\in]-\infty,0]$

$4m^3-m=0$ éq à $m(4m^2-1)=0$ éq à $m=0$ ou $4m^2-1=0$ éq à $m=0$ ou $m^2=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ éq $m=0$ ou $m=-\frac{1}{2}\in]-\infty,0]$ ou $m=\frac{1}{2}\notin]-\infty,0]$. Soit $m=0$ ou $m=-\frac{1}{2}$.

Exercice 2

1) $ax+b=0$ éq à $x=-\frac{b}{a}=3$; $ax+b<0$ pour $x\in]3,+\infty[$ donc $a<0$; $b=-3a>0$

2) $\left|\frac{a}{b}\right|=\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}$; $3<\pi$ donc $\frac{1}{3}>\frac{1}{\pi}$ càd $\left|\frac{a}{b}\right|>\frac{1}{\pi}$.

3) a) $|ax+b|=ax+b$ éq à $ax+b\geq 0$ éq à $x\in]-\infty,3]$.

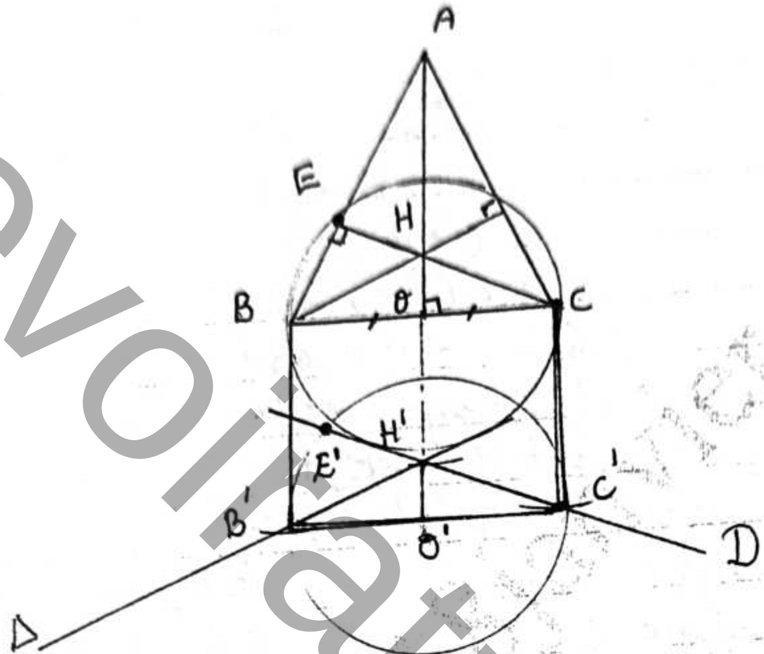
$S_{\mathbb{R}}=]-\infty,3]$.

b) $(ax+b)(x-3)<0$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$ax+b$	+	0	−
$x-3$	−	0	+
$(ax+b)(x-3)$	−	0	−

$S_{\mathbb{R}}=]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$

Exercice 3



1) B' et C' images respectives de B et C par translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$

donc $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CC'}$.

2) on a : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$ donc BCC'B' est un parallélogramme.

H l'orthocentre du triangle isocèle ABC en H donc $(AH) \perp (BC)$

et $(AH) // (BB')$ d'où $(BC) \perp (BB')$ et par suite BCC'B'

est un rectangle.

3) a) L'image de (BH) est Δ donc $\Delta // (BH)$ et $B' \in \Delta$.

Δ est la parallèle à (BH) passant par B'.

L'image de (CH) est D donc $D // (CH)$ et $C' \in D$

D est la parallèle à (CH) passant par C'.

b) $H \in (BH)$ donc l'image de H est un point de Δ

$H \in (CH)$ donc l'image de H est un point de D

d'où l'image de H est $H' = \Delta \cap D$.

on a : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HH'}$ donc H est le milieu de [AH].

4) ABC est un triangle isocèle en A et O le milieu de [BC]
la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$ conserve le milieu
donc O' le milieu de [B'C'] est image de O par la
translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$ car l'image de [BC]
est [B'C'] par la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$.

5) H est l'orthocentre de ABC donc $(CH) \perp (AB)$.
$E \in (CH)$ donc $(EC) \perp (AB)$.
$E \in \mathcal{C}[BC]$ donc $(EC) \perp (BE)$ d'où $(AB) // (BE)$; B est
un point commun d'où E, A et B sont alignés. càd $E \in (AB)$
Image de O est O' ; Image [BC] est [B'C'] donc
Image $\mathcal{C}([BC])$ est $\mathcal{C}'([B'C'])$. $E \in \mathcal{C}$ donc (image de E) $\in \mathcal{C}'$
$E \in (HC)$ donc (image de E) $\in D$ par translation
de vecteur $\overrightarrow{AH}$; d'où (image de E) $\in \mathcal{C}' \cap D = \{C', E'\}$
or $C \neq E$ donc (image de E) $\neq C'$ d'où image de
E est E' par translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$.