LYCEE PILOTE SFAX	Devoir de contrôle 2	M^r : Hadjkacem
Novembre 2019	(Mathématiques)	Classe : 2sc7

Exercice 1 :(7 points)

I) 1) *Résoudre dans IR l'inéquation* $t^2 - 9t - 36 \geq 0$

2) *Résoudre alors l'inéquation* $(x^2+4x)^2 - 9(x^2+4x) - 36 \geq 0$

II) *Résoudre dans IR l'inéquation :* $|x^2-1| + \frac{1}{x} \leq |2x^2+x-3| + \frac{1}{x}$

III) 1) *Résoudre dans* IR^2 *le système* (S) *à inconnues* $(x;y)$ *avec* $(S) : \begin{cases} x^2+y^2=100 \\ xy=48 \end{cases}$

2) *Soit ABCD un losange de coté 5cm et d'aire 24* cm^2

Déterminer en cm les distances AC et BD sachant que $AC < BD$

Exercice 2 :(5 points)

Soit b un réel et T le trinome du second degré tel que $T(x) = x^2 + bx - 1$, *pour tout* $x \in IR$

1) *Montrer que* $T(x)$ *admet deux racines distinctes et de signe différent qu'on note* x' *et* x''

On ne demande pas de déterminer ses racines et on suppose que $x' < x''$

2) *Déterminer b pour que* x' *et* x'' *soient opposés*

3) *Exprimer en fonction de b le réel* $A = (x')^2 + (x'')^2$

4) a) *Montrer que les réels* $(1-bx')$ *et* $(1-bx'')$ *sont des inverses*

b) *Déduire que lorsque* x' *et* x'' *ne sont pas opposés, le réel* $\frac{1}{b}$ *n'appartient pas à l'intervalle* $[x';x'']$

Exercice 3 :(8 points)

Soit ABCD un rectangle du plan

On désigne par I le barycentre de $(A;1),(B;3)$ *et par J le barycentre de* $(B;2),(C;1)$

1) *Faire une figure*

2) *Soit (E) l'ensemble des points M du plan tel que* $(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB})$ *et* $(2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$ *soient orthogonaus*

a) *Vérifier que le point B appartient à (E)*

b) *Déterminer l'ensemble (E)*

3) *Les droites (IJ) et (CD) se coupent en un point K*

a) *Montrer que K est le barycentre de* $(I;2),(J;-3)$

b) *Montrer que K est le barycentre de* $(C;3),(D;-1)$

4) *Soit O le milieu du segment [BC] et G le barycentre de* $(A;1),(B;3),(K;2)$

a) *Montrer que* $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) *Déduire que les droites (AD) et (OG) sont parallèles*

Lycée Pilote F H Sfax — Devoir de contrôle N°2 — Mr Hadj Kacem

2019-2020 — 2sc 7

Exercice 1 : (7 pts)

I/ 1) Soit le binôme $A(t) = t^2 - 9t - 36$

$\Delta = 225 > 0$, $t_1 = -3$ et $t_2 = 12$

$a = 1 > 0$ Donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -3] \cup [12, +\infty[$

2) $(x^2+4x)^2 - 9(x^2+4x) - 36 \geq 0$

équivaut $t^2 - 9t - 36 \geq 0$; (Il suffit de poser $t = x^2 - 4x$)

équivaut $t \leq -3$ ou $t \geq 12$

équivaut $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ | $x^2 - 4x - 12 \geq 0$

Soit $T(x) = x^2 - 4x + 3$ | Soit $T'(x) = x^2 - 4x - 12$

$a + b + c = 0$ | $\Delta = 64 > 0$

$x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ | $x' = -2$ et $x'' = 6$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$T(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$T'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_1 = [1, 3]$ | $S_2 =]-\infty, -2] \cup [6, +\infty[$

Donc $S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -2] \cup [1, 3] \cup [6, +\infty[$

II/ Condition : $x \neq 0$

Dans $\mathbb{R}^*$: $|x^2 - 1| + \frac{1}{x} \leq |2x^2 + x - 3| + \frac{1}{x}$

équivaut $|x^2 - 1| \leq |2x^2 + x - 3|$

$|x^2 - 1|^2 \leq |2x^2 + x - 3|^2$; (a et $b \in \mathbb{R}_+$)

équivaut $(2x^2 + x - 3)^2 - (x^2 - 1)^2 \geq 0$

$(x^2 + x - 2)(3x^2 + x - 4) \geq 0$

Soit $T(x) = x^2 + x - 2$ | Soit $T'(x) = 3x^2 + x - 4$

$a + b + c = 0$ | $a + b + c = 0$

$x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ | $x' = 1$ et $x'' = -4/3$

x	$-\infty$		-2		$-4/3$		1		$+\infty$
$T(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$T'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$T(x)T'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Donc $S_{\mathbb{R}} = \left(]-\infty, -2] \cup [-4/3; +\infty[\right) \cap \mathbb{R}^*$

$=]-\infty, -2] \cup [-4/3; 0[\cup]0, +\infty[$

III/ 1) $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ xy=48 \end{cases}$ équivaut $\begin{cases} (x+y)^2-2xy=100 \\ xy=48 \end{cases}$

équivaut $\begin{cases} (x+y)^2=196 \\ xy=48 \end{cases}$

équivaut $\begin{cases} x+y=14 \\ xy=48 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y=-14 \\ xy=48 \end{cases}$

Soit l'équation $y^2-14y+48=0$, $\Delta=4>0$, $y_1=6$ et $y_2=8$

Donc $\begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$

Soit l'équation $z^2+14z+48=0$, $\Delta=4>0$, $z_1=-8$ et $z_2=-6$

Donc $\begin{cases} x=-8 \\ y=-6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=-6 \\ y=-8 \end{cases}$

Cl $S_{\mathbb{R}^2} = \{(6;8);(8;6);(-8;-6);(-6;-8)\}$

2) Posons $AC=x$ et $BD=y$ tq $0<x<y$

ABCD est un losange donc $(AC)\perp(BD)$ et $m[AC]=m[BD]$

D'après Pythagore : $\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2=CD^2$

D'où $x^2+y^2=100$

L'aire de ABCD est $\frac{AC\times BD}{2}=24$

D'où $xy=48$

Ainsi $\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ xy=48 \end{cases}$ d'après 1) et tenant compte du fait que $0 < x < y$

Nous déduisons $AC = x = 6\,cm$ et $BD = y = 8\,cm$

Exercice 2 : (5 pts)

1) $T(x) = x^2 + bx - 1$

$a = 1$ et $c = -1$

$ac < 0$ Donc $T(x)$ admet deux racines distincts x' et x''

Puisque $x' x'' = \frac{c}{a} = -1 < 0$ donc x' et x'' de signe différent.

2) x' et x'' sont opposés

équivaut $x' + x'' = 0$

équivaut $\frac{-b}{1} = 0$ équivaut $b = 0$

CC : x' et x'' sont opposés ssi $b = 0$

3) $A = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'.x''$

donc $A = b^2 + 2$

4) a) $(1 - bx').(1 - bx'') = 1 - b(x' + x'') + b^2 x'.x''$

$= 1 - b \times (-b) + b^2 \times (-1)$

$= 1$

Donc $(1 - bx')$ et $(1 - bx'')$ sont inverses.

b) x' et x'' ne sont pas opposés équivaut $b \neq 0$

$(1 - bx').(1 - bx'') = 1 > 0$ Donc $(1 - bx')$ et $(1 - bx'')$ sont de même signe.

Donc $1 - bx' > 0$ et $1 - bx'' > 0$ ou $1 - bx' < 0$ et $1 - bx'' < 0$

Si $b > 0$ Alors $1 - bx' > 0$, $(x' < 0)$

Donc $1 - bx'' > 0$

D'où $x'' < 1/b$

or $x' < x''$ Donc $\frac{1}{b} \notin [x', x'']$

Si $b < 0$ Alors $1 - bx' > 0$, $(x'' > 0)$

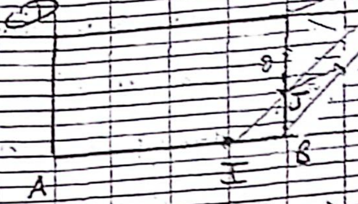
Donc $1 - bx'' > 0$ D'où $\frac{1}{b} < x''$

or $x < x''$ donc $\frac{1}{b} \notin [x' ; x'']$

cl : soit $b > 0$, soit $b < 0$

Donc $\frac{1}{b} \notin [x' ; x'']$

Exercice 3 : (8 pts)



1) $\vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ et $\vec{BJ} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

2) a) $\vec{BA} + 3\vec{BB} = \vec{BA}$ et $2\vec{BB} + \vec{BC} = \vec{BC}$

Puisque ABCD est un rectangle Donc $\vec{BA} \perp \vec{BC}$

Par suite $B \in (E)$

b) $M \in (E)$ équivaut à $(\vec{MA} + 3\vec{MB}) \perp (2\vec{MB} + \vec{MC})$

équivaut à $4\vec{MI} \perp 3\vec{MJ}$ $\left(\begin{array}{l} I \text{ bary } (A,1) ; (B,3) \\ J \text{ bary } (B,2) ; (C,1) \end{array} \right)$

équivaut à $\vec{MI} \perp \vec{MJ}$

équivaut à M appartient au cercle de diamètre $[IJ]$

cl : (E) est le cercle de diamètre $[IJ]$

3) a) J bary $(B;2),(C,1)$ équivaut à $2\vec{JB} + \vec{JC} = \vec{0}$

équivaut à $\vec{JB} = -\frac{1}{2}\vec{JC}$

Appliquant la forme vectorielle du th de thalès dans IBJ,

$K \in (IJ)$; $C \in (BJ)$

$(IB) \parallel (CK)$, $(AB) \parallel (CD)$, $I \in (AB)$ et $K \in (CD)$ $\Big\}$ Donc $\vec{JI} = -\frac{1}{2}\vec{JK}$

et $\vec{BI} = -\frac{1}{2}\vec{CK}$

$\vec{JB} = -\frac{1}{2}\vec{JC}$

Ainsi , $\vec{JI} = -\frac{1}{2}\vec{JK}$

$\vec{JK} = \frac{+2}{+2-3}\vec{JI}$ Donc K est bary $(I,2) ; (J,-3)$

b) I bary $(A,1),(B,3)$ équivaut à $\vec{BI} = \frac{1}{4}\vec{BA}$

Comme $\vec{BI} = -\frac{1}{2}\vec{CK}$

Alors $\frac{1}{4}\vec{BA} = -\frac{1}{2}\vec{CK}$ Donc $\vec{BA} = -2\vec{CK}$

Puisque $\vec{BA} = \vec{CD}$, (ABCD rectangle) Donc $\vec{CD} = -2\vec{CK}$

Suite exercice 3

3) b) $\vec{CK} = \frac{1}{-1+3}\vec{CD}$

Donc K bpp $(C;3)$, $(D;-1)$

4)a) G est un point et K bpp $(C,3)$, $(D,-1)$

Donc $3\vec{GC} - \vec{GD} = 2\vec{GK}$

or G bpp $(A,1)$; $(B,3)$; $(K;2)$

Donc $\vec{GA} + 3\vec{GB} + 2\vec{GK} = \vec{0}$

Par suite $\vec{GA} + 3\vec{GB} + 3\vec{GC} - \vec{GD} = \vec{0}$

b) $\vec{GA} + 3\vec{GB} + 3\vec{GC} - \vec{GD} = \vec{0}$

$(\vec{GA} - \vec{GD}) + 3(\vec{GB} + \vec{GC}) = \vec{0}$

$\vec{DA} + 6\vec{GO} = \vec{0}$ (O milieu de [BC])

$\vec{AD} = 6\vec{GO}$

Donc $\vec{AD}$ et $\vec{GO}$ sont donc colinéaires

Par suite les droites (AD) et (OG) sont parallèles.