Série 18 2 sc [redacted] Lycée Pilote Sfax Mr Abdelmoula

Ex1 Soit (U_n) une suite arithmétique telle que $U_3 = 11$ et $U_7 = 23$

1) Déterminer la raison de la suite (U_n) et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2 + 3n$

2) Soit $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$ $(n \geq 1)$

a) Exprimer S en fonction de n

b) Déterminer n pour que $S = 40$

3) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_{2n}$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison

b) Exprimer en fonction de n la somme $S' = U_0 + U_2 + U_4 + \dots + U_{2n}$

4) Soit a un entier naturel dont la somme de ses chiffres est 14

a) Montrer que a est un terme de la suite (U_n)

b) Déterminer a sachant que son quotient dans la division euclidienne par 3 est 121

Ex2 Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

1) Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$; exprimer S_n en fonction de n puis déterminer n pour que $64 S_n = 63$

3) Soit (V_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de raison 2 et telle que $V_3 = 64$, calculer V_0 puis exprimer V_n en fonction de n

4) Soit (W_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = U_n \cdot V_n$

a) Montrer que (W_n) est une suite constante

b) Calculer $A = U_0V_0 + U_1V_1 + \dots + U_9V_9 + U_{10}V_{10}$, en déduire la valeur de $B = U_0V_1 + U_1V_2 + \dots + U_9V_{10} + U_{10}V_{11}$

Ex3 1) Soit (U_n) la suite géométrique défini sur $\mathbb{N}$, de raison $q = -4$ et telle que $U_4 = 256$

a) Calculer U_0 et U_1

b) Exprimer U_n en fonction de n $(n \in \mathbb{N})$

c) Calculer $S = U_1 + U_2 + \dots + U_{10}$

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{2^{2n+3}}{8}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison

b) Exprimer en fonction de n, $S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

c) Déterminer n pour que $S'_n = 1365$

3) Soit (W_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = \frac{U_{2n}}{|V_n|}$

a) Calculer W_0 et W_1 , $W_n = 1$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

c) Calculer la somme $S' = \dfrac{U_2 U_1}{V_1^2} + \dfrac{U_4 U_2}{V_2^2} + \dfrac{U_6 U_3}{V_3^2} + \dots + \dfrac{U_{20} U_{10}}{V_{10}^2}$

Ex 4 ABC est un triangle rectangle en A direct, inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et telque $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$

1) a) Construire le pt I symétrique de O par rapport à la droite (AC)

b) Montrer que $I \in \mathscr{C}$

2) Soit r la rotation directe de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

a) Montrer que C est l'image de A par r

b) Construire le pt C' image de C par r.

c) Montrer que la droite (CC') est tangente à $\mathscr{C}$

d) Soit le pt B' image de B par r, montrer que les pts B, C et B' sont alignés

Ex 5 1) Construire un parallélogramme ABCD telque $\widehat{DAB} = \frac{\pi}{3}$ et $\widehat{ADB} = \frac{\pi}{2}$ orienté dans le sens direct. On note I le milieu de [DC] O le centre du parallélogramme. Soit r la rotation indirecte de centre I et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a) Déterminer r(B) et r(D), construire alors le pt $O' = r(O)$

b) Montrer que $r(A) = E$

2) les droites (AB) et (EC) se coupent en F

a) Montrer que le triangle AEF est équilatéral et que $r(F) = A$

b) la droite (IJ) coupe (AB) en K, montrer que $r(O) = K$.

Ex 6 On considère un triangle ABC rectangle en A dans le sens direct ; O est le pt telque OAC soit un triangle équilatéral telque O et B ne sont pas du même côté par rapport à (AC). Soit r la rotation directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Montrer que $r(A) = C$

2) Construire les pts $B' = r(B)$ et $C' = r(C)$

3) Montrer que les droites (B'C) et (CC') sont perpendiculaires

4) la droite (AB) coupe (B'C) en un pt J et soit le pt $J' = r(J)$ montrer que les pts J, J', C et B' sont alignés

5) Soit M un pt de [AB] et N un pt de [CB'] telque $AM = CN$, montrer que le triangle OMN est équilatéral.

Ex N°1:

1°) (u_n) est une S.A tq $u_3=11$ et $u_7=23$

$u_7-u_3=(7-3)r$, r raison de (u_n)

$23-11=4r$

$r=\frac{12}{4}=3$

$u_3=u_0+3\times r=u_0+9$

$u_0=u_3-9=11-9=2$

d'où $u_n=u_0+n.r$ $n\in\mathbb{N}$

$\boxed{u_n=2+3n \quad n\in\mathbb{N}}$

2°) a) $S=u_0+u_1+\dots+u_{n-1}$ $(n\geq 1)$

$=n\left(\frac{u_0+u_{n-1}}{2}\right)$

$=n\left(\frac{2+2+3(n-1)}{2}\right)$

$S=n\left(\frac{3n+1}{2}\right)$

car S est la somme des n premiers termes de la S.A. (u_n)

b) $S=40$

ssi $\frac{n(3n+1)}{2}=40$

ssi $3n^2+n-80=0$

$\Delta=1+12\times 80=961$

$n=\frac{-1-31}{6}$ imp car $n\in\mathbb{N}$

$n=\frac{-1+31}{6}=5$

3°) a) $v_n=u_{2n}=2+3\times(2n)$

$\boxed{v_n=2+6n \quad n\in\mathbb{N}}$

$v_{n+1}-v_n=(2+6(n+1))-(2+6n)$

$=6$

d'où (v_n) est une S.A de raison $r'=6$

b) $S'=u_0+u_2+u_4+\dots+u_{2n}$

$S'=v_0+v_1+v_2+\dots+v_n$

$=(n+1)\left(\frac{v_0+v_n}{2}\right)$ $(v_0=u_0=2;\ v_n=2+6n\ n\in\mathbb{N})$

$=(n+1)\left(\frac{2+2+6n}{2}\right)$

$S'=(n+1)(2+3n)$ $n\in\mathbb{N}$

4°) a) on a $u_n=2+3n$ $n\in\mathbb{N}$

$u_n-2=3n$

donc (u_n-2) est divisible par 3

$14-2=12$ est divisible par 3.

d'où a est un terme de (u_n)

b) $a=3\times 121+r_1$

or a est un terme de la suite (u_n) donc sa reste de la div. eucl de a par 3 est 2

d'où $a=3\times 121+2=365$

Ex N°2:

1°) $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ $n\in\mathbb{N}$

$u_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)+1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}u_n$

d'où (u_n) est une S.G de raison $q=\frac{1}{2}$ et de 1er terme $u_0=\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}=\frac{1}{2}$

2°) $S_n=u_0+u_1+\dots+u_{n-1}$

$=u_0\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}}\right)$

$\boxed{S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n\in\mathbb{N}}$

$64S_n=63$ ssi $64\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=63$

ssi $-64\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=63-64=-1$

$\frac{2^6}{2^n} = 1$ ssi $2^6 = 2^n$

ssi $n = 6$

3°) a) $V_3 = V_0 \times 2^3$

$V_3 = 8V_0$

$V_0 = \frac{V_3}{8} = \frac{64}{8} = 8$

(V_n) est S.G de raison $q=2$ et de 1er terme $V_0 = 8$

d'où $\boxed{V_n = 8\times 2^n \quad n\in\mathbb{N}}$

4°) a) $w_n = u_n \times V_n$

$= \left(\frac12\right)^{n+1} \times 8\times 2^n$

$= \frac12 \times \left(\frac12\right)^n \times 8 \times 2^n$

$= \left(\frac12 \times 8\right)\times \frac{2^n}{2^n}$

$= 4\times 1 = 4$

d'où (w_n) est une suite constante

b) $A = u_0V_0 + u_1V_1 + \dots + u_9V_9 + u_{10}V_{10}$

$= 4+4+\dots+4$

$= 4\times 11 = 44$

$B = u_0V_1 + u_1V_2 + \dots + u_9V_{10} + u_{10}V_{11}$

$= u_0\times(2V_0) + u_1\times(2V_1)+\dots+u_9\times(2V_9) + u_{10}\times(2V_{10})$

$= 2u_0V_0 + 2u_1V_1 + \dots + 2u_9V_9 + 2u_{10}V_{10}$

$= 2(u_0V_0 + u_1V_1 + \dots + u_9V_9 + u_{10}V_{10})$

$B = 2\times 44 = 88$

EXN°3:

a) (u_n) est une S.G. de raison $q=-4$

$u_4 = 256$ donc $u_4 = u_0 \cdot q^4$

$u_0\times(-4)^4 = u_4$

$256\, u_0 = 256$ ssi $\boxed{u_0 = 1}$

$u_1 = u_0\times q = 1\times(-4) = (-4)$

b) (u_n) est S.G de raison $q=-4$ et de 1er terme $u_0=1$

$u_n = u_0\times q^n = 1\times(-4)^n = (-4)^n$

$\boxed{u_n = (-4)^n \quad n\in\mathbb{N}}$

c) $S = u_1+u_2+\dots+u_{10}$

$= u_1\left(\frac{1-q^{10}}{1-q}\right) = (-4)\times\left(\frac{1-(-4)^{10}}{1+4}\right)$

$S = 838860$

2°) a) $V_n = \frac{2^{2n+3}}{8} = \frac{(2^2)^n\times 2^3}{8} = \frac{4^n\times 8}{8}$

$\boxed{V_n = 4^n \quad n\in\mathbb{N}}$

$V_{n+1} = 4^{n+1} = 4\times 4^n = 4V_n$

d'où (V_n) est S.G. de 1er terme $V_0 = 4^0 = 1$ et de raison $q'=4$.

b) $S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$

$= V_0\left(\frac{1-q'^n}{1-q'}\right) = 1\times\left(\frac{1-4^n}{1-4}\right)$

$\boxed{S'_n = \frac13(4^n-1) \quad n\in\mathbb{N}}$

c) $\frac13(4^n-1) = 1365$

$4^n - 1 = 1365\times 3 = 4095$

$4^n = 4095+1 = 4096 = 4^6$

d'où $n=6$

3°) a) $w_0 = \frac{u_{2\times 0}}{(V_0)^2} = \frac{1}{1^2} = 1$; $w_1 = \frac{(-4)^2}{4^{2\times 1}} = 1$

$w_0 = 1$ et $w_1 = 1$

b) $w_n = \frac{u_{2n}}{(V_n)^2} = \frac{(-4)^{2n}}{(4^n)^2} = \frac{4^{2n}}{4^{2n}} = 1$

d'où $w_n = 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c) $S' = \frac{u_2 u_1}{V_1^2} + \frac{u_3 u_2}{V_2^2} + \dots + \frac{u_{11} u_{10}}{V_{10}^2}$

$= \frac{(-4 u_1) u_1}{V_1^2} + \frac{(-4)^2 u_2 u_2}{V_2^2} + \dots + \frac{(-4)^{10} u_{10} u_{10}}{V_{10}^2}$

$= (-4)\frac{u_1^2}{V_1^2} + (-4)^2\frac{u_2^2}{V_2^2} + \dots + (-4)^{10}\frac{u_{10}^2}{V_{10}^2}$

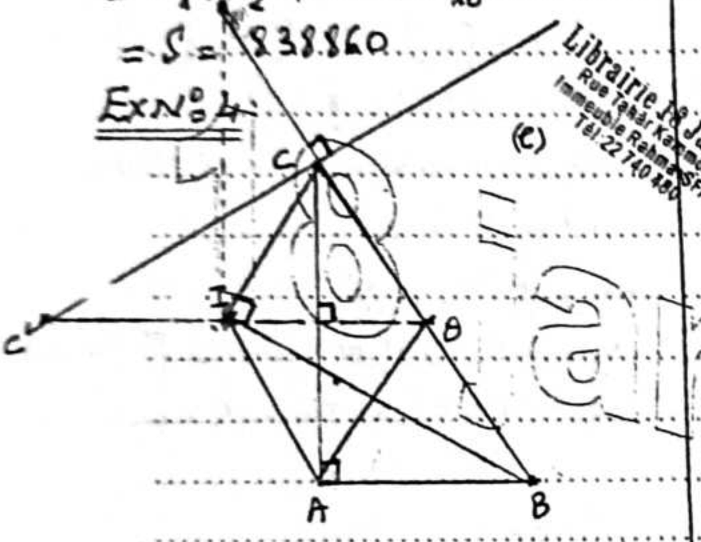
$= (-4) w_1 + (-4)^2 w_2 + \dots + (-4)^{10} w_{10}$

$= (-4) + (-4)^2 + \dots + (-4)^{10}$

$= u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$

$= S = 838860$

Ex N°4 :



1°) a) $S_{(AC)}(O) = I$ ssi $(AC) = \text{méd}[OI]$

b) $S_{(AC)}(O) = I$ ssi $(AC) = \text{méd}[OI]$

donc $CO = CI$

d'où $CO = OB = CI$

d'où (C) est le cercle circonscrit au triangle IBC

donc $I \in (C)$

2°) a) on a le triangle OAC est isocèle en O car $OA = OC$ et $O\hat{C}A = \frac{\pi}{2} - O\hat{B}A$

D'où $O\hat{C}A = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ donc

et $S_{(AC)}(C\hat{O}A) = C\hat{I}A$

or $C\hat{O}A = \pi - \frac{\pi}{6} \times 2 = \frac{2\pi}{3}$ donc $C\hat{I}A = \frac{2\pi}{3}$

on a $(OI) \perp (AC)$

et $(AB) \perp (AC)$

et O est le milieu de $[BC]$

donc (OI) coupe $[AC]$ en son milieu

d'où $(OI) = \text{méd}[AC]$

donc $IC = IA$ et on a $C\hat{I}A = \frac{2\pi}{3}$

d'où $r(A) = C$

b) on a $O\hat{I}C = \frac{\pi}{3}$ car OIC est un triangle équilatéral

or $C\hat{I}C' = \frac{2\pi}{3}$ et $IC = IC'$

dans le sens direct

d'où $IO = IC = IC'$

et $O\hat{I}C' = O\hat{I}C + C\hat{I}C'$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$

d'où I est le milieu de $[OC']$

c) on a $IO = IC$ et $IC = IC'$ car $r(C) = C'$

et I est le milieu de $[OC']$

d'où I est centre du cercle circonscrit au triangle OCC'

donc OCC' est un triangle rectangle en C

d'où $(CC') \perp (OC)$

par suite (CC') est la tangente à (C) en C'

d) on a $(CC') \perp (OC)$ car (CC') est la tangente à (C) en C

on a $(AB) \perp (AC)$

$r((AB)) = (B'C)$

et $r((AC)) = (CC')$

donc $r((AB)) \perp r((AC))$

d'où $(B'C) \perp (CC')$

et on a $(OC) \perp (CC')$

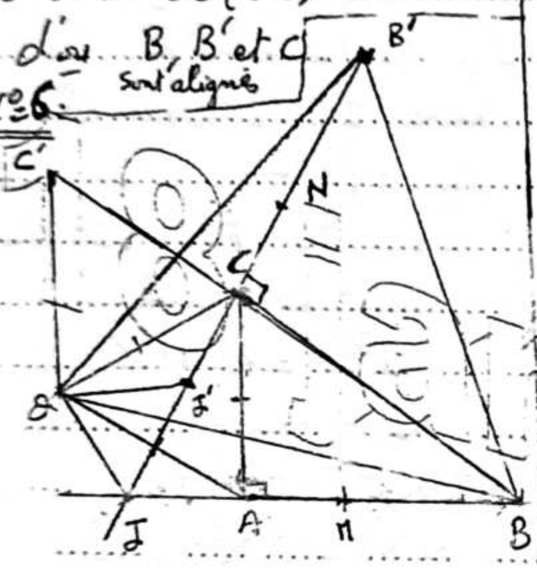
donc $(OC) \parallel (B'C)$

d'où O, C et B' sont alignés

et on a $B \in (OC)$

d'où B, B' et C sont alignés

ExN°6:



1°) Le triangle OAC est équilatéral dans le sens direct

d'où $OA = OC$ et $A\hat{O}C = \frac{\pi}{3}$

donc $r(A) = C$

2°) $r(B) = B'$ ssi OBB' est un T. équilatéral dans le sens direct.

$r(C) = C'$ ssi OCC' est un T. équilatéral dans le sens direct

3°) on a $(AB) \perp (AC)$ car ABC est un triangle rectangle en A

$r((AB)) = (CB')$ car $r(A) = C$ et $r(B) = B'$

et $r((AC)) = (CC')$ car $r(A) = C$ et $r(C) = C'$

d'où $(CB') \perp (CC')$

4°) on a $J \in (AB)$

donc $r(J) = J' \in r((AB)) = (B'C)$

or $J \in (B'C)$

d'où J, J', C et B' sont alignés

5°) on a $r(A) = C$

et $AM = CN$

or $M \in [AB]$ et $r([AB]) = [B'C]$

donc $r(M) \in [B'C]$

tq que la distance en $r(M)$ et C est égale à AM

d'où $r(M) = N$

ssi $OM = ON$ et $M\hat{O}N = \frac{\pi}{3}$ (sens direct)

d'où OMN est un triangle équilatéral