Lycée Pilote Bayrem V El Menzeh VIII	**Devoir de Synthèse n°1**	**Durée : 1h30mn**
$1^{ère}$ Année 1-2-3-7	**Mathématiques**	

19

Exercice n°1 : Q.C.M (3 points)

Cocher la bonne réponse :

1) Soit x un réel tel que $|x| = \sqrt{3} - 3$ signifie que :

☐ $x = \sqrt{3} - 3$ ☐ $x = 3 - \sqrt{3}$ ☐ x n'existe pas

2) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AB = 3 et BC = 4

☐ $\cos\hat{B} = \frac{4}{3}$ ☐ $\cos\hat{B} = \sin\hat{C}$ ☐ $\cos\hat{B} = \frac{2}{3}$

3) Le réel $10^{10} - 99999 \times 100001$ est égal à :

☐ 0 ☐ 1 ☐ -1

Exercice n°2 : (3 points)

Soit $a = \sqrt{8 - 3\sqrt{7}}$; $b = \sqrt{8 + 3\sqrt{7}}$

1) Montrer que a et b sont inverses.

2) a- Calculer $(a - b)^2$

b- En déduire la valeur de a – b

3) Calculer $a^3 - b^3$

Exercice n°3 : (5 points)

Soit $A = x^3 + 6x^2 + 12x + 7$

1) Montrer que $A = (x+2)^3 - 1$

2) En déduire une factorisation de A

3) Factoriser $(x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 12(x+1) + 7$

4) Sachant que $x \in [-1, 0]$

a- Montrer que $0 \leq A \leq 7$

b- Montrer que $2|A - 7| - |15 - 2A| = -1$

Exercice n°4 : (9 points)

I) Soit un cercle $\mathscr{C}$ de rayon R= 3 cm, de diamètre [AC]. B un point de $\mathscr{C}$ tel que BC = 3 cm

1) a- Quelle est la nature du triangle ABC ?

b- Calculer $\sin B\hat{A}C$ puis déterminer $B\hat{A}C$

c- En déduire AB

2) Soit K le point de [BC] tel que $B\hat{O}K = 30°$. La demi-droite [OK) coupe $\mathscr{C}$ en un point E

a- Montrer que les droites (OK) et (BC) sont perpendiculaires.

b- Déterminer BK, OK et KE

c- Calculer $B\hat{C}E$, en déduire que $\tan(15°) = 2 - \sqrt{3}$

II) Soit x un angle aigu, montrer que $(\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2 = 5$

Ex N° 1 :

1°) x n'existe pas

2°) $\cos \hat{B} = \frac{2}{3}$

3°) 1

Ex N° 2 :

1°) $a = \sqrt{8-3\sqrt{7}}$; $b = \sqrt{8+3\sqrt{7}}$

$a \times b = \sqrt{8-3\sqrt{7}} \times \sqrt{8+3\sqrt{7}}$

$= \sqrt{(8-3\sqrt{7})(8+3\sqrt{7})}$

$= \sqrt{8^2 - (3\sqrt{7})^2}$

$= \sqrt{64-63} = \sqrt{1} = 1$

d'où $a \times b = 1$

ssi a et b sont inverses

2°) a) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$= 8 - 3\sqrt{7} + 8 + 3\sqrt{7} - 2\times 1$

$= 16 - 2 = 14$

b) on a $(a-b)^2 = 14$

ssi $a-b = \sqrt{14}$ ou $a-b = -\sqrt{14}$

on a $8-3\sqrt{7} < 8+3\sqrt{7}$

donc $\sqrt{8-3\sqrt{7}} < \sqrt{8+3\sqrt{7}}$

d'où $a < b$

donc $a - b < 0$

d'où $\boxed{a - b = -\sqrt{14}}$

3°) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$= -\sqrt{14}\,(8-3\sqrt{7} + 1 + 8+3\sqrt{7})$

$= -\sqrt{14} \times 17 = -17\sqrt{14}$

Ex N° 3 :

1°) $(x+2)^3 - 1 = x^3 + 3x^2\times 2 + 3x\times 2^2 + 2^3 - 1$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 1$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 7 = A$

d'où $\boxed{A = (x+2)^3 - 1}$

2°) on a $A = (x+2)^3 - 1$

$= (x+2)^3 - 1^3$

$= ((x+2)-1)((x+2)^2 + (x+2)\times 1 + 1^2)$

$A = (x+1)(x^2+4x+4+x+2+1)$

$A = (x+1)(x^2+5x+7)$

3°) $(x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 12(x+1) + 7$

$= ((x+1)+1)((x+1)^2 + 5(x+1) + 7)$

$= (x+2)(x^2+2x+1+5x+5+7)$

$= (x+2)(x^2+7x+13)$

4°) a) $x \in [-1, 0]$

$-1 \leq x \leq 0$

$1 \leq x+2 \leq 2$

$1\times1\times1 = 1 \leq (x+2)^3 \leq 2\times2\times2 = 8$

$1-1 = 0 \leq (x+2)^3 - 1 \leq 8-1 = 7$

$0 \leq A \leq 7$

b) on a $0 \leq A \leq 7$

donc $A - 7 \leq 0$ d'où $|A-7| = 7-A$

et $-14 \leq -2A \leq 0$

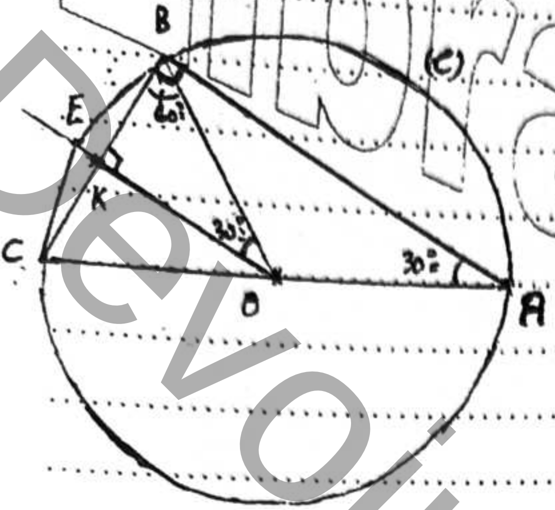
$15-14 = 1 \leq 15 - 2A \leq 15+0 = 15$

d'où $15-2A > 0$ donc $|15-2A| = 15-2A$

sig $2|A-7| - |15-2A| = 2(7-A) - (15-2A)$

$= 14 - 2A - 15 + 2A = 14 - 15 = -1$

Ex.N°4 :



1°) a) Le triangle ABC est inscrit dans le cercle (C) dont l'un de ses côtés [AC] est un diamètre du cercle (C)

donc ABC est un triangle rectangle en B

b) Le triangle ABC est rectangle en B

donc $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

et on a $\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}$

$\sin(30°) = \frac{1}{2}$

donc $\boxed{\widehat{BAC} = 30°}$

c) $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$

donc $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{6}$

d'où $AB = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

d'où $\boxed{AB = 3\sqrt{3}}$

2°) a) OBC est un triangle isocèle en O car $OB = OC$ et on a $\widehat{BCO} = 90 - \widehat{BAC}$
$= 90 - 30 = 60°$

d'où OBC est un triangle équilatéral

et on a $\widehat{BOK} = 30°$ et $\widehat{OBA} = 90 - \widehat{CBO}$
$= 90 - 60 = 30°$

$\widehat{BOK}$ et $\widehat{OBA}$ sont alternes-internes par rapport à (OB) et sont égaux

d'où $(OK) \parallel (AB)$ et on a $(AB) \perp (BC)$

donc $(OK) \perp (BC)$

b) Le triangle OBK est rectangle en K

$\sin \widehat{BOK} = \frac{BK}{OB}$

$\sin(30°) = \frac{BK}{3}$ $(OB = OA = OC = 3\,cm)$

$BK = 3\sin(30°) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\boxed{BK = 1{,}5\,cm}$

$\cos \widehat{BOK} = \frac{OK}{OB}$ d'où $OK = OB\cos(30°)$

$\boxed{OK = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}}$

$KE = OE - OK$

$\boxed{KE = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}}$

c) $\widehat{BOE}$ est l'angle au centre associé à l'angle $\widehat{BCE}$ inscrit dans le cercle (C)

d'où $\widehat{BCE} = \frac{1}{2}\widehat{BOE} = \frac{1}{2}\widehat{BOK} = \frac{1}{2} \times 30 = 15°$

on a OBC un triangle équilatéral et [OK) bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$

d'où K est le milieu de [BC] càd $BK = CK$

or le triangle ECK est rectangle en K

donc $\tan(\widehat{BCK}) = \frac{EK}{CK} = \frac{EK}{BK}$

Suite d'Ex n° 4 (2a)

D'où $\tan(15°) = \dfrac{\frac{6-3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{6-3\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{2}{3}$

$= \dfrac{6-3\sqrt{3}}{3} = 2-\sqrt{3}$

Donc $\tan(15°) = 2-\sqrt{3}$

$\boxed{II}$ $(\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2$

$= \cos^2 x + 4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x + \sin^2 x$

$- 4\sin x\cos x$

$= 5\cos^2 x + 5\sin^2 x$

$= 5(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1}) = 5 \times 1 = 5.$

D'où $(\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2 = 5$