Lycée Secondaire Grombalia **Mathématiques** Prof: Anis Ben Rejeb	**Devoir de contrôle** **N°2**	Classe : $2^{ème}$ SC Durée : 1H Date : 2022/ 2023

Exercice n°1 : (10 points)

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2x - 24 = 0$.

b) En déduire la résolution de l'équation : $\left|x^2 - 5x\right|^2 - 2\left|x^2 - 5x\right| = 24$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2 - 8x + 14 \prec 0$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{x^2 - 8x + 14}{x^2 - 2x - 24} \geq 0$

4) a) Déterminer les réels a et b tels que : $\begin{cases} a^2 + b^2 = 36 \\ a + b = 8 \end{cases}$

b) On considère un triangle ABC rectangle en A tel que :

$BC = 6$, $AB + AC = 8$ et $AB \succ AC$

Déterminer les distances AB et AC.

Exercice n°2 : (10 points)

Dans la figure ci-dessous : ABCD un quadrilatère.

G est le centre de gravité du triangle ABC.

I et J sont les milieux respectives des segments [AB] et [BC].

1) Construire le point L barycentre des points pondérés $(A , 1)$ et $(D , 3)$.

2) Construire le point K barycentre des points pondérés $(C , 1)$ et $(D , 3)$.

3) Soit H le point du plan qui vérifie $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + 3\overrightarrow{HD} = \vec{0}$

a) Montrer que $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$ puis construire H .

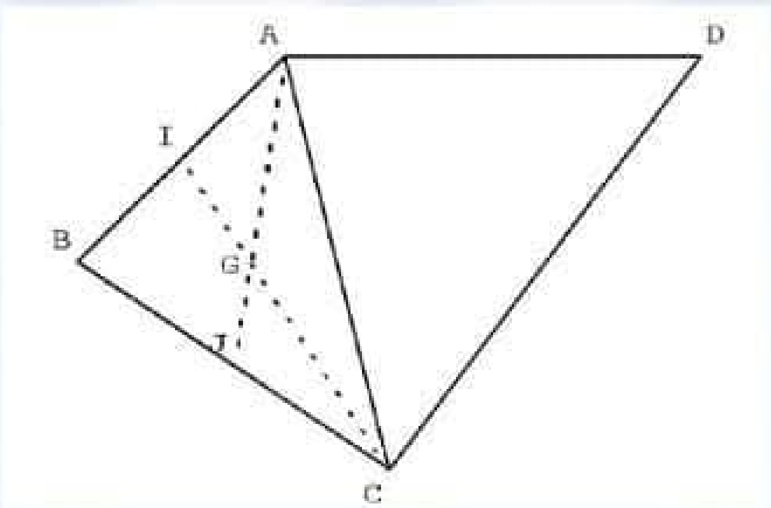
b) Montrer que le point H est le barycentre des points pondérés $(L , 2)$ et $(J , 1)$

c) Montrer que les points H , I et K sont alignés .

d) En déduire que les droites (IK) , (JL) et (GD) sont concourantes .

4) Déterminer et construire l'ensemble suivant :

$$\zeta = \left\{ M \in P \text{ tels que } \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MD}\right\| \right\}$$



Bon travail !

Devoir de contrôle 2

Exercice 1 :

1) a- $x^2 - 2x - 24 = 0$

$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -24$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4\times(-24)$

$= 4 + 96 = 100 > 0$

$x_1 = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 10}{2} = -\frac{8}{2} = -4$

$x_2 = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 10}{2} = 6.$

$S_{\mathbb{R}} = \{-4, 6\}$

b- $|x^2 - 5x|^2 - 2|x^2 - 5x| - 24$

$|x^2 - 5x|^2 - 2|x^2 - 5x| - 24 = 0$

Soit $X = |x^2 - 5x|$

$\Rightarrow X^2 - 2X - 24 = 0$

$X' = -4$ ou $X'' = 6$

$|x^2-5x| = -4 < 0$ ou $|x^2-5x| = 6$

impossible

$|X| = a \Rightarrow X = a$ ou $X = -a$

$$\begin{cases} x^2-5x=6 \\ x^2-5x=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x-6=0 \ (1) \\ x^2-5x+6=0 \ (2) \end{cases}$$

(1) $a-b+c = 1-(-5)+(-6) = 6-6 = 0$

$x' = 1$, $x'' = \frac{c}{a} = -6$

(2) $\Delta = b^2-4ac = 25-24 = 1 > 0$

$x_3 = 2$ $\quad x_4 = 3$

$S_{\mathbb{R}} = \{1, -6, 2, 3\}$.

2) $x^2-8x+14 < 0$ ⟶ T. signe

solutions x', x''

$x^2-8x+14=0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \times 14$

$= 64 - 56$

$= 8 > 0 \Rightarrow$ 2 racines

$x' = \frac{8-2\sqrt{2}}{2} = 4-\sqrt{2}$

$x'' = \frac{8+2\sqrt{2}}{2} = 4+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$4-\sqrt{2}$		$4+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2-8x+14$		$+$ signe de a	0	$-$	0	$+$ signe de a	

$$S_{\mathbb{R}} = \left]4-\sqrt{2}\,;\,4+\sqrt{2}\right[$$

3) $$\frac{x^2-8x+14}{x^2-2x-24} \geqslant 0$$

Condition d'existence. $x^2-2x-24 \neq 0$

Les racines

$x' = 6$ ou $x'' = -4$

$$\mathcal{D}_E = \mathbb{R} \setminus \{6, -4\}$$

Résolution d'inéquation : $\approx 2{,}58$ $\approx 5{,}41$

Les racines : $6, -4$; $4-\sqrt{2}$; $4+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		-4		$4-\sqrt{2}$		$4+\sqrt{2}$		6		$+\infty$
$x^2-8x+14$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x^2-2x-24$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2-8x+14}{x^2-2x-24}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -4[\cup [4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}] \cup]6; +\infty[$

4) a- $\begin{cases} a^2+b^2 = 36 \\ a+b = 8 \end{cases}$

Méthode 1 :

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 36 \\ a = 8-b \end{cases}$

$\begin{cases} (8-b)^2 + b^2 = 36 \\ a = 8-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64 - 16b + b^2 + b^2 = 36 \\ a = 8-b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2b^2 - 16b = 36 - 64 = -28 \\ a = 8-b \end{cases}$

$\begin{cases} 2b^2 - 16b + 28 = 0 \\ a = 8-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 - 8b + 14 = 0 \\ a = 8-b \end{cases}$

$b' = 4-\sqrt{2}$ ou $b'' = 4+\sqrt{2}$

$a' = 8-(4-\sqrt{2})$ ou $a'' = 8-(4+\sqrt{2})$
$= 4+\sqrt{2}$ $= 4-\sqrt{2}$

$\Rightarrow (a, b) = \{ (4+\sqrt{2}, 4-\sqrt{2}) ; (4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}) \}$

Méthode 2 :

$$(S)\begin{cases} a^2+b^2=36 \\ a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\overbrace{a+b}^{S})^2-2(\overbrace{a.b}^{P})=36 \\ S=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S^2-2P=36 \\ S=8 \end{cases} \Rightarrow \quad (1)\ 64-2P=36$$

$$\Rightarrow 2P=64-36$$

$$\Rightarrow 2P=28$$

$$\Rightarrow P=\frac{28}{2}=14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P=14 \quad (1) \\ S=8 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-Sx+P=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-8x+14=0$$

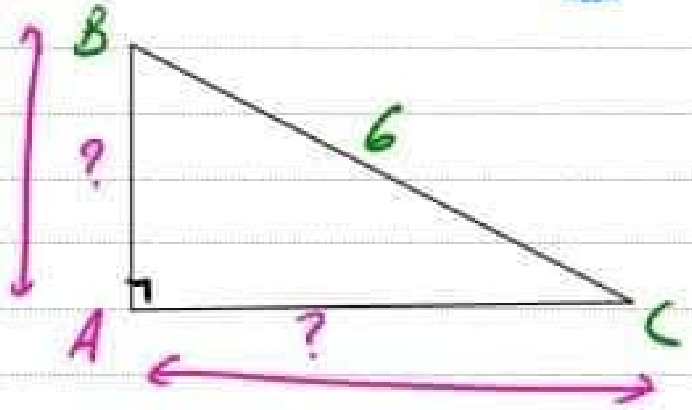
$\Leftrightarrow$ (d'après 2)) : $x'=4-\sqrt{2}$, $x''=4+\sqrt{2}$

$$(a,b)=\{(4-\sqrt{2};4+\sqrt{2});(4+\sqrt{2};4-\sqrt{2})\}$$

b) ABC triangle rectangle ABC en A.

$BC=6$, $AB+AC=8$, $AB>AC$

Devoiratna



On pose $AB = a$, $AC = b$

$AB + AC = 8 \Rightarrow \boxed{a + b = 8}$

ABC triangle rectangle en A : D'après Pythagore

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\boxed{a^2 + b^2 = 6^2 = 36}$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 36 & (1) \\ a + b = 8 & (2) \end{cases}$$

Or $AB > AC \Rightarrow a > b$

$\boxed{a = 4 + \sqrt{2}}$, $\boxed{b = 4 - \sqrt{2}}$

$(a, b) = \{(4 + \sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})\}$.

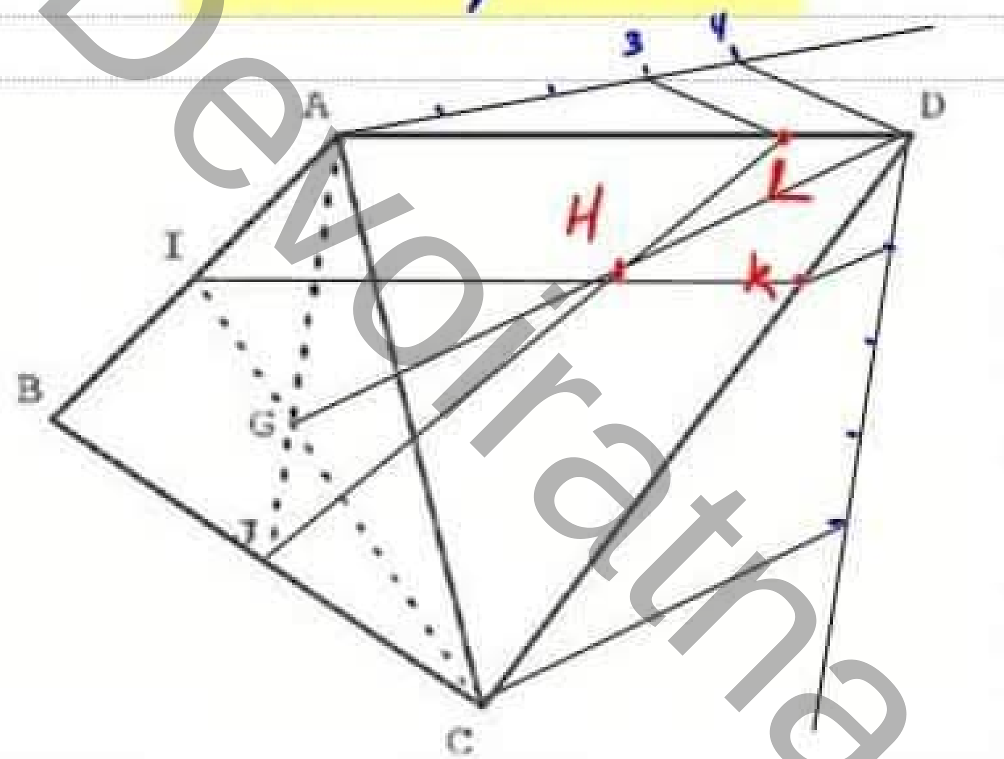
$AB = 4+\sqrt{2} \quad , \quad AC = 4-\sqrt{2}$

Exercice 2 :

1) L b.p.p $(A,1)$ et $(D,3)$

$\Leftrightarrow L \in [AD]$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$



2) K b.p.p $(C,1)$ et $(D,3)$

$\Leftrightarrow K \in [CD]$

$\overrightarrow{DK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

3) $\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{HC}+3\vec{HD}=\vec{0}$

G centre de gravité du triangle ABC

$\Leftrightarrow \quad \vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad$ G b.p.p $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$

$\Leftrightarrow \quad \vec{HA}+\vec{HB}+\vec{HC}=(1+1+1)\vec{HG}=3\vec{HG}$

$\Leftrightarrow \quad 3\vec{HG}+3\vec{HD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad 3(\vec{HG}+\vec{HD})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{HG}+\vec{HD}=\vec{0}}$

$k\vec{GA}+k\vec{GB}=\vec{0}$

$G=A*B$

$\vec{HG}+\vec{HD}=\vec{0} \Rightarrow \boxed{H=G*D}$

b) H b.p.p $(L,2)$ et $(J,1)$

$\Leftrightarrow \quad 2\vec{HL}+\vec{HJ}=\vec{0}$?

$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{HA}}+\underbrace{\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}}+\underbrace{3\overrightarrow{HD}}=\vec{0}$$

$$(\Leftrightarrow)\quad 4\overrightarrow{HL}+2\overrightarrow{HJ}=\vec{0}$$

Car $\begin{cases} L \text{ b.p.p } (A,1) \text{ et } (D,3) \\ J = B*C \end{cases}$

Th : G b.p.p (A,α) et (B,β)

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

$(\Leftrightarrow)\quad 4\overrightarrow{HL}+2\overrightarrow{HJ}=\vec{0}$ $\quad \times\frac{1}{2}$

$(\Leftrightarrow)\quad \boxed{2\overrightarrow{HL}+\overrightarrow{HJ}=\vec{0}}$

$(\Leftrightarrow)\quad H$ b.p.p $(L,2)$ et $(J,1)$

c) H, I et K sont alignés

$(\Leftrightarrow)\quad H$ b.p.p (I,α) et (K,β)

$(\Leftrightarrow)\quad \alpha\overrightarrow{HI}+\beta\overrightarrow{HK}=\vec{0}$?

On a $\underbrace{\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}}_{2\overrightarrow{HI}}+\underbrace{\overrightarrow{HC}+3\overrightarrow{HD}}_{4\overrightarrow{HK}}=\vec{0}$

$$2\overrightarrow{HI}+4\overrightarrow{HK}=\vec{0}$$

Car $I = A*B$ et K b.p.p $(C,1)$ et $(D,3)$

$\Leftrightarrow$ H est le barycentre des

pts pondérés $(I, 2)$ et $(K, 4)$

$\Leftrightarrow$ $H \in (IK)$

$\Leftrightarrow$ H, I et K sont alignés.

d) $\begin{cases} H \in (IK) & \text{(d'après 3)c)} \\ H \in (JL) & \text{car } H \text{ b.p.p } (L,2) \text{ et } (J,1) \\ H \in (GD) & \text{car } H = G * D \text{ (d'après 3)a)} \end{cases}$

$(IK) \cap (JL) \cap (GD) = \{H\}$

(IK), (JL) et (GD) sont concourantes.

4) $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$

$\| \underbrace{\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + 3\vec{MD}} \| = 3 \| \vec{MG} - \vec{MD} \|$

$\| 6\vec{MH} \| = 3 \| \vec{MG} + \vec{DM} \|$

$6 \| \vec{MH} \| = 3 \| \vec{DG} \|$

$2\, MH = DG$

$$MH = \frac{1}{2} DG$$

$M \in$ Cercle de centre H et de rayon $\frac{1}{2} DG$