Exercice n° 1 : (6 points)

On considère l'entier naturel $N = \overline{55y94x}$ où x désigne le chiffre des unités et y le chiffre des milliers, r est le reste de la division euclidienne de N par 11.

1. On donne $x = 1$ et $y = 8$:
   a. Calculez r.
   b. Déduisez-en le reste de la division euclidienne de N^2 par 11.
2. On donne $x = 9$, déterminez y pour que N soit divisible par 11, justifiez.
3. On donne $y = 7$ et $r = 10$. Calculez x.

$x = 1$; $y = 8$ $\Rightarrow$ $N = 5\boxed{5}8\boxed{9}4\boxed{1}$

a) $d = (1+9+\cancel{5}) - (4+8+\cancel{5}) = 10 - 12 = -2$ $\qquad 9^2 = 81 = 77 + 4$

$d' = d + 11 = -2 + 11 = 9$, $\boxed{r = 9.}$

b) $N = 11q + 9 \Rightarrow N^2 = (11q+9)^2 = (11q)^2 + 2.11q.9 + 9^2$

$\Rightarrow N^2 = 11[\underbrace{\boxed{11q^2 + 2.q.9 + 7}}_{K \in \mathbb{N}}] + 4. = 11K + 4.$

$\boxed{\text{d'où le reste de } N^2 \text{ par } 11 \text{ est } 4.}$

2. On donne $x = 9$, déterminez y pour que N soit divisible par 11, justifiez.

$N = \overline{55y94x}$

$N = 5\boxed{5}y\boxed{9}4\boxed{9}$

$d = (9+\cancel{9}+5) - (\cancel{4}+y+\cancel{5}) = 14 - y.$

on $0 \leq y \leq 9$

$\Leftrightarrow -9 \leq -y \leq 0 \Leftrightarrow 5 \leq 14-y \leq 14$ et $14 - y \in \Pi_{11}$

donc $14 - y = 11 \Leftrightarrow \boxed{y = 14 - 11 = 3.}$

3. On donne $y = 7$ et $r = 10$. Calculez x.

$N = \overline{55y94x}$

$N = 5\boxed{5}7\boxed{9}4\boxed{x}$

$d = (x+9+\cancel{5}) - (4+7+\cancel{5}) = x + 9 - 11 = x - 2.$

$x - 2 = 11K + 10$

$\Leftrightarrow x - 2 - 10 = 11K. \quad \Leftrightarrow x - 12 = 11K.$

$11K + 11 = 11(1+K) = 11K'$

$\Leftrightarrow x - 12 + \boxed{11} = 11K' \quad \Leftrightarrow x - 1 = 11K'$

$0 \leq x \leq 9$

$\Leftrightarrow$

$-1 \leq x-1 \leq 8$ et $x-1 \in \{\ldots\}$

donc $x-1=0$ d'où $\boxed{x=1.}$

Exercice n° 2 : (5 points)

Soit n un entier naturel non nul, on donne l'expression $A = 3n^2 + 7n - 6$.

1. Trouvez les entiers a et b pour lesquels $A = (n+3)(an+b)$.
2. Déterminez les valeurs de n pour lesquelles $\frac{3n^2+7n}{n+3}$ est un entier naturel.

1) $(n+3)(an+b) = an^2 + bn + 3an + 3b$

$= \boxed{a}n^2 + n\boxed{(b+3a)} + \boxed{3b}$

$= \boxed{3}n^2 + \boxed{7}n \boxed{-6}$

par identification : $\begin{cases} a=3 \\ b+3a=7 \rightarrow b=7-9=-2 \\ 3b=-6 \rightarrow b=-2 \end{cases}$

d'où $\boxed{A = \boxed{3n^2+7n} - 6 = (n+3)(3n-2).}$

2. Déterminez les valeurs de n pour lesquelles $\boxed{\frac{3n^2+7n}{n+3}}$ est un entier naturel.

$$\frac{3n^2+7n}{n+3} = \frac{\boxed{3n^2+7n-6}+6}{n+3} = \frac{(3n-2)\cancel{(n+3)}}{\cancel{n+3}} + \frac{6}{n+3}.$$

$$= \boxed{3n-2} + \boxed{\frac{6}{n+3}} \in \mathbb{N} \qquad \boxed{n \in \mathbb{N}^*}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n+3 \in D_6 = \{1, 2, 3, 6\} \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

$n+3=1$ impo
$n+3=2$ impo
$n+3=3$ impo
$n+3=6 \Leftrightarrow n=3$

d : $\boxed{\begin{cases} \frac{3n^2+7n}{n+3} \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow n=3.}$

Exercice n° 3 : (9 points)

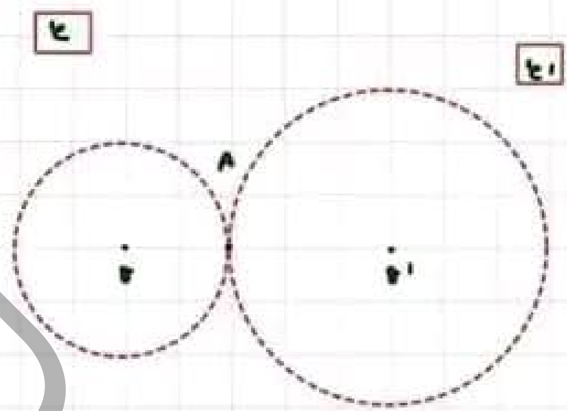
Soient ξ et ξ' deux cercles de centres respectifs O et O', tangents extérieurement en A et de rayons respectifs $r = 2$ et $r' = 3$. On considère h l'homothétie de centre A qui transforme O en O'.

1.

a. Déterminez le rapport k de h.

b. Montrez que ξ' est l'image de ξ par h.

$h_{(A,k)}(O) = O'$



$h_{(A,k)}(O) = O' \iff \boxed{k.\vec{AO} = \vec{AO'}}$, $\vec{AO}$ et $\vec{AO'}$ coli de sens opp $\rightarrow k < 0$.

et $|k|\, OA = O'A \iff |k| = \frac{r'}{r} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{k = -3/2.}$

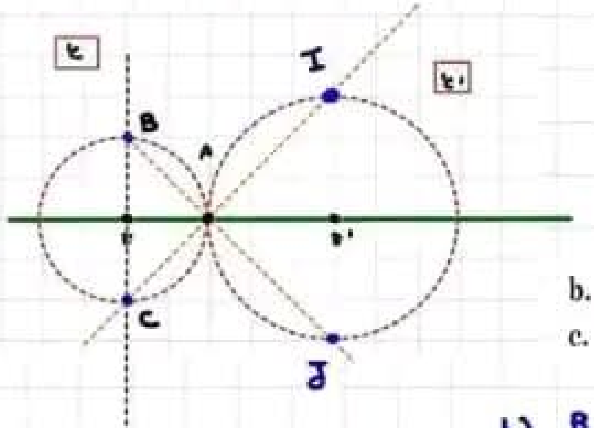
b. Montrez que ξ' est l'image de ξ par h.

$h_{(A,-\frac{3}{2})}\ \xi_{(O,r)} =$ cercle de centre $h(O) = O'$ et de rayon $|-\frac{3}{2}|r = \frac{3}{2} \times 2 = 3 = r'$

d'où $\boxed{h(\xi) = \xi'.}$

2. La perpendiculaire à (OA) en O coupe ξ en B et C.

a. Construisez le point I image de C par h.



construire $h(C) = I$ par h ??

$h(C) = I \iff \boxed{-\frac{3}{2}\vec{AC} = \vec{AI}.}$

b. La droite (AB) recoupe ξ' en J. Déterminez l'image de B par h.

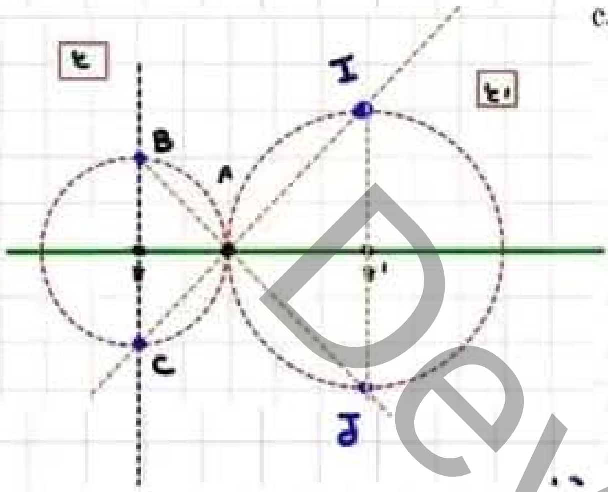
c. Déduisez-en que les droites (IJ) et (AO) sont perpendiculaires.

b) $B \in (AB) \cap \xi \Rightarrow h(B) \in h((AB)) \cap h(\xi) =$

$\begin{cases} h((AB))=(AB) & \text{car } A \text{ centre de } h \\ h(\mathscr{E})=\mathscr{E}' \end{cases}$

$\Rightarrow h(B) \in (AB)\cap \mathscr{E}' = \{A ; J\}$ or $h(B) \neq A$ car $B \neq A$

alors $\boxed{h(B) = J.}$



c. Déduisez-en que les droites (IJ) et (AO) sont perpendiculaires.

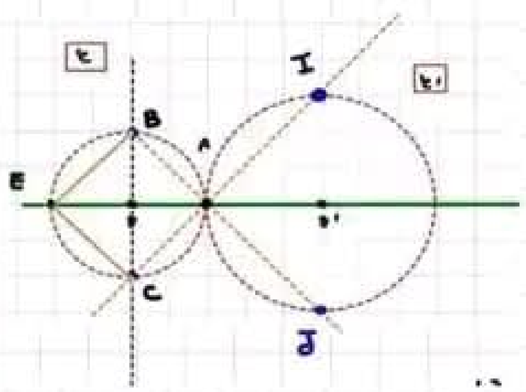
on a : $\begin{cases} h(C)=I \\ h(B)=J \end{cases}$

$\Rightarrow h((BC)) = (IJ)$

et puisque l'image d'une dte par une homothétie est une dte qui lui est //
alors $(BC) \parallel (IJ)$
et puisque $(BC) \perp (OA)$ alors

$\boxed{(IJ) \perp (OA)}$

3. La droite (OA) recoupe ξ en E. On pose $h(E) = K$.
a. Vérifiez que $K \in \xi'$.
b. Précisez la nature du triangle EBC. Déduisez-en celle du triangle KIJ. Justifiez.



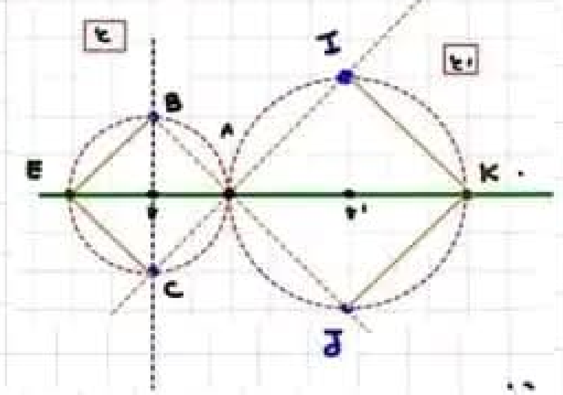
$\boxed{h(E) = K.}$

a) $E \in \mathscr{E} \Rightarrow h(E) \in h(\mathscr{E})$

$\Rightarrow \boxed{K \in \mathscr{E}'}$

$(OA) \perp (BC)$ en $O = B*C$.
donc (OA) la médiatrice du segment $[BC]$
or $E \in (OA) \Rightarrow EB = EC$.
en plus $E \in \mathscr{E}$: cercle de diamètre $[BC]$, $E \neq B$, $E \neq C$.
donc BEC triangle rectangle en E.

Q : EBC isocèle, rectangle en E.



LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 8
M . LAKHDAR

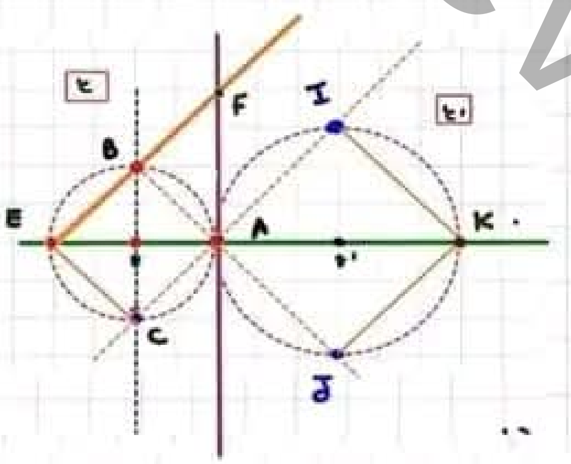
Déduisez-en celle du triangle KIJ. Justifiez.

$$\begin{cases} h(E)=K. \\ h(B)=J \\ h(C)=I \end{cases}$$

et puisque EBC isocèle rectangle en E alors $h(EBC)=KJI$

est un triangle isocèle, rectangle en $\boxed{h(E)=K.}$

4. Soit Δ la tangente à ξ en A, la droite (EB) coupe Δ en F. Montrez que F' est le barycentre des points pondérés (K, -1) et (J, 2) où F' est l'image de F par h.
5. Soit M un point de Δ vérifiant : MF + MA = AF. Déterminez et représentez en couleur le lieu du point M' l'image de M par h.



Mq $h(F)=F'$;

$F' = \text{bar}(K,-1)(J,2)$.

$h(E)=K$ $\qquad$ $h(B)=J$

$\boxed{\text{Montrons que } F = \text{bar}(E,-1)(B,2) \text{ ?}}$

Dans le triangle EAF on a : $O = E*A$

$(OB) \perp (OA)$ et $(AF) \perp (OA) \Rightarrow (OB) \parallel (AF)$.

et (OB) coupe (EF) en B alors $\boxed{B = E*F.}$

donc $\vec{FE} = 2\vec{FB} \Leftrightarrow -\vec{FE} + 2\vec{FB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \boxed{F = \text{bar}(E,-1)(B,2)}$

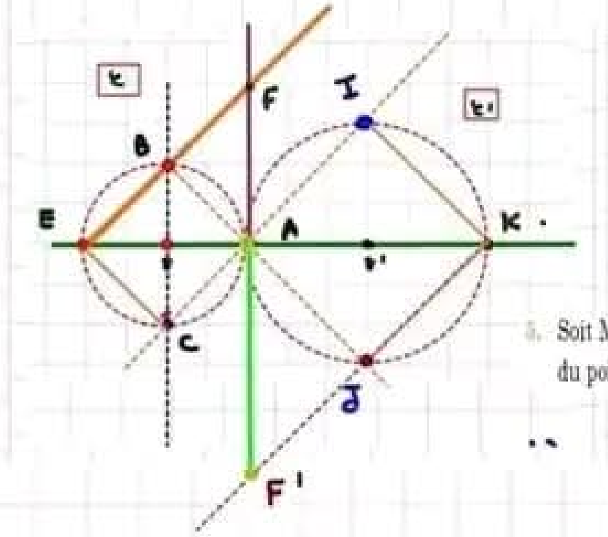
or $h(F)=F'$

$h(E)=K$

$h(B)=J$

et puisque l'homothétie conserve le barycentre alors $F' = \text{bar}(K,-1)(J,2)$.

5. Soit M un point de Δ vérifiant : MF + MA = AF. Déterminez et représentez en couleur le lieu du point M' l'image de M par h.



LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 8

M . LAKHDAR

5. Soit M un point de Δ vérifiant : MF + MA = AF. Déterminez et représentez en couleur le lieu du point M' l'image de M par h.

$MF + MA = AF \iff M \in [AF].$

$\iff h(M) \in h([AF]) = [AF'].$

- <u>*Exercice 2 : (8points)*</u>

Les questions I) , II) et III) sont indépendantes.

I) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

On pose $x = 3n - 4$ et $y = 7n - 9$

1) Montrer que x et y sont premiers entre eux.

2) a/ Déterminer le reste de la division euclidienne de $(y - x)$ par 4 .

b/ En déduire le reste de la division euclidienne de $(y - x)^2$ par 4.

4)

1) $\boxed{d \text{ un diviseur commun de } x \text{ et } y.}$

donc $\begin{cases} d \text{ divise } x \Rightarrow d \text{ divise } 7x = 21n - 28 \\ d \text{ divise } y \Rightarrow d \text{ divise } 3y = 21n - 27. \end{cases}$

$\Rightarrow d \text{ divise } (3y - 7x) = 21n - 27 - 21n + 28 = 1.$

d'où $\boxed{d = 1 \text{ par suite } x \text{ et } y \text{ sont premiers entre eux.}}$

$x = 3n - 4$ et $y = 7n - 9$

n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

2) a/ Déterminer le reste de la division euclidienne de $(y - x)$ par 4 .

b/ En déduire le reste de la division euclidienne de $(y - x)^2$ par 4.

a) $y - x = 7n - 9 - 3n + 4 = 4n - 5 - 3 + 3 = 4n - 8 + 3$

$= 4(n-2) + \boxed{3} \qquad r = 3.$

b) $(y - x)^2 = [4(n-2) + 3]^2 = 16(n-2)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4(n-2) + 9$

$= 4\boxed{[4(n-2)^2 + 6(n-2) + 2]} + \boxed{1}.$

d'où $\boxed{r = 1.}$

LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 8
M . LAKHDAR

II) Soit $E = \overline{6ba34}$

Trouver les chiffres a et b pour que E soit divisible par 99.

$$\begin{cases} 6+b+a+3+4 \in \mathcal{M}_9 \\ (4+a+6)-(3+b) \in \mathcal{M}_{11} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+b+13 \in \mathcal{M}_9 \\ a-b+7 \in \mathcal{M}_{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le a \le 9 \\ 0 \le b \le 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le a+b \le 18 \iff 13 \le a+b+13 \le 31$$

or $a+b+13 \in \mathcal{M}_9 \Rightarrow \boxed{a+b+13=18 \text{ ou } a+b+13=27.}$

$$-9 \le -b \le 0 \Rightarrow -9 \le a-b \le 9$$

$-2 \le a-b+7 \le 16.$ et $a-b+7 \in \mathcal{M}_{11}$

donc $\boxed{a-b+7=0 \text{ ou } a-b+7=11.}$

d'où:

$$\begin{cases} a+b+13=18 \\ a-b+7=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+b+13=18 \\ a-b+7=11 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+b+13=27 \\ a-b+7=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+b+13=27 \\ a-b+7=11 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=a+7 \\ 2a+20=18 \text{ impo} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b=a-4 \\ 2a+20=29 \text{ impo} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b=a+7 \\ 2a+20=27 \text{ impo} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b=a-4 \\ 2a+20=38 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=a-4 \\ a=\dfrac{38-20}{2}=9 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a=9 \\ b=5. \end{cases}}$$

III) Montrer que si N est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers naturels alors le reste de la division euclinienne de N par 4 n'est jamais égal à 3.

$$N = a^2+b^2 \neq 4k+3 \ ??$$

a pair et b pair

$\Rightarrow \quad a=2k_1, \quad b=2k_2$ $\qquad r=1.$

$$a^2+b^2 = 4k_1^2+4k_2^2 \rightarrow r=0.$$

a impair et b pair

$\Rightarrow a=2k_1+1$ et $b=2k_2 \Rightarrow a^2+b^2=(2k_1+1)^2+(2k_2)^2=\boxed{4k_1^2+4k_1+4k_2^2}+\boxed{1}$