Lycée pilote -Sfax	Devoir de contrôle N°1	Classe : 2Sc4-6
Profs : Mr Abdelmoula Mme Fehri	Mathématiques	Durée : 1heure

2

Algèbre : 10.5points

I/1/ Soit $X = \sqrt{7-3\sqrt{5}} - \sqrt{7+3\sqrt{5}}$.

Calculer X^2 puis en déduire la valeur de X.

II/ Soit x un réel non nul.

1/ Montrer que $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 4$

2/ Déduire que $\left|x+\frac{1}{x}\right| > \left|x-\frac{1}{x}\right|$.

III/1/a/ Vérifier que pour tout entier naturel non nul n : $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

b/ Calculer la somme : $S = \frac{3}{1^2\times 2^2} + \frac{5}{2^2\times 3^2} + \frac{7}{3^2\times 4^2} + \ldots\ldots + \frac{19}{9^2\times 10^2}$.

2/a/ Comparer $n^2(n+1)^2$ et $(n+1)^4$.

b/ Déduire de ce qui précède que $\frac{3}{2^4} + \frac{5}{3^4} + \frac{7}{4^4} + \frac{9}{5^4} + \ldots\ldots + \frac{19}{10^4} \leq 1$.

Géométrie : 9.5 points

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A(1,1) ; B(4,2) ; C(2,-2) et D(3,0).

1/ Montrer que les points B, C et D sont alignés.

2/ Montrer que le triangle ABC est rectangle puis calculer son aire.

3/ Montrer que [AD] est la hauteur issue de A du triangle ABC.

4/ La droite (AB) coupe (OD) en E.

a/ ~~Déterminer les coordonnées de E.~~

b/ Montrer que A est le milieu de [BE].

c/ Les droites (ED) et (AC) se coupent en K. Que représente alors K pour le triangle EBC ?

5/ a/ Montrer que $B = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

b/ Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK}$ dans la base B.

Devoir de contrôle n°1

Exercice 1 : (Algèbre 10,5 pts)

I/ $X^2 = \left(\sqrt{7-3\sqrt5} - \sqrt{7+3\sqrt5}\right)^2$

$= 7-3\sqrt5 + 7 + 3\sqrt5 - 2\sqrt{(7-3\sqrt5)(7+3\sqrt5)}$

$= 10$

Donc $x = \sqrt{10}$ ou $x = -\sqrt{10}$

Puisque $x<0$ car $7-3\sqrt5 < 7+3\sqrt5$ Alors $X = -\sqrt{10}$

II/ 1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2 - x^2-\frac{1}{x^2}+2$

Donc $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 4$

2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = 4$ $(4>0)$

Donc $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 > \left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

par suite $\left|x+\frac{1}{x}\right| > \left|x-\frac{1}{x}\right|$.

III/ 1) a) $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

Par suite $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

et $\{1;2;\dots;8\}\subset\mathbb{N}^*$ Donc

$S = \left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right] + \left[\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right] + \left[\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right] + \dots + \left[\frac{1}{8^2}-\frac{1}{9^2}\right]$

$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{9^2}$ Donc $S = \frac{80}{81}$

2) a) n étant un entier naturel non nul

$n < n+1$

$n^2 < (n+1)^2$

$n^2(n+1)^2 < (n+1)^4$ ($(n+1)^2 > 0$)

b) $n^2(n+1)^2 < (n+1)^4$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\dfrac{1}{(n+1)^4} < \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$

d'où $\dfrac{2n+1}{(n+1)^4} < \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; $(2n+1>0)$

Comme $\{1, 2, \ldots, 8\} \subset \mathbb{N}^*$ Alors

$\dfrac{3}{2^4} < \dfrac{3}{1^2\times 2^2}$; $\dfrac{5}{3^4} < \dfrac{5}{2^2\times 3^2}$; $\dfrac{7}{4^4} < \dfrac{7}{3^2\times 4^2}$; ...

et $\dfrac{19}{10^4} < \dfrac{19}{9^2\times 10^2}$

Par conséquent $\dfrac{3}{2^4} + \dfrac{5}{3^4} + \dfrac{7}{4^4} + \ldots + \dfrac{19}{10^4} < S$

or $S = \dfrac{80}{81} < 1$ Donc $\dfrac{3}{2^4} + \dfrac{5}{3^4} + \ldots + \dfrac{19}{10^4} < 1$

Exercice 2 : (Géométrie 9,5 pts)

1) $\vec{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{BC} = 2\vec{BD}$ par suite les points B, C et D sont alignés

De plus D est le milieu de [BC]

2) a) $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$xx' + yy' = 3\times1 + 1\times(-3) = 0$ ... [illegible]

Donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ par suite

Le triangle ABC est rectangle en A

2) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ Donc $AB = AC = \sqrt{10}$.

Donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC$, (ABC est isocèle rectangle en A)

Donc $\mathcal{A}_{ABC} = 5$

3) $\vec{AD}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{BC}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$

$aa' + bb' = 2\times(-4) + (-1)(-4) = 0$ Donc $(AD) \perp (BC)$

et puisque $D \in (BC)$ Alors D est le projeté orthogonal de A sur (BD).

(on pourra remarquer que le triangle ABC est rectangle en A et par D est le milieu de [BC])

4) $y_D = 0$ Donc $D \in (O, \vec{i})$

$E \in (OD)$ Donc $y_E = 0$, ((OD) est la droite des abscisses)

$E \in (AB)$ Donc $\vec{AE}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires

Comme $\vec{AE}\begin{pmatrix}x_E - 1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Donc $ab' - a'b = 0$

$(x_E - 1)\times 1 - 3\times(-1) = 0$

$x_E - 1 + 3 = 0$

$x_E = -2$ par suite $E(-2, 0)$

b) $\frac{x_E + x_B}{2} = 1 = x_A$ et $\frac{y_E + y_B}{2} = 1 = y_A$

Donc A est le milieu de [BE].

c) A est le milieu de [BE] et D le milieu de [BC]

$I = (A[illegible]) \cap (ED)$ [illegible] Donc I est le

centre de gravité du triangle EBC.

5) a) $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non nuls et orthogonaux

donc ils sont non colinéaires

par suite $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base de $\mathcal{V}$

b) • D est le milieu de [BC]

donc $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AD}$

$\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ d'où $\vec{AD}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{(\vec{AB}, \vec{AC})}$

• K est le centre de gravité de B et A milieu de [BE]

donc $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AC} = 0 \cdot \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

d'où $\vec{AK}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}_{(\vec{AB}, \vec{AC})}$