Lycée:Ibn Rachic sfax	**Devoir de synthèse n°3** Mathématiques	Classes : $2^{ème}$ Sc 3-4-5-6
2024/2025	Date : 23/05/2025	Durée:2h

Exercice n° 1 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+2}$

1) Déterminer D , l'ensemble de définition de f .
2) Tracer C_f dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
3) Tracer dans le même repère la droite Δ : $x-2y+2=0$
4) Calculer les coordonnées des points d'intersection de Δ et C_f
5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $2\sqrt{x+2}\geqslant x+2$

Exercice n° 2(8 points)

Soit f et g les fonctions définies par $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ et $g(x)=-x^2-4x$

On note ($\mathscr{H}$) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la fonction f .

1) a) Vérifier que $f(x)=2-\dfrac{2}{x+1}$; pour tout réel $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

b) Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty;-1[$

c) Tracer ($\mathscr{H}$) .On précisera son centre I et une équation de chacune de ses asymptotes.

2) a) Vérifier que pour tout réel x ; $g(x)=-(x+2)^2+4$

b) Tracer, dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la parabole (P), la courbe de g .

3) a) Vérifier que pour tout réel $x\in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(x)-g(x)=\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x+1}$

b) Déduire que ($\mathscr{H}$) et (P) ont trois points communs O ,A et B

c) Montrer que le triangle OAB est rectangle.

d) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geqslant g(x)$

4) Soit la fonction h définie par : $h(x)=|f(x)|$

a) A partir de la courbe de la fonction f tracer la courbe C_h de h dans le même repère .

b) Décrire alors les variations de la fonction h .

5) a) Montrer qu'une équation de la parabole (P') image de (P) par la translation de vecteur $2\vec{i}$ est $y=-x^2+4$ .On note S le sommet de (P').

b) On définit les droites D_m d'équations : $y=mx+3$; $m\in \mathbb{R}$

Pour tout réel m, la droite D_m coupe la parabole (P') en deux points distincts qu'on notera: M_1 et M_2 d'abscisse respective x' et x''

Montrer que x' et x'' sont les solutions de *l'équation* : $(E_m): x^2+mx-1=0$

c) Sans calculer x' et x'' , montrer que pour tout réel m , les droites (SM_1) et (SM_2) sont perpendiculaires.

Exercice n°3(5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

On donne les points A(1;-2) B(4;5) et C(-3,2).

1) a) Montrer que la droite (BC) a pour équation (BC) : $3x-7y+23=0$
   b) Déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés
2) Soit Δ la perpendiculaire à la droite (AC) mené par C .
   Δ coupe l'axe $(O;\vec{i})$ en un point E et coupe l'axe $(O;\vec{j})$ en un point F .
   a) Montrer que l' équation réduite de la droite Δ est : $y=x+5$
   b) En déduire les coordonnées de chacun des points E et F.
3) Soit $\mathscr{C}=\{\ M(x,y)\ \in P$ tel que $x^2+y^2+4x+2y-5=0\ \}$
   a) Montrer que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $I(-2;-1)$ et de rayon R que l'en déterminera .
   b) Vérifier que $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle AEC.
   c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T au cercle $\mathscr{C}$ en C.
4) Le cercle $\mathscr{C}$ recoupe la droite (AF) en un point K.
   Montrer que la droite (FI) est la médiatrice du segment $[CK]$.

Exercice n° 4 (4 points)

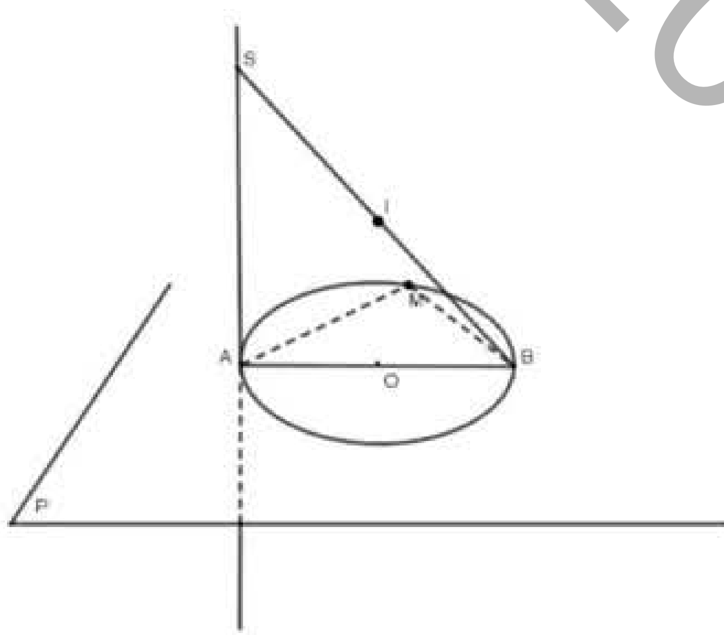
Dans un plan P on considère un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de diamètre $[AB]$.

M est un point de $\mathscr{C}$ tel que AMB est un triangle isocèle de sommet principal M.

Soit Δ la droite perpendiculaire à P en A.

S est un point de Δ tel que $AB=AS$ et I est le milieu de $[SB]$. (voir figure)

1) Montrer que (OI) est l'axe de $\mathscr{C}$
2) Déterminer le plan médiateur de $[AB]$.
3) Soit K le milieu de $[IM]$ .Montrer que KAB est un triangle isocèle.
4) a) Montrer que la droite (MB) est perpendiculaire au plan (AMS)
   b) En déduire que les plans (SMB) et (AMS) sont perpendiculaires.
5) Soit Q le plan contenant le point I et parallèle au plan P.
   Montrer que Q coupe $[SM]$ en son milieu.

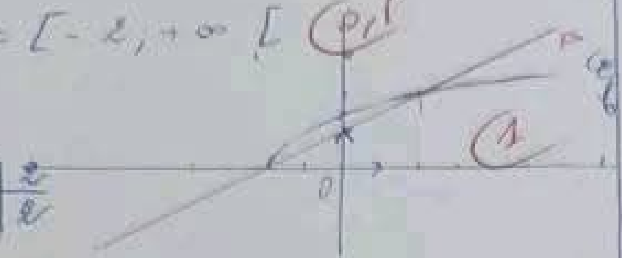


Ex 1

Devoir de synthèse n° 3 2ème Sc

1/ $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x+2 \geq 0\}$

$D = [-2, +\infty[$ (0,5)

2/  (1)

3/

x	-2	2
y	0	2

4/ Soit $M(x,y)$

$M \in \Delta \cap C_f$ éq à $\begin{cases} x \geq -2 \\ y = \frac{1}{2}x+1 \\ y = f(x) \end{cases}$

$\sqrt{x+2}^2 = (\frac{1}{2}x+1)^2$

éq à $x+2 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

éq à $x^2 = 4$

éq à $x=-2$ ou $x=2$

si $x=-2$ alors $y=0$

si $x=2$ alors $y=2$ (1)

donc $C_f \cap \Delta = \{(-2,0);(2,2)\}$

5/ $2\sqrt{x+2} \geq x+2$

éq à $f(x) \geq y$ (0,5)

$S_{\mathbb{R}} = [-2;2]$.

Ex 2

1/ a) Pour tout $x \neq -1$

$2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x+2-2}{x+1}$

$= f(x)$ (0,25)

b) Soit a et b deux réels.

$a < b < -1$ éq à $a+1 < b+1 < 0$

éq à $0 > \frac{1}{a+1} > \frac{1}{b+1}$

éq à $-\frac{2}{a+1} < -\frac{2}{b+1}$

éq à $f(a) < f(b)$

donc f est croissante sur $]-\infty,-1[$ (0,5)

c) H est une hyperbole de centre $(-1;2)$ et d'asymptotes les droites $\Delta: x=-1$ et $\Delta': y=2$ (0,75)

2/ a) Soit $x \in \mathbb{R}$

$-(x+2)^2+4 = -x^2-4x-4+4$

$= -x^2-4x$ (0,25)

$= g(x)$

b) P est une parabole de sommet $(-2;4)$ et d'axe : $x=-2$ (0,25)

3/ Soit $x \neq -1$.

$f(x)-g(x) = \frac{2x}{x+1} + x^2 + 4x$

$= \frac{2x+(x+1)x(x+4)}{x+1}$

$= \frac{x(x^2+5x+6)}{(x+1)}$ (0,75)

b/ Soit $M(x,y) \in H \cap P$

éq à $\begin{cases} x \neq -1 \\ y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

$f(x) = g(x)$ éq à $f(x)-g(x)=0$

éq à $x=0$ ou $x^2+5x+6=0$

$a=1,\ b=5,\ c=6$

$\Delta = 1$

$x' = -2$ et $x'' = -3$

$f(0)=0$; $f(-2)=4$ et $f(-3)=3$

donc H et P ont trois pts communs $O(0,0)$, $A(-2,4)$ et $B(-3,3)$ (0,5)

où $x_B < x_A$

4) on a $\vec{OB}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$; $\vec{BA}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$-3(-1)+3(-1)=0$

donc le triangle OAB est rectangle en B. (0,5)

3) $f(x) \geq g(x)$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -3] \cup [-2, 1[\cup [0, +\infty[$ (0,1)

4/ a/ (0,5)

b/ h est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$ et $[0, +\infty[$

h est decroissante sur $]-1, 0]$ (0,1)

5) a/ $P' = t_{2\vec{i}}(P)$.

$P : y = -(x+2)^2 + 4$

donc $P' : y = -(x-2+2)^2 + 4$

$P' : y = -x^2 + 4$. (0,1)

donc P' est la parabole de sommet $S(0; 4)$ et d'axe $x = 0$

b) $M(x, y) \in D_m \cap P'$

éqà $\begin{cases} y = mx + 3 \\ y = -x^2 + 4 \end{cases}$

éqà $\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ -x^2 + 4 = mx + 3 \end{cases}$

donc x est solution de l'éq

$(E_m) : x^2 + mx - 1 = 0$

on a $a = 1$, $b = m$, $c = -1$ (0,1)

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$

d'ou il existe deux pts distincts M_1 et M_2

c) on a $y' = mx' + 3$

$y'' = mx'' + 3$

$x'x'' = \frac{c}{a} = -1$ et $x' + x'' = -\frac{b}{a} = -m$

$\overrightarrow{SM_1} \begin{pmatrix} x' \\ y' - 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SM_2} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' - 4 \end{pmatrix}$

$x'x'' + (y'-4)(y''-4)$

$= x'x'' + (mx'+3-4)(mx''+3-4)$

$= x'x'' + m^2 x'x'' - mx' - mx'' + 1$

$= x'x''(1+m^2) - m(x'+x'') + 1$

$= -(1+m^2) + 1 + m^2$

$= 0$

donc $(SM_1) \perp (SM_2)$ (1)

Ex3

1/ a) $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $(BC) : -3x + 7y + c = 0$

$B(4, 5) \in (BC)$ éqà $c = -23$

éqà $(BC) : 3x - 7y + 23 = 0$ (0,1)

b) $A(1, -2)$ (0,25)

$3 + 14 + 23 \neq 0$ donc $A \notin (BC)$

2) a) on a $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d'ou $\Delta : y = x + p$

$C(-3, 2) \in D$ éqà $p = 5$ (0,1)

donc $D : y = x + 5$

b) $E(x, y) \in (O, \vec{i}) \cap D$

éqà $\begin{cases} x = 0 - 5 = -5 \\ y = 0 \end{cases}$

donc $E(-5, 0)$

$F(x, y) \in (O, \vec{j}) \cap D$

éqà $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 5 = 5 \end{cases}$

donc $F(0; 5)$

3) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0$

éqà $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 10$

donc $\mathscr{C}$ est un cercle de centre $I(-2, -1)$ et de rayon $R = \sqrt{10}$ (0,1)

b) $A(1, -2)$; $3^2 + (-1)^2 = 10$

$E(-5, 0)$; $(-3)^2 + 1^2 = 10$

$C(-3, 2)$; $(-1)^2 + (2+1)^2 = 10$

donc $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle AEC. 0,5

③ on a $\overrightarrow{IC}$ est vecteur normal à T

donc T : $-x+3y+d=0$

$C(-3,2) \in T$

équivaut $3+6+d=0$

équivaut $d=-9$ 0,5

donc T : $-x+3y-9=0$.

④ $\begin{cases} \overrightarrow{EK} \perp \overrightarrow{AF} \\ K \in (AF) \end{cases}$

soit $K(x,y)$

on a $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix} x+5 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

on obtient $\begin{cases} x-7y+5=0 \\ 7x+y-5=0 \end{cases}$

$K\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$FK = 3\sqrt{2}$

$FC = 3\sqrt{2}$

donc $FK = FC$ 1

et on a $IC = IK$

donc (FI) est la médiatrice du $[CK]$

<u>autrement</u>

on montre que les deux triangles AKE et ACE sont rectangles et isométriques

indication : $FA = FE$.

$\left.\begin{array}{l} FK = FC \\ IK = IC \end{array}\right\}$ donc (FI) est la médiatrice de $[CK]$

Ex 4

1/ on a dans le triangle ABS

O milieu [AB] et I milieu [SB]

donc $(OI) // (AS)$

et on a $(AS) \perp P$

d'où $(OI) \perp P$

O est le centre de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C} \subset P$

donc (OI) est l'axe de $(\mathscr{C})$.

0,75

2/ on a $MA = MB$

$OA = OB$

I un point de l'axe de $\mathscr{C}$ donc $OA = OB$

M, O et I ne sont pas alignés.

donc (IOM) est le plan médiateur du segment [AB]

0,75

3/ on a $K \in (IM)$

et $(IM) \subset (IOM)$

donc $KA = KB$ ainsi le triangle AKB est isocèle en K.

0,5

4/ a) $(AS) \perp P$ et $(MB) \subset P$

donc $(AS) \perp (MB)$

et on a $(AM) \perp (MB)$

donc $(MB) \perp (ASM)$

0,5

b) on a $(MB) \subset (SMB)$

$(MB) \perp (AMS)$

donc $(SMB) \perp (AMS)$

0,5

5 on a $P // Q$

la droite (SM) perce P en M

donc perce le plan Q en un point J

la droite (IJ) est contenue dans (SMB)

donc $(IJ) // (MB)$

dans le triangle SMB

I milieu [SB]

$(IJ) // (MB)$

$(IJ) \cap (SM) = \{J\}$

donc J est le milieu de [SM].

Rq les droites (IJ) et (MB) sont coplanaires

et les plans $(IJ) \subset Q$

$(MB) \subset P$

et $Q // P$ donc (IJ) et (MB) ne sont pas sécantes

1