Lycée pilote Sousse Date : le 29 / 01 / 2025	Devoir de contrôle N°3 Durée : 1 heure	Prof : Slah Saoudi Classes : 2 sc $_1$ et 2 sc $_2$

<u>Exercice 1</u> : (6 points)

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que $U_0 = 2$ *et* $U_{n+1} = \frac{2\,U_n - 16}{U_n - 6}$.

1)Justifier que la suite (U_n) est ni arithmétique , ni géométrique.

2)On suppose que pour tout entier naturel n, $U_n \neq 4$. On pose : $V_n = \frac{1}{U_n - 4}$.

b-Montrer que (V_n) est une suite arithmétique .

c-En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{4\,n+2}{n+1}$.

3) Exprimer la somme $S = 2\,U_1 + 3\,U_2 + \cdots + (n+1)\,U_n$

<u>Exercice 2</u> : ($62 \, . \, AB =$ points)

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}\,U_n + n + \frac{7}{6}$. On pose : $V_n = 4\,U_n - 6n + 2$

2)a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme .

b-Exprimer V_n en fonction de n.

c-En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}\,n - \frac{1}{2}$.

3)Soit la somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$. Montrer que $S_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3\,n^2 + n - 2}{4}$.

<u>Exercice</u> 3 : (8 points)

Soit $ABCD$ un rectangle de centre I tel que : $AB = 2\,cm$ *et* $AD = 4\,cm$

On désigne par G le barycentre des points $(B\,,2)$ *et* $(D\,,1)$. H le projeté orthogonal de G sur (AD).

I) On considère l'application :

$$f : P \to P$$
$$M \mapsto M' \text{ tel que : } 3\overrightarrow{AM'} + 2\,\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DA} = \vec{O}$$

1) Montrer que f admet un unique point invariant que l'on précisera.

2) En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

II) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{2}{3}$.

1)a-Montrer que $h(B) = G$. b- En déduire que $h(A) = H$.

2)La parallèle à (BC) et passant par G coupe (DC) en E. Déterminer $h(C)$.

3)Soit (C) l'ensemble des points M du plan d'images M' par h vérifiant : $M'G^{\,2} + M'D^{\,2} = GD^2$.

Soit (C') l'ensemble des points M du plan d'images M' par h vérifiant $MM' = \frac{4}{3}$

a- Montrer que (C) est le cercle circonscrit au rectangle $ABCD$.

b-Montrer que (C') est un cercle passant par A.

Devoir de contrôle n°3 en Maths

2:

$U_1 = \frac{2U_0 - 16}{U_0 - 6} = \frac{2\times 2 - 16}{2-6} = \frac{4-16}{2-6} = \frac{-12}{-4} = 3$

$U_2 = \frac{2U_1 - 16}{U_1 - 6} = \frac{2\times 3 - 16}{3-6} = \frac{6-16}{3-6} = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}$

$U_2 - U_1 = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}$ } $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$ donc U_n n'est pas S.A

et $U_1 - U_0 = 3 - 2 = 1$

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{10}{3}}{3} = \frac{10}{9}$ } $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$ donc U_n n'est pas S.G

$\frac{U_1}{U_0} = \frac{3}{2}$

2) b) $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 4} = \frac{1}{\frac{2U_n - 16}{U_n - 6} - 4} = \frac{1}{\frac{2U_n - 16 - 4U_n + 24}{U_n - 6}}$

$= \frac{1}{\frac{-2U_n + 8}{U_n - 6}} = \frac{U_n - 6}{-2U_n + 8}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n - 6}{-2U_n + 8} - \frac{1}{U_n - 4} = \frac{U_n - 6}{-2U_n + 8} - \frac{(-2)}{(-2)(U_n - 4)}$

$= \frac{U_n - 6 + 2}{-2U_n + 8} = \frac{U_n - 4}{-2(U_n - 4)} = \frac{-1}{2}$ avec $U_n \neq 4$

donc V_n est S.A de raison $r = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{1}{U_0 - 4} = \frac{1}{2-4} = \frac{-1}{2}$

c) $V_n = V_0 + nr = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n$

$V_n = \frac{1}{U_n - 4} \iff U_n - 4 = \frac{1}{V_n} \iff U_n = \frac{1}{V_n} + 4 = \frac{1}{-\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}} + 4$

$= \frac{2}{-n-1} + 4 = \frac{2 + 4(-n-1)}{-n-1} = \frac{2 - 4n - 4}{-n-1} = \frac{-2-4n}{-n-1}$

$= \frac{4n+2}{n+1}$

3) Soit W_n une suite tel que $W_n = (n+1)U_n$

$= (n+1)\frac{4n+2}{n+1} = 4n+2$

$W_{n+1} - W_n = 4(n+1) + 2 - 4n - 2 = 4$ constante

donc W_n est S.A de raison 4 et de premier terme $W_0 = 2$

$\Rightarrow S = 2U_1 + 3U_2 + \dots + (n+1)U_n$

$= W_1 + W_2 + \dots + W_n = n \times \frac{W_1 + W_n}{2} = n \times \frac{6 + 4n + 2}{2}$

$$= \frac{n(8+4n)}{2} = \cancel{4}\, n\times(4+2n)$$

Ex2:

1)a) $V_{n+1} = 4U_{n+1} - 6(n+1) + 2$

$$= 4\left(\frac{1}{3}U_n + n + \frac{7}{6}\right) - 6n - 6 + 2$$

2

$$= \frac{4}{3}U_n + 4n + \frac{14}{3} - 6n - 6 + 2$$

$$= \frac{4}{3}U_n - 2n + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(4U_n - 6n + 2) = \frac{1}{3}V_n$$

$\Rightarrow V_n$ est S.G de raison $q = \frac{1}{3}$

de premier terme $V_0 = 4U_0 - 6\times 0 + 2 = 4\times\frac{3}{2} + 2 = 8$

1 b) $V_n = V_0 \times q^n = 8\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

c) $V_n = 4U_n - 6n + 2 \Leftrightarrow U_n = \frac{V_n + 6n - 2}{4} = \frac{8\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6n - 2}{4}$

1

$$= 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{1}{2}$$

3) Soit a_n une suite suite arithmétique de premier terme $a_0 = -2$ et $r = 6$

$\Rightarrow a_n = 6n - 2$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\boxed{V_0} + a_0}{4} + \frac{\boxed{V_1} + a_1}{4} + \dots + \frac{V_n + a_n}{4}$$

$$= \frac{V_0 + V_1 + \dots + V_n + a_0 + \dots + a_n}{4}$$

$$= \frac{V_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + (n+1)\left(\frac{a_0 + a_n}{2}\right)}{4}$$

2

$$= \frac{8\times\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}{4} + \frac{(n+1)(-2 + 6n - 2)}{4}$$

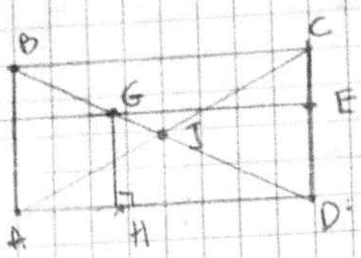
$(n+1)(6n-4)$

$$= 3\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{6n^2 - 2n + 6n - 2}{4}$$

$$= 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}\cancel{\times 3} + \frac{3n^2 + n - 2}{4}$$

$$= 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3n^2 + n - 2}{4}$$

x3:



1) Soit $f(W) = W \iff 3\overrightarrow{AW} + 2\overrightarrow{WA} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

$\iff \overrightarrow{AW} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

$\iff \overrightarrow{DW} = \vec{0} \implies D = W$

donc f admet un unique point invariant qui est D.

2) $3\overrightarrow{AM'} + 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

$\iff 3\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DM'} + 2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

$\iff 3\overrightarrow{DM'} = -2\overrightarrow{DM}$

$\iff \overrightarrow{DM'} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{DM} \implies$ f est une homotethie de centre D et de rapport $-\frac{2}{3}$

II) ~~1) a)~~ G le bpp (D, 1) et (B, 2)

$\implies \overrightarrow{DG} = \frac{2}{2+1}\overrightarrow{DB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} \implies h(B) = G$.

b) $h(B) = G$

et $(AB) \parallel (GH)$ car $\begin{cases}(AB) \perp (AD) \\ (GH) \perp (AD)\end{cases}$ $\Bigg\} \implies h(AB) = (GH)$

$h(AD) = (AD)$ car D le centre de h

~~I Ona A le projeté orthogonal de B sur (AD)~~

$\{A\} = (AD) \cap (AB)$

$\{h(A)\} = h((AD)) \cap h((AB))$

$= (AD) \cap (GH) = \{H\} \implies h(A) = H$

2) $h(B) = G$ } $h((BC)) = (EG)$

$(BC) // (EG)$ et $h((CD)) = (CD)$ car D le centre de h

$\{C\} = (BC) \cap (CD)$

$\{h(C)\} = h((BC)) \cap h((CD))$

$= (EG) \cap (CD) = \{E\} \Longrightarrow h(C) = E.$

1

3) a) On a $M'G^2 + M'D^2 = GD^2$ d'après le théorème de Pythagore

on a $M'GD$ un triangle rectangle en M'

$\Longrightarrow M' \in \mathscr{C}'_{[GD]}$ or $\mathscr{C}'_{[GD]} = h(\mathscr{C}_{[BD]})$ car $\begin{cases} h(B) = G \\ h(D) = D \\ h([BD]) = [DG] \end{cases}$

donc (C) est le cercle circonscrit au rectangle ABCD

1

b) On a $h(M) = M'$ D le bpp ~~$(\frac{2}{3}, M)$ et~~ $(M, \frac{2}{3})$ et $(M', -1)$.

$\frac{2}{3}\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DM'} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{-1}{-\frac{1}{3}}\overrightarrow{MM'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DM} = 3\overrightarrow{MM'}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{DM}\| = |3|\, \|\overrightarrow{MM'}\|$

$\Rightarrow DM = 3\, MM'$

$\Rightarrow DM = 3 \times \frac{4}{3} = 4 = AD$

$\Rightarrow M \in \mathscr{C}_{(D, AD)} \Rightarrow \mathscr{C}$ passe par A

1