EXERCICE : (moment d'une force) **Prof : Sayed.soula**

On donne : $||\vec{g}|| = 10\ N.kg^{-1}$.
On considère une tige AB homogène de masse $m_1 = 500\ g$, de centre de gravité G, mobile autour d'un axe fixe (Δ) passant par son extrémité A et qui lui est perpendiculaire.
La tige AB est maintenue en équilibre dans une position faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale à l'aide d'un fil (f) inextensible fixé à son extrémité B et passant à travers la gorge d'une poulie de masse négligeable, de rayon r et mobile autour d'un axe (Δ') passant par son centre de gravité et qui lui est perpendiculaire.
Le fil (f) retient par sa deuxième extrémité un solide (S) de masse m_2 comme le montre la figure 2.

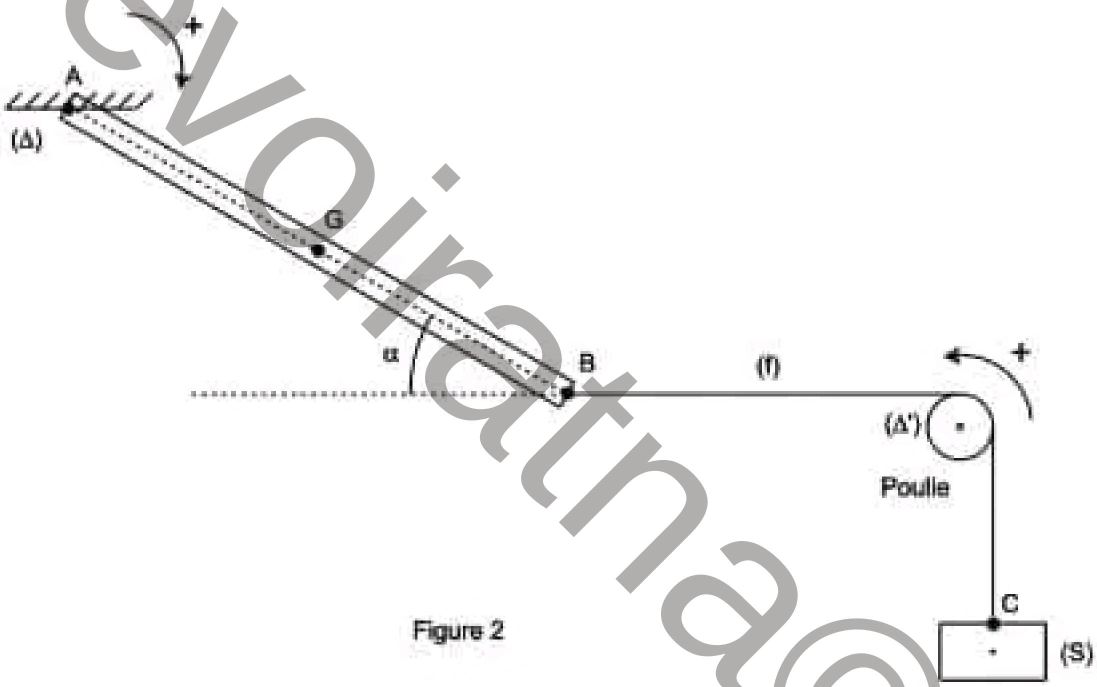


Figure 2

1°/ Représenter toutes les forces qui s'exercent respectivement sur la tige AB, sur la poulie et sur le solide (S).
2°/ a) Ecrire la condition d'équilibre de rotation de la tige AB.
 b) Déduire la valeur de la tension $\vec{T}_B$ du fil au point B.
 c) Ecrire la condition d'équilibre de translation de la tige AB.
 d) Déduire la valeur de la réaction $\vec{R}$ de son axe de rotation (Δ).
3°/ a) Montrer que la valeur de la tension $\vec{T}_B$ est égale à celle de la tension $\vec{T}_C$ du fil au point C.
 b) Ecrire la condition d'équilibre de translation de la poulie.
 c) Déduire que la valeur de la réaction $\vec{R}_1$ de l'axe de rotation (Δ') de la poulie peut s'écrire $||\vec{R}_1|| = \dfrac{m_1 . ||\vec{g}||}{\sqrt{2}.\tan\alpha}$. La calculer.
4°/ Déterminer la masse m_2 du solide (S).

Correction

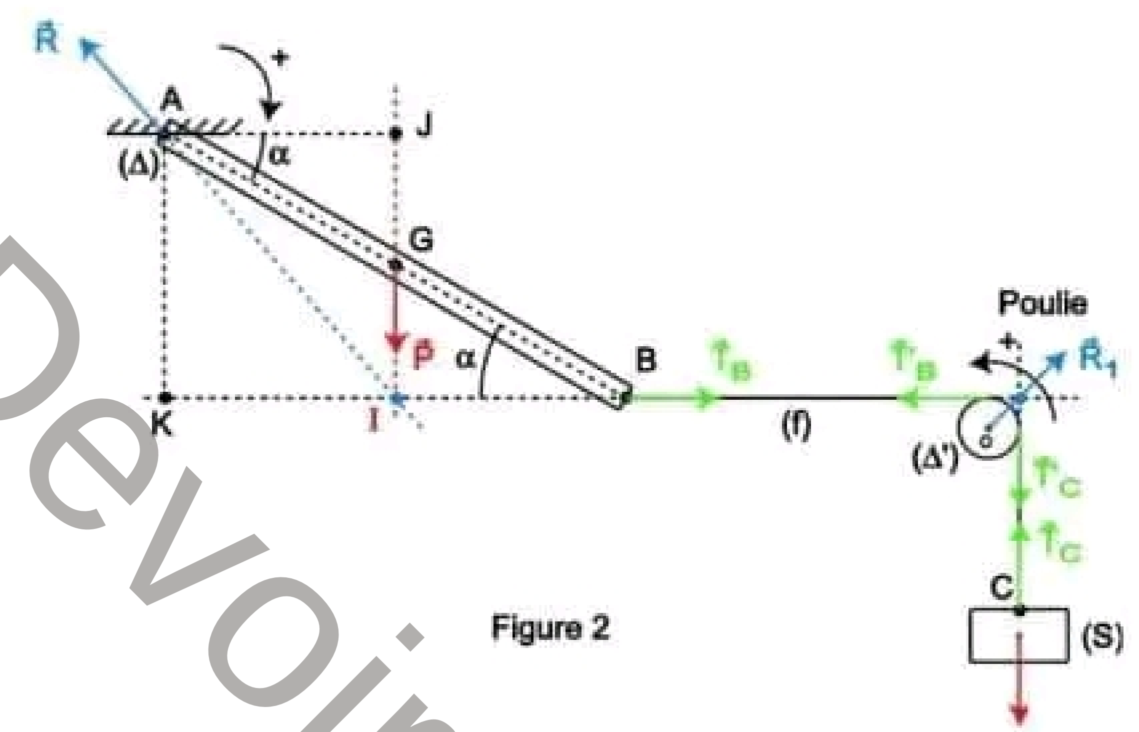


Figure 2

2°/ a) Ecrire la condition d'équilibre de rotation de la tige AB.

Rép : Théorème des moments : $\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{T}_B/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta} = 0$.

$\mathcal{M}_{\vec{R}/\Delta} = 0$ car la direction de $\vec{R}$ coupe l'axe de rotation (Δ) en A.

b) Déduire la valeur de la tension $\vec{T}_B$ du fil au point B.

Rép : $\mathcal{M}_{\vec{P}/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{T}_B/\Delta} = 0 \Leftrightarrow +m_1\|\vec{g}\|AJ - \|\vec{T}_B\|.AK = 0$ avec $AJ = \frac{AB}{2}.\cos\alpha$ et $AK = AB.\sin\alpha$.

$\Leftrightarrow \|\vec{T}_B\|.\ AB.\sin\alpha = m_1\|\vec{g}\|\ \frac{AB}{2}.\cos\alpha \Leftrightarrow \|\vec{T}_B\| = \frac{m_1\|\vec{g}\|}{2.\tan\alpha}$.

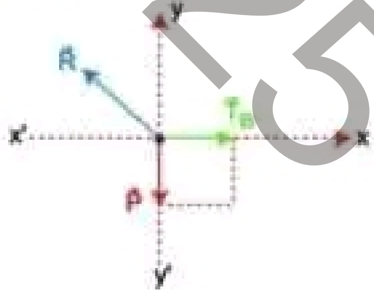
AN : $\|\vec{T}_B\| = \frac{0,5.10}{2.\tan 30} = \frac{5\sqrt{3}}{2} = 4,33$ N.

c) Ecrire la condition d'équilibre de translation de la tige AB.

Rép : Condition d'équilibre de translation de la tige AB : $\vec{P} + \vec{T}_B + \vec{R} = \vec{0}$.

d) Déduire la valeur de la réaction $\vec{R}$ de son axe de rotation (Δ).

Rép : Valeur de la réaction $\vec{R}$:



$\|\vec{R}\| = \sqrt{(m_1.\|\vec{g}\|)^2 + \|\vec{T}_B\|^2}$.

AN : $\|\vec{R}\| = \sqrt{(0,5.10)^2 + (4,33)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{2} = 6,61$ N.

3°/ a) Montrer que la valeur de la tension $\vec{T}_B$ est égale à celle de la tension $\vec{T}_C$ du fil au point C.

Rép :

Comme le fil est inextensible : $\begin{cases} \|\vec{T'}_B\| = \|\vec{T}_B\| \\ \|\vec{T'}_C\| = \|\vec{T}_C\| \end{cases}$ ①

Théorème des moments appliqué à la poulie : $\mathcal{M}_{\vec{T'}_B/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{T'}_C/\Delta} + \mathcal{M}_{\vec{R}_1/\Delta} = 0$.

$\mathcal{M}_{\vec{R}_1/\Delta} = 0$ car la direction de $\vec{R}_1$ coupe l'axe de rotation (Δ') en O.

$+\|\vec{T'}_B\|.r - \|\vec{T'}_C\|.r = 0 \Leftrightarrow \|\vec{T'}_B\| = \|\vec{T'}_C\|$ ②

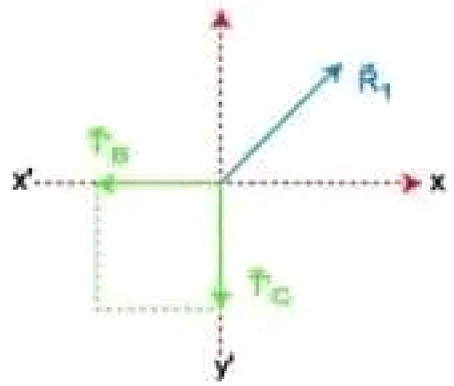
Conclusion : ① et ② donnent : $\|\vec{T}_B\| = \|\vec{T}_C\|$

b) Ecrire la condition d'équilibre de translation de la poulie.

Rép : Condition d'équilibre de translation de la poulie : $\vec{T'}_B + \vec{T'}_C + \vec{R}_1 = \vec{0}$.

c) Déduire que la valeur de la réaction $\vec{R}_1$ de l'axe de rotation (Δ') de la poulie peut s'écrire $\|\vec{R}_1\| = \dfrac{m_1.\|\vec{g}\|}{\sqrt{2}.\tan\alpha}$. La calculer.

Rép : Valeur de la réaction $\vec{R}_1$:



Pythagore : $\|\vec{R}_1\| = \sqrt{\|\vec{T'}_B\|^2 + \|\vec{T'}_C\|^2}$.

Or $\|\vec{T'}_B\| = \|\vec{T'}_C\| = \|\vec{T}_B\|$

$\Rightarrow \|\vec{R}_1\| = \sqrt{2\|\vec{T}_B\|^2} = \|\vec{T}_B\|\sqrt{2}$.

Or d'après la question 2°/b) $\|\vec{T}_B\| = \dfrac{m_1\|\vec{g}\|}{2.\tan\alpha}$.

$\Rightarrow \|\vec{R}_1\| = \dfrac{m_1\|\vec{g}\|}{2.\tan\alpha}\sqrt{2} = \dfrac{m_1\|\vec{g}\|}{\sqrt{2}.\tan\alpha}$.

AN : $\|\vec{R}_1\| = \dfrac{0,5.10}{\sqrt{2}.\tan 30} = \dfrac{5.\sqrt{6}}{2} = 6,12$ N.

4°/ Déterminer la masse m_2 du solide (S).

Rép : Masse m_2 du solide (S) :

Condition d'équilibre de translation : $\vec{P}_S + \vec{T}_C = \vec{0} \Leftrightarrow$

$+\|\vec{T}_C\| - \|\vec{P}_S\| = 0 \Leftrightarrow \|\vec{P}_S\| = \|\vec{T}_C\| \Leftrightarrow m_2\|g\| = \|\vec{T}_B\| \Leftrightarrow m_2 = \dfrac{\|\vec{T}_B\|}{\|\vec{g}\|}$.

AN : $m_2 = \dfrac{4,33}{10} = 0,433$ kg $= 433$ g.