LYCEE PILOTE-SFAX-	DEVOIR DE CONTROLE N°1 DE MATHEMATIQUES	Mme MEGDICH
2SC 9-10. 1H		

18

EXERCICE N°1(4 points)

Soient A, B et C trois points du plan tels que $AC = 8$, $AB = \sqrt{81-8\sqrt{5}}$ et $BC = \dfrac{\sqrt{5}}{20+9\sqrt{5}}$

1/ Montrer que $BC = 9-4\sqrt{5}$

2/ Montrer que $B \in [AC]$

EXERCICE N°2(4 points)

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4cm , AC = 3cm et BC = 5cm. M est un point de $[AB]$ tel que AM = x . Par M on trace la parallèle à (BC) qui coupe $[AC]$ en N

1/ Exprimer en fonction de x les distances AN et MN

2/ Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le périmètre P1 du triangle AMN soit supérieur strictement au périmètre P2 du trapèze MNCB

EXERCICE N°3(3 points)

1/ Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $n^2 + \dfrac{1}{n} \geq 2\sqrt{n}$

2/ Déduire que : $n^2 - n + 1 \geq \dfrac{2n\sqrt{n}}{1+n}$

EXERCICE N°4(9 points)

ABCD est un rectangle tels que AB = 4cm et AD = 3cm

1/ Construire les points E et F définis par : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{DA}$

2/ Montrer que les points E , F et C sont alignés

3/ a) Montrer que R= $\left(A, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right)$ est un repère orthonormé

b) Soient K(3,0) et G tel que $\overrightarrow{DG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DK}$. Déterminer les coordonnées des points C , D et G dans R

c) Montrer que KGC est un triangle rectangle en G

d) Calculer le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère BCGK

2sc 9-10 Devoir de Contrôle N°1 M^{me} Megdiche

Exercice 1 : (4pts)

1) $BC = \dfrac{\sqrt{5}}{20+9\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}(20-9\sqrt{5})}{(20+9\sqrt{5})(20-9\sqrt{5})}$

$= \dfrac{20\sqrt{5}-45}{-5} = 9-4\sqrt{5}$

Donc $BC = 9-4\sqrt{5}$

2) $AB = \sqrt{81-8\sqrt{5}} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2+1^2-2\times 4\sqrt{5}\times 1}$

$= \sqrt{(4\sqrt{5}-1)^2} = |4\sqrt{5}-1| = 4\sqrt{5}-1$

Donc $AB = 4\sqrt{5}-1$

Ainsi $\left.\begin{array}{l} AC = 8 \\ AB = 4\sqrt{5}-1 \\ BC = 9-4\sqrt{5} \end{array}\right\}$ Donc $AC = AB + BC$

par suite $B \in [AC]$.

Exercice 2 : (4pts)

Dans cet exercice, M est distinct de A et B puisque on parle du triangle AMN et du trapèze MNCB

aussi si on $AM = x$ cm

1) Dans le triangle ABC

$\left.\begin{array}{l} M \in (AB),\ N \in (AC) \\ (MN) \parallel (BC) \end{array}\right\}$ D'après Thalès $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$

Donc $AN = \dfrac{3x}{4}$ et $MN = \dfrac{5x}{4}$

$P_1 = AM + AN + MN$

$= x + \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}x$ D'où $P_1 = 3x$

$P_2 = MN + NC + CB + BM$

$= \dfrac{5x}{4} + \left(3 - \dfrac{3x}{4}\right) + 5 + (4-x)$; $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$

D'où $P_2 = 12 - \frac{1}{2}x$

$P_1 > P_2$

équivaut : $3x > 12 - \frac{1}{2}x$

équivaut : $\frac{7}{2}x > 12$

équivaut : $x > \frac{24}{7}$

et puisque $x \in]0;4[$ Alors $x \in]\frac{24}{7};4[$.

Exercice 3 : (3pts)

1) $n \in \mathbb{N}^*$ Donc $\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$

et puisque $\left(n - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \geq 0$

Alors $n^2 + \frac{1}{n} - 2n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$

Par suite $n^2 + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{n}$

2) $n^2 + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{n}$

$n\left(n^2 + \frac{1}{n}\right) \geq 2n\sqrt{n}$; $(n > 0)$

$n^3 + 1^3 \geq 2n\sqrt{n}$

$(n+1)(n^2 - n + 1) \geq 2n\sqrt{n}$

$n^2 - n + 1 \geq \frac{2n\sqrt{n}}{n+1}$; $(n+1 > 0)$

Exercice 4 : (9 pts).

1) $\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ Donc $x_E = \frac{1}{4}$ dans le repère $(A;\vec{AB})$

$\vec{DF} = \frac{4}{3}\vec{DA}$ Donc $x_F = \frac{4}{3}$ dans le repère $(D;\vec{DA})$

2) $\vec{FE}$ ...

3) a) $ABCD$ est un rectangle donc $(AB)\perp(AD)$

puisque $E\in(AB)$ et $F\in(AD)$ Alors $(AE)\perp(AF)$

d'où $\vec{AE}\perp\vec{AF}$

d'autre part $\|\vec{AE}\| = \|\frac{1}{4}\vec{AB}\| = \frac{1}{4}AB = 1$

et $\|\vec{AF}\| = \|\vec{AD}+\vec{DF}\| = \|\vec{AD} - \frac{4}{3}\vec{AD}\|$

$= \|-\frac{1}{3}\vec{AD}\| = \frac{1}{3}AD = 1$

Donc $\vec{AE}$ et $\vec{AF}$ sont deux vecteurs unitaires et orthogonaux

par suite $R = (A;\vec{AE};\vec{AF})$ est un repère orthonormé

b) a) $ABCD$ est un rectangle

Donc $\vec{AC} = \vec{AB}+\vec{AD}$

$\vec{AC} = 4\vec{AE} - 3\vec{AF}$ ($\vec{AF} = -\frac{1}{3}\vec{AD}$ d'après 3) a))

D'où $C(4;-3)$

b) $\vec{AD} = -3\vec{AF} = 0\vec{AE} - 3\vec{AF}$

Donc $D(0;-3)$.

c) $\vec{DG} = \frac{2}{3}\vec{DK}$

$x_G - x_D = \frac{2}{3}(x_K - x_D)$ et $y_G - y_D = \frac{2}{3}(y_K - y_D)$

$x_G - 0 = \frac{2}{3}(3-0)$ et $y_G + 3 = \frac{2}{3}(0+3)$.

Bel Modo di Vivere

D'où $G(2\,;-1)$

c) On a $G(2\,;-1)$, $K(3\,;0)$ et $C(4\,;-3)$

Donc $\vec{GK}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_{(\vec{AE};\vec{AF})}$ et $\vec{GC}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}_{(\vec{AE};\vec{AF})}$

Or $aa'+bb' = 1\times2 + 1\times(-2) = 0$

et $(\vec{AE},\vec{AF})$ est une base orthonormée

Alors $\vec{GK}\perp\vec{GC}$

Ainsi le triangle KGC est rectangle en G

d) $\vec{AE}=\frac{1}{4}\vec{AB}$ donc $\vec{AB}=4\vec{AE}$ d'où $B(4\,;0)$.

Comme $C(4\,;-3)$ et $K(3\,;0)$

Donc $\vec{CB}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{BK}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

$aa'+bb' = 0\times(-1)+3\times0=0$

Donc $\vec{CB}\perp\vec{BK}$

D'où CBK est un triangle rectangle en B

et puisque KGC est aussi un triangle rectangle en K

Donc le quadrilatère $BCGK$ est inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre l'hypoténuse commun $[CK]$ des triangles rectangles CBK et KGC

Donc le rayon r de $\mathcal{C}$ est $r=\frac{CK}{2}$

On a $\vec{CK}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ donc $CK=\sqrt{10}$

et $r=\frac{\sqrt{10}}{2}$