LYCEE PILOTE DE SOUSSE	*Devoir de synthèse N°3*	*CLASSE : $2^{ème}$S*
	MATHEMATIQUES	*DUREE : 2 heures*

EXERCICE N°1 (8 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x-2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère R.

a) Vérifier que : pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a $f(x) = -2 - \dfrac{3}{x-2}$

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c) Tracer la courbe (C).

2/ Soient g et g_1 les fonctions définies respectivement par : $g(x) = \sqrt{x+3} - 1$ et $g_1(x) = \sqrt{x+3}$

a) Dresser le tableau de variation de g_1.

b) Tracer la courbe représentative (C') de g dans le repère R.

c) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des courbes (C) et (C').

d) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \leq g(x)$.

3/ Soit h la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{-2x+1}{|x-2|}$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans le repère R.

a) Tracer la courbe (Γ) à partir de la courbe (C).

b) Dresser alors le tableau de variation de h.

4/ a) Tracer la parabole (P) d'équation : $y = -\dfrac{1}{3}x^2 - 2$.

b) En déduire que l'équation : $x^2|x-2| + 6(|x-2| - x) + 3 = 0$, admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

Donner la valeur exacte de l'une de ces solutions et un encadrement d'amplitude 0,25 de l'autre.

EXERCICE N°2 (5 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient m un paramètre réel et $(C_m) = \{ M(x,y) \in P \ / \ x^2 + y^2 - 2mx + 2(m-2)y = 0 \}$

1/ Montrer que pour tout m de $\mathbb{R}$, (C_m) est un cercle dont on précisera les coordonnées de son centre I_m et la valeur de son rayon R_m

2/ a) Montrer que les cercles (C_m) passent par deux points fixes A et B dont on donnera les coordonnées.

b) En déduire que les points I_m sont sur une droite fixe dont on donnera une équation cartésienne.

3/ Soit (D) la droite d'équation : $x + 3y - 18 = 0$.

a) Montrer qu'il existe deux cercles (C_{m_1}) et (C_{m_2}) tangents à la droite (D), on prendra $m_1 < m_2$.

Tracer les cercles (C_{m_1}) et (C_{m_2}) et la droite (D).

b) Soit I le point d'intersection de la droite (D) et de la droite Δ d'équation : $x + y - 2 = 0$.

Montrer que (C_{m_2}) est l'image de (C_{m_1}) par une homothétie H de centre I dont on précisera le rapport.

EXERCICE N°3 (7 points)

On donne dans l'espace deux triangles équilatéraux ABC et ABD situés dans deux plans perpendiculaires P et Q.

On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [CA], [CB], [DB] et [DA] et on pose $AB = a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$

1/ a) Montrer que la droite (DI) est perpendiculaire au plan P.

b) Déterminer la nature du triangle ICD puis calculer DC en fonction de a.

2/ a) Montrer que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (IDC).

b) En déduire que la droite (IJ) est la perpendiculaire commune des droites (AB) et (DC).

3/ Montrer que le quadrilatère KLMN est un rectangle.

4/ Soit R le plan passant par K et parallèle aux droites (AB) et (DC).

a) Déterminer l'intersection du plan R avec chacun des plans P et Q.

b) Montrer que R est le plan médiateur du segment [IJ].

5/ Calculer en fonction de a le volume de la pyramide JKLMN.

6/ Soit Δ l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC et soit F le milieu du segment [MN].

a) Montrer que Δ est contenue dans le plan (IDC).

b) Soit E le point d'intersection de Δ et R, montrer que E est le centre de gravité du triangle FKL.

Exn°1 :

1) a) $-2-\frac{3}{x-2} = \frac{-2(x-2)-3}{x-2}$

$= \frac{-2x+4-3}{x-2} = \frac{-2x+1}{x-2}$

$= f(x)$

d'où $f(x) = -2 - \frac{3}{x-2}$ $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

b) soit a et $b \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

tq $a \leq b$

$a-2 \leq b-2$

$\frac{1}{a-2} \geq \frac{1}{b-2}$

$-\frac{3}{a-2} \leq -\frac{3}{b-2}$

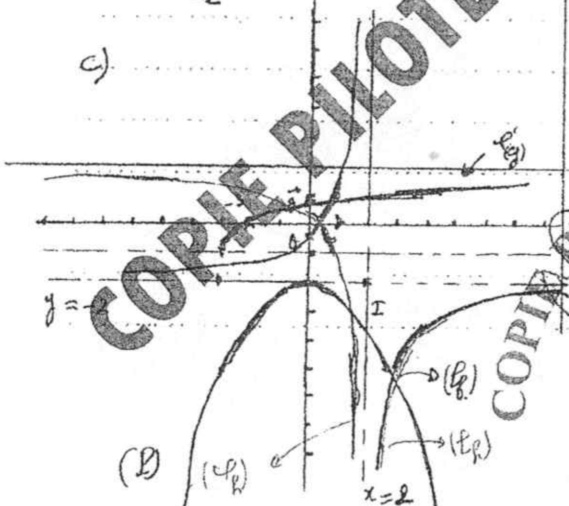
$-2-\frac{3}{a-2} \leq -2-\frac{3}{b-2}$

$f(a) \leq f(b)$

d'où f est croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	-2 ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-2

c)



$\mathscr{C}_f$ est un hyperbole de centre $I(2;-2)$ et d'asymptote $x=2$ et $y=-2$

2°) $g(x) = \sqrt{x+3} - 1$

$g_1(x) = \sqrt{x+3}$

a) $g_1(x) = \sqrt{x+3}$

$D_{g_1} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x+3 \geq 0\}$

$x+3 \geq 0$ ssi $x \geq -3$

$D_g = [-3, +\infty[$

soit a et $b \in [-3, +\infty[$ tq $a \leq b$

$a+3 \leq b+3$

$\sqrt{a+3} \leq \sqrt{b+3}$

$f(a) \leq f(b)$

d'où f est croissante sur $[-3, +\infty[$

x	-3	$+\infty$
f	0 ↗	$+\infty$

b) soit $(\mathscr{C}_1)$ est la représentation graphique de g_1

et $(\mathscr{C}')$ .... de g

donc $(\mathscr{C}') = t_{-\vec{j}}(\mathscr{C}_1)$

c) $f(x) = g(x)$ ssi $\frac{-2x+1}{x-2} = \sqrt{x+3} - 1$

ssi $\frac{-2x+1}{x-2} + 1 = \sqrt{x+3}$

$\frac{-2x+1+x-2}{x-2} = \sqrt{x+3}$

$\frac{-x-1}{x-2} = \sqrt{x+3}$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$-x-1$	$+$	0	$-$		$-$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-x-1}{x-2}$	$-$	0	$+$	‖	$-$

$x \in [-1, 2[$

2°) a) $M(x,y) \in (C_m)$

ssi $2mx + 2(m-2)y = 0$

ssi $x^2+y^2-4y+m(-2x+2y)=0$

$\begin{cases} x^2+y^2-4y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+x^2-4x=0 \\ x=y \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2-4x=0 \\ x=y \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x(x-2)=0 \\ x=y \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=x=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ y=x \quad\quad y=2 \end{cases}$

d'où (C_m) passent par deux points fixes $A(0,0)$ et $B(2,2)$

b) on a : $A(0,0)$ et $B(2,2)$ sont deux points fixes de (C_m)

donc $I_mA = I_mB$

d'où $I_m \in$ méd $[AB]$

$\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite fixe (Δ)

(Δ) : $2x+2y+c=0$.

Le milieu I de $[AB]$ de coordonnées $\left(\frac{2+0}{2}=1 ; \frac{2+0}{2}=1\right)$

$I(1,1)$

$I \in (\Delta)$ ssi $2\times1+2\times1+C=0$

$C+4=0$ donc $C=-4$

(Δ) : $2x+2y-4=0$

$\boxed{(\Delta) : x+y-2=0}$

3°) a) (D) : $x+3y-18=0$

on a : $I_m(m ; -m+2)$

(D) est tangente à (C_m) ssi

$d(I_m,(D)) = R_m$

ssi $\frac{|m+3(-m+2)-18|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \sqrt{m^2+(m-2)^2}$

ssi $|-2m-12| = \sqrt{10}\sqrt{m^2+(m-2)^2}$

ssi $|2m+12|^2 = \left(\sqrt{10}\sqrt{m^2+(m-2)^2}\right)^2$

ssi $4m^2+48m+144 = 10m^2+10(m-2)^2$

ssi $4m^2+48m+144 = 10m^2+10(m^2-4m+4)$

ssi $4m^2-10m^2-10m^2+48m+40m+144-40=0$

ssi $-16m^2+88m+104=0$

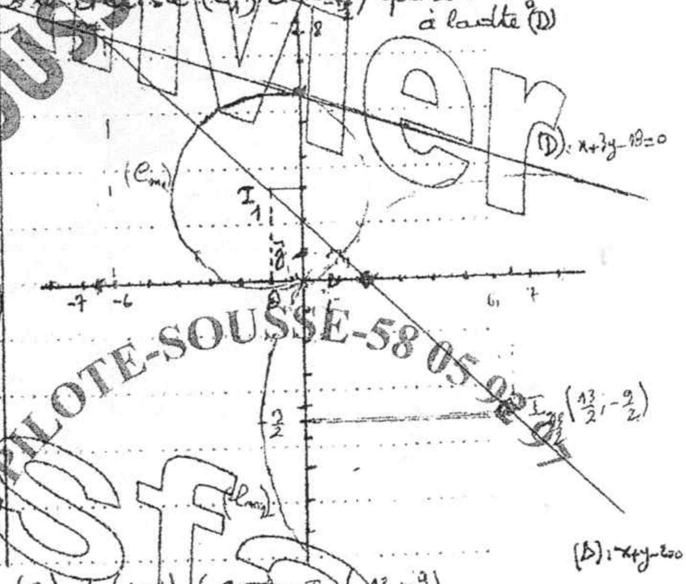
ssi $-4m^2+22m+26=0$

$-4-22+26=0$

$m_1=-1$

$m_2 = \frac{-26}{-4} = \frac{13}{2}$

d'où il existe (C_1) et $(C_{\frac{13}{2}})$ qui sont tangentes à la droite (D)



(C_1) : $I_1(1 ; 1)$

$R_1 = \sqrt{10}$

$(C_{\frac{13}{2}})$: $I_{\frac{13}{2}}\left(\frac{13}{2} ; -\frac{9}{2}\right)$

$R_{\frac{13}{2}} = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{250}}{2} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$

65

d'où $[I,J]$ est la perpendiculaire commune de (AB) et (CD)

3°) on a : $(KL) \parallel (AB)$ (Ds le T. ABC, on a : K = A∗C et L = B∗C)

et $(MN) \parallel (AB)$ (Ds le T. ABD on a M = A∗D et N = A∗D)

d'où $(KL) \parallel (MN)$ et $KL = MN = \frac{1}{2} AB$

et on a : $(AB) \perp (ICD)$ et $(CD) \subset (ICD)$

d'où $(AB) \perp (CD)$

et on a $(KL) \parallel (AB)$

et $(LM) \parallel (CD)$ (Ds le T. BCD on a L = B∗C et M = B∗D)

d'où $(KL) \perp (LM)$

donc on a : $(KL) \parallel (MN)$ et $KL = MN$

et $(KL) \perp (LM)$

D'où KLMN est un rectangle

4°) a) on a : $(AB) \parallel (KLM)$ car $(AB) \parallel (KL)$

et $(AB) \not\subset (MN)$

et $(CD) \parallel (KLM)$ car $(LM) \parallel (CD)$

et $(KN) \parallel (CD)$

d'où $R = (KLM)$

$R \cap P = (KL)$ et $R \cap Q = (MN)$.

b) On a $LJ = LB$ (car [BJ] est un T. Rect. en J et L = C∗B)

et $LI = LB$ (car CBI est un T. Rect. en I et L = C∗B)

d'où $LI = LJ$ donc $L \in$ plan médiateur $[IJ]$

et on a : $(IJ) \perp (AB)$

et $(AB) \parallel (R)$

d'où $(IJ) \perp (R)$

on a $L \in (R)$

d'où (R) est le plan médiateur de $[IJ]$

c) on a (R) est le plan médiateur de $[IJ]$ et $J \in (KLM)$

d'où la hauteur de la pyramide JKLMN est $\frac{1}{2} IJ$

or $\frac{1}{2} IJ = \dots = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$\mathcal{A}_{KLMN} = KL \times LM$ ($KL = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$, $LM = \frac{1}{2} CD = \frac{a\sqrt{6}}{\dots}$)

$= \frac{a}{2} \times \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8}$

$V_{JKLMN} = \frac{1}{3} \times \frac{a\sqrt{6}}{4} \times \frac{a^2\sqrt{6}}{8}$

$= \frac{a^3 \times 6}{96} = \frac{a^3}{16}$

d'où $V_{JKLMN} = \frac{a^3}{16}$

5°) a) O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et $O \in (IC)$

et on a : (Δ) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC donc $(\Delta) \perp ABC$ ($(\Delta) \perp (IC)$)

or $(ICD) \perp (ABC)$ … $(IC) \subset (ICD)$

donc $(\Delta) \subset (ICD)$

b) on a : $\{E\} = (\Delta) \cap (FH)$ et $[FH]$ est la médiane issue de F pour le triangle FKL

Dans le triangle HIF on a :

$(OE) \parallel (IF)$ et $O \in [HI]$ et $E \in [HF]$

d'après Th de Thalès on a : $\frac{HO}{HI} = \frac{HE}{HF}$

on a : O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et $I = A∗B$

66

et $H = I∗C$

or $IC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ donc $HI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$OI = \frac{1}{3} CI = \frac{1}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$HO = HI - OI$

$= \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$

$\frac{HO}{HI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{12}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{12} \times \frac{4}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$

d'où $\frac{HE}{HF} = \frac{HO}{HI} = \frac{1}{3}$

donc $HE = \frac{1}{3} HF$

$FE = FH - HE$

$= FH - \frac{1}{3} FH = \frac{2}{3} FH$

d'où $FE = \frac{2}{3} FH$

Enfin : E est centre de gravité du triangle FKL.