Série 22 2Sc [redacted] Lycée Pilote Sfax Mr Abdelmoula

67/6

Ex 1 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{4x}{x^2+4}$

1) Etudier la parité de f

2) a) Soient a et b deux réels, montrer que $f(a)-f(b) = \dfrac{4(b-a)(ab-4)}{(a^2+4)(b^2+4)}$

b) Etudier alors les variations de f sur $[-2, 2]$ et sur $[2, +\infty[$

3) a) Compléter la courbe $\mathcal{C}$ de f

b) Déterminer graphiquement le maximum et le minimum de f

c) Tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$

d) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq \frac{1}{2}x$

4) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2+4}$

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $g(x) = x - f(x)$

b) En utilisant la question 2) b) ; montrer que g est croissante sur $[2, +\infty[$

Ex 2 Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x}$

et on désigne par $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) les pts $A(2,5)$ et $B(-1,-1)$ appartiennent-ils à $\mathcal{C}$?

2) a) Montrer que f est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1]$

b) Déduire que f admet un minimum sur $]0, +\infty[$ que l'on précisera

3) Soit n un entier naturel non nul, comparer $f\left(\frac{1}{n}\right)$ et $f\left(\frac{1}{n+1}\right)$

(sans faire du calcul)

Ex 3 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{x+1}$; $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

1) Déterminer a et b pour que la courbe C_f de f passe par les pts $A(0,1)$ et $B(-2,3)$.

Dans la suite de l'exercice on prend : $a = 2$ et $b = 1$

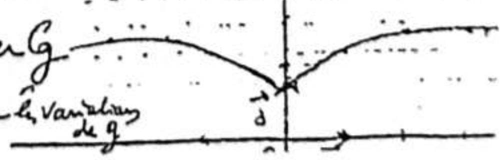
2) Etudier les variations de f sur $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$

a) Montrer que g est paire

b) le graphique ci-contre est une partie de la courbe $\mathcal{C}_g$ de g sur $[0, 4]$; Compléter $\mathcal{C}_g$

c) Utiliser le graphique pour étudier les variations de g



) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq \frac{3}{2}$ (68)

Ex 4 On donne $f(x) = -\cos^2 x + \cos x \sin x - 1$

) Calculer $f(\frac{\pi}{3})$ et $f(\frac{3\pi}{4})$

-) Soit α un élément de $[0,\pi]$ telque $tg\,\alpha = -2\sqrt{6}$, calculer $\cos\alpha$

en déduire $f(\alpha)$

) Résoudre dans $[0,\pi]$, l'équation $f(x) = -1$

-) vérifier que $\cos\frac{5\pi}{8} = -\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\frac{3\pi}{8}$, Calculer alors

$f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{5\pi}{8})$

) a) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$; $f(x) = \frac{-tg^2 x + tg\,x - 2}{1 + tg^2 x}$

b) montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, $f(x) < 0$

Ex 5 Soit ABC un triangle telque $AC = \sqrt{2} \times BC$ et $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{4}$

montrer que le triangle ABC est rectangle en B

Ex 6 ABC est un triangle isocèle à angles aigus telque $AB = AC = a$

et I le projeté orthogonal de A sur (BC). On pose $\widehat{BAC} = 2\alpha$

et $\widehat{ACB} = \beta$

) Exprimer BC en fonction de a et α

) a) Montrer que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

) Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Calculer BH de 2

façons différentes, en déduire la relation $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

) Calculer AH et CH, en déduire la relation $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2$

) Calculer alors $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ en déduire $\tan\frac{5\pi}{12}$ +

Ex 7 On donne $f(x) = 2\cos^2 x - (\sqrt{3}+2)\cos x + \sqrt{3}$; $x \in [0,\pi]$

1) Calculer $f(\frac{2\pi}{3})$

2) Résoudre dans $[0,\pi]$; l'équation $f(x) = 0$

3) Dans cette question x désigne un élément de $[0,\frac{\pi}{2}]$

a) Montrer que $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 = 2$

b) Exprimer $f(\frac{\pi}{2} - x) + f(\pi - x)$ à l'aide de $\cos x - \sin x$

c) Déduire des deux questions précédentes la resolution de l'équa

$f(\frac{\pi}{2} - x) + f(\pi - x) = \sqrt{3}$.

Exre 1 :

1°) $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$

$D_f = \mathbb{R}$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a : $(-x) \in \mathbb{R}$

$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2+4} = \frac{-4x}{x^2+4} = -f(x)$

d'où f est impaire

2°) a) $f(a)-f(b) = \frac{4a}{a^2+4} - \frac{4b}{b^2+4}$

$= \frac{4a(b^2+4)-4b(a^2+4)}{(a^2+4)(b^2+4)}$

$= \frac{4ab(b-a)+16(a-b)}{(a^2+4)(b^2+4)}$

$= \frac{4(b-a)(ab-4)}{(a^2+4)(b^2+4)}$

b) soient a et b $\in [-2,2]$ tque $a \leq b$

$f(a)-f(b) = \frac{4(b-a)(ab-4)}{(a^2+4)(b^2+4)}$

or on a : $ab \leq 4$ car a et b $\in [-2,2]$

donc $ab-4 \leq 0$

et $b-a \geq 0$ car $a \leq b$

et on a : $a^2+4 > 0$ et $b^2+4 > 0$

d'où $f(a)-f(b) \leq 0$

$f(a) \leq f(b)$

donc f est croissante sur $[-2,2]$

Soient a et b $\in [2,+\infty[$ tque $a \leq b$

on a : $b-a \geq 0$ $ab-4 \geq 0$

car a et b $\in [2,+\infty[$

d'où $f(a)-f(b) \geq 0$

$f(a) \geq f(b)$

donc f est décroissante sur $[2,+\infty[$

3) b) le maximum de f est 1

le minimum de f est (-1)

d) $f(x) \geq \frac{1}{2}x$

$\mathscr{C}_f$ est au dessus de (Δ)

$x \in]-\infty,-2] \cup [0,2]$

$S_{\mathbb{R}} =]-\infty,-2] \cup [0,2]$

4°) a) $g(x) = \frac{x^3}{x^2+4}$ $x \in \mathbb{R}$

$x - f(x) = x - \frac{4x}{x^2+4}$ $(D_g = \mathbb{R})$

$= \frac{x^3+4x-4x}{x^2+4} = \frac{x^3}{x^2+4} = g(x)$

b) Soit a et b $\in [2,+\infty[$ tque $a \leq b$

$g(a)-g(b) = (a-f(a))-(b-f(b))$

$= (a-b)+(f(b)-f(a))$

on a f est décroissante sur $[2,+\infty[$

donc $f(b)-f(a) \leq 0$ et on a : $a-b \leq 0$

d'où $g(a)-g(b) \leq 0$ d'où $g(a) \leq g(b)$

donc g est croissante sur $[2,+\infty[$

Ex N° 2

$f(x) = \frac{x^3+2}{x}$ $x \in]0,+\infty[$

1°) $f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

d'où $A(2,5) \in \mathscr{C}_f$

$B \notin \mathscr{C}_f$ car $(-1) \notin]0,+\infty[$

2°) a) $f(a)-f(b) =$

$= \frac{a^3+2}{a} - \frac{b^3+2}{b}$ a et b $\in]0,+\infty[$

$= \frac{a^3b+2b-ab^3-2a}{ab} = \frac{ab(a^2-b^2)+2(b-a)}{ab}$

$f(a)-f(b)=\dfrac{(a-b)(ab(a+b)-2)}{ab}$

② soient a et $b \in [1,+\infty[$ tq $a \leq b$

$ab \geq 1$ et $a+b \geq 2$

d'où $ab(a+b) \geq 2$

donc $ab(a+b)-2 \geq 0$

et on a : $a-b \leq 0$

d'où $f(a)-f(b) \leq 0$

donc $f(a) \leq f(b)$

d'où f est croissante sur $[1,+\infty[$

③ soient a et $b \in]0,1]$ tque $a \leq b$

$0 < ab \leq 1$ et $0 < a+b \leq 2$

$0 < ab(a+b) \leq 2$

d'où $ab(a+b)-2 \leq 0$

et on a $a-b \leq 0$

d'où $f(a)-f(b) \geq 0$

$f(a) \geq f(b)$

donc f est décroissante sur $]0,1]$

b) on a f est decroissante sur $]0,1]$

et f est croissante sur $[1,+\infty[$

d'où f admet un minimum en 1

qui est $f(1)=\dfrac{1^3+2}{1}=3$

3°) on a : $n \in \mathbb{N}^*$

on a $n+1 \geq n$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

$\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n+1} \in]0,1]$

on a f est décroissante sur $]0,1]$.

d'où $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \geq f\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Ex N° 4 :

$f(x) = -\cos^2 x + \cos x \sin x - 1$

1°) $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{4} - 1$

$= -\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) - 1$

$= -\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} - 1$

$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1$

$= -\frac{2}{4} - \frac{2}{4} - 1 = -2$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{3} - 1$

$= -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

$= -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{-5+\sqrt{3}}{4}$

2°) $tg(\alpha) = -2\sqrt{6}$

on a : $1+tg^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+(-2\sqrt{6})^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+24 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{25}$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$ ou $\cos\alpha = -\dfrac{1}{5}$

or on a $\sin\alpha > 0$ et $tg(\alpha) < 0$

donc $\cos\alpha < 0$

d'où $\boxed{\cos\alpha = -\frac{1}{5}}$

on a $tg(\alpha) = -2\sqrt{6}$

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2\sqrt{6}$

$\boxed{\sin\alpha = -2\sqrt{6}\times\cos\alpha = -2\sqrt{6}\times\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2\sqrt{6}}{5}}$

$f(\alpha) = -\cos^2\alpha + \cos\alpha\sin\alpha - 1$

$f(\alpha) = -\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) - 1$

$= -\frac{1}{25} - \frac{2\sqrt{6}}{25} - 1$

$\boxed{f(\alpha) = \dfrac{-26-2\sqrt{6}}{25}}$

3°) $f(x) = -1$

ssi $-\cos^2 x + \cos x \sin x - 1 = -1$

ssi $-\cos^2 x + \cos x \sin x = 0$

ssi $\cos x(-\cos x + \sin x) = 0$

ssi $\cos x = 0$ ou $-\cos x + \sin x = 0$

$x = 0$ ou $x = \pi$ ou $\cos x = \sin x$

$x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

$S_{[0,\pi]} = \{0, \frac{\pi}{4}, \pi\}$

4°) $\cos\frac{5\pi}{8} = \cos(\pi - \frac{3\pi}{8}) = -\cos(\frac{3\pi}{8})$

$\sin\frac{5\pi}{8} = \sin(\pi - \frac{3\pi}{8}) = \sin(\frac{3\pi}{8})$

$f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{5\pi}{8}) =$

$= -\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} - 1 + -\cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{8} - 1$

$= -\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} - \cos^2(\frac{3\pi}{8}) - \cos\frac{3\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8} - 2$

$= -\cos^2\frac{\pi}{8} - [\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8})]^2 + \cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} - \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8})\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) - 2$

$= -\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} - 2$

$= -(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}) - 2$

$= -1 - 2 = -3$

D'où $\boxed{f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{5\pi}{8}) = -3}$

5°) a) $x \in [0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

$\frac{-tg^2 x + tg x - 2}{1 + tg^2 x} = \frac{-tg^2 x + tg x - 2}{\frac{1}{\cos^2 x}}$

$= (-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 2) \times \cos^2 x$

$= -\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x$

$= -\cos^2 x + \sin x \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x$

$= -\cos^2 x + \cos x \sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$= -\cos^2 x + \cos x \sin x - 1 = f(x)$

b) $f(x) = \frac{-tg^2 x + tg x - 2}{1 + tg^2 x}$

on a : $1 + tg^2 x > 0$ pour $x \in [0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

$-X^2 + X - 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1 - 8 = -7 < 0$

d'où $P(X) = -X^2 + X - 2$ garde une signe constante sur $[0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

d'où $Q(x) = -tg^2 x + tg x - 2$ garde une signe constante sur $[0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

$Q(0) = -tg^2 0 + tg 0 - 2 = -2 < 0$

d'où $Q(x) < 0$

Enfin $f(x) = \frac{-tg^2 x + tg x - 2}{1 + tg^2 x} < 0$

d'où $f(x) < 0$ pour $x \in [0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

Ex N°5:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos\hat{C}$ ($\hat{C} = \frac{\pi}{4}$)

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\sqrt{2}\, BC \times BC \frac{\sqrt{2}}{2}$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC^2$

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

D'après la réciproque du Th. de Pythagore on a : ABC est un T. R en B

Ex N°7:

1°) $f(x) = 2\cos^2 x - (\sqrt{3}+2)\cos x + \sqrt{3}$ $x \in [0,\pi]$

$f(\frac{2\pi}{3}) = 2\cos^2(\frac{2\pi}{3}) - (\sqrt{3}+2)\cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$

$= 2\cos^2(\pi - \frac{\pi}{3}) - (\sqrt{3}+2)\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}$

$= 2(-\cos\frac{\pi}{3})^2 - (\sqrt{3}+2)(-\cos(\frac{\pi}{3})) + \sqrt{3}$

$= 2(-\frac{1}{2})^2 - (\sqrt{3}+2)(-\frac{1}{2}) + \sqrt{3}$

$\boxed{f(\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \sqrt{3} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}}$

2) $f(x)=0$ $x\in[0,\pi]$

si $2\cos^2x-(\sqrt{3}+2)\cos x+\sqrt{3}=0$

$2-(\sqrt{3}+2)+\sqrt{3}=0$

$\cos x=1$ donc $x=0$

ou $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $x=\frac{\pi}{6}$

$S_{[0,\pi]}=\left\{0,\frac{\pi}{6}\right\}$

3) a) $(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2$

$=\underbrace{\cos^2x+\sin^2x}_{1}-2\cos x\sin x$

$+\underbrace{\cos^2x+\sin^2x}_{1}+2\cos x\sin x$

$=1+1=2$

d'ou $(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2=2$

b) $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-(\sqrt{3}+2)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sqrt{3}$

$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin^2(x)-(\sqrt{3}+2)\sin x+\sqrt{3}$

$f(\pi-x)=2\cos^2(\pi-x)-(\sqrt{3}+2)\cos(\pi-x)+\sqrt{3}$

$=2(-\cos x)^2-(\sqrt{3}+2)(-\cos x)+\sqrt{3}$

$f(\pi-x)=2\cos^2x+(\sqrt{3}+2)\cos x+\sqrt{3}$

$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f(\pi-x)=2\sin^2(x)-(\sqrt{3}+2)\sin x+\sqrt{3}$

$+2\cos^2(x)+(\sqrt{3}+2)\cos x+\sqrt{3}$

$=2(\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1})+(\sqrt{3}+2)(\cos x-\sin x)+2\sqrt{3}$

$=2+(\sqrt{3}+2)(\cos x-\sin x)+2\sqrt{3}$

$=(\sqrt{3}+2)(\cos x-\sin x)+2+2\sqrt{3}$

c) $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f(\pi-x)=\sqrt{3}$

$(\sqrt{3}+2)(\cos x-\sin x)+2\sqrt{3}+2=\sqrt{3}$

$(\sqrt{3}+2)(\cos x-\sin x)=-2-\sqrt{3}$

$\cos x-\sin x=\frac{-(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})}=-1$

et on a: $(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2=2$

$(-1)^2+(\cos x+\sin x)^2=2$

$(\cos x+\sin x)^2=2-1=1$

or $\cos x\geq 0$ et $\sin x\geq 0$

car $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

d'ou $\cos x+\sin x=1$

donc $\cos x-\sin x=-1$

$2\cos x=1-1=0$

d' $\cos x=0$

$\sin x=1$

donc $x=\frac{\pi}{2}$

d'ou $S_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}=\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$