

Lycée Pilote Sfax	Devoir de synthèse n°1 Mathématiques	1 ^{ère} année
		Durée : 1 H 30

Exercice 1 : (2,5 points)

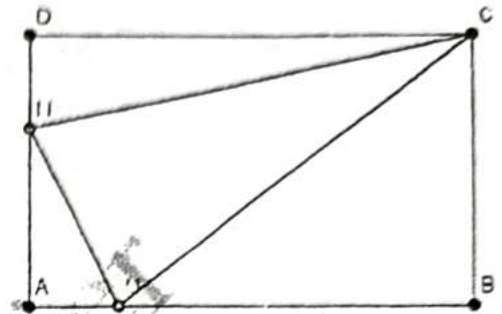
- 1) a) Calculer $(3 + 2\sqrt{3})^2$
b) En déduire une écriture simple de chacun des réels $x = \sqrt{21 + 12\sqrt{3}}$ et $y = \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$
- 2) Montrer alors que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 0$

Exercice 2 : (3,5 points)

Dans la figure ci-contre ABCD est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$

M est un point de [AB] et N un point de [AD] tel que $AM = DN = x$

- 1) a) Déterminer à l'aide de x , l'aire S du triangle CMN
b) Vérifier que $S = \frac{(x-3)^2 + 15}{2}$
- 2) Si $\frac{1}{2} < x < 3$, Trouver un encadrement de S



Exercice n°3 : (4 points)

Soient a et b deux réels strictement positifs

- 1) Montrer que $\frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- 2) a) Montrer que $\frac{2}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{ab}$
b) En déduire que $\frac{2(a+b)}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Exercice n°4 : (10 points)

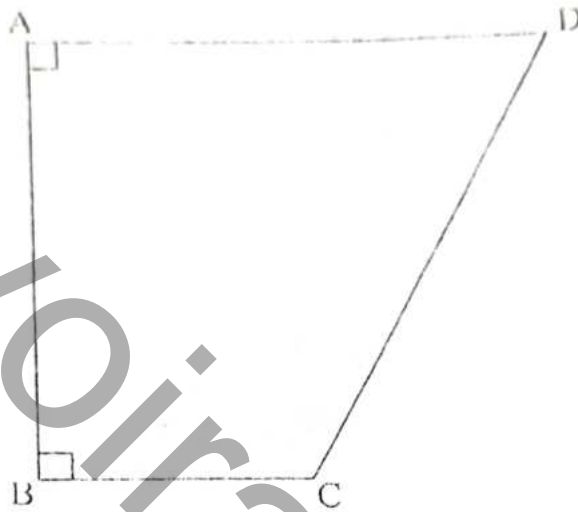
ABCD est un trapèze rectangle en A et B tel que $AD = 6$, $AB = 3\sqrt{3}$ et $BC = 3$.

- I-
 - 1) Calculer AC et BD
 - 2) Construire le point M de [AB] tel que $AM = \frac{1}{3} AB$ puis calculer AM.
 - 3) La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en E. Calculer AE
 - 4) La parallèle à (BD) passant par M coupe (AD) en O. Calculer AO
 - 5) a) Montrer que $(OE) \parallel (CD)$
b) Calculer $\tan \hat{BAC}$, En déduire la valeur de l'angle \hat{BAC}
c) Montrer que le triangle OAE est équilatéral.

II- Le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 2 recoupe [AD] en N et la bissectrice de l'angle \hat{EOA} coupe \mathcal{C} en K

- 1) Évaluer l'angle \hat{AOK} , en déduire l'angle \hat{ANK}
- 2) Soit H le projeté orthogonal de K sur [AN]
 - a) Calculer OH, HK et AH.
 - b) Déduire que $AK = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
 - c) Vérifier que $\sqrt{6} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
 - d) Déduire que $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

فكستة 18 ج 1 لمي 4
 نوب 18 ج 1 لمي 4
 هسكس 18 ج 1 لمي 4
 الوبف 22 140 485



فكستة 18 ج 1 لمي 4
 نوب 18 ج 1 لمي 4
 هسكس 18 ج 1 لمي 4
 الوبف 22 140 485

Devoiratna©2025

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$(15^\circ) = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2}$$

$$5) \text{ (d'après (15)) } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

113

Lycée Pilote Sfax

1^{ère} année

Devoir de synthèse n°1

Exercice 1

1) a) $(3+2\sqrt{3})^2 = 3^2 + (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{3}$
 $= 9 + 12 + 12\sqrt{3} = 21 + 12\sqrt{3}$

b) $x = \sqrt{21 + 12\sqrt{3}} = \sqrt{(3+2\sqrt{3})^2}$
 $= |3+2\sqrt{3}| = 3+2\sqrt{3}$

$y = \sqrt{21 - 12\sqrt{3}} = \sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}$
 $= |3-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}-3$

2) $x = 3+2\sqrt{3}; y = 2\sqrt{3}-3$

donc $xy = (2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3) = (2\sqrt{3})^2 - 3^2$
 $= 12 - 9 = 3$

et $y+x = 2\sqrt{3}-3+3+2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

d'où $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{y+x}{xy} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$
 $= \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 0$

Exercice 2

1) a) Aire (ABCD) = AB x AD = 6 x 4 = 24

Aire (AMN) = $\frac{AM \times AN}{2} = \frac{x \times (4-x)}{2}$

Aire (BCM) = $\frac{BC \times BM}{2} = \frac{4 \times (6-x)}{2}$

Aire (DCN) = $\frac{DC \times DN}{2} = \frac{6 \times x}{2}$

d'où $S = \text{Aire (GMN)} =$

$24 - \left(\frac{x \times (4-x)}{2} + \frac{4 \times (6-x)}{2} + \frac{6 \times x}{2} \right)$

$= 48 - (4x - x^2 + 24 - 4x + 6x)$

$= \frac{x^2 - 6x + 24}{2}$

b) $\frac{(x-3)^2 + 15}{2} = \frac{x^2 + 3^2 - 2 \times x \times 3 + 15}{2}$
 $= \frac{x^2 - 6x + 24}{2} = S$

2) si $\frac{1}{2} < x < 3$ alors

$-\frac{5}{2} < x-3 < 0$ d'où

$0 < (x-3)^2 < \frac{25}{4}$ et par suite

$15 < (x-3)^2 + 15 < \frac{25}{4} + 15 = \frac{85}{4}$

donc $\frac{15}{2} < \frac{(x-3)^2 + 15}{2} < \frac{85}{8}$

Conclusion :

Si $\frac{1}{2} < x < 3$ alors $\frac{15}{2} < S < \frac{85}{8}$

Exercice 3

1) a) $a > 0$ et $b > 0$ donc $ab > 0$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ d'où

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2\sqrt{ab}$ et par suite

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ donc

$\frac{a+b}{ab} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{ab}$ alors

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$

2) a) on a : $a^2 + b^2 > 0$ et $ab > 0$

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ d'où

$\frac{1}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2ab}$ alors

$\frac{2}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{ab}$

b) on a : $a+b > 0$; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$

$\frac{2}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{ab}$ donc $\frac{2(a+b)}{a^2+b^2} \leq \frac{a+b}{ab}$

تمت 18 ج 2
 توج الطاهر كعون امم البشار بوم 4
 همدرة رعية صيطين
 الهاتف 22 740.485

