Lycée Pilote Sfax	Devoir de Synthèse N°1	1ère Année
		1 heure 30 minutes

Exercice 1 : (5,5 pts)

On donne $x = \sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$ et $y = \dfrac{4}{2-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$.

1°) Calculer $(7 - 5\sqrt{2})^2$. En déduire une écriture simple de x.

2°) Factoriser l'expression $F = (t + 5\sqrt{2})^2 - (99 - 70\sqrt{2}) + (t+7)^2$. $(t \in \mathbb{R})$.

3°) Ecrire y sans radical au dénominateur.

4°) Montre que x et y sont inverses.

5°) Déterminer les valeurs de $A = \dfrac{x^3 + y^3}{xy^2 + x^2y}$ et $B = \dfrac{(yx^{-1})^2 + y^{-1}}{x^2 + y^3}$.

Exercice 2 : (4,5 pts)

Soit $E = (x - 1 + \sqrt{2})^3 + (x - 1 - \sqrt{2})^3 - 2x^3 + 2$; (x est un réel).

1°) Calculer E pour $x = \sqrt{2}$.

2°) a. Montrer que $(a + b)^3 + (a - b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$ pour tous réels a et b.

b. Montrer alors $E = (2x - 2)(6 - 3x)$.

3°) Encadrer E pour $x \in [3, 4]$.

Exercice 3 : (2 pts)

Soit x un réel positif.

1°) Montrer que $2x + 1 \geq 2\sqrt{2x}$.

2°) Déduire que si $x \geq \dfrac{1}{2}$ alors $2\sqrt{2x} \leq 4x^2 + 1$.

Exercice 4 : (8 pts)

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 4$ et $\widehat{BAC} = 135°$.

La perpendiculaire à (BC) passant par B coupe (AC) en E.

1°) Montrer que A est le milieu de [EC].

2°) Soit H le projeté orthogonal de B sur (CE).

a. Montrer que le triangle ABH est rectangle et isocèle.

b. Calculer CH puis BC.

3°) Montrer que $\sin(22{,}5°) = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

4°) Soit I le milieu de [BC]. La droite (AI) coupe (BH) en G.

a. Vérifier que $\widehat{BGI} = 22{,}5°$.

b. Montrer que $AG = 4\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

5°) a. Montrer que le triangle GBC est isocèle.

b. La droite (AB) coupe (CG) en F. Montrer que les droites (HF) et (BC) sont parallèles.

c. Calculer FH.

Lycée Rilate Sfax — **Devoir de synthèse N°1** — 6 — 1ère année

Exercice 1

1) $(7-5\sqrt{2})^2 = 7^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2\times7\times5\sqrt{2} = 49+50-70\sqrt{2} = 99-70\sqrt{2}$

$(5\sqrt{2})^2 = 50 > 49 = 7^2$ donc $5\sqrt{2} > 7$ d'où $x = \sqrt{99-70\sqrt{2}} = \sqrt{(7-5\sqrt{2})^2} = |7-5\sqrt{2}| = 5\sqrt{2}-7$

2) $F = (t+5\sqrt{2})^2 - (99-70\sqrt{2}) + (t+7)^2 = (t+5\sqrt{2})^2 - (7-5\sqrt{2})^2 + (t+7)^2 = (t+5\sqrt{2}-7+5\sqrt{2})(t+5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2})$

$+(t+7)^2 = (t+10\sqrt{2}-7)(t+7) + (t+7)^2 = (t+7)(t+10\sqrt{2}-7+t+7) = (t+7)(2t+10\sqrt{2})$

3)

$y = \frac{4}{2-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{4(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} + \frac{3(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{8+4\sqrt{2}}{2^2-\sqrt{2}^2} + \frac{3\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}^2-1^2}$

$y = \frac{8+4\sqrt{2}}{4-2} + \frac{3\sqrt{2}+3}{2-1} = \frac{8+4\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}+3}{1} = 4+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+3 = 5\sqrt{2}+7$

4) $x \times y = (5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}+7) = (5\sqrt{2})^2 - 7^2 = 50-49 = 1$ donc x et y sont inverses

5) $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$; $xy^2+x^2y = xy(y+x)$ or $xy=1$ donc $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-1+y^2)$

et $xy^2+x^2y = y+x$

$A = \frac{x^3+y^3}{xy^2+x^2y} = \frac{(x+y)(x^2-1+y^2)}{(x+y)} = x^2-1+y^2 = (5\sqrt{2}-7)^2 - 1 + (5\sqrt{2}+7)^2 = 99-70\sqrt{2}-1$

$+99+70\sqrt{2} = 197$

$B = \frac{(yx^{-1})^2+y^{-1}}{x^2+y^3} = \frac{y^2x^{-2}+y^{-1}}{x^2+y^3} = \frac{y^2\times y^2+y^{-1}}{y^{-2}+y^3} = \frac{y^4+y^{-1}}{y^3+y^{-2}} = \frac{y^6+y}{y^5+1} = \frac{y(y^5+1)}{y^5+1} = y = 5\sqrt{2}+7$

Exercice 2

1) $E = (x-1+\sqrt{2})^3 + (x-1-\sqrt{2})^3 - 2x^3 + 2$; $x = \sqrt{2}$

$E = (\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2}-1-\sqrt{2})^3 - 2(\sqrt{2})^3 + 2$

$E = (2\sqrt{2}-1)^3 + (-1)^3 - 2\times2\sqrt{2} + 2$

$E = (2\sqrt{2})^3 - 3\times(2\sqrt{2})^2\times1 + 3\times2\sqrt{2}\times1^2 - 1 - 1 - 4\sqrt{2} + 2$

$E = 8\times2\sqrt{2} - 3\times8 + 6\sqrt{2} - 2 - 4\sqrt{2} + 2 = 18\sqrt{2} - 24$

2) a) $(a+b)^3 + (a-b)^3 = (a+b+a-b)((a+b)^2 - (a+b)(a-b) + (a-b)^2)$

$= 2a(a^2+b^2+2ab-a^2+b^2+a^2+b^2-2ab)$

$= 2a(a^2+3b^2)$ pour tous réels a et b

b) $E = (x-1+\sqrt{2})^3 + (x-1-\sqrt{2})^3 - 2x^3 + 2 = 2(x-1)((x-1)^2 + 3\times\sqrt{2}^2) - 2(x^3-1)$

$E = 2(x-1)(x^2-2x+1+6) - 2(x-1)(x^2+x+1) = (2x-2)(x^2-2x+7-x^2-x-1) = (2x-2)(6-3x)$

7

1) ABC est isocele en A et $B\hat{A}C = 135$ donc $A\hat{C}B = A\hat{B}C = \frac{1}{2}(180 - 135) = \frac{45}{2} = 22,5°$

CBE est rectangle en B ; $E \in (AC)$ donc $B\hat{E}C = 90 - 22,5 = 67,5°$

$B\hat{A}E = 180 - 135 = 45°$ donc $A\hat{B}E = 180 - (45° + 67,5) = 180 - 112,5° = 67,5°$

$B\hat{E}C = A\hat{E}C = A\hat{B}E = 67,5°$ donc ABE est isocele en A d'où $AE = AB = AC$

Comme A, C et E sont aligués alors A est le milieu de $[EC]$

2) a) H est le projeté orthogonal de B sur (CE) donc ABH est rectangle en H

on a : $B\hat{A}H = B\hat{A}E = 45°$ donc ABH est rectangle et isocele en H

b) $\cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{4}$ donc $AH = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ d'où $HC = CA + AH = 4 + 2\sqrt{2}$

$BH = AH = 2\sqrt{2}$ et $HC = 4 + 2\sqrt{2}$; BHC est rectangle en H donc d'après Pythagore

$BC^2 = CH^2 + BH^2 = (4 + 2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16 + 16\sqrt{2} + 8 + 8$

$BC^2 = 32 + 16\sqrt{2} = 16(2 + \sqrt{2})$ d'où $BC = 4\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

3) on a : $B\hat{C}A = 22,5°$; $\sin(B\hat{C}A) = \sin(B\hat{C}H) = \frac{BH}{BC}$ donc

$$\sin(22,5°) = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}})}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}})}{2\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2}}$$

$$\sin(22,5°) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{4-2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

4) a) ABE est isocele en A ; I le milieu de $[BC]$ donc $(BI) \perp (AI)$ d'où

BIG est rectangle en I on a : $G\hat{B}I = H\hat{B}C = H\hat{B}A + A\hat{B}C = 45° + 22,5° = 67,5°$

d'où $B\hat{G}I = 90 - 67,5° = 22,5°$

b) GAH est rectangle en H ; $B\hat{G}I = H\hat{G}A = 22,5°$

$$\sin(22,5) = \frac{AH}{AG} = \frac{2\sqrt{2}}{AG} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \text{ d'où } AG = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$AG = 4\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

5) a) on a : (AI) est la médiatrice de $[BC]$ et $G \in (AI)$ donc $GB = GC$ d'où

GBC est isocele en G

b) on a : $(CH) \perp (GB)$ donc (CH) porte la hauteur issue de C du triangle GBI

on a : $(GI) \perp (BC)$ donc (GI) porte la hauteur issue de G du triangle GBI

donc $(CH) \cap (GI) = A$ est l'orthocentre du triangle GBI