◈◈◈	**DEVOIR DE CONTRÔLE N°5**			
	Mathématiques	2ᵉ Sc	2022-2023	1 Heure

Exercice 1 — 12 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points $A(-1,-5)$, $B(-3,-8)$, $C(-9,-4)$ et la droite $\Delta : 3x-2y+6=0$

1) a) Placer les points A,B et C et tracer la droite Δ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

c) Prouver que (AB) et Δ sont parallèles.

2) a) Déterminer une équation de la droite Δ_1 parallèle à (AB) passant par le point C.

b) Déterminer une équation de la droite Δ_2 perpendiculaire à (AB) en B.

c) Vérifier que le point C appartient à Δ_2.

d) Montrer que la droite Δ est la médiatrice du segment $[BC]$.

3) Soit le point $H(-4,-3)$.

a) Vérifier que le quadrilatère $ABCH$ est un trapèze.

b) Calculer l'aire du trapèze $ABCH$.

Exercice 2 — 8 points

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.
- On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- Dans ***l'annexe jointe***, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(\mathscr{C}_f)$ ainsi que la droite Δ dont une équation cartésienne est $\Delta : 2x-2y-1=0$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=2$.

c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)>2$.

2) a) Montrer, par le calcul, que la droite Δ et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ sont sécantes en un seul point A dont on déterminera les coordonnées.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)-x>-\frac{1}{2}$.

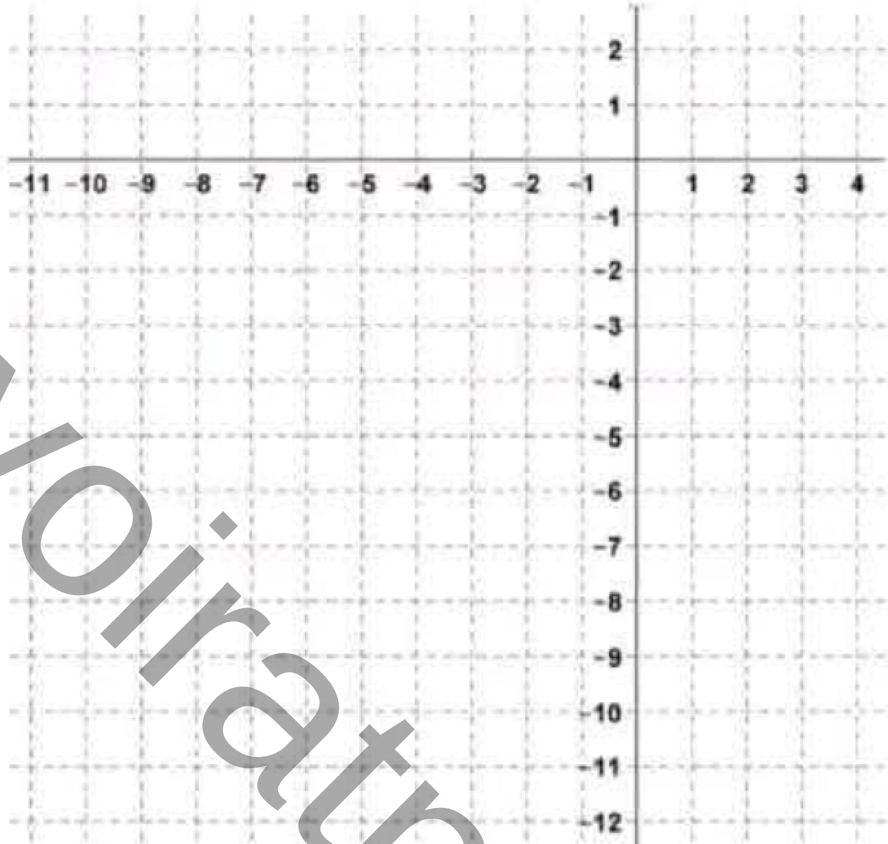
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{1}{2}x|x|$.

a) Vérifier que la fonction g est impaire.

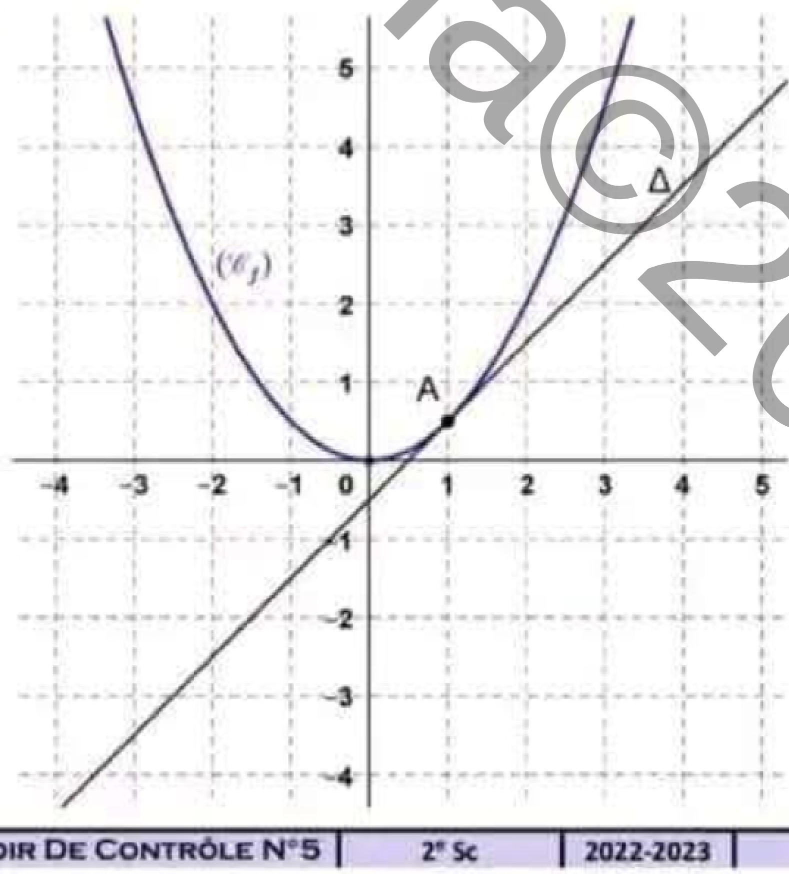
b) Tracer alors la courbe $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g dans le même repère.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1

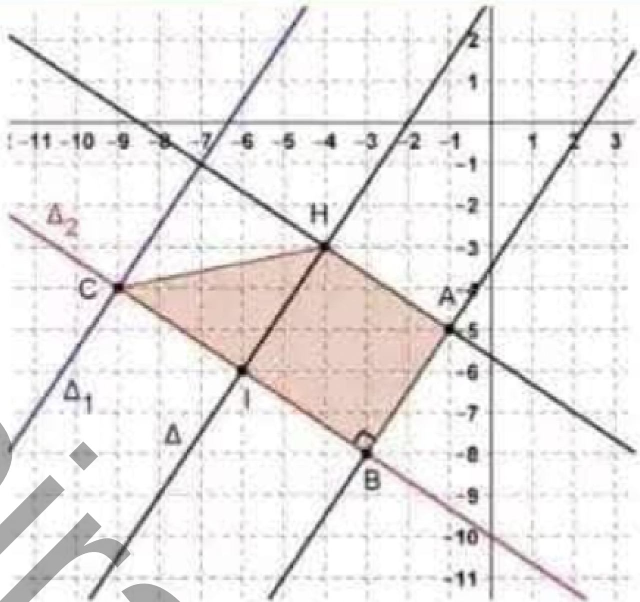


Exercice 2



Exercice 1 — 12 pts

1) a)
- $A(-1,-5)$
- $B(-3,-8)$
- $C(-9,-4)$
- $\Delta: 3x-2y+6=0$.



1) b) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) donc $(AB): -3x+2y+c=0$

Comme $A(-1,-5)\in(AB)$ alors $3-10+c=0$ d'où $c=7$ ainsi $(AB): -3x+2y+7=0$

1) c) $\Delta: 3x-2y+6=0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ.

Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}=-\vec{u}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires d'où (AB) et Δ sont parallèles.

2) a) Δ_1 est parallèle à (AB) passant par le point C alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ_1.

donc $\Delta_1: -3x+2y+c=0$ et comme $C(-9,-4)\in\Delta_1$ alors $27-8+c=0$ d'où $c=-19$
ainsi $\Delta_1: -3x+2y-19=0$.

2) b) Δ_2 est perpendiculaire à (AB) en B alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ_2.

donc $\Delta_2: -2x-3y+c=0$ et comme $B(-3,-8)\in\Delta_2$ alors $6+24+c=0$ d'où $c=-30$
ainsi $\Delta_2: -2x-3y-30=0$ ou encore $\Delta_2: 2x+3y+30=0$

2) c) $C(-9,-4)$: $2(-9)+3(-4)+30=-18-12+30=0$ alors $C\in\Delta_2$.

2) d) • On a $\left|\begin{array}{l}\Delta//(AB)\\ \Delta_2\perp(AB)\end{array}\right\}$ alors $\Delta\perp\Delta_2$ et comme $B,C\in\Delta_2$ alors $\Delta\perp(BC)$.

• Soit $I=B*C$ ▸ $I(\frac{-3-9}{2},\frac{-8-4}{2})$ donc $I(-6,-6)$

▸ $I(-6,-6)$: $\Delta: 3(-6)-2(-6)+6=-18+12+6=0$ donc $I\in\Delta$

d'où Δ est la médiatrice du segment $[BC]$.

3) a) $A(-1,-5)$, $H(-4,-3)$ $B(-3,-8)$ et $C(-9,-4)$ alors $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AH}$ alors $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires d'où (BC) et (AH) sont parallèles. donc le quadrilatère $ABCH$ est un trapèze.

3) b) On a $AH=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$, $BC=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$ et $AB=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

l'aire du trapèze $ABCH$ est : $\mathcal{A}=\frac{1}{2}(BC+AH)\times AB=\frac{1}{2}(\sqrt{52}+\sqrt{13})\sqrt{13}=\frac{1}{2}(26+13)=\frac{39}{2}$

Exercice 2 — 8 pts

1) a)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

1) b) $f(x)=2$: $S_{\mathbb{R}}=\{-2,2\}$.

1) c) $f(x)>2$: $S_{\mathbb{R}}=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

2) a) Soit $M(x,y)\in(\mathscr{C}_f)\cap\Delta \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2\\2x-2y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2\\-x^2+2x-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2\\x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}\\x=1\end{cases}$

ainsi $(\mathscr{C}_f)\cap\Delta=\left\{A(1,\frac{1}{2})\right\}$.

2) b) • $\Delta : 2x-2y-1=0 \Leftrightarrow \Delta : y=x-\frac{1}{2}$

• $f(x)-x>-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x)>x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\mathscr{C}_f)$ est strictement au-dessus de Δ alors $S_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

3) a) $g(x)=\frac{1}{2}x|x|$.

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$, $g(-x)=\frac{1}{2}(-x)|-x|=-\frac{1}{2}x|x|=-g(x)$ alors g est impaire.

3) b) • Pour tout $x\geq 0$: $|x|=x$ alors $g(x)=\frac{1}{2}x|x|=\frac{1}{2}x^2=f(x)$ d'où sur $[0,+\infty[$, $(\mathscr{C}_g)=(\mathscr{C}_f)$.

• Comme g est impaire alors $(\mathscr{C}_g)$ est symétrique par rapport à O. d'où la construction de $(\mathscr{C}_g)$ à partir de $(\mathscr{C}_f)$