LYCEE PILOTE SFAX Novembre 2019	Devoir de contrôle 2 (Mathématiques)	Mr : Hadjkacem Classe : 2sc7

14

Exercice 1 :(7 points)

I) 1) Résoudre dans IR l'inéquation $t^2 - 9t - 36 \geq 0$

2) Résoudre alors l'inéquation $(x^2 + 4x)^2 - 9(x^2 + 4x) - 36 \geq 0$.

II) Résoudre dans IR l'inéquation : $|x^2 - 1| + \frac{1}{x} \leq |2x^2 + x - 3| + \frac{1}{x}$

III) 1) Résoudre dans IR^2 le système (S) à inconnues $(x; y)$ avec $(S) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ xy = 48 \end{cases}$

2) Soit $ABCD$ un losange de coté 5cm et d'aire 24 cm^2

Déterminer en cm les distances AC et BD sachant que $AC < BD$

Exercice 2 :(5 points)

Soit b un réel et T le trinome du second degré tel que $T(x) = x^2 + bx - 1$, pour tout $x \in IR$

1) Montrer que $T(x)$ admet deux racines distinctes et de signe différent qu'on note x' et x''

On ne demande pas de déterminer ses racines et on suppose que $x' < x''$

2) Déterminer b pour que x' et x'' soient opposés
3) Exprimer en fonction de b le réel $A = (x')^2 + (x'')^2$
4) a) Montrer que les réels $(1 - bx')$ et $(1 - bx'')$ sont des inverses

b) Déduire que lorsque x' et x'' ne sont pas opposés, le réel $\frac{1}{b}$ n'appartient pas à l'intervalle $[x'; x'']$

Exercice 3 :(8 points)

Soit $ABCD$ un rectangle du plan

On désigne par I le barycentre de $(A; 1), (B; 3)$ et par J le barycentre de $(B; 2), (C; 1)$

1) Faire une figure
2) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tel que $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})$ et $(2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$ soient orthogonaus

a) Vérifier que le point B appartient à (E)

b) Déterminer l'ensemble (E)

3) Les droites (IJ) et (CD) se coupent en un point K

a) Montrer que K est le barycentre de $(I; 2), (J; -3)$

b) Montrer que K est le barycentre de $(C; 3), (D; -1)$

4) Soit O le milieu du segment $[BC]$ et G le barycentre de $(A; 1), (B; 3), (K; 2)$

a) Montrer que $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) Déduire que les droites (AD) et (OG) sont parallèles

Lycée Pilote F H Sfax — Devoir de contrôle n°2 — M^r Hadj Kacem

2019-2020 — 2 Sc 1

Exercice 1 : (7 pts)

I/ 1) Soit le binôme $A(t) = t^2 - 9t - 36$

$\Delta = 225 > 0$, $t_1 = -3$ et $t_2 = 12$

$a = 1 > 0$ Donc $S_{\mathbb{R}} =]-\infty, -3] \cup [12, +\infty[$

2) $(x^2+4x)^2 - 9(x^2+4x) - 36 \geq 0$

équivaut à : $t^2 - 9t - 36 \geq 0$; (il suffit de poser $t = x^2 - 4x$)

équivaut à : $t \leq -3$ ou $t \geq 12$

équivaut à : $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ou $x^2 - 4x - 12 \geq 0$

Soit $T(x) = x^2 - 4x + 3$; Soit $T'(x) = x^2 - 4x - 12$

$a + b + c = 0$; $\Delta = 64 > 0$

$x_1 = 1$ et $x_2 = 3$; $x' = -2$ et $x'' = 6$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$T(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$T'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_1 = [1, 3]$; $S_2 =]-\infty, -2] \cup [6, +\infty[$

Donc $S_{\mathbb{R}} = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -2] \cup [1, 3] \cup [6, +\infty[$

II/ Condition : $x \neq 0$

Dans $\mathbb{R}^*$: $|x^2 - 1| + \frac{1}{x} \leq |2x^2 + x - 3| + \frac{1}{x}$

équivaut à : $|x^2 - 1| \leq |2x^2 + x - 3|$

équivaut à : $|x^2 - 1|^2 \leq |2x^2 + x - 3|^2$; ($|\ |\in \mathbb{R}_+$ et $|\ |\in \mathbb{R}_+$)

équivaut à : $(2x^2 + x - 3)^2 - (x^2 - 1)^2 \geq 0$

$(x^2 + x - 2)(3x^2 + x - 4) \geq 0$

Soit $T(x) = x^2 + x - 2$; Soit $T'(x) = 3x^2 + x - 4$

$a + b + c = 0$; $a + b + c = 0$

$x_1 = 1$ et $x_2 = -2$; $x' = 1$ et $x'' = -4/3$

Il Modo di Vivere

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$T(x)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$T'(x)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$T(x)\,T'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Donc $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left(\left]-\infty, -2\right] \cup \left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[\right) \cap \mathbb{R}^*$

$= \left]-\infty, -2\right] \cup \left[-\frac{4}{3}; 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$

III/ 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ xy = 48 \end{cases}$ équivaut $\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 100 \\ xy = 48 \end{cases}$

[illegible]
المعهد النموذجي بصفاقس

équivaut $\begin{cases} (x+y)^2 = 196 \\ xy = 48 \end{cases}$

[illegible]
المعهد النموذجي بصفاقس

équivaut $\begin{cases} x+y = 14 \\ xy = 48 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y = -14 \\ xy = 48 \end{cases}$

Soit l'équation $y^2 - 14y + 48 = 0$ | Soit l'équation $z^2 + 14z + 48 = 0$

$\Delta = 4 > 0$ | $\Delta = 4 > 0$

$y_1 = 6$ et $y_2 = 8$ | $z_1 = -8$ et $z_2 = -6$

Donc $\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$ | Donc $\begin{cases} x = -8 \\ y = -6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -6 \\ y = -8 \end{cases}$

Cl: $\mathcal{S}_{\mathbb{R}^2} = \{(6;8), (8;6), (-8;-6), (-6;-8)\}$

2) Posons $AC = x$ et $BD = y$ tq $0 < x < y$

$ABCD$ un losange donc $(AC) \perp (BD)$ et ont [AC] = m[BD]

D'après Pythagore $\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = CD^2$

D'où $x^2 + y^2 = 100$

L'aire de $ABCD$ est $\frac{AC \times BD}{2} = 24$

D'où

Ainsi $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ xy = 48 \end{cases}$ et d'après 1) et le résultat

Compte du fait que $0 < x < y$

Nous déduisons $AC = x = 6cm$ et $BD = y = 8cm$

Exercice 2 : (5 pts)

1) $f(x) = x^2 + bx - 1$

$a = 1$ et $c = -1$

$ac < 0$ Donc $f(x)$ admet deux racines distinctes x' et x''

Puisque $x' \cdot x'' = c/a = -1 < 0$ donc x' et x'' de signe différent.

2) x' et x'' sont opposés

équivaut $x' + x'' = 0$

équivaut $\frac{-b}{1} = 0$ équivaut $b = 0$

CL : x' et x'' sont opposés ssi $b = 0$

3) $A = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x' \cdot x''$

d'où $A = b^2 + 2$

4) a) $(1 - bx') \cdot (1 - bx'') = 1 - b(x' + x'') + b^2 x' \cdot x''$

$= 1 - b \times (-b) + b^2 \times (-1)$

$= 1$

Donc $(1 - bx')$ et $(1 - bx'')$ sont inverses.

b) x' et x'' ne sont pas opposés équivaut $b \neq 0$

$(1 - bx') \cdot (1 - bx'') = 1 > 0$ Donc $(1 - bx')$ et $(1 - bx'')$ sont de même signe

Donc $1 - bx' > 0$ et $1 - bx'' > 0$ ou $1 - bx' < 0$ et $1 - bx'' < 0$

Si $b > 0$ Alors $1 - bx' > 0$; $(x' < 0)$

Donc $1 - bx'' > 0$

D'où $x'' < 1/b$

or $x' < x''$ Donc $\frac{1}{b} \notin [x' ; x'']$

Si $b < 0$ Alors $1 - bx'' > 0$; $(x'' > 0)$

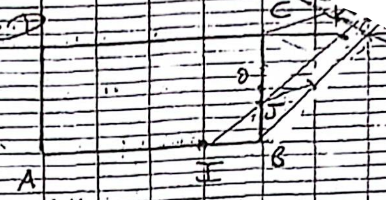
Donc $1 - bx' > 0$ D'où $\frac{1}{b} < x'$

or $x < x''$ donc $\frac{c}{b} \notin [x' ; x'']$

cl : si $b > 0$, si $b < 0$

Donc $\frac{c}{b} \notin [x' ; x'']$

Exercice 3 : (8 pts)



1) $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

2) a) $\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{BA}$ et $2\overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$

Puisque ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$

Par suite $B \in (E)$

b) $M \in (E)$ équivaut à $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \perp (2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$

équivaut à $4\overrightarrow{MI} \perp 3\overrightarrow{MJ}$ $\left(\begin{array}{l} I \text{ bary } (A,1);(B,3) \\ J \text{ bary } (B,2);(C,1) \end{array} \right.$

équivaut à $\overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}$

équivaut à M appartient au cercle de diamètre $[IJ]$

cl : (E) est le cercle de diamètre $[IJ]$

3) a) J bary $(B;2);(C;1)$ équivaut à $2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$

équivaut à $\overrightarrow{JB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JC}$

Appliquons la forme vectorielle du th de Thalès dans IBJ :

$K \in (IJ)$; $C \in (BJ)$

$(IB) \parallel (CK)$; $((AB) \parallel (CD)$, $I \in (AB)$ et $K \in (CD))$ $\Bigg\}$ Donc $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JK}$

$\overrightarrow{JB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JC}$ et $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CK}$

Ainsi $\overrightarrow{JI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JK}$

$\overrightarrow{JK} = \frac{+2}{+2-3}\overrightarrow{JI}$ Donc K bary $(I;2);(J;-3)$

b) I bary $(A,1);(B,3)$ équivaut à $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

Comme $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CK}$

Alors $\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CK}$ Donc $\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{CK}$

Puisque $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$; (ABCD rectangle) Donc $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{CK}$

3

Suite exercice 3

3) b) $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{-1+3}\overrightarrow{CD}$

Donc K bpp $(C;3);(D;-1)$

4) a) G est un point et K bpp $(C,3);(D;-1)$

Donc $3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GK}$

Or G bpp $(A,1);(B,3);(K;2)$

Donc $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$

Par suite $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GD}) + 3(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$

$\overrightarrow{DA} + 6\overrightarrow{GO} = \vec{0}$; (O milieu de $[BC]$; $B \in \mathcal{P}$)

$\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{GO}$

Donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{GO}$ sont donc colinéaires

Par suite les droites (AD) et (OG)

sont parallèles.