Série N°: 24 2S[redacted] Lycée Pilote Sfax 73 M^r Abdelmoula

Ex 1 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ le pt $A(-2,-1)$ et la droite D d'équation $4x-y-10=0$

1) Soit le pt B de D d'abscisse 3

a) Ecrire une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à D et passant par B

b) Ecrire une équation cartésienne de la médiatrice Δ de $[AB]$

c) Ecrire une équation du cercle $\mathscr{C}$ passant par A et tangent à la droite D en B.

3) Soit l'ensemble $\mathscr{C}' = \{M(x,y) \in P$ tel que $x^2+y^2-\frac{11}{2}y-2=0\}$

a) Montrer que $\mathscr{C}'$ est un cercle dont on précisera le rayon et les coordonnées de son centre

b) Montrer que D est tangent à $\mathscr{C}'$ en B.

Ex 2 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient les pts $A(-3,2)$; $B(6,5)$ et $C(1,-2)$

1) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C} = \{M(x,y)$ tel que $MA^2+MB^2=106\}$ est le cercle de centre I milieu de $[AB]$ et passant par C.

2) Ecrire une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ en C.

3) Soit le pt $D(-2,-3)$

a) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze et que ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires.

b) Calculer alors l'aire du trapèze $ABCD$, en déduire une équation du cercle $\mathscr{C}'$ de centre C et tangent à la droite (AB)

Ex 3 $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. On donne les pts $A(-1,2)$; $H(-1,-2)$ et l'ensemble $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2-2x+2y-11=0$

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon R

2) La droite D d'équation $y=-3$ coupe $\mathscr{C}$ en deux pts E et F.

a) Déterminer les coordonnées de E et F.

b) Montrer que H est l'orthocentre du triangle AEF.

3) Soit K le symétrique de H par rapport à (EF). Montrer que $K \in \mathscr{C}$

4) Soit le pt $J(7,-1)$ et $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre $[IJ]$

a) Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en deux pts P et Q (on ne demande pas de calculer les coordonnées de P et Q).

b) Déduire les tangentes à $\mathscr{C}$ issues de J.

Ex 4 $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan
5 pts $A(-2,-1)$; $B(2,3)$ et $C(1,2)$

) Calculer AB et BC.

Soit $\mathcal{C} = \{ M(x,y) \in P,\ MA^2 + 3MB^2 = AB^2 \}$, montrer que $\mathcal{C}$
est un cercle de centre C et passant par B.

Le cercle $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées en 2 pts E et F

) Déterminer les coordonnées de E et F $(y_E < y_F)$

Ecrire une équation cartésienne de la droite D tangente
à $\mathcal{C}$ en F

) Montrer que les droites D et (AB) sont parallèles.

trouver une équation de l'autre tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à (AB)

On considère dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les pts
$(-1,4)$; $B(-3,-2)$ et $C(1,0)$

Quelle est la nature du triangle ABC

Déterminer l'équation du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC
(on notera I son centre)

La parallèle à la droite (BC) passant par A recoupe $\mathcal{C}$ en E.

déterminer les coordonnées de E

) Soit l'ensemble $\mathcal{C}' = \{ M(x,y) ;\ MB = \sqrt{2}\, MC \}$

) Montrer que $\mathcal{C}'$ est un cercle dont on déterminera son centre I'
et son rayon R'

) Montrer que la droite (AB) est tangente au cercle $\mathcal{C}'$.

) Trouver les équations des tangentes à $\mathcal{C}'$ parallèles à (BC)

Ex 6 Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on
considère le pt $A(1,-1)$ et l'ensemble $\mathcal{C}$ des pts $M(x,y)$ tel que

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon R

La droite D d'équation $y = x+3$ coupe $\mathcal{C}$ en 2 pts E et F $(x_F < x_E)$

-) Déterminer les coordonnées de E et F

) Montrer que O est l'orthocentre du triangle AEF

) Donner l'équation de la droite Δ tangente au cercle $\mathcal{C}$ en E

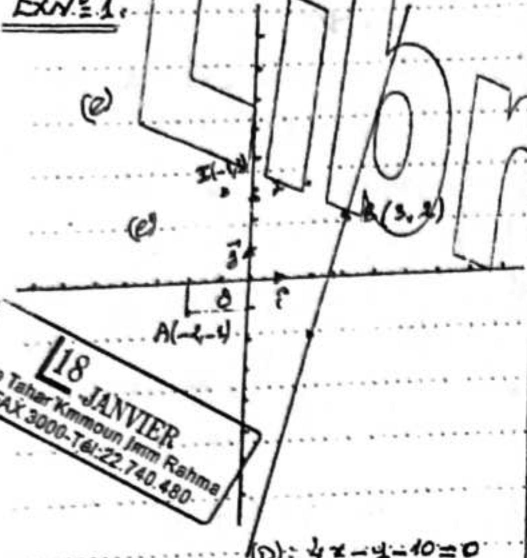
Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre A et tangent à la droite D

) Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}'$

) Montrer que Δ est tangente à $\mathcal{C}'$ en un pt H' (on ne calcule pas les coords de H'.

Montrer que $AH'EH$ est un carré où H est le pt de contact de $\mathcal{C}'$ avec D.

Exr° 1.



(D) : $4x - y - 10 = 0$

1°) a) $x_B = 3$

$B \in (D)$ ssi $4\times 3 - y_B - 10 = 0$

$y_B = 2$

$(D) : 4x - y - 10 = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D)

donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à (D')

car $(D) \perp (D')$.

donc $(D') : x + 4y + c = 0$

$B \in (D')$ donc $3 + 4\times 2 + c = 0$

$c = -11$

D'où $\boxed{(D') : x + 4y - 11 = 0}$

b) $A(-2,-1)$ et $B(3,2)$

le milieu de [AB] de coordonnées

$\left(\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} ; \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}\right) \in (\Delta)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}3-(-2) = 5\\ 2-(-1) = 3\end{pmatrix}$ est un vect normal à (Δ)

d'où $(\Delta) : 5x + 3y + c = 0$

or le pt de coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right) \in (\Delta)$

donc $5\times\frac{1}{2} + 3\times\frac{1}{2} + c = 0$

d'où $c = -4$

donc $\boxed{(\Delta) : 5x + 3y - 4 = 0}$

2) Soit $I(a,b)$ le centre du cercle (C)

$\vec{IB}\begin{pmatrix}3-a\\2-b\end{pmatrix}$

d'autre part $(D) : 4x - y - 10 = 0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

or $\vec{u} \perp \vec{IB}$ ssi $(3-a)\times 1 + (2-b)\times 4 = 0$

ssi $3 - a + 8 - 4b = 0$

(1) $\boxed{a + 4b - 11 = 0} \rightarrow a = -4b + 11$

$IA = \sqrt{(a+2)^2 + (b+1)^2}$

$IB = \sqrt{(a-3)^2 + (b-2)^2}$

$IA = IB$ ssi $IA^2 = IB^2$

ssi $(a+2)^2 + (b+1)^2 = (a-3)^2 + (b-2)^2$

ssi $a^2 + 4a + 4 + b^2 + 2b + 1 = a^2 + 9 - 6a + b^2 - 4b + 4$

$10a + 6b - 8 = 0$

(2) $5a + 3b - 4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 5(-4b + 11) + 3b - 4 = 0$

$-17b + 51 = 0$

$b = \frac{-51}{-17} = 3$

(1) $\rightarrow a = -4\times 3 + 11 = -1$

d'où $\boxed{I(-1,3)}$

$IA = \sqrt{(-1+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

c'est le rayon du cercle (C)

d'où $\boxed{(C) : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 17}$

3°) a) $M(x,y) \in (\mathscr{C}')$

ssi $x^2 + y^2 - \frac{11}{2}y - 2 = 0$

ssi $x^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 - \frac{121}{16} - 2 = 0$

ssi $x^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{121}{16} + \frac{32}{16} = \frac{153}{16}$

d'où $(\mathscr{C}')$ est le cercle de centre $J\left(0, \frac{11}{4}\right)$ et de rayon $R' = \frac{\sqrt{153}}{4}$

b) $B(3,2)$

$3^2 + \left(2 - \frac{11}{4}\right)^2 = 9 + \frac{9}{16} = \frac{153}{16}$

d'où $B \in (\mathscr{C}')$

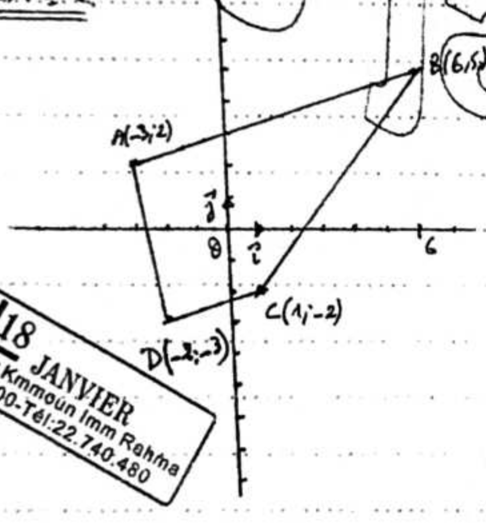
$JB = \sqrt{(3-0)^2 + \left(2 - \frac{11}{4}\right)^2}$

$= \sqrt{9 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{153}{16}} = R'$

or $B \in (D)$

d'où (D) est tangente au cercle $(\mathscr{C}')$ en B

__Ex N°2__



1°) $(\mathscr{C}) = \{M(x,y) \in \mathscr{P}$ tq $MA^2 + MB^2 = 106\}$

$M(x,y) \in (\mathscr{C})$ ssi $MA^2 + MB^2 = 106$

ssi $\left(\sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-6)^2 + (y-5)^2}\right)^2 = 106$

ssi $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + x^2 - 12x + 36 + y^2 - 10y + 25 = 106$

ssi $2x^2 - 6x + 2y^2 - 14y = 106 - 74 = 32$

ssi $x^2 - 3x + y^2 - 7y = 16$

ssi $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 16$

ssi $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = 16 + \frac{58}{4} = \frac{122}{4}$

d'où $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre $I\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{122}}{2}$

car $I = A * B$ $\quad I\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-2 - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{121}{4} = \frac{122}{4}$ d'où $C \in (\mathscr{C})$

2°) $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2} \\ -2 - \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{IC}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ)

d'où $(\Delta) : -\frac{1}{2}x - \frac{11}{2}y + a = 0$

$C(1;-2) \in (\Delta)$ $\quad -\frac{1}{2} \times 1 - \frac{11}{2} \times (-2) + a = 0$

donc $a = -10$

Donc $(\Delta) : -\frac{1}{2}x - \frac{11}{2}y - 10 = 0$

$(\Delta) : x + 11y + 20 = 0$

3°) a) $D(-2;-3)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 \times 1 - 3 \times 3$
$= 9 - 9 = 0$

d'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires

donc $(AB) \parallel (DC)$

d'où $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} = 25 + 7 = 32 \neq 0$

(7-7)

Donc $\vec{BC}$ et $\vec{AD}$ sont pas colinéaires

donc (BC) et (AD) ne sont pas (//)

donc ABCD n'est un trapèze

$\vec{AC}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ $\vec{BD}\begin{pmatrix}-8\\-8\end{pmatrix}$

$4\times(-8)+(-4)\times(-8)=-32+32=0$

D'où $\vec{AC}\perp\vec{BD}$

Donc ABCD est un trapèze de diagonale $[AC]$ et $[BD]$ perp(⊥)

b) (CD): $y=ax+b$

$a=\frac{-2+3}{4+2}=\frac{1}{3}$

(CD) : $y=\frac{1}{3}x+b$

$C(1;-2)\in(CD)$: $-2=\frac{1}{3}\times1+b$

$b=-2-\frac{1}{3}=-\frac{7}{3}$

(CD) : $y=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}$

$(CD): x-3y-7=0$

$d(A,(CD))=\frac{|-3-3\times2-7|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}$

$=\frac{16}{\sqrt{10}}=\frac{16\sqrt{10}}{10}$

$=\frac{8}{5}\sqrt{10}$

$AB=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}$

$=3\sqrt{10}$

D'où $\mathcal{A}_{ABCD}=AB\times d(A,(CD))$

$=3\sqrt{10}\times\frac{8\sqrt{10}}{5}$

$=24\times\frac{10}{5}=48$

<u>Ex N° 6</u>

1) $M(x,y)\in(C)$ ssi $x^2+y^2+2x-4y-3=0$

ssi $x^2+2x+y^2-4y-3=0$

ssi $(x+1)^2-1+(y-2)^2-4-3=0$

ssi $(x+1)^2+(y-2)^2=8$

d'où (C) est le cercle de centre $\Omega(-1,2)$ et de rayon $R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

2°) (D) : $y=x+3$

(C) : $(x+1)^2+(y-2)^2=8$

$(x+1)^2+(x+3-2)^2=8$

$(x+1)^2+(x+1)^2=8$

$2(x+1)^2=8$

$(x+1)^2=\frac{8}{2}=4$

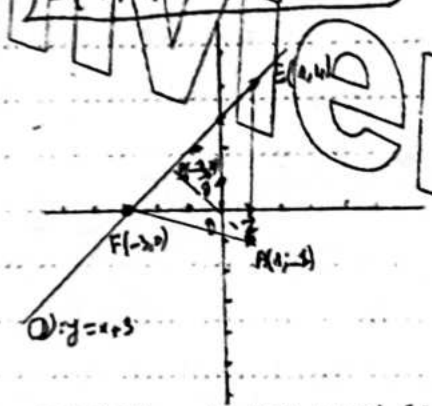
ssi $x+1=2$ ou $x+1=-2$

$x=2-1=1$ ou $x=-2-1=-3$

$y=4$ | $y=0$

$E(1,4)$ et $F(-3,0)$

3°)



on a $F\in(O,\vec{i})$ et $(AE)\,//\,(O,\vec{j})$ (A et E ont la même abscisse 1)

d'où $(BF)\perp(AE)$ car $(O,\vec{i})\perp(O,\vec{j})$

78

$\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

$1\times(-4)+4\times1=-4+4=0$

d'où $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{AF}$

donc $(OE)\perp(AF)$

et on a : $(OF)\perp(AE)$

d'où (OE) et (OF) sont deux dtes qui portent les hauteurs issues de E et F pour le triangle AEF

$(OE)\cap(OF)=\{O\}$

d'où O est l'orthocentre du triangle AEF

4°) $\overrightarrow{PE}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (Δ)

d'où (Δ) : $2x+2y+c=0$

$E(1,4)\in(\Delta)$ donc $2\times1+2\times4+c=0$

$c=-10$

(Δ) : $2x+2y-10=0$

$\boxed{(\Delta) : x+y-5=0}$

5°) a) $d(A,(D))=\dfrac{|1+1+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt2}=\dfrac{5\sqrt2}{2}=R$

$((D) : x-y+3=0)$ $R^2=\left(\dfrac{5\sqrt2}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$

$(\mathscr{C})$: $(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{25}{2}$

b) (Δ) : $x+y-5=0$ $A(-1,1)$

$y=-x+5$

$(\mathscr{C}')$: $(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{25}{2}$

$d(A,(\Delta))=\dfrac{|-1+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt2}=\dfrac{5\sqrt2}{2}=R'$

d'où (Δ) est tangente au cercle $(\mathscr{C}')$ en un pt H'

c) (Δ) : $y=-x+5$, $(\mathscr{C}')$: $(x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{25}{2}$

si $(x-1)^2+(-x+5+1)^2=\dfrac{25}{2}$

ssi : $x^2-2x+1+36+x^2-12x-\dfrac{25}{2}=0$

ssi $2x^2-14x+37-\dfrac{25}{2}=0$

ssi $2x^2-14x+\dfrac{74}{2}-\dfrac{25}{2}=0$

ssi $2x^2-14x+\dfrac{49}{2}=0$

ssi $x^2-7x+\dfrac{49}{4}=0$

ssi $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2=0$

$x=\dfrac{7}{2}$

$y=-\dfrac{7}{2}+5=\dfrac{3}{2}$

d'où $\boxed{H'\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{3}{2}\right)}$

(D) : $x-y+3=0$

$y=x+3$

$(\mathscr{C}')$: $(x-1)^2+(x+3+1)^2=\dfrac{25}{2}$

si $x^2-2x+1+x^2+8x+16-\dfrac{25}{2}=0$

ssi $2x^2+6x+\dfrac{34}{2}-\dfrac{25}{2}=0$

ssi $2x^2+6x+\dfrac{9}{2}=0$

ssi $x^2+3x+\dfrac{9}{4}=0$ ssi $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2=0$

$x=-\dfrac{3}{2}$ et $y=-\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{3}{2}$

D'où $\boxed{H\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)}$

d'où : $A(1,-1)$ et $E(1;4)$

Le milieu de A et E a pour coordonnées $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

" de H et H' " " $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{H'H}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$

$0\times(-5)+5\times0=0$ d'où $(AE)\perp(H'H)$

$AE=\sqrt{0^2+5^2}=5$ et $H'H=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$

d'où $AE=H'H$ et on a $(AE)\perp(H'H)$

et $[AE]$ et $[H'H]$ se coupent en leur milieu

d'où $AH'EH$ est un carré