

Lycée pilote-Sfax	Devoir de contrôle N°3	2 ^{ème} Sc 3,4,5,8,9,10
Prof: M ^{mes} Fehri - Megdich - Tounsi	Mathématiques	23/02/17

Exercice 1 : (2points)

Soit l'entier $N=14ab4$ où a et b sont des chiffres.

Déterminer a et b pour que N soit divisible par 11 et que le reste de la division euclidienne de N par 9 soit 2.

Exercice 2 : (8points)

Soit (U_n) la suite arithmétique de raison r définie sur \mathbb{N} par $U_5+U_7=6$ et $U_5+U_6=4$.

1/a/ Déterminer r et U_5

b/ Dédire que pour tout entier naturel n , $U_n=2n-9$.

2/ Déterminer l'entier p tel que $U_p+U_{p+2}+U_{p+4}=45$.

3/ a/ Montrer que pour tout entier $n \geq 5$, U_n est un entier impair.

b/ Soit $S_n=U_5+U_6+U_7+\dots+U_n$, $n \geq 5$.

Exprimer S_n en fonction de n .

c/ Dédire la somme des 30 premiers entiers naturels impairs.

4/ Soit (W_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $W_n=3^{U_n+10}$

a/ Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b/ Déterminer le nombre de termes de la suite (W_n) inférieurs à 19688, puis calculer leurs somme.

Exercice 3 : (10points)

ABC est un triangle équilatéral, G son centre de gravité, I est le milieu de $[AC]$ et J est le milieu de $[BC]$.

On désigne par h l'homothétie de centre G et de rapport (-2) .

1/ Montrer que $h(I)=B$.

2/a/ Construire D image de B par h .

b/ Montrer que ABCD est un losange.

3/ Soit E le symétrique de D par rapport à C . Montrer que $h(A)=E$.

4/ On désigne par \mathcal{C} le cercle circonscrit au triangle ABC.

a/ Déterminer et construire \mathcal{C}' l'image de \mathcal{C} par h .

b/ La droite (BD) recoupe \mathcal{C} en M et \mathcal{C}' en N .

Montrer que (AM) et (EN) sont parallèles.

5/ La droite (AD) coupe (BE) en F .

a/ Montrer que F appartient à \mathcal{C}' .

b/ Montrer que \mathcal{C} est le cercle inscrit dans le triangle EDF.

Librairie 18 Janvier
Rue Tahar Kammoun
Immeuble Rahma-SFAX
Tél: 22 740 480
مكتبة 18 جانفي
نهج الطاهر كملت
عزلة الرحمة
22.740.480 صافس الهاتف 3000

مكتبة 18 جانفي
نهج الطاهر كملت
عزلة الرحمة
22.740.480 صافس الهاتف 3000

Librairie 18 Janvier
Rue Tahar Kammoun
Immeuble Rahma-SFAX
Tél: 22 740 480

Exercice 1

(2)

$N = 14ab4$ est divisible par 11 et le reste de la division euclidienne de N par 9 est 2 donc $4 - b + a - 4 + 1 \in M_{11}$ et $1 + 4 + a + b + 4 - 2 \in M_9$

$$a - b + 1 \in M_{11} \text{ et } 7 + a + b \in M_9$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq a \leq 9 \\ 0 \leq b \leq 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \leq a + b \leq 18 \text{ ou } 7 \leq 7 + a + b \leq 25 \text{ d'où} \\ a + b + 7 = 9 \text{ ou } a + b + 7 = 18 \end{array}$$

$$\text{Soit } a + b = 2 \text{ ou } a + b = 11$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq a \leq 9 \\ -9 \leq -b \leq 0 \end{array} \right\} -9 \leq a - b \leq 9 \text{ d'où } -8 \leq a - b + 1 \leq 10 \text{ d'où } a - b + 1 = 0$$

$$\text{Soit } a - b = -1$$

$$\text{Conclusion : } \begin{cases} a + b = 2 \\ a - b = -1 \end{cases} \text{ éq } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ impossible car } a \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ a - b = -1 \end{cases} \text{ éq } \begin{cases} a = 5 \in \mathbb{N} \\ b = 6 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$N = 14ab4 = 14564$$

Exercice 2

1) a) (u_n) est une suite arithmétique de raison $r; n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = u_n + r; n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_5 + u_7 = 6 \\ u_5 + u_6 = 4 \end{cases} \text{ éq } \begin{cases} u_5 + u_5 + 2r = 6 \\ u_5 + u_5 + r = 4 \end{cases} \text{ éq } \begin{cases} 2u_5 + 2r = 6 \\ 2u_5 + r = 4 \end{cases}$$

$$\text{éq } \begin{cases} r = 2 \\ 2u_5 + 2 = 4 \end{cases} \text{ éq } \begin{cases} r = 2 \\ u_5 = 1 \end{cases}$$

$$b) u_0 = u_5 + (0-5) \times r = 1 - 5 \times 2 = -9 \text{ donc } u_n = u_0 + nr = -9 + 2n; n \in \mathbb{N}$$

$$2) u_p + u_{p+2} + u_{p+4} = 45 \text{ éq } -9 + 2p - 9 + 2(p+2) - 9 + 2(p+4) = 45 \text{ éq } -27 + 2p + 2p + 4 + 2p + 8 = 45 \text{ éq } 6p = 45 + 13 = 58 \text{ éq } p = 10$$

3) a) soit $n \geq 5; n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n - 9 = 2(n-5) + 1; (n-5) \in \mathbb{N}$ donc u_n est impair

$$b) S_n = u_5 + u_6 + u_7 + \dots + u_n = \frac{(u_5 + u_n)}{2} \times (n - 5 + 1) = \frac{(1 - 9 + 2n)}{2} \times (n - 4)$$

③

$$S_n = \frac{(2n-8)}{2} \times (n-4) = \frac{2(n-4)}{2} \times (n-4) = (n-4)^2$$

c) $S_{34} = (34-4)^2 = 30^2 = 900$

4) a) $w_n = 3^{u_{n+1}+10} = 3^{2n-9+10} = 3^{2n+1}$

$$w_{n+1} = 3^{2(n+1)+1} = 3^{2n+3} = 3^2 \times 3^{2n+1} = 9 \times w_n, n \in \mathbb{N}.$$

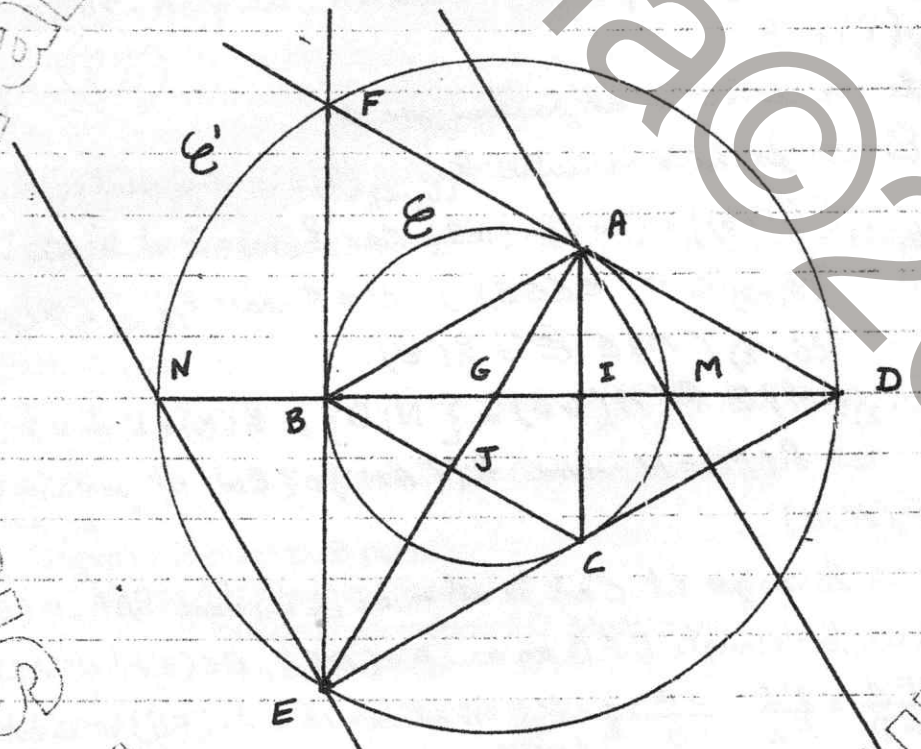
(w_n) est une suite géométrique de raison $q=9$ et $w_0=3$

b) $w_n = 3 \times 9^n \leq 19688$ éq. $n \leq 4$ donc le nombre de termes de (w_n)

inférieurs à 19688 est 5.

$$S = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = w_0 \times \frac{9^5 - 1}{9 - 1} = 3 \times \frac{9^5 - 1}{9 - 1} = 3 \times \frac{59048}{8} = 3 \times 7381 = 22143$$

Exercice 3



1) G est le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu de [AC] donc

$$\vec{GB} = -2\vec{GI} \text{ d'où } h_{(G,2)}(I) = B$$

(4)

2) a) $h_{(G,-2)}(B) = D$ sig $\vec{GD} = -2\vec{GB}$

b) $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BI}$ donc $\vec{GD} = \frac{4}{3}\vec{BI}$ donc $\vec{BD} = \vec{BG} + \vec{GD} = \frac{2}{3}\vec{BI} + \frac{4}{3}\vec{BI} = 2\vec{BI}$ d'où I est le milieu de [BD] et [AC] donc ABCD est un parallélogramme.

De plus ABC est équilatéral donc $AB = CB$ d'où ABCD est un losange.

3) E la symétrique de D par rapport à C donc C est le milieu de [ED]. Dans le losange ABCD on a: $\vec{BA} = \vec{CD}$ et $\vec{CB} = \vec{DA}$ car C est le milieu de [ED] d'où $\vec{BA} = \vec{EC}$ donc BAC.E est un losange (car $AB = AC$) de centre J.

on a: $\vec{AE} = 2\vec{AJ}$ et G est le centre de gravité du triangle ABC donc $\vec{AJ} = \frac{2}{3}\vec{AG}$ d'où $\vec{AE} = 2 \times \frac{2}{3}\vec{AG} = \frac{4}{3}\vec{AG}$ et par suite $\vec{GE} = \vec{GA} + \vec{AE} = \vec{GA} + \frac{4}{3}\vec{AG} = -\frac{2}{3}\vec{GA}$ c'ad $h_{(G,-2)}(A) = E$

4) a) \mathcal{E} est le cercle de centre G et passant par A. $h_{(G,-2)}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$ est le cercle de centre $h_{(G,-2)}(G) = I$ et passant par $h_{(G,-2)}(A) = E$

b) $M \neq B$; $h_{(G,-2)}((GB)) = (GD) = (GB)$ car $h_{(G,-2)}(G) = I$ et $h_{(G,-2)}(B) = D$. $M \in (GB)$ donc $h_{(G,-2)}(M) \in (GD)$; $M \neq B$ donc $h_{(G,-2)}(M) \neq h_{(G,-2)}(B) = D$. $M \in \mathcal{E}$ donc $h_{(G,-2)}(M) \in \mathcal{E}' = h(\mathcal{E})$.

Conclusion $h_{(G,-2)}(M) \in \mathcal{E}' \cap (GB) = \{N; D\}$; $h(M) \neq D$ donc $h(M) = N$ on a: $h(A) = E$ et $h(M) = N$ donc $h((AM)) = (EN)$ et par suite $(AM) \parallel (EN)$.

5) on a: ABCD est un losange et C est le milieu de [ED] donc $(AB) \parallel (ED)$ et $\frac{AB}{ED} = \frac{1}{2}$. Dans le triangle EFD on a: $AE \parallel (DF)$; $BE \parallel (EF)$ et $(AB) \parallel (ED)$ d'après Thalès: $\frac{FA}{FD} = \frac{FB}{FE} = \frac{AB}{ED} = \frac{1}{2}$ d'où A est le milieu de [FD] et B est le milieu de [FE]; (AE) et (BD) se coupent en G donc G est le centre de gravité du triangle EDF. d'où $\vec{GF} = -2\vec{GC}$ c'ad $h_{(G,-2)}(C) = F$ on a: $C \in \mathcal{E}$ donc $h_{(G,-2)}(C) = F \in h(\mathcal{E}) = \mathcal{E}'$

b) on a: $BE = AC = EC = AD$ donc $EF = FD = ED$ et par suite EFD est équilatéral. G l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et le centre du cercle inscrit de EFD, $(AD) \perp (GA)$; $(GB) \perp (BE)$ et $(GC) \perp (CD)$ d'où \mathcal{E} est le cercle inscrit dans EDF.