



Résolution de contraintes géométriques en guidant une méthode homotopique par la géométrie

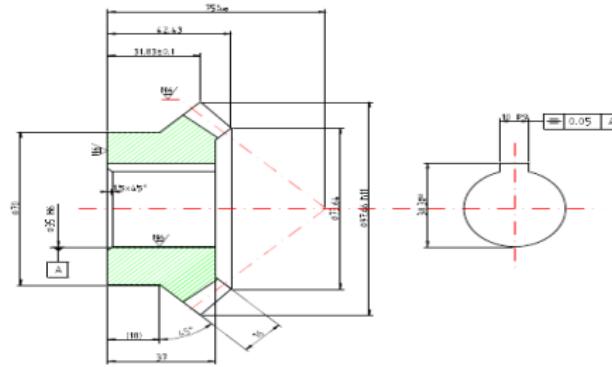
Rémi Imbach

Encadrants : Pascal Mathis et Pascal Schreck



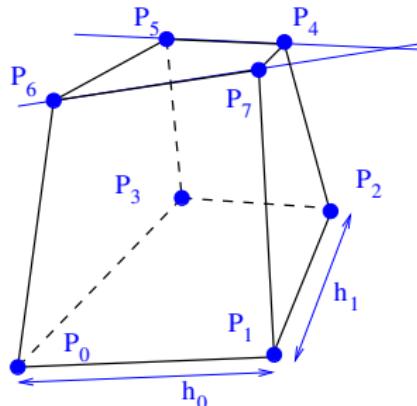
Résolution de contraintes et modélisation

- Modélisation géométrique en CAO
 - déclarative : décrire un objet par les propriétés qu'il satisfait ;
 - impérative : exhiber cet objet ou une façon de le construire.
 - Résolution de Contraintes Géométriques (RCG) :
Contraintes géométriques → objet
 - Applications principales :
 - Chimie moléculaire
 - Robotique
 - CAO



Système de Contraintes Géométriques (SCG)

- Ensemble de primitives géométriques
 - points, droites, cercles, ...
 - variables sortées : *Point* : P_0, P_1, \dots
- Satisfaisant un ensemble de contraintes
 - distances, incidences, tangences...
 - termes : $h_0 = \text{distance}(P_0, P_1), \dots$
- Saisi par l'intermédiaire d'une *esquisse*



Inconnues :

Point : P_0, P_1, \dots, P_7

Paramètres :

Longueurs : h_0, h_1, \dots

Contraintes :

$h_0 = \text{distance}(P_0, P_1)$

$h_1 = \text{distance}(P_1, P_2)$

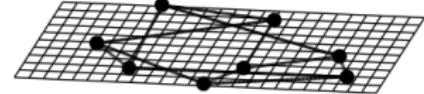
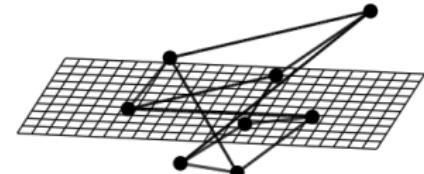
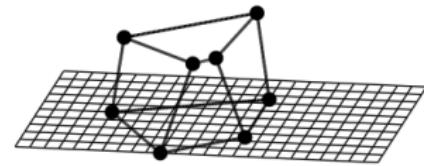
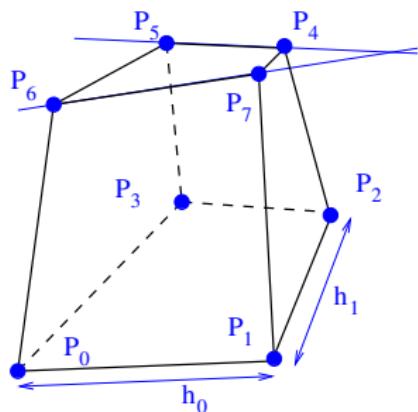
...

$\text{coplanaire}(P_4, P_5, P_6, P_7)$

...

Système de Contraintes Géométriques (SCG)

- Ensemble de primitives géométriques
 - points, droites, cercles, ...
 - variables sortées : *Point* : P_0, P_1, \dots
- Satisfaisant un ensemble de contraintes
 - distances, incidences, tangences...
 - termes : $h_0 = \text{distance}(P_0, P_1), \dots$
- Saisi par l'intermédiaire d'une *esquisse*



Problématique

Cadre : SCG rencontrés en CAO, en 2D comme en 3D

But : Explorer l'espace de ses solutions :

- Quelle est sa structure ?
- Résolution symbolique (exacte) ou numérique (approchée) ?
- Chercher toutes les solutions, ou celles qui présentent un intérêt pour l'utilisateur ?

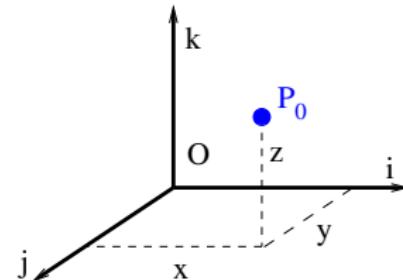
Notions fondamentales

- (a) Objets géométriques
- (b) Contraintes
- (c) Repère
- (d) Système d'équations
- (e) Fonction numérique

Notions fondamentales

(a) Objets géométriques

- coordonnées cartésiennes
- degré de liberté



Inconnues :

$$\text{Point } P_0, \dots, P_7 \longleftrightarrow P_0 : (x, y, z) \quad \text{DoF} = 3$$

Contraintes :

$$h_0 = \text{distance}(P_0, P_1)$$

$$h_1 = \text{distance}(P_1, P_2)$$

...

$$\text{coplanaire}(P_0, P_1, P_2, P_3)$$

...

$$\text{coplanaire}(P_4, P_5, P_6, P_7)$$

Notions fondamentales

(a) Objets géométriques

(b) Contraintes

- contraintes métriques/booléennes
- équations en les coordonnées
- degré de restriction
- invariance par isométries

Inconnues :

Point P_0, \dots, P_7

Contraintes :

$$h_0 = \text{distance}(P_0, P_1) \quad \longleftrightarrow \quad \|\overrightarrow{P_0P_1}\| - h_0 = 0 \quad \text{DoR} = 1$$

$$h_1 = \text{distance}(P_1, P_2)$$

...

$$\text{coplanaire}(P_0, P_1, P_2, P_3) \quad \longleftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}) = 0 \quad \text{DoR} = 1$$

...

$$\text{coplanaire}(P_4, P_5, P_6, P_7)$$

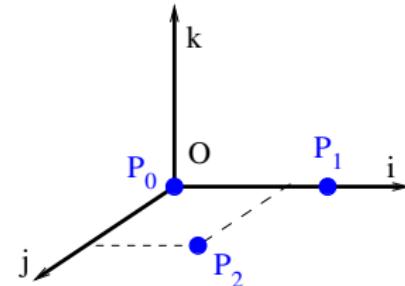
Notions fondamentales

(a) Objets géométriques

(b) Contraintes

(c) Repère

- solutions à isométries près
- en 3D : 6 degrés de liberté



Inconnues :

Point $P_0, \dots, P_7 \longleftrightarrow P_0 : (0, 0, 0); P_1 : (x_0, 0, 0); P_2 : (x_1, x_2, 0) \quad DoF = 18$

Contraintes :

$$h_0 = \text{distance}(P_0, P_1)$$

$$h_1 = \text{distance}(P_1, P_2)$$

...

$$\text{coplanaire}(P_0, P_1, P_2, P_3)$$

...

$$\text{coplanaire}(P_4, P_5, P_6, P_7)$$

Notions fondamentales

- (a) Objets géométriques
- (b) Contraintes
- (c) Repère
- (d) Système d'équations
 - solutions dans le repère choisi

Inconnues :

Point P_0, \dots, P_7

Contraintes :

$$h_0 = \text{distance}(P_0, P_1)$$

$$h_1 = \text{distance}(P_1, P_2)$$

...

$$\text{coplanaire}(P_0, P_1, P_2, P_3)$$

...

$$\text{coplanaire}(P_4, P_5, P_6, P_7)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \|\overrightarrow{P_0P_1}\| - h_0 & = 0 \\ \|\overrightarrow{P_1P_2}\| - h_1 & = 0 \\ \dots & & \\ \det(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}) & = 0 \\ \dots & & \\ \det(\overrightarrow{P_4P_5}, \overrightarrow{P_4P_6}, \overrightarrow{P_4P_7}) & = 0 \end{array} \right.$$

Notions fondamentales

- (a) Objets géométriques
- (b) Contraintes
- (c) Repère
- (d) Système d'équations
- (e) Fonction numérique

Inconnues :

Point P_0, \dots, P_7

Contraintes :

$$h_0 = \text{distance}(P_0, P_1)$$

$$h_1 = \text{distance}(P_1, P_2)$$

...

$$\text{coplanaire}(P_0, P_1, P_2, P_3)$$

...

$$\text{coplanaire}(P_4, P_5, P_6, P_7)$$

$$F : \mathbb{R}^{18} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{17} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{P_0P_1}\| - h_0 \\ \|\overrightarrow{P_1P_2}\| - h_1 \\ \vdots \\ \det(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}) \\ \vdots \\ \det(\overrightarrow{P_4P_5}, \overrightarrow{P_4P_6}, \overrightarrow{P_4P_7}) \end{pmatrix}$$

Notions fondamentales

- (a) Objets géométriques
- (b) Contraintes
- (c) Repère
- (d) Système d'équations
- (e) Fonction numérique
 - dépend des paramètres
 - s'annule en l'esquisse

Inconnues :

Point P_0, \dots, P_7

$F : \mathbb{R}^{18} \times \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}^{18}$

Contraintes :

$h_0 = \text{distance}(P_0, P_1)$

$h_1 = \text{distance}(P_1, P_2)$

...

$\text{coplanaire}(P_0, P_1, P_2, P_3)$

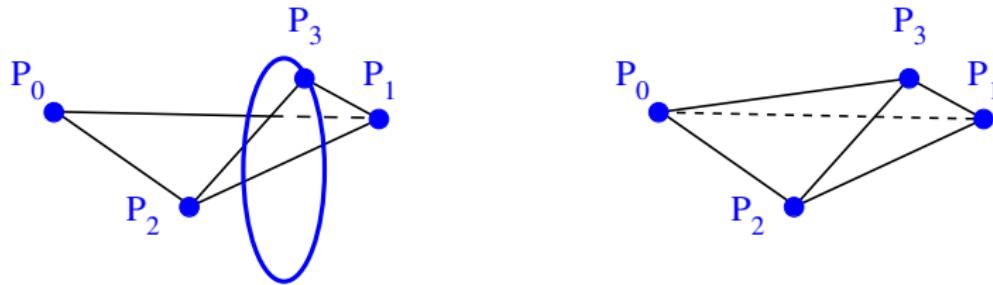
...

$\text{coplanaire}(P_4, P_5, P_6, P_7)$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_{17} \\ h_0 \\ \dots \\ h_{11} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \|\overrightarrow{P_0P_1}\| - h_0 \\ \|\overrightarrow{P_1P_2}\| - h_1 \\ \dots \\ \det(\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}) \\ \dots \\ \det(\overrightarrow{P_4P_5}, \overrightarrow{P_4P_6}, \overrightarrow{P_4P_7}) \end{pmatrix}$$

Structure de l'espace des solutions

Rigidité : les solutions (modulo les déplacements) sont-elles des points isolés de l'espace des coordonnées ?



Structure de l'espace des solutions

Rigidité : les solutions (modulo les déplacements) sont-elles des points isolés de l'espace des coordonnées ?

Un SCG est

- bien contraint : il est rigide
- sous contraint : il admet des solutions et n'est pas rigide
- sur contraint : il n'admet aucune solution

Structure de l'espace des solutions

Rigidité : les solutions (modulo les déplacements) sont-elles des points isolés de l'espace des coordonnées ?

Un SCG est génériquement

- bien constraint : il est rigide
- sous constraint : il admet des solutions et n'est pas rigide
- sur constraint : il n'admet aucune solution

pour presque toutes valeurs des paramètres (dans un ouvert).

Structure de l'espace des solutions

Rigidité : les solutions (modulo les déplacements) sont-elles des points isolés de l'espace des coordonnées ?

Approche combinatoire : Critère de Laman

G tel que c : nombre de distances, n : nombre de points

$G' < G$ tel que c' : nombre de distances, n' : nombre de points

- $c = 2n - 3$
- $\forall G' < G, c' \leq 2n' - 3$

En 2D : il caractérise les SCG points/distances gén. bien contraints.

Structure de l'espace des solutions

Rigidité : les solutions (modulo les déplacements) sont-elles des points isolés de l'espace des coordonnées ?

Approche combinatoire : Critère de Laman

G tel que c : nombre de distances, n : nombre de points

$G' < G$ tel que c' : nombre de distances, n' : nombre de points

- $c = 3n - 6$
- $\forall G' < G, c' \leq 3n' - 6$

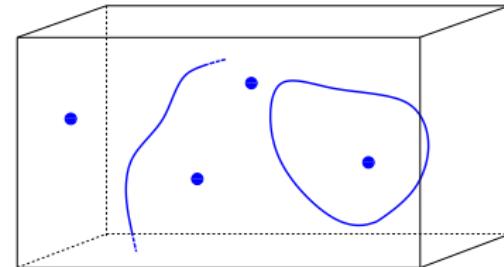
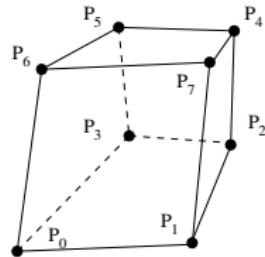
En 3D : aucune caractérisation n'est connue.

Approche numérique : méthode du témoin

Structure de l'espace des solutions

Rigidité : les solutions (modulo les déplacements) sont-elles des points isolés de l'espace des coordonnées ?

Et si les composantes connexes de l'ensemble des solutions sont hétérogènes en dimension ?



Résolution

Recherche de solutions isolées de SCG supposés bien contraints

Résolution exacte

- Méthode des lieux, systèmes à base de connaissances
- Approche algébrique : résolution formelle du système

Résolution

Recherche de solutions isolées de SCG supposés bien contraints

Résolution numérique

- Recherche exhaustive des solutions : méthodes par intervalles, homotopie
- Recherche d'une seule solution : Newton-Raphson, homotopie depuis l'esquisse, optimisation

Résolution

Recherche de solutions isolées de SCG supposés bien contraints

Approches « hybrides »

- Reparamétrisation
- Décomposition

Plan

I/ Homotopie et RCG

II/ Utilisation de la géométrie constructive

III/ Utilisation de la géométrie d'incidence

Méthode par homotopie

Idée principale : Déformation continue

- d'un **système initial** $F_0(x) = 0$ (solutions connues)
- en un **système cible** $F(x) = 0$ (solutions cherchées)

via une fonction d'homotopie $H : \mathbb{C}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$

Exemple :

Système cible :

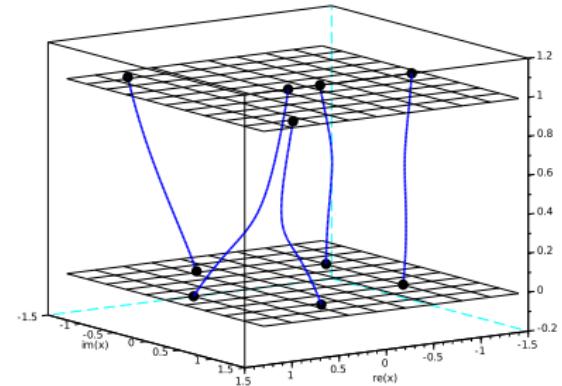
$$x^5 + 3x^2 + x = 0$$

Système initial :

$$\gamma (x^5 - 1) = 0, \gamma \in \mathbb{C}$$

Fonction d'homotopie :

$$H(x, t) = (1 - t)F_0(x) + tF(x)$$

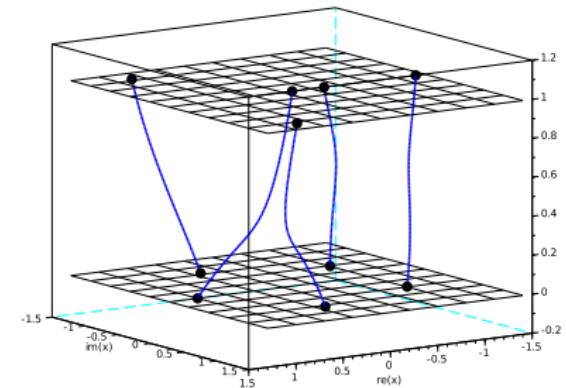


Méthode par homotopie

Résultat central :

Si H est régulière, les composantes connexes de l'ensemble $\{(x, t) \in \mathbb{C}^n \times [0, 1] | H(x, t) = 0\}$ sont des variétés différentielles de dimension 1 : les chemins d'homotopie.

Cette caractérisation permet d'explorer les chemins d'homotopie grâce à une méthode de suivi de courbes.

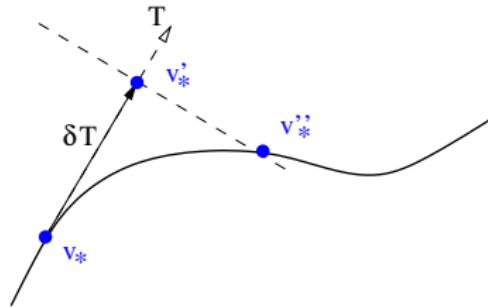


Méthode par homotopie

Suivi d'un chemin défini par $\mathcal{S} = \{v \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} | H(v) = 0\}$

Prédiction-correction

- v_* tq $H(v_*) = 0$
- Prédire v'_* le long de la tangente T de \mathcal{S} en v_* :
 $v'_* = v_* + \delta T, \delta \in \mathbb{R}$
- Corriger v'_* en $v''_* \in \mathcal{S}$ grâce à Newton-Raphson
ajout d'une équation garantissant la progression sur \mathcal{S}



Méthode par homotopie

Résultat central :

Si H est régulière, les composantes connexes de l'ensemble $\{(x, t) \in \mathbb{C}^n \times [0, 1] | H(x, t) = 0\}$ sont des variétés différentielles de dimension 1 : les chemins d'homotopie.

Exemple :

Système cible :

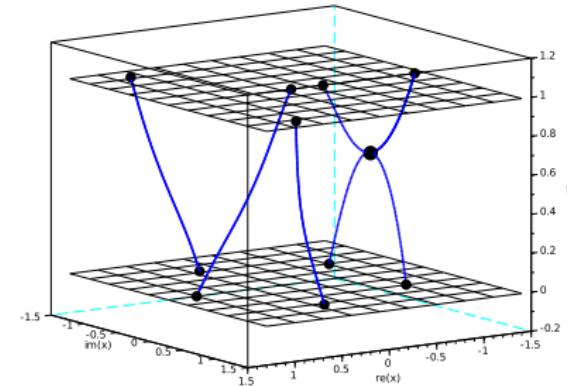
$$x^5 + 3x^2 + x = 0$$

Système initial :

$$(x^5 - 1) = 0$$

Fonction d'homotopie :

$$H(x, t) = (1 - t)F_0(x) + tF(x)$$



Méthode par homotopie

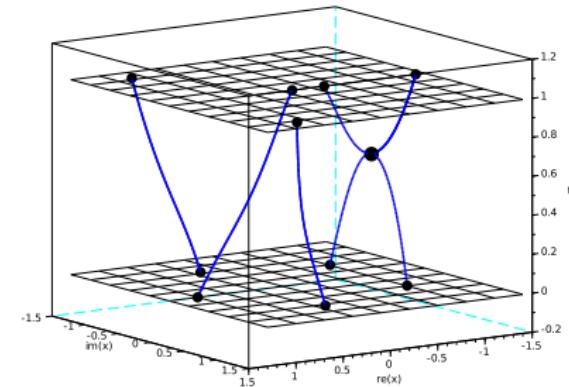
Résultat central :

Si H est régulière, les composantes connexes de l'ensemble $\{(x, t) \in \mathbb{C}^n \times [0, 1] | H(x, t) = 0\}$ sont des variétés différentielles de dimension 1 : les chemins d'homotopie.

Point critique : (x, t) point en lequel $J_{(x,t)}H$ n'est pas de rang plein.

Valeur critique : $y = H(x, t)$ où (x, t) est un point critique.

H régulière : 0 n'est pas une valeur critique



Méthode par homotopie

Résultat central :

Si chaque composante de $F_0 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dépend d'un paramètre complexe, pour presque toutes les valeurs de ces paramètres, H est régulière sur $\mathbb{C}^n \times [0, 1[$.

gamma-trick

chemins strictement croissants en t

Exemple :

Système cible :

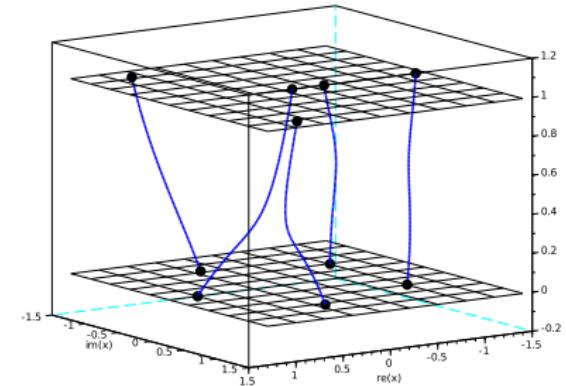
$$x^5 + 3x^2 + x = 0$$

Système initial :

$$\gamma (x^5 - 1) = 0, \gamma \in \mathbb{C}$$

Fonction d'homotopie :

$$H(x, t) = (1 - t)F_0(x) + tF(x)$$



Méthode par homotopie

Sur-estimation du nombre de zéros de F :

- plusieurs chemins pour une solution
- chemins de longueur infinie
 - tendent vers un zéro de $\lim_{t \rightarrow 1} H(x, t)$
 - temps de suivi infini
 - peuvent se détecter dans \mathbb{P}^n

Exemple :

Système cible :

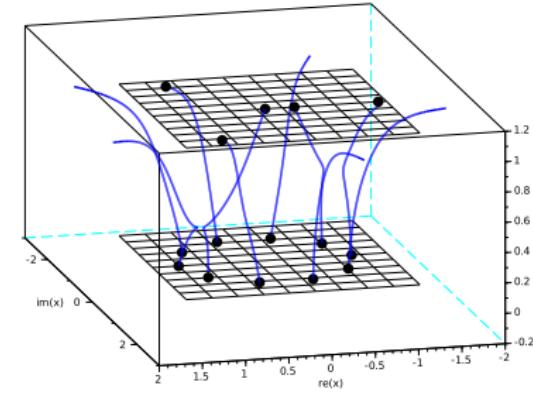
$$x^5 + 3x^2 + x = 0$$

Système initial :

$$\gamma(x^{10} - 1) = 0, \gamma \in \mathbb{C}$$

Fonction d'homotopie :

$$H(x, t) = (1 - t)F_0(x) + tF(x)$$



Application à la résolution de SCG

Du SCG à la fonction d'homotopie :

système cible : fonction numérique associée

Avantage :

toutes les solutions isolées sont trouvées

Inconvénients :

- nombre de zéros de H très surestimé
- les solutions complexes sont-elles intéressantes ?
⇒ méthode très coûteuse

[DH00] C. Durand and C.M. Hoffmann.

A systematic framework for solving geometric constraints analytically.

Journal of Symbolic Computation, 30(5) :493–519, 2000.

Homotopie depuis l'esquisse

Du SCG à la fonction d'homotopie : Esquisse : $x_{sk} \in \mathbb{R}^n$

Paramètres : a_{sk} lus sur l'esquisse

a_{so} demandés par l'utilisateur

Fonction d'homotopie : $F(x, (1 - t)a_{sk} + ta_{so})$

Avantages :

- solution trouvée semblable à l'esquisse
- suivi d'un seul chemin très rapide

Inconvénients :

- une seule solution trouvée
- chemin suivi dans $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$

[LM95] Hervé Lamure and Dominique Michelucci.

Solving geometric constraints by homotopy.

pages 263–269, 1995.

Méthode par homotopie

Suivi des chemins dans $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$:

- gamma-trick non valable
- chemins non nécessairement croissants en t
- continuation des solutions non assurée

Exemple :

Système cible :

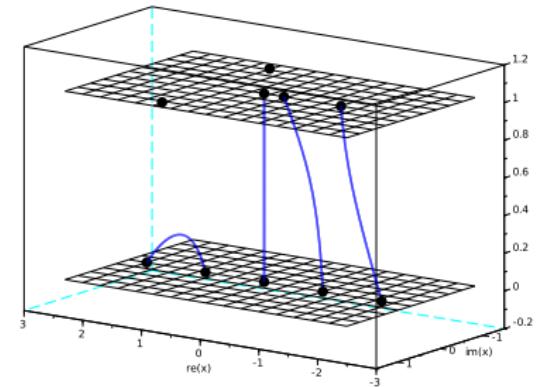
$$x^5 + 3x^2 + x = 0$$

Système initial :

$$(x - 3)(x - 2) \dots (x + 2) = 0$$

Fonction d'homotopie :

$$H(x, t) = (1 - t)F_0(x) + tF(x)$$



Considérer le chemin d'homotopie dans $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$

$(x, t) \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n \times [0, 1]$ chemin d'homotopie de H

- solution pour les paramètres $(1 - t)a_{sk} + ta_{so}$
- seules les solutions réelles sont trouvées

Inconnues :

point P_0, \dots, P_5

Paramètres :

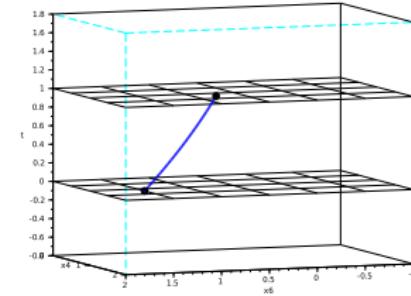
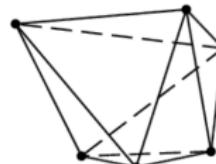
longueur h_0, \dots, h_{11}

Contraintes :

$distance(P_0, P_1) = h_0$

...

$distance(P_3, P_5) = h_{11}$



Considérer le chemin d'homotopie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$(x, t) \in \mathcal{S}, \mathcal{S} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ chemin d'homotopie de H

- solution pour les paramètres $(1 - t)a_{sk} + ta_{so}$
- seules les solutions réelles sont trouvées
- plusieurs solutions trouvées (parfois toutes)

Inconnues :

point P_0, \dots, P_5

Paramètres :

longueur h_0, \dots, h_{11}

Contraintes :

$distance(P_0, P_1) = h_0$

...

$distance(P_3, P_5) = h_{11}$

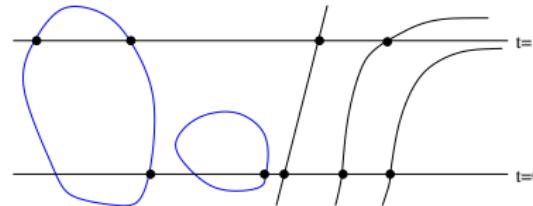
Considérer le chemin d'homotopie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$(x, t) \in \mathcal{S}, \mathcal{S} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ chemin d'homotopie de H

- solution pour les paramètres $(1 - t)a_{sk} + ta_{so}$
- seules les solutions réelles sont trouvées
- plusieurs solutions trouvées (parfois toutes)

Si H est régulière ses chemins d'homotopie, dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, sont difféomorphes :

- à un cercle
 \Rightarrow plusieurs solutions
 \Rightarrow critère d'arrêt
- à une droite
 \Rightarrow suivi infini



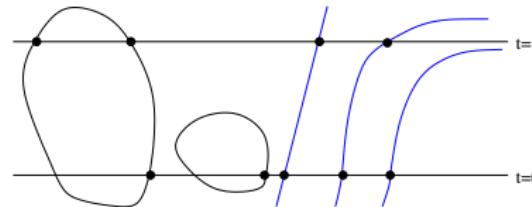
Considérer le chemin d'homotopie dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$(x, t) \in \mathcal{S}, \mathcal{S} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ chemin d'homotopie de H

- solution pour les paramètres $(1 - t)a_{sk} + ta_{so}$
- seules les solutions réelles sont trouvées
- plusieurs solutions trouvées (parfois toutes)

Si H est régulière ses chemins d'homotopie, dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, sont difféomorphes :

- à un cercle
 \Rightarrow plusieurs solutions
 \Rightarrow critère d'arrêt
- à une droite
 \Rightarrow suivi infini



Adapter l'interpolation des paramètres

Idée : *Un SCG n'admet de solutions que si les valeurs de ses paramètres de distances sont positifs.*

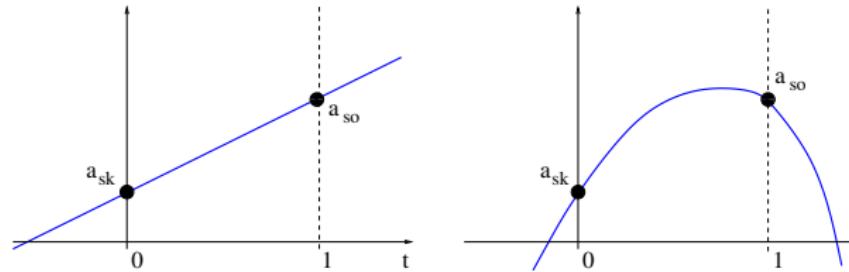
Mise en œuvre : $a = (a^0, \dots, a^{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ vecteur des paramètres.

On appelle $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction d'interpolation si :

- $d(0) = a_{sk}$
- $d(1) = a_{so}$

Fonction d'homotopie : $H(x, t) = F(x, d(t))$

Support positif de d : $\{t \in \mathbb{R} | \forall i \in \mathbb{R}^m, d^i(t) \geq 0\}$.

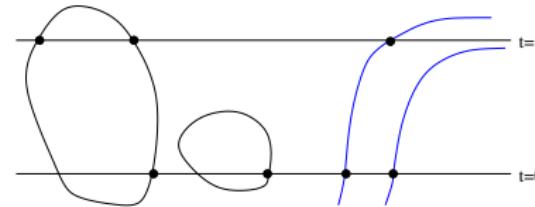


Adapter l'interpolation des paramètres

Idée : *Un SCG n'admet de solutions que si les valeurs de ses paramètres de distances sont positifs.*

Résultat : Si $H(x, t) = F(x, d(t))$ est régulière et d a un support positif compact ses chemins d'homotopie, dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, sont difféomorphes :

- à un cercle
- à une droite qui tend vers une solution à l'infini



Adapter l'interpolation des paramètres

Idée : *Un SCG n'admet de solutions que si les valeurs de ses paramètres de distances sont positifs.*

Résultat : Si $H(x, t) = F(x, d(t))$ est régulière et d a un support positif compact ses chemins d'homotopie, dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, sont difféomorphes :

- à un cercle
- à une droite qui tend vers une solution à l'infini sa limite
 - est une figure particulière
 - qui peut être détectée pendant le suivi

Adapter l'interpolation des paramètres

Idée : *Un SCG n'admet de solutions que si les valeurs de ses paramètres de distances sont positifs.*

Résultat : Si $H(x, t) = F(x, d(t))$ est régulière et d a un support positif compact ses chemins d'homotopie, dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, sont difféomorphes :

- à un cercle
- à une droite qui tend vers une solution à l'infini sa limite
 - est une figure particulière
 - qui peut être détectée pendant le suivi

Régularité

Résultat :

Soit un SCG bien constraint, $F(X, A)$ sa fonction numérique. Si pour tout i , f_i dépend d'un paramètre $a_i \in \mathbb{R}$, alors $F(X, d(t))$ est régulière pour presque tous $a_{sk} \in \mathbb{R}^n$, $a_{so} \in \mathbb{R}^n$.

Inconnues : p_1, p_2, \dots

Paramètres : a_1, a_2, \dots, a_n

Contraintes :

$$\text{distance}(p_1, p_2) = a_1$$

$$\text{distance}(p_1, p_3) = a_2$$

...

...

$$\text{distance}(p_i, p_j) = a_n$$

Composantes :

$$f_1(X, a_1)$$

$$f_2(X, a_2)$$

...

...

$$f_n(X, a_n)$$

Régularité

Résultat :

Soit un SCG bien constraint, $F(X, A)$ sa fonction numérique. Si pour tout i , f_i dépend d'un paramètre $a_i \in \mathbb{R}$, alors $F(X, d(t))$ est régulière pour presque tous $a_{sk} \in \mathbb{R}^n$, $a_{so} \in \mathbb{R}^n$.

Contrainte booléenne \approx

- contrainte métrique
- contrainte de nullité de son paramètre

Inconnues : p_1, p_2, \dots

Paramètres : a_1, a_2, \dots, a_n

Contraintes :

$$\text{distance}(p_1, p_2) = a_1$$

$$\text{distance}(p_1, p_3) = a_2$$

...

$$\text{coplanaires}(p_i, p_j, p_k, p_l)$$

...

$$\text{distance}(p_i, p_j) = a_n$$

Composantes :

$$f_1(X, a_1)$$

$$f_2(X, a_2)$$

...

$$f_i(X, a_i = 0)$$

...

$$f_n(X, a_n)$$

Exemple : l'hexaèdre

Problème 1 : *Construire un hexaèdre, en connaissant les longueurs de ses 12 arêtes.*

Pour presque toutes les valeurs des paramètres, ses solutions sont :

- des points isolés

SCG 3D :

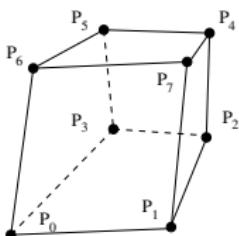
Inconnues :

8 points 18 ddl

Contraintes :

12 distances

6 coplanarités



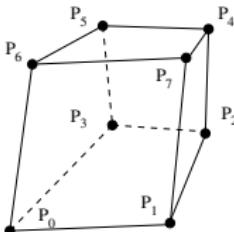
Exemple : l'hexaèdre

Problème 1 : *Construire un hexaèdre, en connaissant les longueurs de ses 12 arêtes.*

Pour presque toutes les valeurs des paramètres, ses solutions sont :

- des points isolés
- les solutions du problème 2

Problème 2 : *Construire 8 points dans un plan, en connaissant 12 distances entre paires de points.*



SCG 3D :

Inconnues :

8 points

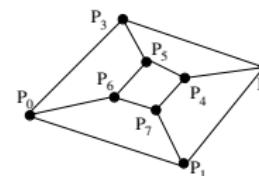
Contraintes :

12 distances

6 coplanarités

18 ddl

18 ddr



SCG 2D :

Inconnues :

8 points

Contraintes :

12 distances

13 ddl

12 ddr

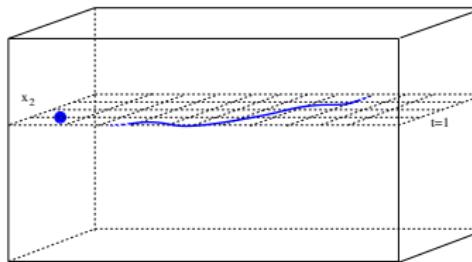
Exemple : l'hexaèdre

Problème 1 : *Construire un hexaèdre, en connaissant les longueurs de ses 12 arêtes.*

Pour presque toutes les valeurs des paramètres, ses solutions sont :

- des points isolés
- des variétés de dimension 1

Problème 2 : *Construire 8 points dans un plan, en connaissant 12 distances entre paires de points.*



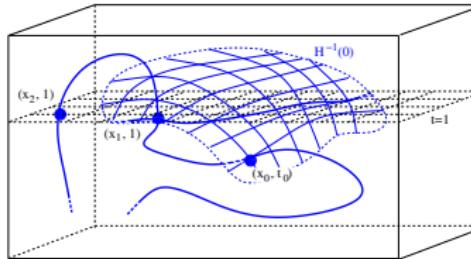
Exemple : l'hexaèdre

Problème 1 : *Construire un hexaèdre, en connaissant les longueurs de ses 12 arêtes.*

Pour presque toutes les valeurs des paramètres, ses solutions sont :

- des points isolés
- des variétés de dimension 1

Fonction d'homotopie $H(X, t)$: Pour presque toutes les valeurs des paramètres, $\{(X, t) | H(X, t) = 0\}$ contient des points critiques



Paramétriser les contraintes booléennes

Idée : Remplacer les contraintes booléennes par des contraintes de paramètres non-nuls quand $t \notin \llbracket 0, 1 \rrbracket$ pour rentrer dans le cadre du résultat précédent.

Mise en œuvre : a^{i_1}, \dots, a^{i_m} les paramètres introduits.

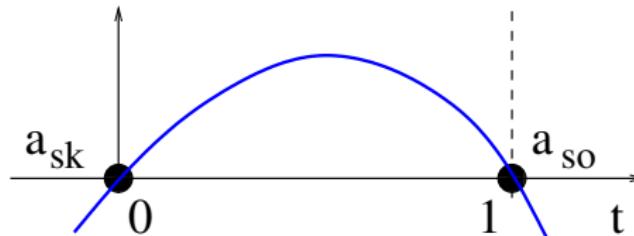
Soit d une fonction d'interpolation, et les trois propriétés :

- (i) $(d^{i_1}(0), \dots, d^{i_m}(0)) = (0, \dots, 0)$
- (ii) $(d^{i_1}(1), \dots, d^{i_m}(1)) = (0, \dots, 0)$
- (iii) $t \notin \llbracket 0, 1 \rrbracket \Rightarrow (d^{i_1}(t), \dots, d^{i_m}(t)) \neq (0, \dots, 0)$

Résultat (heuristique) : Pour presque toutes les fonctions d'interpolations C^∞ vérifiant (i), (ii) et (iii), H n'admet pas de points critiques sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus \llbracket 0, 1 \rrbracket)$.

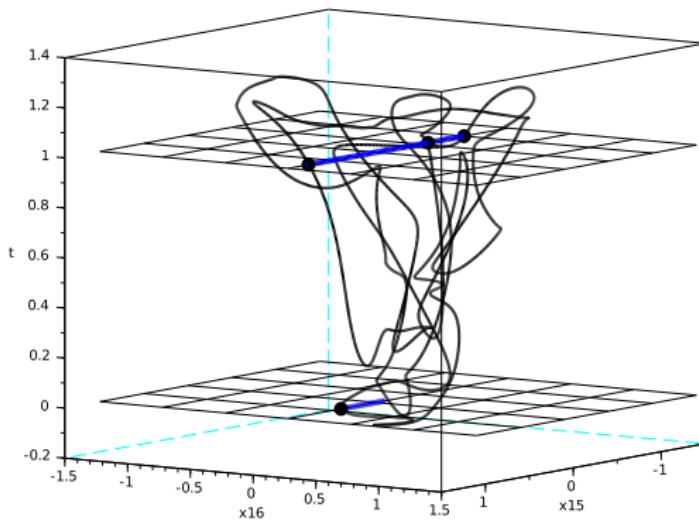
Paramétriser les contraintes booléennes

Idée : Remplacer les contraintes booléennes par des contraintes de paramètres non-nuls quand $t \notin \llbracket 0, 1 \rrbracket$ pour rentrer dans le cadre du résultat précédent.



Résultat (heuristique) : Pour presque toutes les fonctions d'interpolations C^∞ vérifiant (i), (ii) et (iii), H n'admet pas de points critiques sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus \llbracket 0, 1 \rrbracket)$.

Exemple : l'hexaèdre



Quelques résultats comparatifs

Comparaison avec logiciel libre HOM4PS-2.0 :

- Détection des chemins à l'infini
- Homotopie polyédrale pour réduire le nombre de chemins

Table : Temps d'exécution¹.

	HOM4PS-2.0 :	chemin de l'esquisse :
Disulfide : nb solutions temps	18 6129s	8 3s
Hexaèdre : nb solutions temps	16 (0) 12800s	7 (3) 1.6s
Icosaèdre : nb solutions temps	- ² -	28 9s

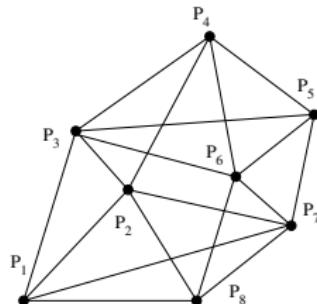
-
1. sur Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz
 2. calcul interrompu après une semaine

Quelques résultats comparatifs

Comparaison avec logiciel libre HOM4PS-2.0 :

- Détection des chemins à l'infini
- Homotopie polyédrale pour réduire le nombre de chemins

Table : Temps d'exécution¹.



	HOM4PS-2.0 :	chemin de l'esquisse :
Disulfide : nb solutions temps	18 6129s	8 3s
Hexaèdre : nb solutions temps	16 (0) 12800s	7 (3) 1.6s
Icosaèdre : nb solutions temps	- -	28 9s

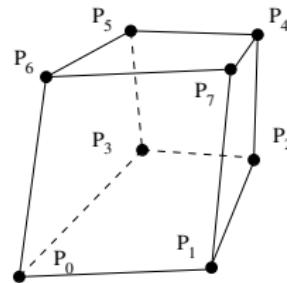
-
1. sur Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz
 2. calcul interrompu après une semaine

Quelques résultats comparatifs

Comparaison avec logiciel libre HOM4PS-2.0 :

- Détection des chemins à l'infini
- Homotopie polyédrale pour réduire le nombre de chemins

Table : Temps d'exécution¹.



	HOM4PS-2.0 :	chemin de l'esquisse :
Disulfide : nb solutions temps	18 6129s	8 3s
Hexaèdre : nb solutions temps	16 (0) 12800s	7 (3) 1.6s
Icosaèdre : nb solutions temps	- -	28 9s

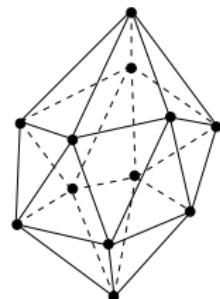
-
1. sur Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz
 2. calcul interrompu après une semaine

Quelques résultats comparatifs

Comparaison avec logiciel libre HOM4PS-2.0 :

- Détection des chemins à l'infini
- Homotopie polyédrale pour réduire le nombre de chemins

Table : Temps d'exécution¹.



	HOM4PS-2.0 :	chemin de l'esquisse :
Disulfide : nb solutions temps	18 6129s	8 3s
Hexaèdre : nb solutions temps	16 (0) 12800s	7 (3) 1.6s
Icosaèdre : nb solutions temps	- -	28 9s

-
1. sur Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz
 2. calcul interrompu après une semaine

Plan

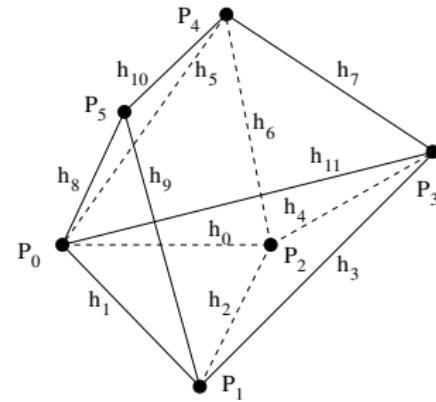
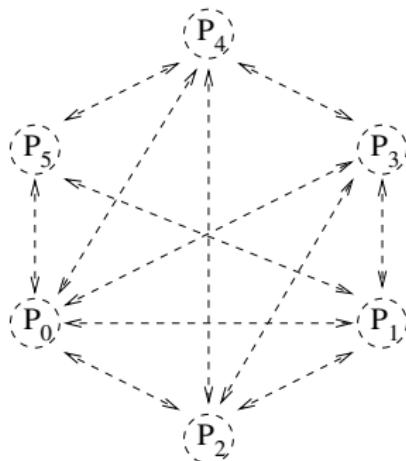
I/ Homotopie et RCG

II/ Utilisation de la géométrie constructive

III/ Utilisation de la géométrie d'incidence

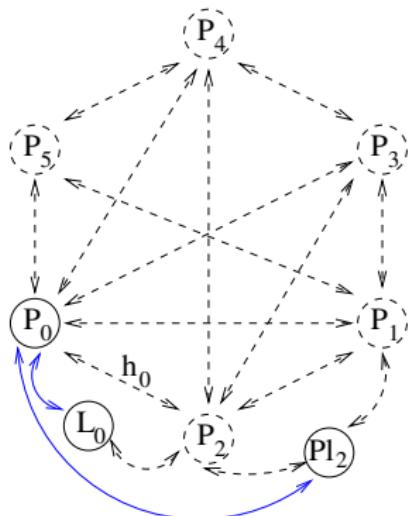
Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
 - Construire un graphe de contraintes
 - sommets \leftrightarrow primitives géométriques
 - arêtes \leftrightarrow contraintes



Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
 - Construire un graphe de contraintes
 - Fixer un repère pour localiser la construction



Paramètres :

P_0, Pl_0, L_0

Inconnues :

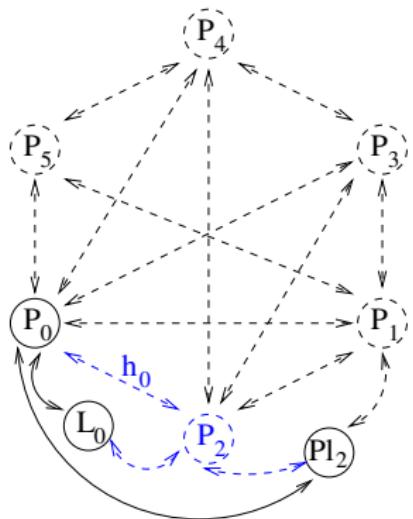
...

Termes :

...

Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
 - Construire un graphe de contraintes
 - Fixer un repère pour localiser la construction
 - Propagation avant des degrés de liberté



Paramètres :

P_0, P_{l0}, L_0

Inconnues :

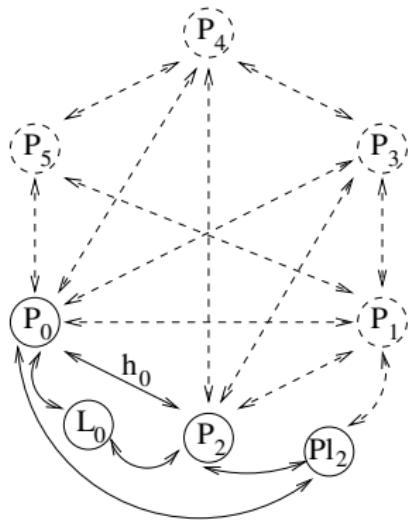
.

Termes :

.

Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
 - Construire un graphe de contraintes
 - Fixer un repère pour localiser la construction
 - Propagation avant des degrés de liberté



Paramètres :

P_0, Pl_0, L_0, h_0

Inconnues :

S_0, P_2

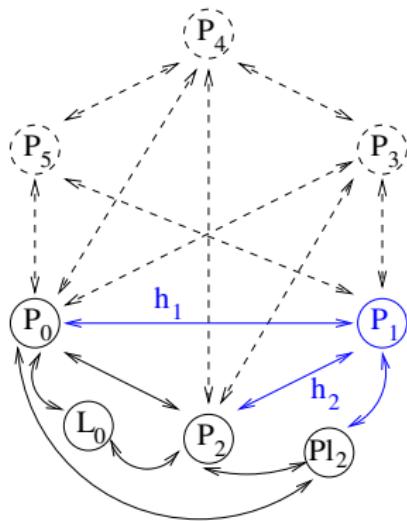
Termes :

$S_0 = \text{sphere}(P_0, h_0)$

$P_2 = \text{interPLS}(Pl_0, L_0, S_0)$

Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
 - Construire un graphe de contraintes
 - Fixer un repère pour localiser la construction
 - Propagation avant des degrés de liberté



Paramètres :

$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, h_2$

Inconnues :

S_0, P_2, S_1, S_2, P_1

Termes :

$S_0 = \text{sphere}(P_0, h_0)$

$P_2 = \text{interPLS}(Pl_0, L_0, S_0)$

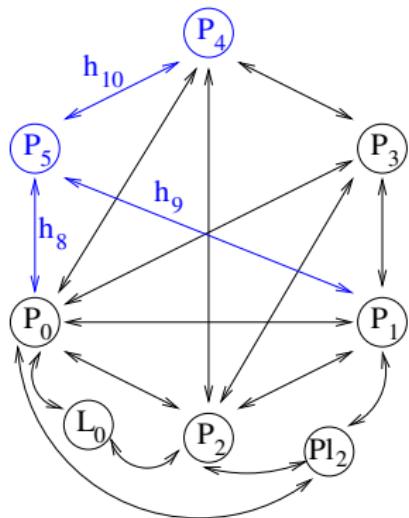
$S_1 = \text{sphere}(P_0, h_1)$

$S_2 = \text{sphere}(P_2, h_2)$

$P_1 = \text{interPSS}(Pl_0, S_1, S_2)$

Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
 - Construire un graphe de contraintes
 - Fixer un repère pour localiser la construction
 - Propagation avant des degrés de liberté



Paramètres :

$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, h_2, \dots, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}$

Inconnues :

$S_0, P_2, S_1, S_2, P_1, \dots, S_9, S_{10}, S_{11}, P_5$

Termes :

$S_0 = \text{sphere}(P_0, h_0)$

$P_2 = \text{interPLS}(Pl_0, L_0, S_0)$

$S_1 = \text{sphere}(P_0, h_1)$

$S_2 = \text{sphere}(P_2, h_2)$

$P_1 = \text{interPSS}(Pl_0, S_1, S_2)$

...

$S_9 = \text{sphere}(P_0, h_8)$

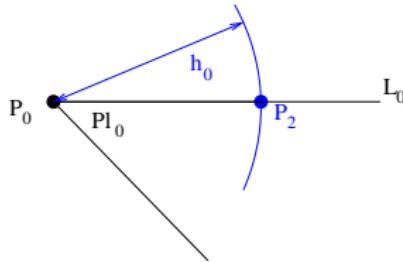
$S_{10} = \text{sphere}(P_1, h_9)$

$S_{11} = \text{sphere}(P_4, h_{10})$

$P_5 = \text{interSSS}(S_9, S_{10}, S_{11})$

Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
- Évaluation du plan de construction



Paramètres :

$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, h_2, \dots, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}$

Inconnues :

$S_0, P_2, S_1, S_2, P_1, \dots, S_9, S_{10}, S_{11}, P_5$

Termes :

$S_0 = \text{sphere}(P_0, h_0)$

$P_2 = \text{interPLS}(Pl_0, L_0, S_0)$

$S_1 = \text{sphere}(P_0, h_1)$

$S_2 = \text{sphere}(P_2, h_2)$

$P_1 = \text{interPSS}(Pl_0, S_1, S_2)$

...

$S_9 = \text{sphere}(P_0, h_8)$

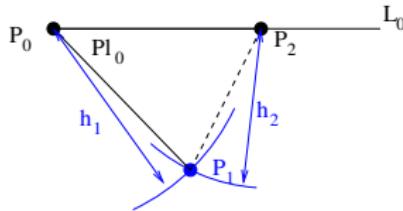
$S_{10} = \text{sphere}(P_1, h_9)$

$S_{11} = \text{sphere}(P_4, h_{10})$

$P_5 = \text{interSSS}(S_9, S_{10}, S_{11})$

Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
- Évaluation du plan de construction



Paramètres :

$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, h_2, \dots, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}$

Inconnues :

$S_0, P_2, S_1, S_2, P_1, \dots, S_9, S_{10}, S_{11}, P_5$

Termes :

$S_0 = \text{sphere}(P_0, h_0)$

$P_2 = \text{interPLS}(Pl_0, L_0, S_0)$

$S_1 = \text{sphere}(P_0, h_1)$

$S_2 = \text{sphere}(P_2, h_2)$

$P_1 = \text{interPSS}(Pl_0, S_1, S_2)$

...

$S_9 = \text{sphere}(P_0, h_8)$

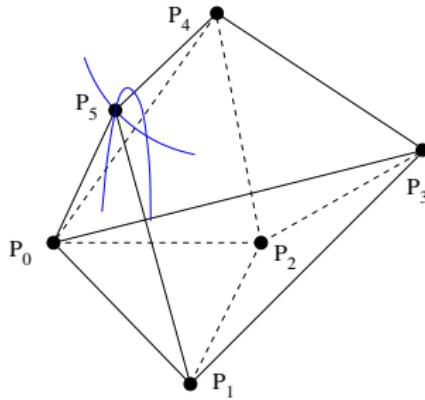
$S_{10} = \text{sphere}(P_1, h_9)$

$S_{11} = \text{sphere}(P_4, h_{10})$

$P_5 = \text{interSSS}(S_9, S_{10}, S_{11})$

Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
- Évaluation du plan de construction



Paramètres :

$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, h_2, \dots, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}$

Inconnues :

$S_0, P_2, S_1, S_2, P_1, \dots, S_9, S_{10}, S_{11}, P_5$

Termes :

$S_0 = \text{sphere}(P_0, h_0)$

$P_2 = \text{interPLS}(Pl_0, L_0, S_0)$

$S_1 = \text{sphere}(P_0, h_1)$

$S_2 = \text{sphere}(P_2, h_2)$

$P_1 = \text{interPSS}(Pl_0, S_1, S_2)$

...

$S_9 = \text{sphere}(P_0, h_8)$

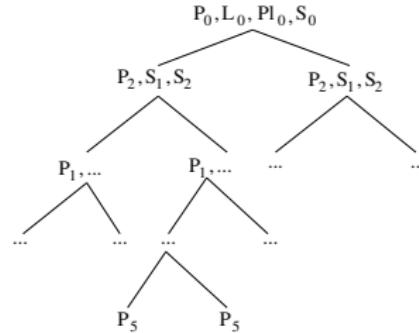
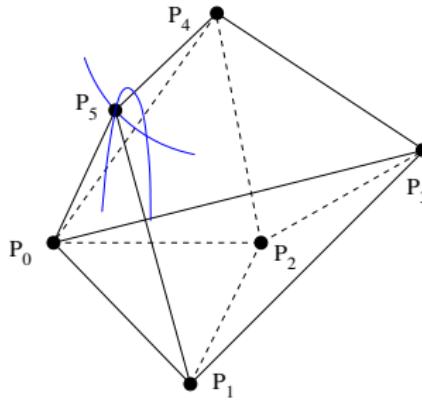
$S_{10} = \text{sphere}(P_1, h_9)$

$S_{11} = \text{sphere}(P_4, h_{10})$

$P_5 = \text{interSSS}(S_9, S_{10}, S_{11})$

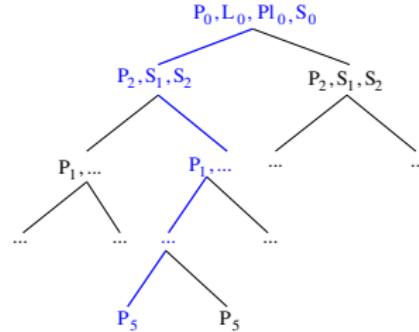
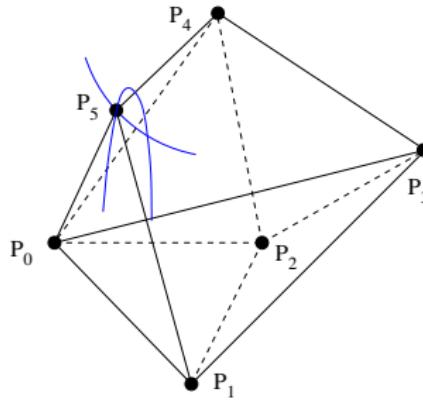
Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
- Évaluation du plan de construction
- Arbre d'interprétation
 - Nb exponentiel de branches en le nb d'intersections.



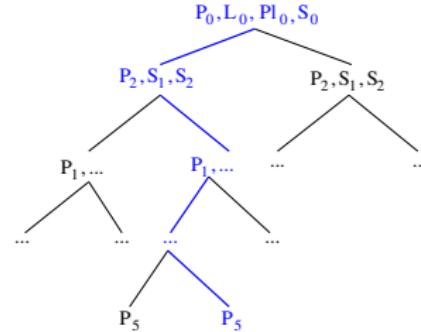
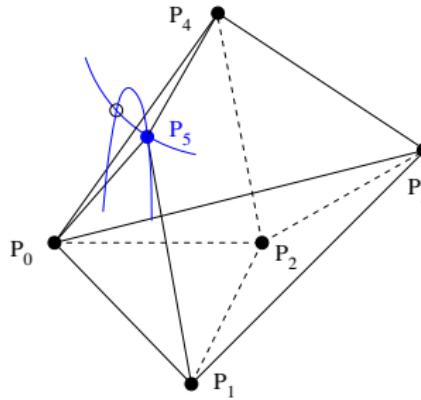
Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
- Évaluation du plan de construction
- Arbre d'interprétation
 - Nb exponentiel de branches en le nb d'intersections.



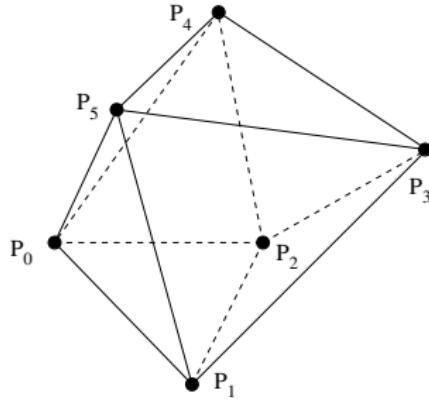
Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
- Évaluation du plan de construction
- Arbre d'interprétation
 - Nb exponentiel de branches en le nb d'intersections.
 - $Cp^b(h_0, \dots, h_{11})$: évaluation sur la branche b pour h_0, \dots, h_{11}



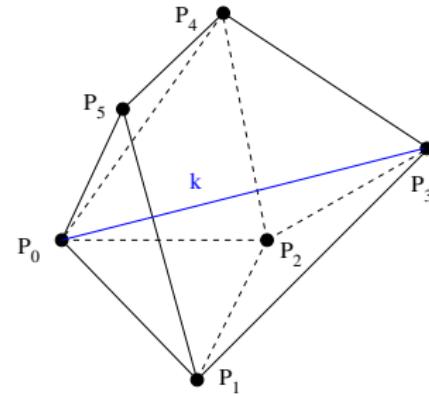
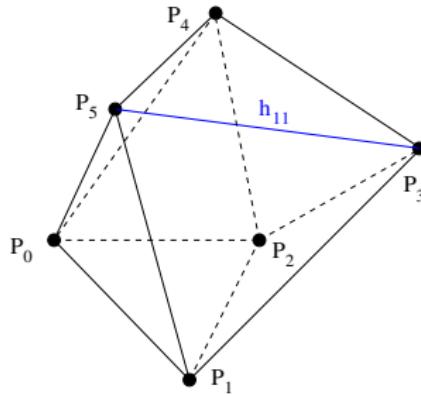
Méthode par Intersection de Lieux Géométriques (LIM)

- Obtention d'un plan de construction
- Évaluation du plan de construction
- Arbre d'interprétation
- **Échec** de la méthode : octaèdre



Reparamétrisation

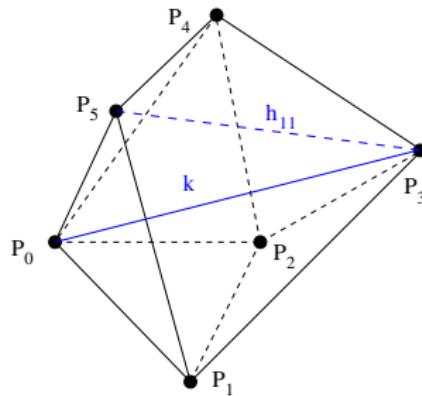
- Remplacer d contraintes pour obtenir un SCG soluble par LIM
 $k = (k_0, \dots, k_{d-1})$: paramètres guides



Reparamétrisation

Phase symbolique :

- Remplacer d contraintes pour obtenir un SCG soluble par LIM
 $k = (k_0, \dots, k_{d-1})$: paramètres guides
- Plan de construction paramétré k



Paramètres :

$P_0, P_1, L_0, h_0, h_1, h_2, \dots, k$

Inconnues :

S_0, P_2, \dots, P_5

Termes :

$S_0 = \text{sphere}(P_0, h_0)$

$P_2 = \text{interPLS}(P_1, L_0, S_0)$

...

$S_3 = \text{sphere}(P_0, k)$

...

$P_5 = \text{interSSS}(S_9, S_{10}, S_{11})$

Reparamétrisation

Phase symbolique :

- Remplacer d contraintes pour obtenir un SCG soluble par LIM
 $k = (k_0, \dots, k_{d-1})$: paramètres guides
- Plan de construction paramétré k

Phase numérique :

Pour quelles valeurs de k les contraintes supprimées sont-elles satisfaites par $Cp^b(k)$?

Paramètres :

$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, h_2, \dots, k$

Inconnues :

S_0, P_2, \dots, P_5

Termes :

$S_0 = sphere(P_0, h_0)$

$P_2 = interPLS(Pl_0, L_0, S_0)$

...

$S_3 = sphere(P_0, k)$

...

$P_5 = interSSS(S_9, S_{10}, S_{11})$

Reparamétrisation

Phase numérique :

Pour quelles valeurs de k les contraintes supprimées sont-elles satisfaites par $Cp^b(k)$?

- fonction numérique : $F_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$k \mapsto F_s(Cp^b(k))$$
- En général : $d \ll n$

Paramètres :

$P_0, Pl_0, L_0, h_0, h_1, h_2, \dots, k$

Inconnues :

S_0, P_2, \dots, P_5

Termes :

$S_0 = sphere(P_0, h_0)$

$P_2 = interPLS(Pl_0, L_0, S_0)$

...

$S_3 = sphere(P_0, k)$

...

$P_5 = interSSS(S_9, S_{10}, S_{11})$

$$F_s(P_5, P_3) = distance(P_5, P_3) - h_{11}$$

Reparamétrisation

Phase numérique : très difficile

Pour quelles valeurs de k les contraintes supprimées sont-elles satisfaites par $Cp^b(k)$?

- multi-fonction numérique : $F_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$k \mapsto \begin{cases} F_s(Cp^{b_0}(k)) \\ F_s(Cp^{b_1}(k)) \\ \dots \\ F_s(Cp^{b_{p-1}}(k)) \end{cases}$$

- Expression analytique de F_r , très complexe

Approches proposées :

- échantillonnage de \mathbb{R}^d sur chaque branche
- Newton-Raphson

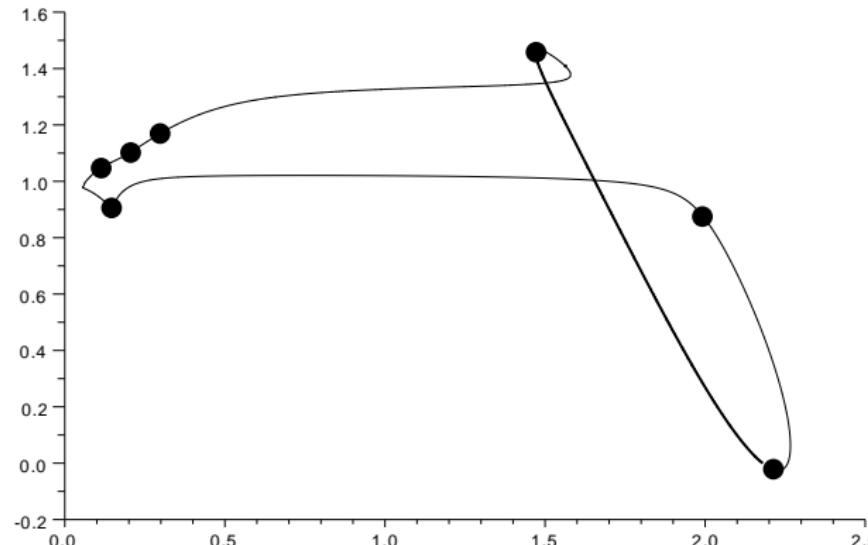
[Fab06] Arnaud Fabre.

Contraintes géométriques en dimension 3.

PhD thesis, 2006.

Reparamétrisation

Phase numérique : résolution par homotopie



Utiliser un plan de construction

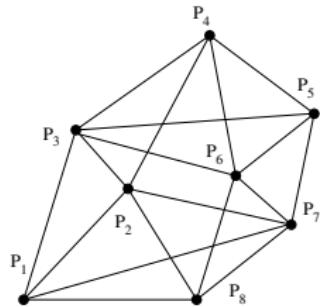
Idée : Utiliser un PC obtenu par reparamétrisation pour engendrer de nouvelles esquisses.

Mise en œuvre :

- x_0, \dots, x_l : solutions trouvées sur le chemin de l'esquisse
- Cp : plan de construction obtenu par reparamétrisation
- pour x_i , il existe une branche b_i et un vecteur k_i de paramètres guides tels que $Cp^{b_i}(k_i) = x_i$
- en évaluant $Cp^b(k_i)$ pour $b \neq b_i$, de nouvelles esquisses sont obtenues.

Résultats comparatifs

Table : Temps d'exécution³.

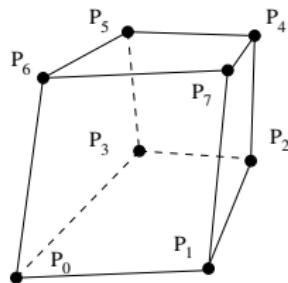


	HOM4PS-2.0 :	Processus complet :
Disulfide :		
nb solutions	18	13
temps	6129s	108s
Hexaèdre :		
nb solutions	16	16
temps	12800s	136s
Icosaèdre :		
nb solutions	-	_ 4
temps	-	-

-
- 3. sur Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz
 - 4. interrompu après 8 heures : 308 solutions trouvées

Résultats comparatifs

Table : Temps d'exécution³.

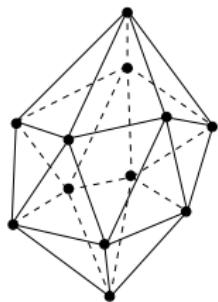


	HOM4PS-2.0 :	Processus complet :
Disulfide : nb solutions temps	18 6129s	13 108s
Hexaèdre : nb solutions temps	16 12800s	16 136s
Icosaèdre : nb solutions temps	- -	_ 4 -

-
3. sur Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz
 4. interrompu après 8 heures : 308 solutions trouvées

Résultats comparatifs

Table : Temps d'exécution³.



	HOM4PS-2.0 :	Processus complet :
Disulfide : nb solutions temps	18 6129s	13 108s
Hexaèdre : nb solutions temps	16 12800s	16 136s
Icosaèdre : nb solutions temps	- -	_ 4 -

Idée : recherche semi-automatique de nouvelles solutions

[EV01] Caroline Essert-Villard.

Sélection dans l'espace des solutions engendrées par un plan de construction géométrique.

PhD thesis, 2001.

-
3. sur Intel(R) Core(TM) i5 CPU 750 @ 2.67GHz
 4. interrompu après 8 heures : 308 solutions trouvées

Principe

Approximation structurelle de la bonne constrictions :

Un SCG est dit structurellement bien constraint s'il vérifie le critère de Laman.

G tq c : nombre de distances, n : nombre de points

$G' < G$ tq c' : nombre de distances, n' : nombre de points

En 2D :

- $c = 2n - 3$
- $\forall G' < G, c' \leq 2n' - 3$
- cond. nécessaire et suffisante à la bonne constrictions

En 3D :

- $c = 3n - 6$
- $\forall G' < G, c' \leq 3n' - 6$
- cond. nécessaire à la bonne constrictions

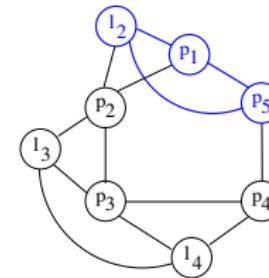
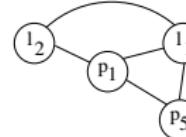
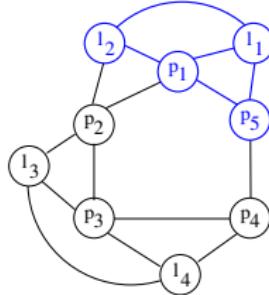
Principe

Approximation structurelle de la bonne constrictio :

Un SCG est dit structurellement bien constraint s'il vérifie le critère de Laman.

Principe : Soit G struct. bien constraint.

- Identifier $G_1 < G$ struct. bien constraint, avec sommet intérieur
 - résoudre G_1 ,
 - calculer son bord dans $G : B_{G_1/G}$
- recommencer avec $G - G_1 + B_{G_1/G}$.



Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s) =$ nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

Procédure : DecomEtReparam

Entrée : SCG G bien contraint.

1 : Choisir un repère.

2 : Choisir $v \in G \setminus G_c$ maximisant $D(s)$.

Ajouter s à G_c

SI G_c est bien contraint

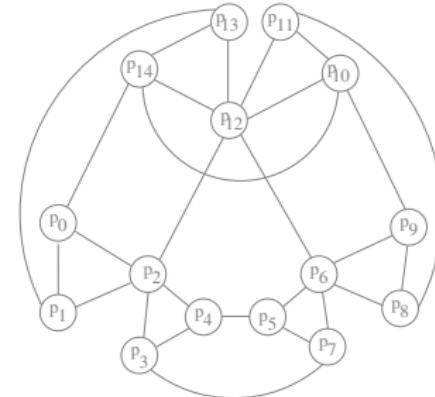
ET contient un sommet intérieur,

$$G' = G - G_c + B_{G_c}/G$$

DecompEtReparam(G').

SINON aller à 2.

FIN SI



Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s) =$ nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

Procédure : `DecompEtReparam`

Entrée : SCG G bien contraint.

1 : Choisir un repère.

2 : Choisir $v \in G \setminus G_c$ maximisant $D(s)$.

Ajouter s à G_c

SI G_c est bien contraint

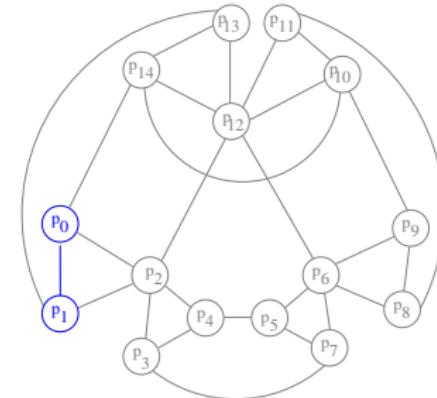
ET contient un sommet intérieur,

$$G' = G - G_c + B_{G_c}/G$$

`DecompEtReparam(G')`.

SINON aller à 2.

FIN SI



Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s) =$ nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

Procédure : DecomEtReparam

Entrée : SCG G bien contraint.

1 : Choisir un repère.

2 : Choisir $v \in G \setminus G_c$ maximisant $D(s)$.

Ajouter s à G_c

SI G_c est bien contraint

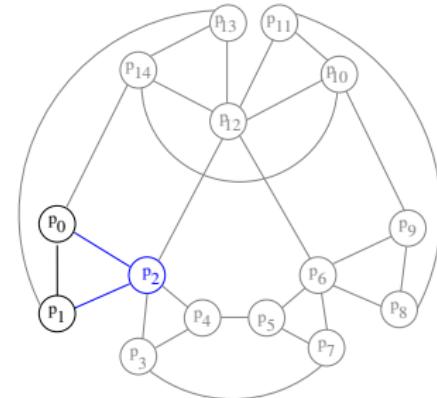
ET contient un sommet intérieur,

$$G' = G - G_c + B_{G_c}/G$$

DecompEtReparam(G').

SINON aller à 2.

FIN SI



Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s) =$ nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

Procédure : DecomEtReparam

Entrée : SCG G bien contraint.

1 : Choisir un repère.

2 : Choisir $v \in G \setminus G_c$ maximisant $D(s)$.

Ajouter s à G_c

SI G_c est bien contraint

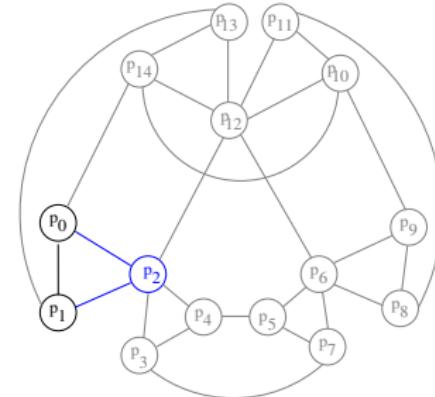
ET contient un sommet intérieur,

$$G' = G - G_c + B_{G_c}/G$$

DecompEtReparam(G').

SINON aller à 2.

FIN SI



Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s) =$ nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

Procédure : `DecompEtReparam`

Entrée : SCG G bien contraint.

- 1 : Choisir un repère.
- 2 : Choisir $v \in G \setminus G_c$ maximisant $D(s)$.
SI $D(s) < 0$, ajouter $D(s)$ contraintes entre s et des sommets de G_c

Ajouter s à G_c

SI G_c est bien contraint

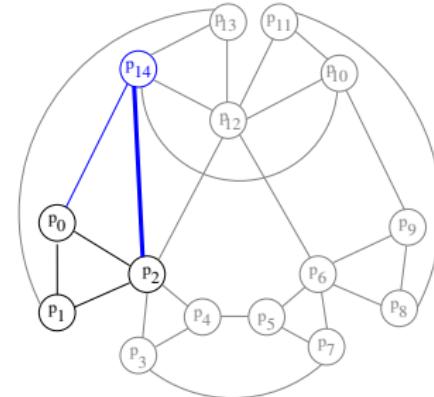
ET contient un sommet intérieur,

$$G' = G - G_c + B_{G_c}/G$$

`DecompEtReparam(G')`.

SINON aller à 2.

FIN SI



Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s) =$ nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

Procédure : DecomEtReparam

Entrée : SCG G bien contraint.

1 : Choisir un repère.

2 : Choisir $v \in G \setminus G_c$ maximisant $D(s)$.

SI $D(s) < 0$, ajouter $D(s)$ contraintes entre s et des sommets de G_c

Ajouter s à G_c

SI G_c est bien contraint

ET contient un sommet intérieur,

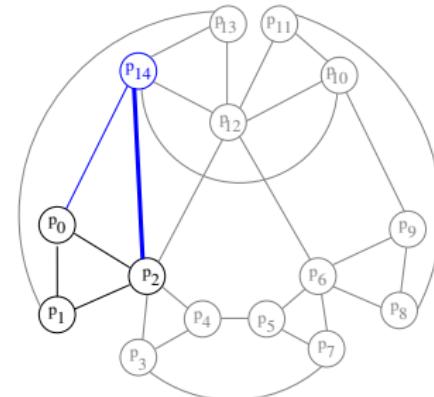
ET autant de contraintes ajoutées que supprimées,

$G' = G - G_c + B_{G_c}/G$

DecompEtReparam(G').

SINON aller à 2.

FIN SI



Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s)$ = nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

Procédure : `DecompEtReparam`

Entrée : SCG G bien contraint.

- 1 : Choisir un repère.
- 2 : Choisir $v \in G \setminus G_c$ maximisant $D(s)$.
SI $D(s) < 0$, ajouter $D(s)$ contraintes entre s et des sommets de G_c

Ajouter s à G_c

SI G_c est bien contraint

ET contient un sommet intérieur,

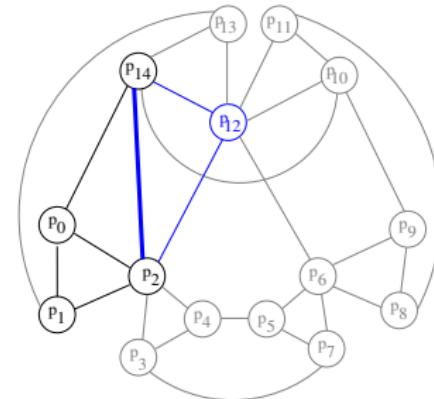
ET autant de contraintes ajoutées que supprimées,

$$G' = G - G_c + B_{G_c}/G$$

`DecompEtReparam`(G').

SINON aller à 2.

FIN SI



Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s) =$ nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

Procédure : `DecompEtReparam`

Entrée : SCG G bien contraint.

1 : Choisir un repère.

2 : Choisir $v \in G \setminus G_c$ maximisant $D(s)$.

SI $D(s) < 0$, ajouter $D(s)$ contraintes entre s et des sommets de G_c

SI $D(s) > 0$, enlever $D(s)$ contraintes entre s et des sommets de G_c

Ajouter s à G_c

SI G_c est bien contraint

ET contient un sommet intérieur,

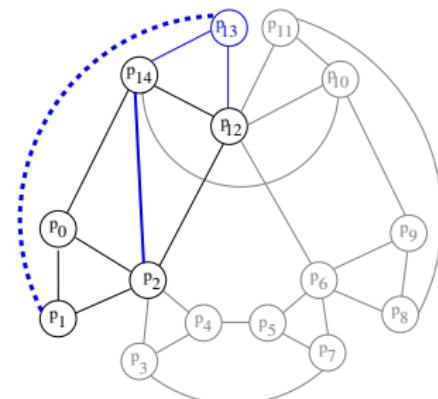
ET autant de contraintes ajoutées que supprimées,

$G' = G - G_c + B_{G_c}/G$

`DecompEtReparam(G')`.

SINON aller à 2.

FIN SI



Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s) =$ nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

Procédure : `DecompEtReparam`

Entrée : SCG G bien contraint.

1 : Choisir un repère.

2 : Choisir $v \in G \setminus G_c$ maximisant $D(s)$.

SI $D(s) < 0$, ajouter $D(s)$ contraintes entre s et des sommets de G_c

SI $D(s) > 0$, enlever $D(s)$ contraintes entre s et des sommets de G_c

Ajouter s à G_c

SI G_c est bien contraint

ET contient un sommet intérieur,

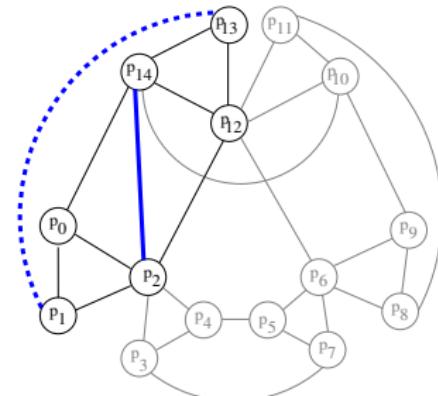
ET autant de contraintes ajoutées que supprimées,

$G' = G - G_c + B_{G_c}/G$

`DecompEtReparam(G')`.

SINON aller à 2.

FIN SI



Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s)$ = nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

Procédure : `DecompEtReparam`

Entrée : SCG G bien contraint.

1 : Choisir un repère.

2 : Choisir $v \in G \setminus G_c$ maximisant $D(s)$.

SI $D(s) < 0$, ajouter $D(s)$ contraintes entre s et des sommets de G_c

SI $D(s) > 0$, enlever $D(s)$ contraintes entre s et des sommets de G_c

Ajouter s à G_c

SI G_c est bien contraint

ET contient un sommet intérieur,

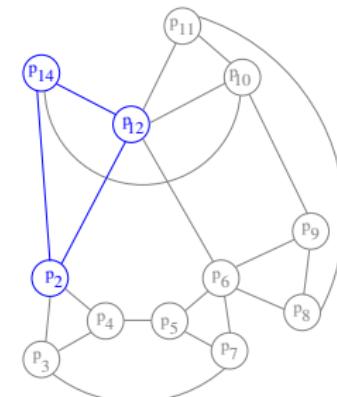
ET autant de contraintes ajoutées que supprimées,

$$G' = G - G_c + B_{G_c}/G$$

`DecompEtReparam(G')`.

SINON aller à 2.

FIN SI



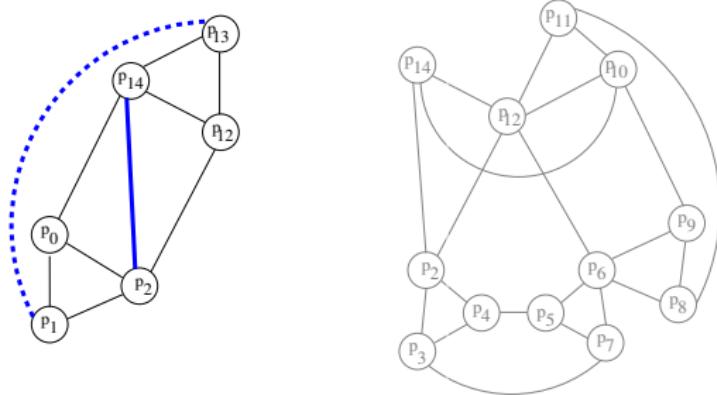
Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s) =$ nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constriction de s .

La décomposition obtenue dépend fortement du repère.

⇒ Heuristique pour déterminer un bon repère.



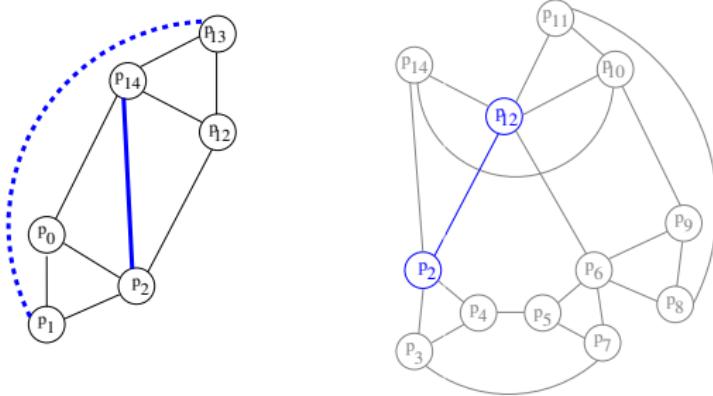
Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s)$ = nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constriction de s .

La décomposition obtenue dépend fortement du repère.

⇒ Heuristique pour déterminer un bon repère.



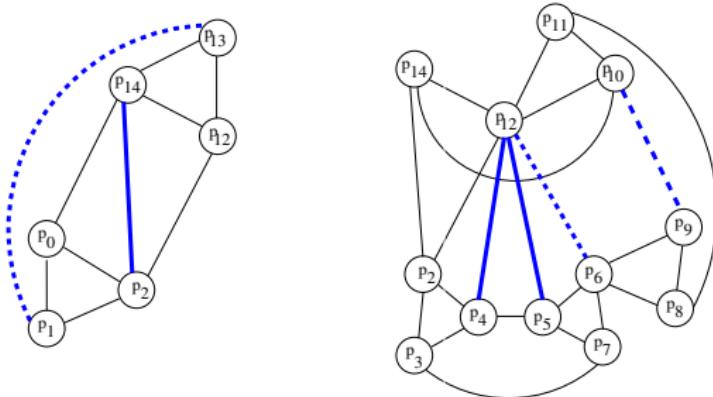
Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s)$ = nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

La décomposition obtenue dépend fortement du repère.

⇒ Heuristique pour déterminer un bon repère.



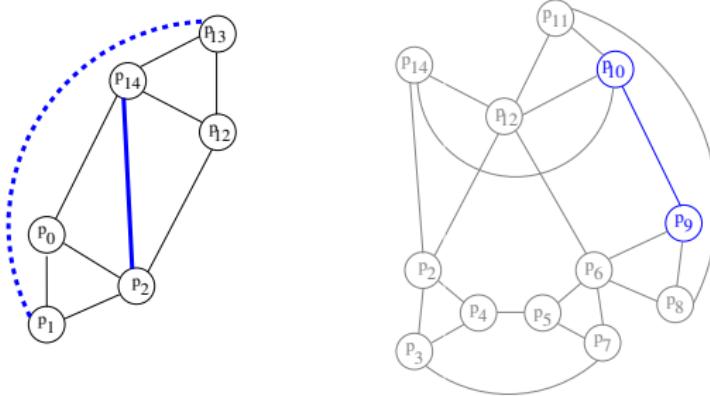
Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s)$ = nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

La décomposition obtenue dépend fortement du repère.

⇒ Heuristique pour déterminer un bon repère.



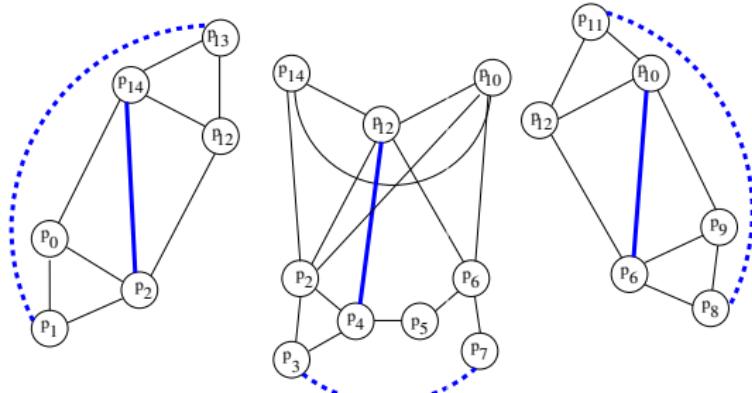
Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s)$ = nombre de sommets de G_c adjacents à s .
- $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constrictions de s .

La décomposition obtenue dépend fortement du repère.

⇒ Heuristique pour déterminer un bon repère.



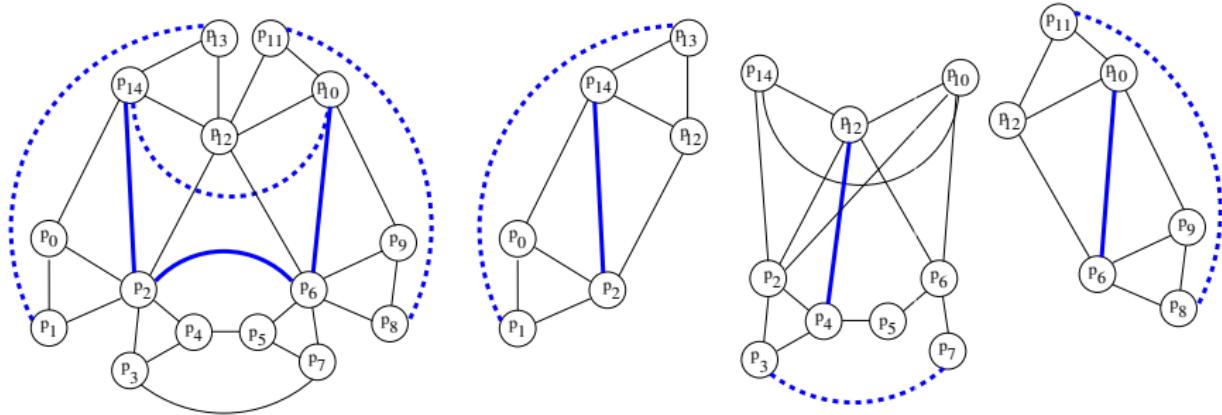
Décomposition avec remplacement de contraintes

G_c graphe partiel induit par les sommets de G construits. pour $s \notin G_c$,

- $DEGC(s)$ = nombre de sommets de G_c adjacents à s .
 - $D(s) = DEGC(s) - DOF(s)$ est la constriction de s .

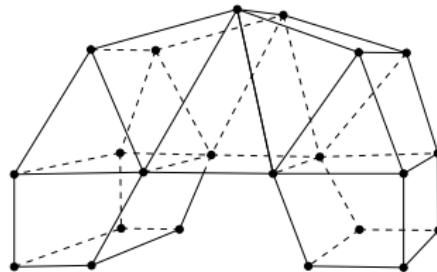
La décomposition obtenue dépend fortement du repère.

⇒ Heuristique pour déterminer un bon repère.



Résultat

Système de contraintes :

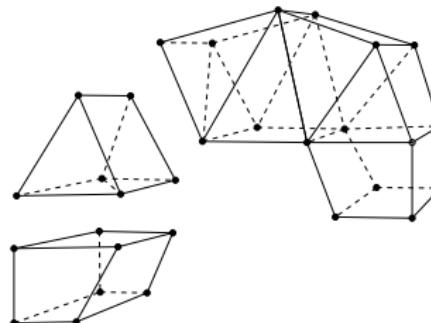


22 points

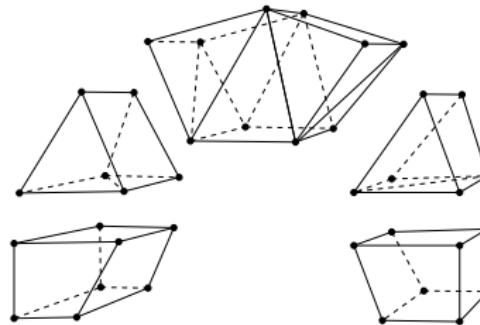
15 coplanarités

45 distances

Décomposition :



Décomposition avec heuristique :



Plan

I/ Homotopie et RCG

II/ Utilisation de la géométrie constructive

III/ Utilisation de la géométrie d'incidence

Continuums de solutions dus à la géométrie d'incidence

Cas de l'hexaèdre :

quand tous les points d'une solution sont coplanaires, le SCG associé "perd" un degré de restriction.

Ceci est la conséquence de la propriété :

Si 8 points sont coplanaires, alors ils sont coplanaires 4 à 4.

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l} \text{solutions de } G' \\ \text{distance}(P_1, P_2) \\ \dots \\ \text{distance}(P_7, P_8) \end{array} \right\} \quad \subseteq \quad \left. \begin{array}{l} \text{solutions de } G \\ \text{distance}(P_1, P_2) \\ \dots \\ \text{distance}(P_7, P_8) \end{array} \right\} \\
 \Rightarrow \\
 \left. \begin{array}{l} \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_4) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_5) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_6) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_7) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_8) \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_4) \\ \text{coplanaires}(P_2, P_3, P_5, P_8) \\ \text{coplanaires}(P_3, P_4, P_5, P_6) \\ \text{coplanaires}(P_4, P_1, P_6, P_7) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_7, P_8) \\ \text{coplanaires}(P_5, P_6, P_7, P_8) \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Continuums de solutions dus à la géométrie d'incidence

Cas de l'hexaèdre :

quand tous les points d'une solution sont coplanaires, le SCG associé "perd" un degré de restriction.

Ceci est la conséquence de la propriété :

Si 8 points sont coplanaires, alors ils sont coplanaires 4 à 4.

$$\begin{array}{ccc}
 \left. \begin{array}{c} \text{solutions de } G' \\ \text{distance}(P_1, P_2) \\ \dots \\ \text{distance}(P_7, P_8) \end{array} \right\} & \subseteq & \left. \begin{array}{c} \text{solutions de } G \\ \text{distance}(P_1, P_2) \\ \dots \\ \text{distance}(P_7, P_8) \end{array} \right\} \\
 \text{ddr : 5} \left\{ \begin{array}{c} \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_4) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_5) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_6) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_7) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_8) \end{array} \right\} & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_4) \\ \text{coplanaires}(P_2, P_3, P_5, P_8) \\ \text{coplanaires}(P_3, P_4, P_5, P_6) \\ \text{coplanaires}(P_4, P_1, P_6, P_7) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_7, P_8) \\ \text{coplanaires}(P_5, P_6, P_7, P_8) \end{array} \right\} \text{ddr : 6}
 \end{array}$$

Continuums de solutions dus à la géométrie d'incidence

Cas de l'hexaèdre :

quand tous les points d'une solution sont coplanaires, le SCG associé "perd" un degré de restriction.

Ceci est la conséquence de la propriété :

Si 8 points sont coplanaires, alors ils sont coplanaires 4 à 4.

Comment détecter de telles situations ?

$$\begin{array}{c}
 \text{solutions de } G' \\
 \left. \begin{array}{l} \text{distance}(P_1, P_2) \\ \dots \\ \text{distance}(P_7, P_8) \end{array} \right\} \quad \subseteq \quad \text{solutions de } G \\
 \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \text{distance}(P_1, P_2) \\ \dots \\ \text{distance}(P_7, P_8) \end{array} \right\} \\
 \\
 \text{ddr : 5} \quad \left. \begin{array}{l} \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_4) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_5) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_6) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_7) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_8) \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_3, P_4) \\ \text{coplanaires}(P_2, P_3, P_5, P_8) \\ \text{coplanaires}(P_3, P_4, P_5, P_6) \\ \text{coplanaires}(P_4, P_1, P_6, P_7) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_7, P_8) \\ \text{coplanaires}(P_5, P_6, P_7, P_8) \end{array} \right\} \text{ddr : 6}
 \end{array}$$

Rang d'un ensemble de points

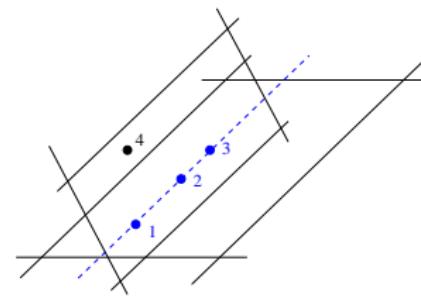
E ensemble de points dans l'espace

- Rang d'un ensemble $F \subset E$ de points

- $F = \emptyset \Rightarrow rg(F) = -1$

- $F = \{e_1, \dots, e_n\} \Rightarrow rg(F) = \dim(\langle \overrightarrow{e_1 e_2}, \dots, \overrightarrow{e_1 e_n} \rangle)$

				$\boxed{\{1,2,3,4\}}$ 2
$\boxed{\{1,2,3\}}$ 1	$\boxed{\{1,2,4\}}$ 2	$\boxed{\{1,3,4\}}$ 2	$\boxed{\{2,3,4\}}$ 2	
$\boxed{\{1,2\}}$ 1	...	$\boxed{\{3,4\}}$ 1		
$\boxed{\{1\}}$ 0	$\boxed{\{2\}}$ 0	$\boxed{\{3\}}$ 0	$\boxed{\{4\}}$ 0	



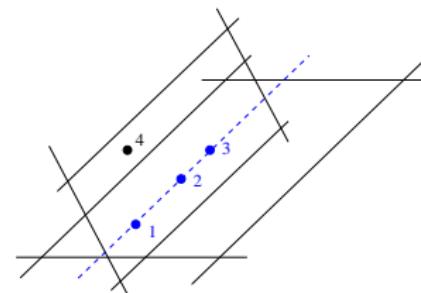
Rang d'un ensemble de points

E ensemble de points dans l'espace

- Rang d'un ensemble $F \subset E$ de points
- Axiomes

- (A1) $|F| = 1 \Rightarrow rg(F) = 0$,
- (A2) $F \subseteq G \Rightarrow rg(F) \leq rg(G)$ (monotonie),
- (A3) $rg(F \cup G) + rg(F \cap G) \leq rg(F) + rg(G)$ (sous-modularité),
- (P4) $e \in E \Rightarrow rg(F \cup \{e\}) \leq rg(F) + 1$ (conséquence de (A3)).

				$\boxed{\{1,2,3,4\}}$
$\boxed{\{1,2,3\}}$	$\boxed{\{1,2,4\}}$	$\boxed{\{1,3,4\}}$	$\boxed{\{2,3,4\}}$	2
$\boxed{\{1,2\}}$	\dots	$\boxed{\{3,4\}}$	2	1
$\boxed{\{1\}}$	$\boxed{\{2\}}$	$\boxed{\{3\}}$	$\boxed{\{4\}}$	0



Rang d'un ensemble de points

E ensemble de points dans l'espace

- Rang d'un ensemble $F \subset E$ de points
- Axiomes

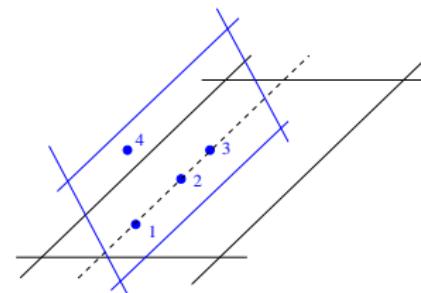
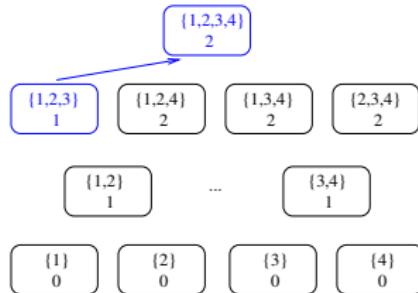
$$(A1) \quad |F| = 1 \Rightarrow rg(F) = 0,$$

$$(A2) \quad F \subseteq G \Rightarrow rg(F) \leq rg(G) \text{ (monotonie),}$$

$$(A3) \quad rg(F \cup G) + rg(F \cap G) \leq rg(F) + rg(G) \text{ (sous-modularité),}$$

$$(P4) \quad e \in E \Rightarrow rg(F \cup \{e\}) \leq rg(F) + 1 \text{ (conséquence de (A3)).}$$

Déductions géométriques : $rg(1, 2, 3) = 1 \Rightarrow rg(1, 2, 3, 4) \leq 2$



Rang d'un ensemble de points

E ensemble de points dans l'espace

- Rang d'un ensemble $F \subset E$ de points

- Axiomes

- Rangs et contraintes d'incidences

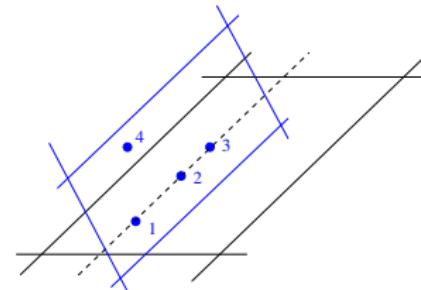
coplanaires(1, 2, 3, 4) : $rg(1, 2, 3, 4) \leq 2$

DoR(1, 2, 3, 4) = 1

- Degré de restriction :

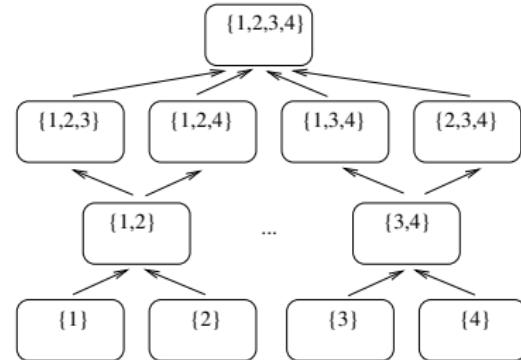
$$DoR(F) = \max(0, (|F| - 1 - rg(F))(3 - rg(F)))$$

$\boxed{\{1,2,3,4\}}$ $\underline{2}$			
$\boxed{\{1,2,3\}}$ 1	$\boxed{\{1,2,4\}}$ 2	$\boxed{\{1,3,4\}}$ 2	$\boxed{\{2,3,4\}}$ 2
$\boxed{\{1,2\}}$ 1	...	$\boxed{\{3,4\}}$ 1	
$\boxed{\{1\}}$ 0	$\boxed{\{2\}}$ 0	$\boxed{\{3\}}$ 0	$\boxed{\{4\}}$ 0



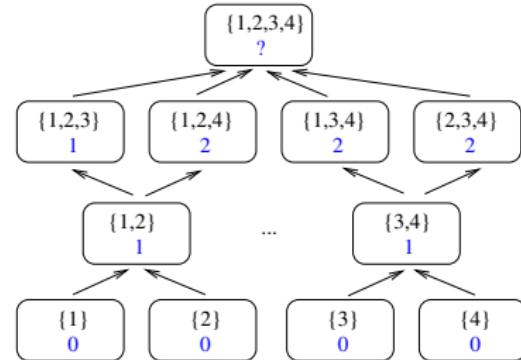
Matroïde géométrique

- Treillis de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de \subset
- Représenté par un DAG $G = (S, A)$
 - sommets : $F \in \mathcal{P}(E)$
 - arêtes : $(F_1, F_2) \in S \Leftrightarrow (F_1 \subset F_2) \wedge (|F_2| = |F_1| + 1)$



Matroïde géométrique

- Treillis de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de \subset
- Représenté par un DAG $G = (S, A)$
- Sommets étiquetés par leur rang (éventuellement inconnu)
- Permet de propager les axiomes de la fonction rang



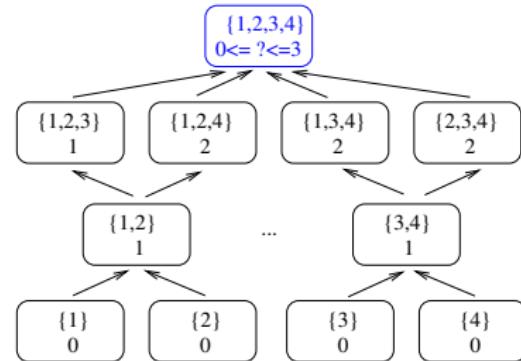
Matroïde géométrique

- Treillis de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de \subset
- Représenté par un DAG $G = (S, A)$
- Sommets étiquetés par leur rang (éventuellement inconnu)
- Permet de propager les axiomes de la fonction rang

$$(1.) \quad 0 \leq rg(\{1, 2, 3, 4\}) \leq 3$$

$$(2.) \quad rg(\{1, 2, 3\}) = 1 \Rightarrow 1 \leq rg(\{1, 2, 3, 4\}) \leq 2$$

$$(3.) \quad rg(\{1, 2, 4\}) = 2 \Rightarrow rg(\{1, 2, 3, 4\}) = 2$$



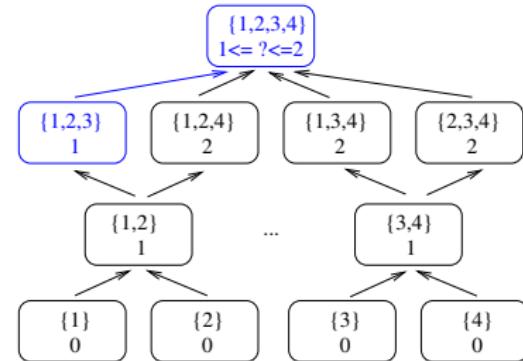
Matroïde géométrique

- Treillis de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de \subset
- Représenté par un DAG $G = (S, A)$
- Sommets étiquetés par leur rang (éventuellement inconnu)
- Permet de propager les axiomes de la fonction rang

$$(1.) \quad 0 \leq rg(\{1, 2, 3, 4\}) \leq 3$$

$$(2.) \quad rg(\{1, 2, 3\}) = 1 \Rightarrow 1 \leq rg(\{1, 2, 3, 4\}) \leq 2$$

$$(3.) \quad rg(\{1, 2, 4\}) = 2 \Rightarrow rg(\{1, 2, 3, 4\}) = 2$$



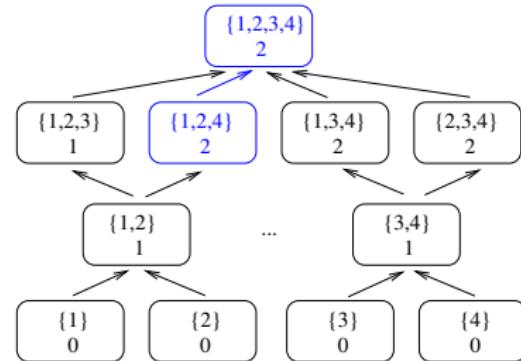
Matroïde géométrique

- Treillis de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de \subset
- Représenté par un DAG $G = (S, A)$
- Sommets étiquetés par leur rang (éventuellement inconnu)
- Permet de propager les axiomes de la fonction rang

$$(1.) \quad 0 \leq rg(\{1, 2, 3, 4\}) \leq 3$$

$$(2.) \quad rg(\{1, 2, 3\}) = 1 \Rightarrow 1 \leq rg(\{1, 2, 3, 4\}) \leq 2$$

$$(3.) \quad rg(\{1, 2, 4\}) = 2 \Rightarrow rg(\{1, 2, 3, 4\}) = 2$$



Matroïde géométrique

- Treillis de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de \subset
- Représenté par un DAG $G = (S, A)$
- Sommets étiquetés par leur rang (éventuellement inconnu)
- Permet de propager les axiomes de la fonction rang
- Matroïde compatible

Matroïde géométrique

- Treillis de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de \subset
- Représenté par un DAG $G = (S, A)$
- Sommets étiquetés par leur rang (éventuellement inconnu)
- Permet de propager les axiomes de la fonction rang
- Matroïde compatible
- Sommets d'un matroïde compatible \leftrightarrow ensemble de contraintes

Compléter un matroïde :

À partir d'un ensemble de contraintes C :

- contraintes \rightarrow rangs

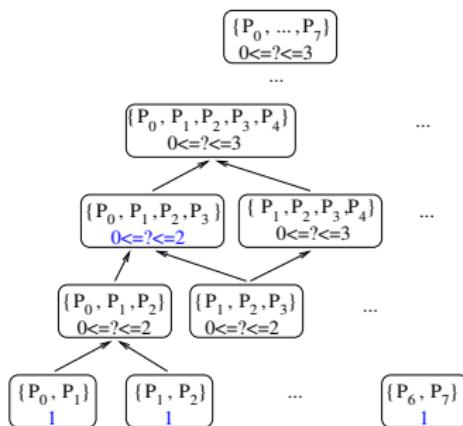
Exemple : $E = \{P_0, \dots, P_7\}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{distance}(P_0, P_1) = h_0 \\ \dots \\ \text{distance}(P_6, P_7) = h_{11} \\ \text{coplanaires}(P_0, P_1, P_2, P_3) \\ \text{coplanaires}(P_1, P_2, P_4, P_7) \\ \text{coplanaires}(P_2, P_3, P_5, P_4) \\ \text{coplanaires}(P_3, P_0, P_6, P_5) \\ \text{coplanaires}(P_0, P_1, P_7, P_6) \\ \text{coplanaires}(P_4, P_5, P_6, P_7) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} rg(P_0, P_1) = 1 \\ \dots \\ rg(P_6, P_7) = 1 \\ 0 \leq rg(P_0, P_1, P_2, P_3) \leq 2 \\ 0 \leq rg(P_1, P_2, P_4, P_7) \leq 2 \\ 0 \leq rg(P_2, P_3, P_5, P_4) \leq 2 \\ 0 \leq rg(P_3, P_0, P_6, P_5) \leq 2 \\ 0 \leq rg(P_0, P_1, P_7, P_6) \leq 2 \\ 0 \leq rg(P_4, P_5, P_6, P_7) \leq 2 \end{array} \right.$$

Compléter un matroïde :

À partir d'un ensemble de contraintes C :

- contraintes \rightarrow rangs \rightarrow matroïde

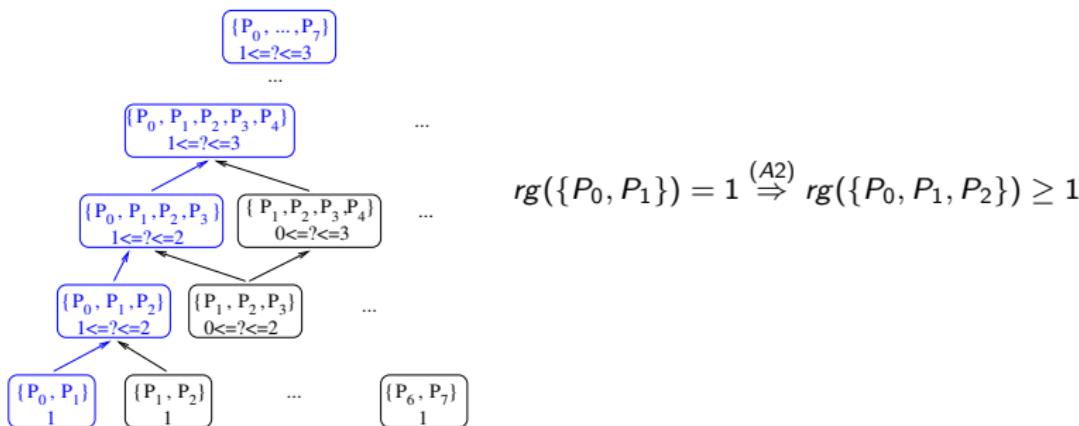


$$\left\{ \begin{array}{l} rg(P_0, P_1) = 1 \\ \dots \\ rg(P_6, P_7) = 1 \\ 0 \leq rg(P_0, P_1, P_2, P_3) \leq 2 \\ 0 \leq rg(P_1, P_2, P_4, P_7) \leq 2 \\ 0 \leq rg(P_2, P_3, P_5, P_4) \leq 2 \\ 0 \leq rg(P_3, P_0, P_6, P_5) \leq 2 \\ 0 \leq rg(P_0, P_1, P_7, P_6) \leq 2 \\ 0 \leq rg(P_4, P_5, P_6, P_7) \leq 2 \end{array} \right.$$

Compléter un matroïde :

À partir d'un ensemble de contraintes C :

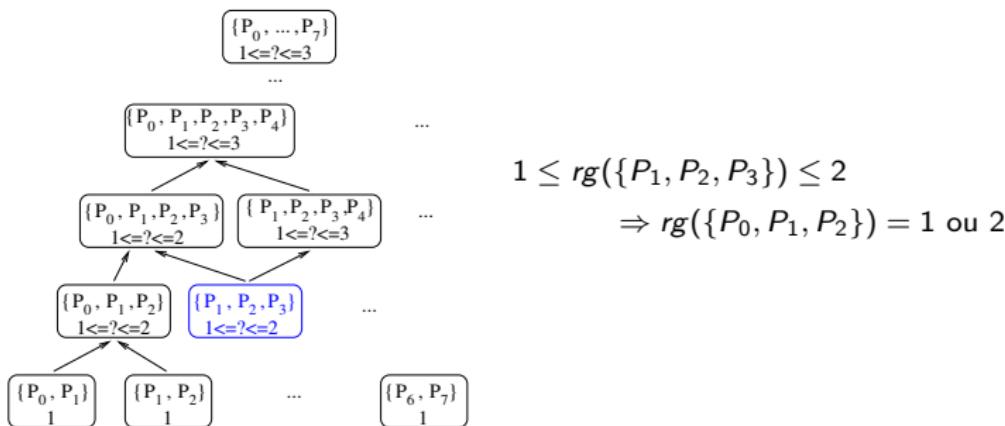
- contraintes \rightarrow rangs \rightarrow matroïde
- propager les axiomes de la fonction rang
 - en créant un arbre de matroïdes (si plusieurs choix possibles)
 - tant que les axiomes sont satisfaits
 - jusqu'à ce que tous les rangs soient déterminés



Compléter un matroïde :

À partir d'un ensemble de contraintes C :

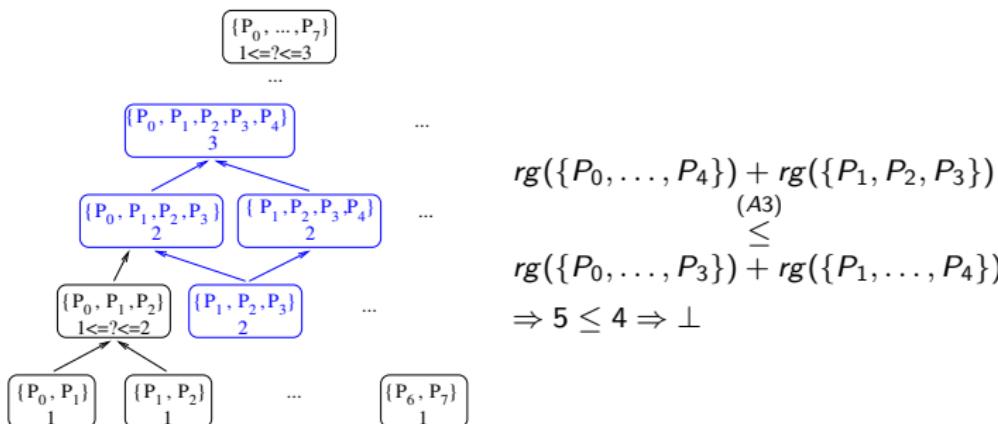
- contraintes \rightarrow rangs \rightarrow matroïde
- propager les axiomes de la fonction rang
 - en créant un arbre de matroïdes (si plusieurs choix possibles)
 - tant que les axiomes sont satisfaits
 - jusqu'à ce que tous les rangs soient déterminés



Compléter un matroïde :

À partir d'un ensemble de contraintes C :

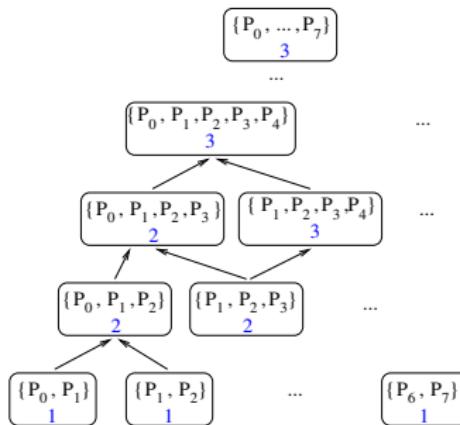
- contraintes \rightarrow rangs \rightarrow matroïde
- propager les axiomes de la fonction rang
 - en créant un arbre de matroïdes (si plusieurs choix possibles)
 - tant que les axiomes sont satisfaits
 - jusqu'à ce que tous les rangs soient déterminés



Compléter un matroïde :

À partir d'un ensemble de contraintes C :

- contraintes \rightarrow rangs \rightarrow matroïde
- propager les axiomes de la fonction rang
 - en créant un arbre de matroïdes (si plusieurs choix possibles)
 - tant que les axiomes sont satisfaits
 - jusqu'à ce que tous les rangs soient déterminés

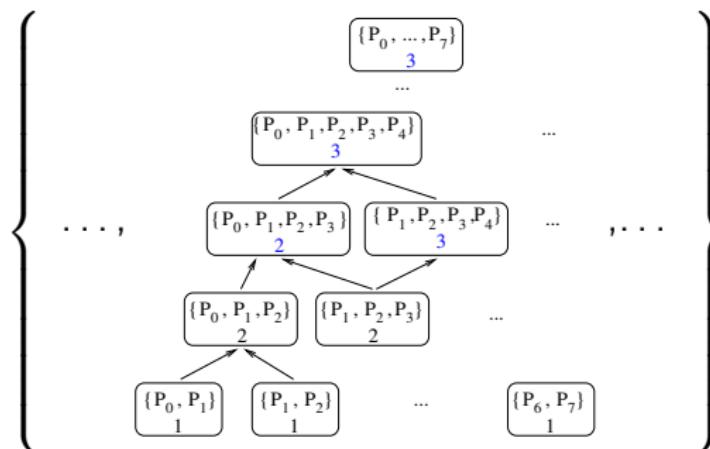


Compléter un matroïde :

À partir d'un ensemble de contraintes C :

Résultat : liste \mathcal{M} de matroïdes compatibles

- $m \in \mathcal{M}$ vérifie les contraintes de C
- C' :contraintes de m ; $C' \Rightarrow C$

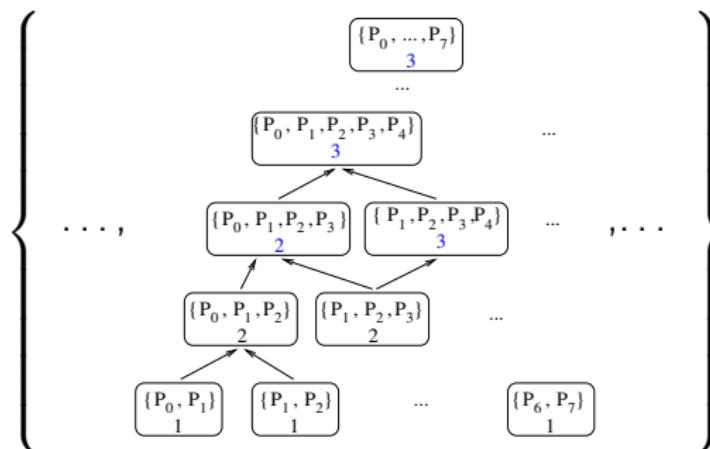


Compléter un matroïde :

À partir d'un ensemble de contraintes C :

Résultat : liste \mathcal{M} de matroïdes compatibles

- $m \in \mathcal{M}$ vérifie les contraintes de C
- C' :contraintes de m ; $C' \Rightarrow C$
- $DoR(C') = 6$

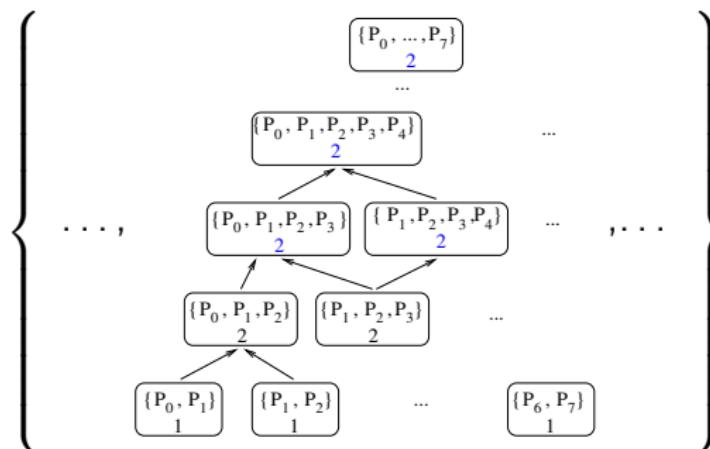


Compléter un matroïde :

À partir d'un ensemble de contraintes C :

Résultat : liste \mathcal{M} de matroïdes compatibles

- $m \in \mathcal{M}$ vérifie les contraintes de C
- C' :contraintes de m ; $C' \Rightarrow C$
- $DoR(C') = 5$



Résultats

Calcul du degré de restriction des sommets du matroïdes ?

- extraction d'un ensemble de *contraintes autonomes*
- contraintes autonomes \supseteq contraintes indépendantes
- calcul du degré de restriction d'un ensemble de contraintes

Résultats :

- logiciel **Bertini** : $\simeq 48h$ pour l'hexaèdre
- détection a priori : 1.4s

Limitations :

- n'est pas à même de détecter tous les théorèmes de géométrie d'incidence
- le coût augmente de manière exponentielle en le nombre de points

Conclusion

Apports :

- Méthode par homotopie spécialisée à la RCG
 - utilisant l'esquisse
 - plusieurs solutions, proches de l'esquisse, sont trouvées
 - gère les sous constrictions dues à des contraintes booléennes
- Guidage par un plan de construction pour :
 - obtenir plus de solutions
 - détecter les solutions à l'infini
- Méthode de décomposition
- Caractérisation de la structure de l'espace des solutions

Perspectives

Homotopie :

- Caractériser de manière plus fine les chemins d'homotopie

Obtention du plan de construction pour :

- la détection des chemins à l'infini
- l'obtention de nouvelles solutions

Une perspective prometteuse :

- Compléter plus efficacement un matroïde
- Calcul du degré de restriction des sommets d'un matroïde



Merci de votre attention

