

TSP

Fie varianta TSP unde toate muchiile au ponderea 1 sau 2.

- a) arătați ca problema ramane NP-hard pentru aceste instanțe (1p)
- b) arătați ca aceste ponderi satisfac în continuare inegalitatea triunghiului. (0p)
- c) Algoritmul descris în curs (c3, slides 18-19) oferă o aproximare de ordin 2 pentru forma generală a TSP (cu regula triunghiului). Verificați dacă în această instanță a problemei, algoritmul din curs este $3/2$ aproximativ! (1p)

Rezolvare:

- a) Presupunem prin absurd că problema nu rămâne în NP-Hard.

Fie graful inițial $G(N, M)$ și graful $G'(N, M')$ un graf complet cu următoarea configurație: muchiile au cost 1 dacă se află în G și costul 2 dacă nu se află în graful G .

Costul rezultat din TSP va fi $cost \geq N$, cu cazul $cost = N$ îndeplinit când graful inițial G este un graf hamiltonian (conține un ciclu hamiltonian).

Algoritmul se reduce la un algoritm de deducere al unui ciclu hamiltonian, care este un algoritm de tip NP-Hard.

Ajungem la o contradicție, prin urmare problema rămâne NP-hard.

- b) Avem 4 seturi de muchii posibile $\{1,1,1\}$, $\{1,1,2\}$, $\{1,2,2\}$ și $\{2,2,2\}$.

- i) $1 + 1 \geq 1$

- ii) $1 + 1 \geq 2$

- iii) $1 + 2 \geq 2$

- iv) $2 + 2 \geq 2$

Deci ponderile satisfac inegalitatea triunghiului.

c)

Fie un graf $H(N, M)$ complet cu toate muchiile de cost 1. Pe acest graf, din algoritmul TSP va rezulta că $cost = N$.

Fie $H'(N, M')$ un graf ce reprezintă un arbore APM al grafului H . Întrucât fiecare muchie va fi parcursă de 2 ori, $cost = 2 * (N - 1)$

Pentru ca algoritmul să fie $3/2$ aproximativ, atunci $2 * (N - 1) \leq \frac{3}{2}N$, fals pentru $N \geq 5$.

Deci, algoritmul nu poate fi $3/2$ aproximativ.