1 Первый тур

Задача 1. Докажите, что среди любых 19 различных чисел из множества $1, 4, 7, \ldots, 100$ можно выбрать два с суммой, равной 104.

Решение. Поделим числа на пары $(4, 100)$, $(7, 97), \ldots$, $(49, 55)$ так, что сумма чисел в каждой паре равна 104. При этом числа 52 и 1 не входят ни в одну пару. Всего чисел на доске 34, а значит пар - 16. Если предположить обратное, то в каждую пару входит не более одного из выбранных 19 чисел, а значит всего можно выбрать ≤ 18 чисел (по одному из пары, а также 52 и 1).

Задача 2. Вычислите:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{2019 \cdot 2020 \cdot 2021 \cdot 2022}.$$

Решение. Заметим, что $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)})$, тогда, используя эту формулу, наша сумма свернется в $\frac{1}{3}(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2020 \cdot 2021 \cdot 2022})$. Можно преобразовать и дальше, но в этом нет необходимости

Задача 3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $\angle ABC = 2\angle ACB$. Точки X и Y на сторонах AB и BC, соответственно, таковы, что $CY = BX$. Докажите, что прямая XY касается описанной окружности треугольника LCY.

Решение. Очевидно, $\angle ABL = \angle LBC = \angle ACB$ и $BL = LC$. Следовательно, треугольники LBX и LCY равны по двум сторонам и углу. Тогда $\angle BXL = \angle LYC = 180° - \angle LYB$, т. е. четырехугольник $BXLY$ вписанный. Следовательно, $\angle XYL = \angle XBL = \angle YCL$. Тогда прямая YX образует с хордой LY угол, равный вписанному углу, опирающемуся на эту хорду. Значит, XY касается окружности LCY.

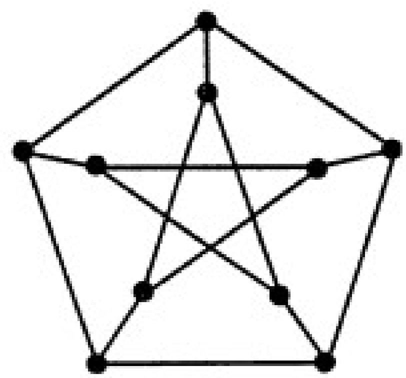
Задача 4. Найдите все пары (n, m) натуральных чисел, что $3 \cdot 2^n + 1 = m^2$.

Решение. Так как $n \geq 1$ и $2 | 3 * 2^n = (m-1)(m+1)$, то $(m-1, m+1) = 2$. Значит в $m-1$ или $m+1$ двойка входит в простое разложение в степени ≤ 1, но тогда это число будет ≤ 6, так как максимум в него входит еще тройка в первой степени, а это значит, что $m - 1 \leq 6$, поэтому случай $n > 4$ невозможен. Если проверить n от 1 до 4, то ответы выходят только в случаях $n = 3$ и $n = 4$, и $m = 5$ и $m = 7$, соответственно

Задача 5. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более, чем с тремя другими городами и из любого города в любой другой город можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

Решение. Оценка. Из фиксированного города А можно попасть напрямую не более чем в три города, а с одной пересадкой – еще не более чем в $3 \cdot 2 = 6$ городов. Таким образом, всего городов может быть не более десяти.

Пример сети из 10 городов см. на рисунке.



Задача 6. У Глеба на калькуляторе есть лишь три кнопки. Они запрограммированы на вычисление трех функций:

$$\frac{x+2}{2x+3},\ \frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+\frac{1}{6},\ sin\ 5x$$

первая кнопка не работает). Никаких других действий этот калькулятор делать не умеет. Изначально на экране горит число $\frac{1}{2}$. Может ли Глеб получить на экране число, большее миллиона?

Решение. Пусть на экране горит число из промежутка $[-1;1]$. Если применить первую функцию, то

$$\frac{x+2}{2x+3} = \frac{3x+5}{2x+3} - 1 \geq -1,$$

а также
$$\frac{x+2}{2x+3} = 1 + \frac{-(x+1)}{2x+3} \leq 1$$
, значит число останется в этом промежутке.

Рассмотрим теперь вторую функцию,
$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(x+1)(3x-5) + 1 \leq 1$$
а также
$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(2x^2 + (x-1)^2) \geq 0 > -1$$
что также говорит о том, что функция не уходит с этого промежутка. Ну и очевидно значение синуса всегда лежит в этом промежутке. А значит, так как вначале Глеб начал с $\frac{1}{2}$, которое лежит внутри промежутка, то значение всегда будет в нем и он не поулчит число большее миллиона.

2 Второй тур

Задача 1. Докажите, что $2016 \cdot 2018 \cdot 2020 \cdot 2022 + 16$ – квадрат целого числа.

Решение. Заменим $2016 = t$, тогда

$$2016 \cdot 2018 \cdot 2020 \cdot 2022 + 16 = t(t+2)(t+4)(t+6) + 16 =$$

$$= (t^2 + 6t)(t^2 + 6t + 8) + 16 = (t^2 + 6t + 4)^2$$

Задача 2. Все натуральные числа удалось раскрасить в k цветов так, что разность любых двух чисел одного цвета не равна 2, 3 или 5. Найдите наименьшее возможное значение числа k.

Решение. Трех цветов не хватает: Допустим покрасили в 3 цвета (скажем, белый - б, черный - ч и красный - к). Пусть 1 - б, 3 - ч (они не могут быть одного цвета так как 3 - 1 = 2). 6 - к (6 и 3 разные, 6 и 1 разные). 4 - ч (4 и 1, 4 и 6 - разные). 8 - б (8 и 6, 8 и 3 - разные). 5 - к (5 и 8, 5 и 3 - разные). 7 - б (7 и 5, 7 и 3 - разные). Наконец, при покрашивании числа 2 противоречие, так как 2 и 4 (ч), 2 и 5 (к), 2 и 7 (б) разных цветов, но четвертого цвета нет.

Четырех цветов достаточно: покрасив нечетные числа чередуясь в белый, красный, синий, черный, белый и т.д. и покрасив четные числа так же (то есть числа будут покрашены так: б-б-к-к-с-с-ч-ч-б-б-...), разность между любыми двумя числами одного цвета либо равна 1, либо хотя бы 7.

Задача 3. На доске написано несколько целых чисел. Руслан своим ходом или увеличивает все числа на 1, или увеличивает все числа на 2, а Амир своим ходом стирает все числа, делящиеся на 11, или все числа, делящиеся на 17. Докажите, что Амир за несколько ходов сможет стереть все числа.

Решение. По китайской теореме об остатках, существует бесконечно много целых x таких, что x делится на 17 и $x - 1$ делится на 11 (Например, $x = 34 + 17 \cdot 11k,\ k \in N$). Поэтому, для каждого написанного числа n можем отметить два подряд идущих числа больше n, одно из которых делится на 17, а другое на 11 и когда Руслан дойдет до них, то не сможет перескочить, так как не может увеличить число на хотя бы 3 и мы сотрем это число и так можем сделать с каждым записанным числом

Задача 4. Пусть a, b - различные натуральные числа, такие что $ab(a+b)$ делится на $a^2 - ab + b^2$. Доказать, что $|a - b| > \sqrt[3]{\frac{ab}{3}}$.

Решение. Пусть $(a,b)=d$ - НОД чисел a и b. Представим тогда $a=dm$ и $b=dn$, где $(m,n)=1$, тогда, из делимости, $d^2(m^2-mn+n^2)|d^3mn(m+n) \Leftrightarrow m^2-mn+n^2|dmn(m+n)$.

Рассмотрим $d'=(m^2-mn+n^2, mn(m+n))$. Если $p|d'$ и $p|m$ для какого то простого числа p, то $p|m^2-mn+n^2 \Rightarrow p|n$, но $(m,n)=1$, значит d' взаимнопрост с m и, аналогично, взимнопрост с n. Тогда $d'|mn(m+n) \Rightarrow d'|(m+n)$, тогда $d'|(m+n)^2-m^2+mn-n^2 \Rightarrow d'|3mn$, откуда получаем, что $d'|3$, а значит $d' \le 3$. Теперь, из начальной делимости получаем, что $\frac{m^2-mn+n^2}{d'}|d \Rightarrow |a-b|=d|m-n| \ge d \ge \frac{m^2-mn+n^2}{d'} \ge \frac{m^2-mn+n^2}{3} \ge \frac{mn}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{ab}{3}}$ (последнее, после преобразований станет просто $d \ge \frac{mn}{3}$). При этом цепочка неравенств обращается в равенство только когда $m=n$, но числа различны, откуда неравенство обязано быть строгим.

Задача 5. Набор разновесов содержит по одной гире каждого из весов 1, 3, 5, 7, 9, . . . граммов. Для натурального $n>1$ докажите, что количество способов набрать этими гирями n граммов не больше, чем количество способов набрать $n+1$ грамм.

Решение. Пусть имеется a_n способов набрать n граммов без использования гири в 1 г и b_n способов набрать n граммов с использованием гири в 1 г.

Добавив к каждому из способов первой группы гирю в 1 г, мы получим суммарный вес n + 1 граммов. Значит, $b_{n+1} \ge a_n$. С другой стороны, если для каждого способа набрать n граммов с использованием гири в 1 г мы уберем эту гирю и заменим самую большую использованную гирю в этом способе на ту, которая весит на 2 г больше, снова получится суммарный вес $n+1$ граммов. Следовательно, $a_{n+1} \ge b_n$. Сложив эти два неравенства, получим требуемое.

Задача 6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) на биссектрисе CL как на диаметре построена окружность ω. Она пересекает отрезок BC в точке E. Отрезок AE пересекает ω в точке F. Докажите, что $FB=BC$.

Решение. Пусть H - основание высоты из C на AB. Рассмотрим новую точку F' такую, что $\angle CF'A = 135^\circ$ и $F'B=BC$ (Например, можно рассмотреть окружность, проходящую через A и C такую, что угол, оприающийся на дугу AC в ней, равен 135° и окружность с центром в точке B и радиусом BC, и потом рассмотреть их точку пересечения, отличную от C). Стоит отметить, что такая точка единственна. Для такой точки, $\angle F'CL = \angle F'CB - 45^\circ = \angle CF'B - 45^\circ = 180^\circ - \angle AF'B$. А также $BF'^2 = BC^2 = BH \cdot BA$, откуда $\Delta BF'D \sim \Delta BAF'$, по второму признаку, отсюда следует, что $\angle F'CL = 180° - \angle AF'B = \angle AHF'$, значит $F'CLH$ - вписанный, откуда $F'CLHE$ - тоже вписанный, $\angle LCE = 45°$, $\angle CEL = 90° \Rightarrow \angle CF'E = \angle CLE = 45° = 180° - \angle AF'C \Rightarrow F'$ лежит на AE, но тогда F' лежит на ω и на отрезке AE, стало быть это и есть наша точка F из условия, но если для нашей F' было выполнено, что $F'B = BC$, то и для точки F, $FB = BC$, что и требовалось

3 Третий тур

Задача 1. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту CH и медиану AM. Угол ABM в два раза больше угла BAM, $BC = 6$. Найдите длину AH.

Решение. $\angle HMA = \angle BHM - \angle HAM = \angle ABM - \angle BAM \Rightarrow AH = HM = \frac{BC}{2} = 3$

Задача 2. Числа x и y удовлетворяют условиям $20x^3 - 15x = 3$ и $x^2 + y^2 = 1$. Найдите $|20y^3 - 15y|$.

Решение. $(20y^3 - 15y)^2 = 400y^6 - 600y^4 + 225y^2 = 400 - 1200x^2 + 1200x^4 - 400x^6 - 600 + 1200x^2 - 600x^4 + 225 - 225x^2 = 25 - 400x^6 + 600x^4 - 225x^2 = 25 - (20x^3 - 15x)^2 = 16 \Rightarrow |20y^3 - 15y| = 4$

Задача 3. Найдите все возможные значения простого числа p, для которых $6^{p-2} - 7$ делится на p.

Решение. $p = 2$ - решение и $p = 3$ - не решение. Теперь, для $p \geq 5$ мы имеем, что $0 \equiv 6^{p-2} - 7 \equiv \frac{1}{6} - 7 \equiv -\frac{41}{6}\ (modp) \Rightarrow p = 41$, что подходит

Задача 4. На плоскости дано 400 точек. Доказать, что множество различных попарных расстояний между ними содержит не менее 15 чисел

Решение. Пусть множество попарных расстояний содержит только ≤ 14 чисел. Рассмотрим какие то две данные точки A и B, все остальные точки могут лежать только на окружностях с центрами A и B и радиусами из данных попарных расстояний. Заметим, что любая пара окружностей пересекается по не более чем двум точкам, а значит всего может быть отмечено $\leq 2 \cdot 14 \cdot 14 + 2 = 394$, но точек 400, откуда противоречие

Задача 5. Точки P и Q лежат в выпуклом четырехугольнике $ABCD$, в котором две наибольшие стороны противоположны и равны. Для каждой из этих двух точек посчитали сумму расстояний до вершин четырехугольника. Докажите, что эти суммы отличаются не больше чем в 2 раза.

Решение. Нам понадобится следующее интуитивно очевидное утверждение.

Пусть в треугольнике RST отмечена точка $M \neq R$. Тогда $MS + MT < RS + RT$.

Доказательство. Продолжим отрезок SM до пересечения со стороной RT в точке N. Тогда по неравенствам треугольника $MS + MT < MS + MN + NT = SN + NT < SR + RN + NT = RS + RT$.

Пусть E – точка пересечения диагоналей четырехугольника. Диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника. Точка P лежит в одном из этих треугольников, для определенности в треугольнике AED. Тогда по лемме $AP + PC < AD + DC$, $BP + PD < AB + AD$. Таким образом, мы получаем неравенство для суммы расстояний от точки P до вершин четырехугольника: $PA+PB+PC+PD < AB+CD+2AD < 4a$, где a – длина наибольшей стороны четырехугольника.

С другой стороны, пусть наибольшие и равные друг другу стороны – это AB и CD. Тогда $QA+QB > AB$, $QC+QD > CD$, тогда $2(QA+QB+QC+QD) >$

$2(AB + CD) = 4a$.

Сравнивая это неравенство с предыдущим, получаем, что $PA + PB + PC + PD < 2(QA + QB + QC + QD)$, что и требовалось.

Задача 6. Назовем пирамидой длины n фигуру, которая получится, если из квадрата n x n вырезать все клетки ниже главной диагонали из левого верхнего до правого нижнего углов. Пирамиду по линиям сетки разбивают на прямоугольники, каждые две из которых разной площади.

a) Докажите, что количество прямоугольников равно n.

b) Найдите количество разбиений пирамиды длины n на несколько прямоугольников разной площади.

Решение. Отметим в каждом столбце лестницы по одной верхней клетке; назовём их объединение верхним слоем. Никакие две из n клеток этого слоя не могут лежать в одном прямоугольнике разбиения, поэтому в любом разбиении лестницы не менее n прямоугольников. С другой стороны, минимальная суммарная площадь n прямоугольников с различными площадями равна $1 + 2 + \cdots + n$, что совпадает с площадью всей лестницы. Значит, число прямоугольников в любом разбиении равно n, их площади выражаются числами $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и каждый из них содержит клетку верхнего слоя.

Покажем индукцией по n, что число требуемых разбиений лестницы высоты n равно 2^{n-1}. База ($n = 1$) очевидна.

Шаг индукции. Рассмотрим разрезание лестницы высоты n на прямоугольники площади $1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Прямоугольник, покрывающий угловую (наиболее далекую от верхнего слоя) клетку лестницы, содержит клетку верхнего слоя, то есть сумма длин его сторон a и b равна $n + 1$. Поэтому его площадь $ab > a+b-1 = n$ (так как $ab-(a+b-1) = (a-1)(b-1) > 0$); при этом равенство может достигаться лишь при $a = 1$ или $b = 1$. Значит, одна из сторон нашего прямоугольника равна 1, а другая – n. Такой прямоугольник можно выбрать двумя способами (вертикальный или горизонтальный), причем в обоих случаях после его отрезания остается лестница высоты $n-1$, количество способов разрезать которую на оставшиеся прямоугольники равно 2^{n-2}. Значит, искомое количество способов равно $2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$.

4 Четвертый тур

Задача 1. Найдите наибольшее такое n, что существуют n различных натуральных чисел, из которых нельзя выбрать три с суммой, равной составному числу.

Решение. Среди этих чисел не могут быть все остатки mod 3, иначе сумма трех различных чисел будет делиться на три, а значит будет составной. Аналогично не может быть трех одинаковых остатков, а значит всего чисел не более 4.

Пример для 4 чисел: $1,\ 3,\ 7,\ 9$

Задача 2. Каждая клетка таблицы n x n закрашена в белый или черный цвет. В углах таблицы стоят 3 белые и 1 черная клетки. Докажите, что существует квадрат 2 x 2 с нечетным количеством белых клеток.

Решение. Предположим, что в таблице нет такого квадрата. Рассмотрим любую строку таблицы. Допустим, что под какой то клеткой этой строки стоит клетка противоположного цвета, тогда во всех клетках будет стоять противоположный цвет. В противоположном же случае, во всех клетках стоит тот же цвет, что и сверху. То есть строки либо меняются полностью, либо остаются такими же. Так как в углах стоят 3 белых клетки и одна черная, то в какой то "крайней"строке будут две белые угловые клетки, но тогда в противоположной "крайней"строке должно быть либо две черные угловые, либо также две белые, но там будет одна черная и одна белая, откуда противоречие

Задача 3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что существует два набора из n подряд идущих натуральных чисел и $n+1000$ подряд идущих натуральных чисел, что произведения чисел в этих наборах равны.

Решение. Рассмотрим $n = k(k+1)\dots(k+1000)-(k+1000)$ и наборы чисел от k до $k+n+999$, и от $k+1001$ до $k+n+1000$. Можно легко проверить, что равенство их произведений равносильно тому равенство, которое мы записали изначально, а также можно проверить, что таких n бесконечно много.

Задача 4. Мирон и Ярослав играют в игру. Мирон загадал число из трех цифр от 1 до 8. Ярослав может попробовать угадать его, назвав число, также состоящее из трех цифр от 1 до 8. Если число, названное Ярославом, и число, загаданное Мироном совпадает в хотя бы двух разрядах, то Ярослав побеждает. Всегда ли сможет Ярослав победить, если Мирон даст Ярославу только 32 попытки?

Решение. Пусть Ярослав сначала назовет следующие 16 чисел: 222, 424, 626, 828

244, 446, 648, 842

266, 468, 662, 864

288, 482, 684, 886

Дело в том, что эти числа дают всевозможные четные пары на каждых двух местах (то есть, если у Мирона число, в котором какие то две цифры четные, то Ярослав уже победил). Теперь нам нужно сделать тоже самое, только с нечетными числами. Для этого в прошлой расстановки каждую цифру уменьшим на 1 и получим требуемое

Задача 5. Даны треугольник ABC, в котором сторона AB больше стороны AC, и описанная около него окружность. Постройте циркулем и линейкой середину дуги BC (не содержащей вершину A), проведя не более двух линий.

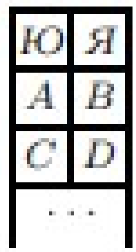
Решение. Построим окружность с центром A и радиусом AC. Пусть она пересекает сторону AB в точке M, а описанную окружность – в точке N. Построим прямую MN. Точка пересечения этой прямой с описанной окружностью треугольника W' – искомая, потому что пусть W – середина дуги BC, не содержащей вершину A, тогда $WC = WB$. Тогда треугольники ACW и AMW равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $WM = WC = WB$, то есть треугольник BWM – равнобедренный, но треугольник BMW' также равнобедренный, потому что $\angle BMW = \angle NMA = \angle MNA = \angle WBA$, но серединный перпендикуляр к BM не может пересекать окружность в двух точках, поэтому $W' = W$, что и требовалось.

Задача 6. В таблице 8×10 отмечены клетки, лежащие в двух левых столбцах, а также клетки, лежащие в двух нижних строках (всего 32 клетки). Дастан хочет обойти все эти клетки по разу ходом шахматного короля, начав и закончив движение в левом нижнем углу. Сколькими способами Дастан может осуществить задуманное?

Решение. Алёшина фигура имеет вид крюка толщиной две клетки, вырезанного из прямоугольника 8×10, для краткости будем говорить, что мы имеем дело с крюком 8×10. Ключевое соображение: если увеличить на 1 высоту или ширину такого крюка, то число искомых маршрутов увеличится в два раза.

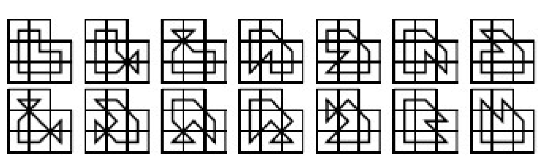
Докажем это. Пусть S – количество маршрутов короля для крюка 7×10. Проверим, что для крюка 8×10 количество маршрутов равно $2S$. Пусть

A, B, C, D – верхние клетки крюка 7×10, Ю и Я – две верхние клетки крюка 8×10.



Сначала сделаем наблюдение: любой маршрут короля, обходящий все клетки крюка 8×10, должен содержать отрезок Ю–Я. Действительно, если король сначала пришел на клетку Ю, но не прошел по отрезку Ю–Я, то он двигался по пути А–Ю–В или В–Ю–А и, таким образом, он посетил уже клетки А и В. Но король должен когда-то посетить и клетку Я. Тогда, уходя с нее, он повторно посетит клетку А или В, что невозможно. Итак, маршрут короля, обходящий все клетки крюка 8×10, содержит отрезок Ю–Я. И тогда очевидно, что любой такой маршрут не содержит отрезок А–В. С другой стороны, каждый маршрут короля, обходящий все клетки крюка 7×10, содержит отрезок А–В. Тогда ясно, что каждый маршрут в крюке 8×10 получается из маршрута в крюке 7×10 несложной перестройкой: нужно заменить фрагмент А–В на А–Ю–Я–В или А–Я–Ю–В. Таким образом, число маршрутов в крюке 8×10 в 2 раза больше, чем в крюке 7×10.

Рассуждая аналогично, мы получим, что число маршрутов в крюке 8×10 в 2^2 раз больше, чем в крюке 7×9, в 2^3 раз больше, чем в крюке 6×9 и т. д., наконец, в 2^{12} раз больше, чем в крюке 3×3. А маршруты в крюке 3×3 нетрудно подсчитать перебором – их всего 14.



Но следует иметь в виду, что последние 4 варианта в нижнем ряду не удовлетворяют наблюдению, сделанному выше. Например, самый последний маршрут не может быть перестроен в маршрут для крюка 4×3. Остальные 10 маршрутов годятся, значит, для крюка 8×10 имеется $10\cdot2^{12}$ маршрутов.

5 Финал 1

Задача 1. Найдите последнюю цифру числа $1^{2020} + 2^{2020} + 3^{2020} + \cdots + 2022^{2020}$

Решение. Посчитаем сначала последнюю цифру суммы $1^{2020} + 2^{2020} + \cdots + 10^{2020}$. Если a не делится на 5 и 2, то $a^4 \equiv 1 \ (mod\ 10)$ (например, из теоремы Эйлера). Если оно делится и на 2 и на 5, то последняя цифра равна 0. Если только на 2, то равна 6. Если на 5, то равна 5. При возведении в степень, все эти остатки не меняются, а также 2020 делится на 4. Из всего сказанного легко следует, что сумма равна $6 \cdot 4 + 1 \cdot 4 + 0 + 5 = 3 \ (mod\ 10)$, тогда общая сумма будет $202 \cdot 3 + 1 + 6 = 3 \ (mod\ 10)$, то есть последняя цифра равна 3

Задача 2. У Фетуллаха есть набор из 36 камней массами 1 г, 2 г, ..., 36 г, а у Юры есть суперклей, одной каплей которого можно склеить два камня в один (соответственно, можно склеить три камня двумя каплями и так далее). Юра хочет склеить камни так, чтобы Фетуллах не смог из получившегося набора выбрать один или несколько камней общей массой 37 г. Какого наименьшего количества капель клея ему хватит, чтобы осуществить

Решение. Пример. Склеив попарно камни с массами 1 и 18, 2 и 17, ..., 9 и 10, Юра получит набор, в котором каждый камень весит от 19 до 36 г, поэтому одного камня Фетуллаху будет мало, а двух – уже много.

Оценка. Если Юра использует только 8 капель, то в склейках будут участвовать не больше 16 исходных камней. Поэтому хотя бы одна из 18 пар

$$\{1, 36\}, \{2, 35\}, \ldots, \{18, 19\}$$

окажется нетронутой, и Фетуллах сможет выбрать её.

Задача 3. Даны параллелограмм $ABCD$ и такая точка K, что $AK = BD$. Точка M – середина CK. Докажите, что $\angle BMD = 90°$.

Решение. Пусть O – центр параллелограмма. Тогда OM – средняя линия треугольника CAK ($OM = \frac{1}{2}AK$ и в случае, когда K лежит на прямой CA). Поэтому в треугольнике BMD медиана MO равна половине противоположной стороны $BD = AK$. Значит, угол BMD прямой.

Задача 4. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) таких, что $a^{2b} - b^a = (\frac{(a^2(a-b)^2)}{4})^b$.

Решение. Лемма: Если a, b, x, y - натуральные числа такие, что $(a, b) = (x, y) = 1$ (НОДы этих чисел равны 1) и $ax = by$, то $a = y$ и $b = x$.

Доказательство: $y|ax \Rightarrow y|a$ и $a|by \Rightarrow a|y$, значит $a = y, b = x$.

$a^{2b} > a^{2b} - b^a = (\frac{(a^2(a-b)^2)}{4})^b$. Сократив на a^{2b}, получаем $\frac{(a-b)^2}{4} < 1 \Rightarrow a - b = 1, 0$ или -1

Случай 1. $a - b = 1 \Rightarrow a^{2b} - b^a = \frac{a^2b}{4^b} \Rightarrow 4^b b^{b+1} = (b+1)^{2b}(4^b - 1)$. 4^b и $4^b - 1$ взаимно простые, b^{b+1} и $(b+1)^{2b}$ взаимно простые. Значит по лемме, $(b+1)^{2b} = 4^b, (b+1)^2 = 4 \Rightarrow b = 1$. Но $b = 1$ не подходит.

Случай 2. $a - b = 0 \Rightarrow a^{2a} - a^a = a^a(a^a - 1) = 0$. $a = b = 1$ - единственное решение.

Случай 3. $a - b = -1 \Rightarrow a^2b - b^a = \frac{a^{2b}}{4^b}$. $4^b b^{b-1} = (b-1)^{2b}(4^b - 1)$ Аналогично случаю 1, по лемме, $(b-1)^{2b} = 4^b \Rightarrow (b-1)^2 = 4 \Rightarrow b = 3$, но $b = 3$ не подходит. Значит (1,1) - единственное решение

Задача 5. Внутри треугольника ABC отмечена точка T , из которой все стороны видны под углом $120°$. Докажите, что $2AB + 2BC + 2CA > 4AT + 3BT + 2CT$

Решение. Положим для краткости $BC = a, CA = b, AB = c, AT = x, BT = y$ и $CT = z$.

По теореме косинусов $a^2 = y^2 + z^2 + yz > (y + \frac{z}{2})^2$, следовательно $a \geq y + \frac{z}{2}$. Аналогично можно показать неравенства $b > x + \frac{z}{2}$ и $c > x + \frac{y}{2}$. Если сложить их и умножить на два, то выйдет то, что нужно доказать

Задача 6. Действительные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

a) Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $xy+yz-zx$.

b) Докажите, что не существует рациональных чисел x, y, z таких, что равенство в предыдущем пункте достигается.

Решение. Имеем, что $-1 = -(x^2 + y^2 + z^2) \leq xy + yz - xz \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{2} = \frac{1}{2}$, так как левая часть переписывается в виде $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$, а правая в виде $(x + z - y)^2 \geq 0$. В первом случае, единственный случай равенства $x = z = -y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ - числа не являются рациональными, во втором, например, $x = 0, y = z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Чтобы доказать невозможность равенства на рациональных, заметим, что $y = x + z$. Перепишем, как $x^2 + z^2 + (x+z)^2 = 1$. Пусть теперь $x = \frac{p}{r}$, тогда $z = \frac{q}{r}$ $p^2 + q^2 + (p+q)^2 = r^2$, по модулю четыре, хотя бы два числа из $p, q, p + q$ должны делится на два, но тогда делится и третье, тогда делится и r, но тогда мы получим меньшее решение уравнения выше и проделаем с ним тоже самое. А значит у него не было решений изначально

Задача 7. На доске написаны числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$, где m и n - различные взаимнопростые числа. За ход разрешается написать на доску число $\frac{x+y}{2}$ или $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}$, если до этого на доске были числа x и y. Может ли на доске появиться число 1, если

a) $m + n = 2048$

b) $m + n = 2022$

Решение. *a*)Используя только первую операцию, на доску можно записать любое число вида

$$\frac{x\frac{m}{n} + (2^k - x)\frac{n}{m}}{2^k}$$

для натурального k и $x < 2^k$ (В этом несложно убедиться, если начать применять первую операцию и посмотреть на результаты). Возьмем теперь $x = n$ и $k = 10$, тогда значение дроби будет равно 1.

b)Рассмотрим сумму знаменателя и числителя в любой момент. Для первых двух чисел верно, что она делится на 3, но ни числитель не знаменатель при этом не делятся. Пусть мы применили операцию к числам $\frac{x}{y}$ и $\frac{a}{b}$, для которых это свойство выполнено. Тогда при выполнении первой операции получится $\frac{bx+ay}{2by}$, при выполнении второй операции выйдет $\frac{2ax}{ay+bx}$. В первом случае сумма числителя и знаменателя равна $b(x+y)+y(a+b)$, а во втором случае равна $a(x+y)+x(a+b)$. В обоих случаях, сумма делится на 3. Теперь, мы знаем, что b и y не делятся на три, а значит $2by$ тоже не делится. Аналогично с $2ax$. А это значит, что для двух дробей, которые могли получится, выполнено указанное свойство, а значит оно выполнено для всех чисел на доске, но у 1 - сумма числителя и знаменателя равна 2, что не делится на три, откуда противоречие

Задача 8. *a*) На доске написана пара чисел $(1, 1)$. Если для некоторых x и y на доске написана одна из пар $(x, y - 1)$ и $(x + y, y + 1)$, то можно дописать другую. Докажите, что в каждой выписанной паре первое число будет положительным.

b) На доске написана пара чисел $(1, 1)$. Если для некоторых x и y на доске написана одна из пар $(x, y - 1)$ и $(x + y, y + 1)$, или (x, xy) и $(\frac{1}{x}, y)$, то можно дописать другую. Докажите, что в каждой выписанной паре первое число будет положительным.

Решение. Назовем дискриминантом пары чисел (a, b) величину $D(a, b) = b^2 - 4a$. Докажем, что знак дискриминанта всех пар чисел, записанных на доске не меняется. Действительно, дискриминант пары чисел, записанной изначально, равен $D(1,1) = -3 < 0$. Далее, верны следующие соотношения:

$$\frac{D(x, y-1)}{D(x+y, y+1)} = \frac{y^2 - 4x - 2y + 1}{y^2 - 4x - 2y + 1} = 1, \ \frac{D(x, y-1)}{D(x+y, y+1)} = \frac{x^2y^2 - 4x}{y^2 - \frac{4}{x}} = x^2$$

Поэтому на доске ни в какой момент не может появиться пара с неотрицательным дискриминантом. Теперь рассмотрим любую выписанную на доску пару (a, b). В ней первое число a равно $\frac{b^2 - D}{4} > \frac{b^2}{4} > 0$ и, следовательно, больше 0, что и требовалось доказать.

6 Финал 2

Задача 1. В каждой клетке таблицы 3x3 написано действительное число. В каждой строке и в каждом столбце произведение чисел в клетках равно 1, а в каждом квадрате 2x2 оно равно 1/2. Найдите числа, написанные в клетках таблицы.

Решение. Обозначим числа, записанные в клетках так, как показано на рис. По условию $efhi = \frac{1}{2}$, $(beh) \cdot (cfi) = 1$, значит $bc = 2$. Из того что $abc = 1$ следует, что $a = \frac{1}{2}$. Аналогично получаем, что $c = g = i = \frac{1}{2}$. Остальные значения ($b = d = f = h = 4, e = \frac{1}{16}$) легко получаются из того, что произведения в столбцах и строках равны 1.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Задача 2. Крокодилом называется фигура, ход которой заключается в прыжке на клетку, в которую можно попасть сдвигом на одну клетку по вертикали или горизонтали, а затем на N клеток в перпендикулярном направлении (при $N = 2$ крокодил – это шахматный конь).

При каких N крокодил может пройти с каждой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?

Решение. Будем считать, что рассматриваемая бесконечная шахматная доска, как и обычная, раскрашена в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. Тогда при нечётном N крокодил будет ходить только по клеткам одного цвета, и, тем самым не может пройти на любую клетку.

Докажем, что при чётном N крокодил может пройти с каждой клетки на любую. Достаточно доказать, что он может пройти с любой клетки на соседнюю (смежную по стороне). Покажем, например, как пройти из клетки в соседнюю с ней сверху. Первым ходом ходим на одну клетку вправо и N клеток вверх, а вторым – на одну вправо и N вниз. Так мы окажемся на две клетки правее исходной. Повторив эту пару ходов $\frac{N}{2}$ раз, мы окажемся на N клеток правее исходной. Теперь пойдем на одну клетку вверх и N влево.

Задача 3. На доске по очереди записаны n ненулевых чисел, где n нечетное число. За одну операцию Петя может выбрать 3 подряд идущих числа a, b, c (в таком порядке) и заменить их на одно число $\frac{ac}{b}$. Петя совершает такие операции до тех пор, пока не останется одно число. Докажите, что как бы Петя не совершал операции, конечное число всегда одинаковое.

Решение. Пусть изначально написаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Введем значение $S = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \cdots \cdot a_n$. Так как n нечетное, a_n будет умножаться. Пусть Петя совершил операцию над числами a_k, a_{k+1}, a_{k+2}. Если k - нечетное, то новое значение S будет $S = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \cdots \cdot \frac{\frac{a_k a_{k+2}}{a_{k+1}}}{a_{k+3}} \cdot \cdots \cdot a_n$, то есть S не поменяется. Если же k четное, то S станет $S = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{k-1}}{\frac{a_k a_{k+2}}{a_{k+1}}} \cdot \cdots \cdot a_n$, значит тоже не поменяется. Значит значение S будет таким же и для конечного набора чисел на доске, значит последнее число равно S, что не зависит от порядка операций, выполненных Петей.

Задача 4. Две окружности ω_1 и ω_2 касаются внешне в точке T. AC и BD - общие внешние касательные к ω_1 и ω_2, причем A, B лежат на ω_1, а C, D лежат на ω_2. CT пересекает вторично окружность w_1 в точке X, а AT пересекает прямую CD в точке Y. Докажите, что B, X и Y лежат на одной прямой

Решение. $180° - \angle BDC = \angle ABD = 180° - \angle ATB \Rightarrow TYDB$ - вписанный. Тогда $\angle TBY = \angle TDC = \angle ACT = 90° - \angle TAC = \angle TAX = \angle TBX \Rightarrow B,\ X,\ Y$ лежат на одной прямой

Задача 5. В равностороннем треугольнике ABC, в котором $AB = 2$, на сторонах AC и BC выбраны точки X и Y . Когда треугольник согнули по линии XY, вершина C попала на сторону AB. Докажите, что $XY \geq 1$.

Решение. Условие сгинания равносильно тому, что точка симметричная C относительно XY - C' лежит на AB. Проведем через C' прямую параллельную XY, пусть она пересечет стороны AC и BC в точках X' и Y', тогда понятно, что XY - средняя линия в треугольнике $CX'Y'$. $CC' \geq \sqrt{3}$, так как это длина перпендикуляра из C на AB. Возьмем середину дуги описанной окружности треугольника $X'Y'C$, которая содержит точку C - M. Известный факт, что длина перпендикуляра на $X'Y'$ из M наибольшая среди всех треугольников с точками на этой полуокружности (в одной и той же плоскости с M), то есть $\sqrt{3}XY = \frac{\sqrt{3}}{2}X'Y' \geq \sqrt{3} \Rightarrow XY \geq 1$

Задача 6. На окружности отмечено 99 точек, делящих эту окружность на 99 равных дуг. Ерсултан и Ибрахим играют в игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Ерсултан; своим первым ходом он окрашивает в красный или синий цвет любую отмеченную точку. Затем каждый из игроков своим ходом может окрасить в красный или синий цвет любую неокрашенную отмеченную точку, соседнюю с уже окрашенной. Ибрахим выигрывает, если после окрашивания всех точек найдётся равносторонний треугольник, все три вершины которого окрашены, причём в один и тот же цвет. Может ли Ерсултан ему помешать?

Решение. Приведем стратегию, позволяющую Ибрахиму гарантированно выиграть. Первые ходы он делает произвольно, пока перед его очередным ходом не будут окрашены 33 точки. Пусть A – одна из крайних окрашенных точек, а B – неокрашенная точка, соседняя с другой крайней. Тогда существует отмеченная точка C такая, что ABC – равносторонний треугольник. На этом ходе Ибрахим красит точку B в тот же цвет, что и A (без ограничения общности, красный). Далее он действует так. Если Ерсултан красит точку, соседнюю с C, то Ибрахим красит C в красный цвет и выигрывает, получив одноцветный треугольник ABC. Если же Ерсултан красит точку, несоседнюю с C, то и Ибрахим тоже красит несоседнюю с C. Если Ибрахим сможет так действовать, то в результате точку C окрасит именно он и выиграет. Предположим, что он не смог сходить согласно стратегии. Это значит, что Ерсултан окрасил несоседнюю с C точку, а Ибрахим не имеет такой возможности. Это значит, что остались неокрашенными ровно три точки: C и два ее соседа. Но тогда окрашено 96 точек, и ход должен делать Ерсултан. Полученное противоречие завершает решение.

Задача 7. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ является перестановкой чисел от 1 до n. Для любого x от 1 до n выполнено неравенство $|x - a_{a_x}| \leq 1$, причем ровно для k значений x достигается равенство. Докажите, что:

a) k делится на 4.

b) количество перестановок, удовлетворяющих условию делится на $2^{\frac{k}{4}}$.

Решение. Построим граф из n вершин от 1 до n и проведем в нем направленные ребра $x \to a_x$. В этом графе из каждой вершины выходит 1 ребро и входит 1 ребро, причем могут существовать ребра из вершины в самого себя. Из условия $|x - a_{a_x}| \leq 1$ следует, что для каждой вершины y, вершина, из которой выходит ребро, входящее в y и вершина , в которую входит ребро, выходящее из y отличаются не больше, чем на 1.

Известный факт, что такой граф разбивается на циклы, то есть каждая компонента связности - цикл из всех ее вершин. Рассмотрим эти циклы поподробнее. Если цикл длины 1 из вершины (x), то $a_x = x$, и $x - a_{a_x} = 0$. Если цикл длины 2 из вершин (x, y), то $x - a_{a_x} = x - a_y = 0$. Если цикл длины 3 или не меньше 5, то для вершины x в цикле последовательность $x, a_{a_x}, a_{a_{a_{a_x}}}, \ldots$ зациклится в x через не менее 3 членов. Но это значит, что для каких то $x_1, x_2, \ldots, x_m$ выполняется, что $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_m, x_1)$ соседи (разность 1), что невозможно про $m > 2$.

Наконец, рассмотрим цикл длины 4 из вершин (x, y, x', y'). $x' = a_{a_x}$, $y' = a_{a_y}$ значит $|x' - x| = |y' - y| = 1$. Поэтому все x, для которых выполняется равенство входят в один из таких чиклов длины 4, то есть $k = 4m$, где

m - количество таких циклов. Также для каждого цикла можно поменять направления каждого ребра и получить тоже правильный цикл. Поэтому в каждом графе можно поменять так направления в циклах длины 4 $2^{\frac{k}{4}}$ способами, и количество перестановок $a_1, \ldots, a_n$ делится на $2^{\frac{k}{4}}$.

Задача 8. Докажите неравенство $3+\sqrt[3]{\frac{a^3+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+1}{2}} \leq 2(a+b+c)$ для всех положительных действительных a, b, c таких, что $a+b+c = ab+bc+ca$

Решение. $a^2-a+1 = a^2+ab+bc+ca+1-2a-b-c = (a+b)(a+c)+1-2a-b-c = (a+b)(a+c)+1-((a+b)+(a+c)) = (a+b-1)(a+c-1) \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a^3+1}{2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a^2-a+1)} = \sqrt[3]{\left(\frac{a+1}{2}\right)(a+b-1)(a+c-1)}$ (AM-GM) $\leq \frac{1}{3}\left(\frac{a+1}{2}+(a+b-1)+(a+c-1)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}a+b+c-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow 3+\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{a^3+1}{2}} \leq 3+\sum_{cyc}\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}a+b+c-\frac{3}{2}\right) = 3+\frac{3}{2}(a+b+c)-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}(a+b+c+1) \leq 2(a+b+c)$. Последнее, потому что $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ac) \Rightarrow a+b+c \geq 3$