МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(СПбГЭУ)

Факультет информатики и прикладной математики
Кафедра прикладной математики и экономико-математических методов

КУРСОВАЯ РАБОТА
по дисциплине:
«Численные методы»

Тема: «Жёсткие фреймы. Восстановление сигнала при потере одного коэффициента во время передачи по каналу связи. Фреймы Мерседес-Бенц»

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
Направленность «Прикладная математика и информатика в экономике и управлении»

Обучающийся Голубева Арина Алексеевна

Группа ПМ-2101 Подпись ____________________

Проверила Соловьёва Наталья Анатольевна
Должность кандидат физ.-мат. наук, доцент

Оценка ____________________ Дата ____________________

Подпись ____________________

Санкт-Петербург
2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Из всех разделов алгебраической науки одним из наиболее разработанных является раздел, называемый линейной алгеброй. Линейная алгебра изучает матрицы (прямоугольные таблицы из чисел), алгебраические формы (линейные, билинейные и квадратичные), линейные пространства с линейными преобразованиями в них. Выводы линейной алгебры особенно важны для решения многочисленных прикладных задач. Ее аппаратом, не говоря уже о самой математике, пользуются естественные, технические, экономические, нередко и гуманитарные науки.

Для работы с линейными пространствами необходимо находить базисы этих пространств, чтобы наилучшим образом задавать элементы и объекты, функции. Во многих направлениях жизни требуется воспроизвести, записать, восстановить информацию, то есть происходит передача сигнала по каналам связи. Часто часть информации теряется или искажается, поэтому для корректной работы с такими сигналами нужно использовать избыточные базисы, которые позволят восстановить утерянную информацию. Широкое применение здесь нашли фреймы.

Конечномерный фрейм – избыточная система векторов, порождающая всё пространство [3]. Именно свойство избыточности позволяет восстановить исходный сигнал, если при передаче по сети некоторые коэффициенты его разложения по фрейму были потеряны.

Понятие фрейма широко – фреймом является любая система векторов, содержащая базис. Основной интерес представляют фреймы, близкие к ортогональным базисам. Такие фреймы называются жёсткими. Среди них отдельно выделяются классы гармонических, обобщенно-гармонических фреймов, равноугольные жесткие фреймы и жёсткие фреймы, обладающие групповой структурой. В данной работе большое внимание уделяется именно жёстким фреймам, гармоническим фреймам, обобщённо-гармоническим фреймам и отдельно фрейму Мерседес-Бенц, их построению и разложению векторов по этим фреймам. Также интерес представляет задача восстановления фрейма по заданной матрице, свойства фреймов.

Целью данной курсовой работы является рассмотрение задачи построения фреймов. Изучаются способы построения разных видов жёстких фреймов, методы обработки векторов с помощью этих фреймов. Описываются свойства жёстких фреймов.

Задачи курсовой работы:

- Изучить доступную литературу по заданной теме и привести необходимый теоретический материал в лаконичной и понятной форме;
- Исследовать способы работы с разными группами жёстких фреймов, методы разложения векторов по фреймам;
- Проанализировать фреймы: их свойства, способы задания, особенности решения задач с помощью жёстких фреймов;
- Реализовать функции для работы с жёсткими фреймами.

Для реализации функций по обработке жёстких фреймов используется система компьютерной алгебры, Wolfram Mathematica [8].

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Жёсткие фреймы

Определение:

Жёстким фреймом в $\mathbb{C}^N$называется набор сигналов $\{\psi_1, \dots, \psi_M\}, M \geq N$, такой, что при некотором $A > 0$ (константа фрейма) любой сигнал $x \in \mathbb{C}^N$ допускает представление

$$x = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{M} \langle x, \psi_k \rangle \psi_k.$$

Если все сигналы ψ_k нормированы, то константа A называется также коэффициентом избыточности [2].

Существует эквивалентное определение жёсткого фрейма.

Определение:

Ненулевые векторы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ из $\mathbb{C}^n$ при $m \geq n$ образуют фрейм, если их линейная оболочка совпадает с $\mathbb{C}^n$,

$$\mathcal{L}(\{\varphi_k\}_{k=0}^{m-1}) = \mathbb{C}^n.$$

Предложение:

Набор сигналов $\{\psi_k\}_{k=1}^{M}$ является жёстким фреймов в $\mathbb{C}^N$ с константой A тогда и только тогда, когда для любого сигнала $x \in \mathbb{C}^N$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{M} |\langle x, \psi_k \rangle|^2 = A\|x\|^2.$$

Предложение:

Если $\{\psi_k\}_{k=1}^{M}$ – жёсткий фрейм с константой $A = 1$ и если $\|\psi_k\| = 1$ при всех k, то система $\{\psi_k\}_{k=1}^{M}$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}^N$. В частности, необходимо $M = N$ [6].

Предложение:

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{m}$ – фрейм в $\mathbb{R}^n$ с границами A, B. Это значит, что при любом $x \in \mathbb{R}^N$ выполняются неравенства

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq B\|x\|^2.$$

Тогда справедливы утверждения:

Фрейм в $\mathbb{R}^n$ с границами A, B является фреймом в $\mathbb{C}^n$ с теми же границами;

Если $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ – фрейм в $\mathbb{C}^n$ с границами A, B, то 2m векторов $\{\{Re\varphi_k\}_{k=1}^{m}, \{Im\varphi_k\}_{k=1}^{m}\}$ образуют фрейм в $\mathbb{R}^n$ с теми же границами [5].

Несколько замечаний о жёстких фреймах:

Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ – фрейм в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через Φ матрицу со столбцами $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, а через S – матрицу фрейма, $S = \Phi\Phi^T$. По определению фрейма симметричная матрица S положительно определена. У S существует обратная матрица S^{-1}, которая также симметрична и положительно определена [1].

Введём векторы

$$\widetilde{\varphi_k} = S^{-1}\varphi_k, k \in 1{:}\,m.$$

Матрица $\widetilde{\Phi}$ со столбцами $\widetilde{\varphi_1}, \dots, \widetilde{\varphi_m}$ обладает следующим свойством

$$\widetilde{\Phi}\Phi^T = I_n,$$

где I_n – единичная матрица порядка n.

Поскольку

$$\tilde{S} := \widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi^T} = S^{-1}\Phi\Phi^T S^{-1} = S^{-1},$$

то система векторов $\{\widetilde{\varphi_1}, \dots, \widetilde{\varphi_m}\}$ является фреймом. Он называется каноническим двойственным фреймом. Разложение вектора $x \in \mathbb{R}^n$, которое используется при передаче информации:

$$x = \sum_{k=1}^{m} \langle x, \varphi_k \rangle \widetilde{\varphi_k}.$$

Обозначим через $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ собственные числа матрицы фрейма S. Тогда собственными числами матрицы $\tilde{S} = S^{-1}$ канонического двойственного фрейма будут ${\lambda_1}^{-1} \leq {\lambda_2}^{-1} \leq \cdots \leq {\lambda_n}^{-1}$. След матрицы S связан с её собственными числами равенством

$$tr(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Вместе с тем,

$$tr(S) = tr(\Phi\Phi^T) = tr(\Phi^T\Phi) = \sum_{k=1}^{m} \|\varphi_k\|^2.$$

По тем же причинам

$$\sum_{k=1}^{m} \|\widetilde{\varphi_k}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}.$$

1.2. Фрейм Мерседес-Бенц в n-мерном пространстве

Жёстким фреймом в $\mathbb{R}^n$ называется семейство из $m \geq n$ векторов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, такое, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = A\|x\|^2,$$

где $A > 0$ – некоторая константа (константа фрейма). Нас интересует случай $m = n + 1$ [5].

Определение:

В $\mathbb{R}^2$ жёсткий фрейм образуют векторы

$$b_1^2 = (0,1), \qquad b_2^2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), \qquad b_2^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$$

(верхний индекс указывает на размерность фрейма). Именно этот фрейм называется фреймом Мерседес-Бенц. Для векторов этого фрейма верно равенство

$$\sum_{j=1}^{3} \left|\langle x, b_j^2\rangle\right|^2 = \frac{3}{2}\|x\|^2.$$

Отметим также, что

$$\sum_{j=1}^{3} b_j^2 = \mathbb{O}\,; \qquad \langle b_j^2, b_k^2\rangle = -\frac{1}{2} \quad \text{при } k \neq j,$$

Лемма:

При $n \geq 2$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно построить систему из $n+1$ единичных векторов $\{b_1^n, b_2^n, \dots, b_{n+1}^n\}$ со свойством

$$\langle b_j^n, b_k^n\rangle = -\frac{1}{n} \quad \text{при } k \neq j.$$

Теорема:

Система векторов $\left\{b_j^n\right\}_{j=1}^{n+1}$ образует жёсткий фрейм в $\mathbb{R}^n$ с константой $A = 1 + \frac{1}{n}$ [5].

Определение:

Фрейм $\left\{b_j^n\right\}_{j=1}^{n+1}$ назовём фреймом Мерседес-Бенц.

Определение:

Систему $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ единичных n-мерных векторов будем называть системой Мерседес-Бенц, если выполняется условие

$$\langle \varphi_j^n, \varphi_k^n\rangle = -\frac{1}{n} \quad \text{при } k \neq j.$$

Определение:

В пространстве $\mathbb{R}^1$ фрейм Мерседес-Бенц образует система векторов $\{-1, 1\}$. Обозначим через $B_n, n \geq 1$, матрицу порядка $n \times (n+1)$ со столбцами $b_1^n, b_2^n, \dots, b_{n+1}^n$. Справедливо рекуррентное соотношение

$$B_1 = [-1,1];$$

$$B_k = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} B_{k-1} & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ -\frac{1}{k} \quad \dots & -\frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix}, k = 2, \dots, n.$$

Матрица B_n называется матрицей Мерседес-Бенц [7].

1.3. Обобщенные гармонические фреймы

Определение:

Пусть $m > n > 1$ и $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ – попарно различные корни m-й степени из единицы. Векторы

$$\gamma_k(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_j^k, \qquad j \in 1 : n, \qquad k \in 0 : m-1,$$

образуют гармонический фрейм. В частности, $\gamma_0(j) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ при всех $j \in 1 : n$.

Определение:

Теперь возьмём комплексное число c, $|c| = 1$, и обозначим через $c_1, c_2, \dots, c_n$ попарно различные корни m-й степени из c. Возьмём также n комплексных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$, по модулю равных единице. Векторы

$$\psi_k(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} b_j \mathrm{c}_j^k, \qquad j \in 1 : n, \qquad k \in 0 : m-1,$$

образуют обобщённый гармонический фрейм. В частности, $\psi_0(j) = \frac{1}{\sqrt{n}} b_j$ при всех $j \in 1 : n$. Ясно, что $\|\psi_k\| = 1$ при всех $k \in 0 : m-1$.

Предложение:

Обобщенный гармонический фрейм $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}\}$ является жёстким фреймом с константой $A = \frac{m}{n}$.

Предложение:

Система векторов $\{\psi_k\}_{k=0}^{m-1}$ является обобщённым гармоническим фреймом тогда и только тогда, когда существует гармонический фрейм $\{\gamma_k\}_{k=0}^{m-1}$, комплексное число $g, |g| = 1$, и диагональная матрица B, диагональные элементы которой по модулю равны единице, такие, что

$$\psi_k = B(g^k \gamma_k), \qquad k \in 0 : m-1.$$

Лемма:

Если система $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$, где $\varphi_k = U\varphi_{k-1}$, U – унитарная матрица, является жёстким фреймом, то $U^m = cI_n$, где $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$. При этом собственные числа унитарной матрицы U суть попарно различные корни m-й степени из c [6].

Теорема:

Если $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$ – жёсткий фрейм, то $\Psi = \{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}\}$ – обобщённо гармонический фрейм.

Теорема:

Система векторов $\Psi = \{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}\}$ является обобщённым гармоническим фреймом тогда и только тогда, когда собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы U суть попарно различные корни m-й степени из некоторого числа $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$:

$$\left|\langle \varphi_0, p_j \rangle\right| = \frac{1}{n} \text{ при всех } j \in 1 : n.$$

1.4. Циклические фреймы

Определение:

Пусть U – унитарная матрица порядка n и $\varphi_0 \in \mathbb{C}^n$ – единичный вектор. Нормированный жёсткий фрейм $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$ в $\mathbb{C}^n$, где $\varphi_k = U^k\varphi_0$, назовём циклическим с константой $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, если выполняется соотношение

$$\langle \varphi_{k+1}, \varphi_{s+1} \rangle = \langle \varphi_k, \varphi_s \rangle, \qquad k, s \in 0 : m-1,$$

где $\varphi_m = c\varphi_0$.

Теорема:

Для того чтобы система векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}\}$ из $\mathbb{C}^n$ при $m \geq n$ была циклическим с константой $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, нормированным жёстким фреймом, необходимо и достаточно, чтобы нашлась унитарная матрица U порядка n, такая, что

$$\varphi_k = U^k \varphi_0, \qquad k \in 0 : m-1,$$

причём все собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы U суть попарно различные корни m-й степени из числа c, а соответствующие ортонормированные собственные векторы $p_1, \dots, p_n$ удовлетворяют условию:

$$|\langle \varphi_0, p_j \rangle| = \frac{1}{n}, \qquad j \in 1 : n.$$

1.5. Циклическое свойство фрейма Мерседес-Бенц

Рассмотрим матрицу Мерседес-Бенц B_n порядка $n \times (n+1)$. Она определяется рекуррентно:

$$B_1 = [-1,1];$$

$$B_k = \begin{bmatrix} & \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} B_{k-1} & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ -\frac{1}{k} & \dots & -\frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix}, \ k = 2, \dots, n.$$

Для матрицы Мерседес-Бенц B_n справедливо равенство:

$$B_n {B_n}^T = \left(1 + \frac{1}{n}\right) I_n.$$

Векторы b_j^n – единичные и обладают следующими свойствами:

$$\sum_{j=1}^{n+1} b_j^n = \mathbb{O}; \qquad \langle b_i^n, b_j^n \rangle = -\frac{1}{n} \quad \text{при } i \neq j.$$

Введём квадратную матрицу U_n порядка n с помощью рекуррентного соотношения:

$$U_1 = [-1];$$

$$U_k = \begin{bmatrix} u_1^{k-1}, & \dots, & u_{k-2}^{k-1}, & \frac{1}{k} u_{k-1}^{k-1}, & \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} u_{k-1}^{k-1} \\ 0, & \dots, & 0, & \frac{\sqrt{k^2-1}}{k}, & -\frac{1}{k} \end{bmatrix}, k = 2, \dots, n,$$

где u_j^{k-1} – j-й столбец матрицы U_{k-1}.

Теорема:

Справедливы формулы:

$$U_n b_j^n = b_{j+1}^n, \quad j \in 1 : n; \quad U_n b_{n+1}^n = b_1^n.$$

Именно это имеется в виду под циклическим свойством фрейма Мерседес-Бенц.

1.6. Матрица фрейма

Рассмотрим фрейм $\{ \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ в $\mathbb{C}^n$. Как было отмечено ранее, матрица фрейма $S = \Phi\Phi^*$ положительно определена. Отметим, что

$$\Phi\Phi^* = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \varphi_j^*,$$

поэтому матрица S не меняется при перестановке векторов φ_j.

Обозначим $a_j = \|\varphi_j\|$ и будем считать, что

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m > 0.$$

Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ – собственные числа матрицы S и $v_1, v_2, \dots, v_n$ – соответствующие ортонормированные собственные векторы.

Нас интересуют две задачи.

Прямая задача. Как связаны собственные числа λ_l и величины a_j?

Обратная задача. При каких условиях на положительно определённую эрмитову матрицу S и числа a_j существует фрейм $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, такой, что матрица фрейма совпадает с S и при $j \in 1 : m$?

Предложение:

Справедливы соотношения:

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2 ; \quad \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \geq \sum_{j=1}^{k} a_j^2 \quad \text{при всех } k \in 1 : n.$$

Предложение:

Пусть S – произвольная эрмитова положительно определённая матрица порядка n с собственными числами $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ и соответствующими ортонормированными собственными векторами $v_1, v_2, \dots, v_n$. Возьмём положительные числа $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m > 0$, где $m \geq n$. Если выполняются соотношения предыдущего предложения, то в $\mathbb{C}^n$ существует фрейм $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, такой, что $\|\varphi_j\| = a_j$ при $j \in 1 : m$ и матрица S является матрицей этого фрейма [7].

Определение:

Фрейм $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ называется равномерным, если $\|\varphi_1\| = \dots = \|\varphi_m\|$.

Предложение:

Пусть S – эрмитова положительно определённая матрица порядка n. Тогда при каждом $m \geq n$ в $\mathbb{C}^n$ существует равномерный фрейм $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, у которого матрица фрейма равна S.

Предложение:

Пусть $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ – жёсткий фрейм в $\mathbb{C}^n$ с константой фрейма λ и $a_j = \|\varphi_j\|$, причём $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m > 0$. Тогда

$$n\lambda = \sum_{j=1}^{m} a_j^2 \text{ и } \lambda \geq a_1^2.$$

Предложение:

Пусть заданы натуральное число $n \geq 2$ и вещественное $\lambda > 0$. При $m \geq n$ возьмём числа $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m > 0$, удовлетворяющие условиям предыдущего предложения. Тогда в $\mathbb{C}^n$ существует жёсткий фрейм $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ с константой фрейма λ, такой, что $\|\varphi_j\| = a_j$ при $j \in 1 : m$ [5].

Отметим, что из неравенства $\lambda \geq a_1^2$ следует, что при всех $k \in 1 : n$

$$k\lambda \geq k a_1^2 \geq \sum_{j=1}^{k} a_j^2.$$

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Для построения жёстких фреймов разных видов и работы с ними использовалась система компьютерной математики, Wolfram Mathematica [8].

2.1. Генерация фрейма Мерседес-Бенц

Для генерации фрейма Мерседес-Бенц в пространстве размера n, где число n вводится пользователем с клавиатуры, была создана функция mercedesBenc (Рисунок *1*).

```
ClearAll[mercedesBenc]
mercedesBenc[n_Integer] := Module[{bn = mercedesBenc[2]}, Do[bn = mercedesBenc[bn], {i, 3, n}]; bn]
mercedesBenc[bn_List] := Module[{bnew = bn, l}, l = Length@bn;
  Do[Do[bnew[[i, j]] = bn[[i, j]] * √(l^2 - 1) / l, {j, 1, Length@bn[[i]]}];
   AppendTo[bnew[[i]], -1 / l], {i, 1, l}];
  AppendTo[bnew, ConstantArray[0, l - 1]];
  AppendTo[bnew[[l + 1]], 1]; bnew]
mercedesBenc[n_Integer] /; n == 2 := {{-√3 / 2, -1 / 2}, {√3 / 2, -1 / 2}, {0, 1}};

mercedesBenc[3]
```

$$\left\{\left\{-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right\}, \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right\}, \left\{0, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, 1\}\right\}$$

Рисунок 1 - Функция mercedesBenc

На вход функции подаётся целое число – размерность пространства, в котором будет строиться фрейм, на выходе – сгенерированный набор векторов фрейма Мерседес-Бенц.

2.2. Генерация гармонического фрейма

Для генерации гармонического фрейма были созданы 2 функции. Первая функция, roots1 (Рисунок *2*), выполняет вспомогательную функцию и генерирует числа, являющиеся корнями из 1.

```
Clear[roots1]
roots1[m_Integer] := Module[{b = {}}, Do[AppendTo[b, Cos[(2*Pi*i) / m] + I*Sin[(2*Pi*i) / m]], {i, 0, m - 1}]; b]

roots1[4]
{1, i, -1, -i}
```

Рисунок 2 - Функция roots1

На вход функции подаётся целое число – корень какой степени будет использоваться для вычисления, на выходе – список чисел.

Вторая функция, garmFraim (Рисунок 3), генерирует гармонический фрейм.

```
Clear[garmFraim]
garmFraim[ch_List] := Module[{ch1 = DeleteDuplicates@ch, y = {}, m = Length@ch, n}, n = Length@ch1;
  Do[y = AppendTo[y, {}];
   Do[y[[i + 1]] = AppendTo[y[[i + 1]], ch1[[j]]^i/ √n], {j, 1, n}], {i, 0, m - 1}];
  y]

garmFraim[{1, i, -1, -i}]
```

Рисунок 3 - Функция garmFraim

На вход функции подаётся список из всех чисел, являющихся корнем некоторой степени из числа 1. На выходе – список векторов сгенерированного гармонического фрейма.

2.3. Генерация обобщенного гармонического фрейма

Для генерации обобщенного гармонического фрейма были созданы 3 функции. Первая функция, rootsC (Рисунок 4), генерирует список чисел, которые являются корнями некоторой степени из числа, по модулю равного 1.

```
Clear[rootsC]
rootsC[c_, m_Integer] := Module[{b = {}, fi = Arg[c]}, If[Abs[c] ≠ 1, Print["Uncorrected input"];
   Break[]];
  Do[AppendTo[b, Cos[(fi + 2*Pi*i) /m] + I*Sin[(fi + 2*Pi*i) /m]], {i, 0, m - 1}];
  b]

rootsC[-1, 6]
```

$$\left\{\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ i,\ \frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -i,\ -\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Рисунок 4 - Функция rootsC

На вход функции подается комплексное число, модуль которого 1, и целое число, корень какой степени будет извлекаться. Функция возвращает список чисел, которые являются корнями введённой степени из введённого числа.

Вторая функция, coeffs (Рисунок 5), генерирует коэффициенты для векторов гармонического фрейма.

```
Clear[coeffs]
coeffs[n_Integer] := Module[{list = {}, b = RandomReal[{-1, 1}], c}, Do[c = Sqrt[1 - b^2];
   AppendTo[list, b + c * I];
   b = RandomReal[{-1, 1}], {i, 1, n}];
  list]

coeffs[3]

{0.763157 + 0.646213 i, 0.64194 + 0.766755 i, -0.277487 + 0.960729 i}
```

Рисунок 5 - Функция coeffs

На вход функции подаётся целое число, количество коэффициентов, которое нужно сгенерировать. На выходе – сами коэффициенты.

Третья функция, obGarmFraim (Рисунок 6), генерирует обобщённый гармонический фрейм.

```
Clear[obGarmFraim]
obGarmFraim[c_List, b_List, m_Integer] /; Length@c == Length@b := Module[{list = {}, n = Length@c}, Do[AppendTo[list, {}];
   Do[AppendTo[list[[k + 1]], b[[j]] * c[[j]]^k / Sqrt[n]], {j, 1, n}], {k, 0, m - 1}];
  list]

obGarmFraim[{i/2 + Sqrt[3]/2, i, i/2 - Sqrt[3]/2}, {-0.5300337615961297` + 0.8479765395152493` i, -0.06850895296102522` + 0.9976505016107514` i,
  -0.7448619221626487` + 0.6672186425094583` i}, 6]

{{-0.306015 + 0.489579 i, -0.0395537 + 0.575994 i, -0.430046 + 0.385219 i}, {-0.509807 + 0.270981 i, -0.575994 - 0.0395537 i, 0.179822 - 0.548632 i},
 {-0.576996 - 0.0202271 i, 0.0395537 - 0.575994 i, 0.118586 + 0.56504 i}, {-0.489579 - 0.306015 i, 0.575994 + 0.0395537 i, -0.385219 - 0.430046 i},
 {-0.270981 - 0.509807 i, -0.0395537 + 0.575994 i, 0.548632 + 0.179822 i}, {0.0202271 - 0.576996 i, -0.575994 - 0.0395537 i, -0.56504 + 0.118586 i}}
```

Рисунок 6 - Функция obGarmFraim

На вход функции подаётся список чисел, которые являются корнями некоторой степени из 1, список коэффициентов и целое число, степень корня, который извлекался из 1. На выходе – список векторов обобщённого гармонического фрейма.

2.4. Генерация обобщённого гармонического фрейма по унитарной матрице

Для генерации обобщённого гармонического фрейма новым способом было создано 3 функции. Первая функция, unitarMB (Рисунок 7), строит унитарную матрицу фрейма Мерседес-Бенц.

```
Clear[unitarMB]
unitarMB[n_Integer] := Module[{u1 = unitarMB[1], uk = unitarMB[1]},
  Do[Do[uk⟦i, k - 1⟧ = u1⟦i, k - 1⟧ / k;
    uk⟦i⟧ = AppendTo[uk⟦i⟧, √(k^2 - 1) / k * u1⟦i, k - 1⟧], {i, 1, k - 1}];
   uk = AppendTo[uk, ConstantArray[0, k - 2]];
   uk⟦k⟧ = AppendTo[uk⟦k⟧, √(k^2 - 1) / k];
   uk⟦k⟧ = AppendTo[uk⟦k⟧, -1 / k];
   u1 = uk, {k, 2, n}]; uk]
unitarMB[n_Integer] /; n == 1 := {{-1}}

unitarMB[3] // MatrixForm
```

rixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Рисунок 7 - Функция unitarMB

На вход функции подаётся целое число – размерность пространства, с которым происходит работа. На выходе – унитарная матрица фрейма.

Вторая функция, vectors (Рисунок 8), генерирует векторы жёсткого фрейма через умножение унитарной матрицы на единичный вектор.

```
vectors[n_Integer] := Module[{f = ConstantArray[1, n], m = n - 1, list = {}, u = unitarMB[n]}, list = AppendTo[list, f];
  Do[f = u.f // Simplify;
   AppendTo[list, f], {i, 1, m - 1}];
  list]
```

Рисунок 8 - Функция vectors

На вход функции подаётся целое число – размерность пространства, с которым происходит работа. На выходе – список векторов жёсткого фрейма.

Третья функция, vectors2 (Рисунок 9), генерирует обобщённый гармонический фрейм.

```
vectors2[n_Integer] := Module[{list = {}, vec = vectors[n], u = unitarMB[n], eigv, p}, eigv = Eigenvectors@u;
  p = Normalize /@ Orthogonalize[eigv];
  p = Transpose@p;
  p = ConjugateTranspose@p;
  Do[AppendTo[list, p.vec[[i]]], {i, 1, n - 1}];
  list]

vectors2[3] // Simplify
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}},\ -\frac{\frac{1}{2}+\frac{i}{2}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{3i}{2}}{\sqrt{6}},\ -\frac{\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{3i}{2}}{\sqrt{6}}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{6}},\ \left(\frac{1}{12}+\frac{i}{12}\right)\times\left(-3i\sqrt{2}+(2+2i)\sqrt{3}+(2-i)\sqrt{6}\right),\ \left(\frac{1}{12}-\frac{i}{12}\right)\times\left(3\sqrt{2}-(2+2i)\sqrt{3}+(1-2i)\sqrt{6}\right)\right\}\right\}$$

Рисунок 9 - Функция vectors2

На вход функции подаётся целое число – размерность пространства, с которым происходит работа. На выходе – сгенерированный обобщённый гармонический фрейм.

2.5. Циклическое свойство фрейма Мерседес-Бенц

Для проверки циклического свойства фрейма Мерседес-Бенц была создана функция, matrixMB (Рисунок *10*), которая генерирует матрицу фрейма Мерседес-Бенц.

```
In[36]:= Clear[matrixMB]
         matrixMB[n_Integer] /; n ≥ 2 := Module[{bk = matrixMB[1]}, Do[bk = √(k² - 1) / k * bk;
            Do[bk[[i]] = AppendTo[bk[[i]], 0], {i, 1, k - 1}];
            bk = AppendTo[bk, ConstantArray[-1 / k, k]];
            bk[[k]] = AppendTo[bk[[k]], 1], {k, 2, n}]; bk]
         matrixMB[n_Integer] /; n == 1 := {{-1, 1}}

In[39]:= matrixMB[3] // MatrixForm
Out[39]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 10 - Функция matrixMB

На вход функция получает целое число – размерность пространства, с которым происходит работа. На выходе – матрица фрейма.

Затем было проверено (Рисунок *11*) свойство о связи матрицы фрейма Мерседес-Бенц, константой фрейма и единичной матрицей.

$$b3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix};$$

```
b3.Transpose@b3 / (1 + 1 / 3) == IdentityMatrix[3]
True
```

Рисунок 11 - Проверка свойства 1

Затем было проверено циклическое свойство фрейма Мерседес-Бенц (Рисунок *12*).

$$U3 = \left\{\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}, \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}, \left\{0, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right\}\right\};$$

```
b3 = {0, 0, 1};
```

$$b1 = \left\{-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right\};$$

```
U3.b3 == b1
True

mercedesBenc[3]
```

$$\left\{\left\{-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right\}, \left\{\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right\}, \left\{0, \frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, 1\}\right\}$$

Рисунок 12 - Проверка циклического свойства

Проверка осуществлялась для фрейма Мерседес-Бенц трёхмерного пространства. Из рисунка видно, что последний вектор фрейма при умножении слева на матрицу фрейма даёт первый вектор фрейма.

2.6. Разложение вектора по фрейму

Для создания разложения вектора по фрейму было создано 2 функции. первая функция, randV (Рисунок *13*), генерирует случайный вектор.

```
Clear[randV]
randV[n_Integer] := RandomReal[{-5, 5}, n]
```

Рисунок 13 - Функция randV

На вход функции подаётся целое число – размерность пространства, в котором нужно сгенерировать вектор. На выходе – сам вектор.

Вторая функция, decompose (Рисунок *14*), используется для разложения вектора.

```
Clear[decompose]
decompose[vec_List] := Module[{l = {}, fr = mercedesBenc[Length@vec], a}, a = 1 + 1 / Length@vec;
  Do[l = AppendTo[l, Total[vec.fr⟦i⟧ * fr⟦i⟧ / a]], {i, 1, Length@fr}];
  l]
```

Рисунок 14 - Функция decompose

На вход функции подаётся вектор, который нужно разложить, и фрейм, по которому нужно разложить. Функция возвращает коэффициенты разложения.

2.7. Связь с нормой собственных чисел матрицы фрейма

Для демонстрации связи с нормой собственных чисел матрицы фрейма было создано 4 функции. Первая функция, matrixFr (Рисунок *15*), генерирует матрицу фрейма.

```
Clear[matrixFr]
matrixFr[fr_List] := Module[{f = Transpose@fr}, f.ConjugateTranspose@f]
```

Рисунок 15 - Функция matrixFr

На вход функции подаётся список векторов фрейма. На выходе – сгенерированная матрица.

Вторая функция, eigenValues (Рисунок *16*), вычисляет собственные числа матрицы фрейма, используя разные дополнительные функции (Рисунок *17*).

```
Clear[eigenValues]
Options[eigenValues] = {function → Eigenvalues};
eigenValues[fr_List, OptionsPattern[]] := Module[{m = matrixFr[fr], l}, l = OptionValue[function][m];
  l]
```

Рисунок 16 - Функция eigenValues

На вход функции подаётся фрейм и функция, которая будет использоваться для вычисления собственных чисел матрицы фрейма (этот параметр может быть пропущен, тогда по умолчанию будет использована встроенная функция Eigenvalues). На выходе – список собственных чисел матрицы фрейма.

```
Clear[f1]
f1[m_List] := Module[{l, res}, res = JordanDecomposition[N[m]]; Diagonal[res[[2]]]]

Clear[f2]
f2[m_List] := Module[{l, res}, res = SchurDecomposition[N[m]]; Diagonal[res[[2]]]]

Clear[f3]
f3[m_List] := Module[{l, res}, res = SingularValueDecomposition[m]; Diagonal[res[[2]]]]

Clear[f4]
f4[m_List, e_, x_] := Module[{x0 = x, l, x1, y}, x0 = x0 / Norm[x0];
  y = m.x0;
  l = y.x0; x1 = y / Norm[y];
  While[x1 - x0 ≥ e, x0 = x1; y = m.x0;
   l = y.x0;
   x1 = y / Norm[y]];
  l]
```

Рисунок 17 - Функции для поиска собственных чисел

Дополнительные функции используют разные способы вычисления собственных чисел матрицы: разложение Жордано, раложение Шура, сингулярное разложение, степенной метод.

Третья функция, vecNorms (Рисунок *18*), генерирует нормы для векторов фрейма.

```
Clear[vecNorms]
vecNorms[fr_List] := Module[{a = {}}, Do[a = AppendTo[a, Norm[fr[[i]]]], {i, 1, Length@fr}]; a]
```

Рисунок 18 - Функция vecNorms

На вход функции подаётся фрейм, на выходе – список норм для каждого вектора фрейма.

Проверка условия $\sum_{l=1}^{n} \lambda_l = \sum_{j=1}^{m} a_j^2$, где λ_l – собственные числа матрицы фрейма, a_j^2 – квадраты норм векторов фрейма (*Рисунок 19*).

```
fraim = mercedesBenc[3];
Total[eigenValues[fraim]] == Total[vecNorms[fraim]^2]
True
```

Рисунок 19 - Проверка свойства 2

Проверка осуществлялась для фрейма Мерседес-Бенц в трёхмерном пространстве.

Четвёртая функция, pred (*Рисунок 20*), формирует список сравнения для собственных чисел матрицы фрейма и квадратов норм векторов фрейма. То есть происходит проверка условия $\sum_{l=1}^{n} \lambda_l \geq \sum_{j=1}^{k} a_j^2$ при всех $k \in 1{:}\,n$, где λ_l – собственные числа матрицы фрейма, a_j^2 – квадраты норм векторов фрейма.

```
Clear[pred]
pred[fr_List] := Module[{m = matrixFr[fr], a = vecNorms[fr], l = {}, l1}, l1 = Eigenvalues@m;
  Do[If[Total[l1[[ ;; i]]] ≥ Total[a[[ ;; i]]], l = AppendTo[l, ">="], l = AppendTo[l, "<"]], {i, 1, Length@fr - 1}];
  l]

pred[mercedesBenc[3]]

{>=, >=, >=}
```

Рисунок 20 - Функция pred

На вход функции подаётся фрейм, на выходе – список сравнения. Для проверки работы функции использовался фрейм Мерседес-Бенц в трёхмерном пространстве.

2.8. Построение фрейма по матрице

Для построения фрейма по матрице было создано 2 функции. первая функция вспомогательная, hermMatrix (*Рисунок 21*), генерирует случайную эрмитову матрицу.

```
Clear[hermMatrix]
hermMatrix[n_Integer] := Module[{k = RandomInteger[{2, n - 1}], m, s, l, v}, m = RandomReal[{-2, 2}, {n, k}];
  s = m.ConjugateTranspose@m;
  l = Sort@Eigenvalues@s;
  v = Normalize /@ Orthogonalize[Eigenvectors@s];
  {s, l, v}]

hermMatrix[3]

{{{2.62907, 1.98132, 1.27318}, {1.98132, 2.86645, 1.71202}, {1.27318, 1.71202, 1.02893}}, {-2.44115×10^-18, 0.827237, 5.69722},
 {{-0.60881, -0.676614, -0.414179}, {0.790857, -0.558714, -0.249766}, {-0.0624124, -0.479617, 0.875256}}}
```

Рисунок 21 - Функция hermMatrix

На вход функции подаётся целое число – размер матрицы. На выходе – сгенерированная случайным образом эрмитова матрица.

Вторая функция, pred2 (*Рисунок 22*), строит фрейм по матрице.

```
Clear[pred2]
pred2[s_, a_] := Module[{l, v, V, L, m = Length@s + 1, g, L2, l2, f, q}, l = eigenValues[s];
  v = Eigenvectors[s];
  V = Transpose@v;
  L = DiagonalMatrix[l];
  g = ConstantArray[0, {Length@s, m}];
  Do[g[[i, i]] = √l[[i]], {i, 1, Length@s}];
  L2 = Transpose@g.g;
  l2 = AppendTo[l, 0];
  q = DiagonalMatrix[a]^2;
  f = V.g.Transpose@q;
  f]
```

Рисунок 22 - Функция pred2

На вход функции подаётся матрица и список чисел, по которому будут восстановлены векторы фрейма. На выходе – построенный фрейм.

2.9. Практическое использование жёстких фреймов

Введём 3 задачи для демонстрации практического применения жёстких фреймов. Так как в данной работе особое внимание уделяется фреймам Мерседес-Бенц, то решения обеих задач сводятся к написанию функций, использующих структуру фреймов этого типа.

<u>Задача 1:</u> восстановление утраченного вектора из фрейма.

Для решения задачи 1 была создана функция rebuildFraim (*Рисунок 23*), которая восстанавливает утраченный вектор. На вход функции подаётся фрейм с утраченным вектором и матрица фрейма, на выходе – восстановленный фрейм со всеми векторами.

```
Clear[rebuildFraim]
rebuildFraim[vec_List, s_List] := Module[{n = Length@vec, m = {}, v = vec, in = {}}, Do[If[s.vec[[i]] ≠ vec[[i + 1]], m = AppendTo[m, i + 1]], {i, 1, n - 1}];
  Do[in = AppendTo[in, s.vec[[m[[i]] - 1]]], {i, 1, Length@m}];
  m = List /@ m;
  Do[v = Insert[v, in[[i]], m[[i]]], {i, 1, Length@in}];
  v]
```

$$\text{rebuildFraim}\left[\left\{\left\{-\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{4}, -\frac{1}{4}\right\}, \left\{0, \sqrt{\frac{5}{6}}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{4}, -\frac{1}{4}\right\}, \left\{0, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4}\right\}, \{0, 0, 0, 1\}\right\}, \text{unitarMB}[4]\right] \text{ // Simplify}$$

$$\left\{\left\{-\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{4}, -\frac{1}{4}\right\}, \left\{\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{4}, -\frac{1}{4}\right\}, \left\{0, \sqrt{\frac{5}{6}}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{4}, -\frac{1}{4}\right\}, \left\{0, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4}\right\}, \{0, 0, 0, 1\}\right\}$$

```
mercedesBenc[4]
```

$$\left\{\left\{-\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{4}, -\frac{1}{4}\right\}, \left\{\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{4}, -\frac{1}{4}\right\}, \left\{0, \sqrt{\frac{5}{6}}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{4}, -\frac{1}{4}\right\}, \left\{0, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{1}{4}\right\}, \{0, 0, 0, 1\}\right\}$$

Рисунок 23 - Функция rebuildFraim

Проверка корректности работы функции осуществлялась на фрейме Мерседес-Бенц пространства размера 4.

Задача 2: восстановление утраченного коэффициента при разложении вектора по фрейму.

Для решения задачи 2 была создана функция rebuildVector (*Рисунок 24*), которая восстанавливает утраченный коэффициент разложения. На вход функции подаётся список коэффициентов разложения вектора по фрейму и сам вектор, который был разложен. На выходе – полный список коэффициентов разложения.

```
Clear[rebuildVector]
rebuildVector[coef_List, vec_List] := Module[{n = Length@coef, m = 0, fr, a, c = coef}, fr = mercedesBenc[n];
  a = 1 + 1 / n;
  Do[If[i > n || coef[[i]] ≠ Total[vec.fr[[i]] * fr[[i]] / a], m = i], {i, 1, Length@fr}];
  c = Insert[c, Total[vec.fr[[m]] * fr[[m]] / a], m];
  c]
```

$$\text{rebuildVector}\left[\left\{\frac{1}{12}\times\left(13+5\sqrt{2}+6\sqrt{3}+4\sqrt{6}\right),\ \frac{1}{12}\times\left(13+5\sqrt{2}-6\sqrt{3}-4\sqrt{6}\right),\ \frac{1}{12}\times\left(19-10\sqrt{2}\right)\right\},\ \{1,2,3\}\right]$$

$$\left\{\frac{1}{12}\times\left(13+5\sqrt{2}+6\sqrt{3}+4\sqrt{6}\right),\ \frac{1}{12}\times\left(13+5\sqrt{2}-6\sqrt{3}-4\sqrt{6}\right),\ \frac{1}{12}\times\left(19-10\sqrt{2}\right),\ \frac{9}{4}\right\}$$

```
decompose[{1, 2, 3}] // Simplify
```

$$\left\{\frac{1}{12}\times\left(13+5\sqrt{2}+6\sqrt{3}+4\sqrt{6}\right),\ \frac{1}{12}\times\left(13+5\sqrt{2}-6\sqrt{3}-4\sqrt{6}\right),\ \frac{1}{12}\times\left(19-10\sqrt{2}\right),\ \frac{9}{4}\right\}$$

Рисунок 24 - Функция rebuildVector

Для проверки корректности работы функции использовалось разложение вектора {1, 2, 3} по фрейму Мерседес-Бенц пространства размера 3.

Задача 3: восстановление вектора, разложенного по фрейму, при утраченном коэффициенте.

Для решения задачи 3 была создана функция rebuildVector2 (Рисунок *25*), которая решает систему линейных уравнений относительно компонент исходного вектора, в качестве матрицы коэффициентов уравнений берется та часть фрейма, для которой известны коэффициенты разложения. Столбец правых частей – коэффициенты разложения. На вход функции подаётся список векторов фрейма, список коэффициентов и номер утраченного коэффициента. На выходе – восстановленный вектор.

```
Clear[rebuildDecompose]
rebuildDecompose[fr_List, coef_List, n_Integer] :=
 Module[{fr1 = Drop[fr, {n}], a = Length@coef / (Length@coef + 1), s, c1 = {}, coef1 = {}}, s = Total[coef];
  Do[c1 = AppendTo[c1, a * (coef[[i]] + s) * fr1[[i]]], {i, 1, Length@coef}];
  Total[c1]]

rebuildDecompose[mercedesBenc[2], {0.5, 0.5}, 3]

{0., -1.}
```

Рисунок 25 - Функция rebuildVector2

Для корректности проверки работы функции использовалось разложение вектора {0, -1} по фрейму Мерседес-Бенц пространства размерности 2, потерян третий коэффициент в разложении вектора по фрейму.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование фреймов помогает передавать сигналы по каналам связи: благодаря избыточности векторов, которые входят в фрейм, удаётся восстанавливать утерянную информацию.

Наименьшей избыточностью обладают фреймы Мерседес-Бенц, количество векторов в составе фрейма всего на единицу больше размерности пространства, в котором происходит работа.

В данной работе были рассмотрены жёсткие фреймы, жёсткие фреймы специального вида, их свойства и способы построения. В процессе работы с жёсткими фреймами удалось по-новому взглянуть на привычные понятия линейной алгебры и комплексного анализа, использовать полученные знания численных методов, познакомиться с новыми структурами. При реализации этих структур были подробно рассмотрены задачи построения базисов и матриц линейных пространств, отмечены некоторые свойства.

Для того чтобы продемонстрировать, как можно применять фреймы при передаче сигналов, были введены три задачи: задача восстановления утраченного вектора из фрейма, задача восстановления утраченного коэффициента в разложении вектора по фрейму и задача восстановления вектора из его разложения по фрейму. Эти задачи были решены с использованием разработанных структур, описанных в Главе 2. Таким образом, использование жёстких фреймов крайне эффективно при передаче информации, когда происходит потеря данных.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.

2. Жёлудев В. А., Певный А. Б. Дискретные периодические фреймы // Вестник Сыктывкарского Университета. 2006. Вып. 6. С. 87–94.

3. Жёлудев В. А., Певный А. Б. Вейвлетное преобразование Баттерворта и его реализация с помощью рекурсивных фильтров // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 4. С. 607–618

4. Драбкова Е. С., Новиков С. Я. Объём фрейма Парсеваля // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучная серия. 2007. № 9/1(59). С. 91–106.

5. Дурягин А. М., Соловьёва Н. А. Вещественные гармонические фреймы // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 9 октября 2007 г. (http://dha.spb.ru/reps07.shtml#1009).

6. Goyal V. K., Kovacevi´c J., Kelner J. A. Quantized frame expansions with erasures // Appl. Comput. Harmonic Anal. 2001. Vol. 10. No. 3. P. 203–233.

7. Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases. Boston: Birkh¨auser, 2002

8. Wolfram *Mathematica* https://www.wolfram.com/mathematica/