למידה חישובית בייסיאנית 2022/2023

תרגיל **6**: $Gibss\ Sampling\ \&\ GMM$

רינה קרנאוך 319132353

הסטיקר שילווה אותנו בתרגיל זה:

1. <u>חלק תאורטי</u>

1.1. $EM\ Initalization$

נאתחל $\forall i,j \in [K] : \mu_i^{(0)} = \mu_j^{(0)}, \Sigma_i^{(0)} = \Sigma_j^{(0)}$. בנוסף נתונים לנו $\forall k : \pi_k^{(0)}$. נטען כי במקרה זה נקבל כי עבור $t \to \infty$ הרצות צעדים של EM עבור פתרון ML עבור GMMים קבעון על ערכי $\mu_k^{(t)}, \Sigma_k^{(t)}, \pi_k^{(t)}$ עבור כל k, והיות ו$\forall k \in [K]$ ערך התחלתי זה זהה, נקבל פתרון $\mu_0, \Sigma_0, \forall k : \pi_k^{(0)}$ שאיתחלנו את האלגוריתם איתו.

נניח נכונות עבור $t \in \mathbb{N}$ ונוכיח עבור $t+1$. בסיס האינדוקציה הוא כמובן $t=0$ שנתון לנו. נניח נכונות עבור $t \in \mathbb{N}$ גדול מספיק ונוכיח. נבחין כי מההנחה נקבל:

$$\forall i : r_{ik_1}^{(t+1)} = \frac{\pi_{k_1}^{(t+1)} \cdot \mathcal{N}\left(x_i | \mu_{k_1}^{(t)}, \Sigma_{k_1}^{(t)}\right)}{\sum_{k'} \pi_{k'}^{(t+1)} \cdot \mathcal{N}\left(x_i | \mu_{k'}^{(t)}, \Sigma_{k'}^{(t)}\right)} = \frac{\pi_{k_2}^{(t+1)} \cdot \mathcal{N}\left(x_i | \mu_{k_2}^{(t)}, \Sigma_{k_2}^{(t)}\right)}{\sum_{k'} \pi_{k'}^{(t+1)} \cdot \mathcal{N}\left(x_i | \mu_{k'}^{(t)}, \Sigma_{k'}^{(t)}\right)} = r_{ik_2}^{(t+1)}$$

ולכן:

$$\pi_{k_1}^{(t+1)} = \frac{1}{N} \sum_i r_{ik_1}^{(t+1)} = \frac{1}{N} \sum_i r_{ik_2}^{(t+1)} = \pi_{k_2}^{(t+1)}$$

ולכן:

$$\mu_{k_1}^{(t+1)} = \frac{\sum_i r_{ik_1}^{(t+1)} x_i}{\sum_i r_{ik_1}^{(t+1)}} = \frac{\sum_i r_{ik_2}^{(t+1)} x_i}{\sum_i r_{ik_2}^{(t+1)}} = \mu_{k_2}^{(t+1)}$$

$$\Sigma_{k_1}^{(t+1)} = \frac{\sum_i \overbrace{r_{ik_1}^{(t+1)}}^{r_{ik_2}^{(t+1)}} \left(x_i - \mu_{k_1}^{(t+1)}\right)\left(x_i - \overbrace{\mu_{k_1}^{(t+1)}}^{\mu_{k_2}^{(t+1)}}\right)^T}{\sum_i r_{ik_1}^{(t+1)}} = \frac{\sum_i r_{ik_2}^{(t+1)}\left(x_i - \mu_{k_2}^{(t+1)}\right)\left(x_i - \overbrace{\mu_{k_2}^{(t+1)}}\right)^T}{\sum_i r_{ik_2}^{(t+1)}}$$

$$= \Sigma_{k_2}^{(t+1)}$$

כעת נקבל זאת עבור כל ערך $t \in \mathbb{N}$ על כן:

$$\forall t \in \mathbb{N}, \forall k : \begin{Bmatrix} \mu_0 = \mu_k^{(0)} = \mu_k^{(1)} = \cdots = \mu_k^{(t)} \\ \Sigma_0 = \Sigma_k^{(0)} = \Sigma_k^{(1)} = \cdots = \Sigma_k^{(t)} \\ \pi_k^{(0)} = \pi_k^{(1)} = \cdots = \pi_k^{(t)} \end{Bmatrix}$$

1.2. $Gibbs\ Sampling$:

בהינתן ההתפלגות הבאה:

$$p(x, y) = \frac{1}{Z} \cdot \mathcal{N}(x|\mu_x, \Sigma_x) \cdot \mathcal{N}\left(y|\mu_y, \Sigma_y\right) \cdot e^{-\frac{\beta}{2}\|x-y\|^2}$$

$$= \frac{1}{Z} e^{-\frac{\beta}{2}\|x-y\|^2} \cdot \underbrace{\mathcal{N}(x|\mu_x, \Sigma_x)}_{e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_x)^T\Sigma_x^{-1}(x-\mu_x)}} \cdot \underbrace{\mathcal{N}\left(y|\mu_y, \Sigma_y\right)}_{e^{-\frac{1}{2}\left(y-\mu_y\right)^T\Sigma_y^{-1}\left(y-\mu_y\right)}}$$

עבור Z קבוע הנרמול ו x, y ווקטורים. נרצה למצוא את ההתפלגות המותנית הרצויה עבור אלגוריתם $gibbs\ sampling$ תחת ההתפלגות הנתונה. מדובר על מכפלת גאוסיאנים על כן נקבל גם גאוסיאן.

נרצה לחשב את $p(x|y), p(y|x)$. נתחיל ב $p(x|y)$.

$$p(x, y) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2}\beta I\|x-y\|^2} \exp\left[\underbrace{-\frac{1}{2}(x-\mu_x)^T\Sigma_x^{-1}(x-\mu_x) - \frac{1}{2}\left(y-\mu_y\right)^T\Sigma_y^{-1}\left(y-\mu_y\right)}_{-\frac{1}{2}\left(x^T\Sigma_x^{-1}x - 2x\Sigma_x^{-1}\mu_x + \mu_x^T\Sigma_x^{-1}\mu_x\right) - \frac{1}{2}\left(y^T\Sigma_y^{-1}y - 2y\Sigma_y^{-1}\mu_y + \mu_y^T\Sigma_y^{-1}\mu_y\right)}\right]$$

כעת:

$$\frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-y)^T\beta I(x-y)\right) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^T\beta Ix - 2x^T\beta Iy + y^T\beta Iy\right)\right)$$

לכן:

$$p(x,y)$$
$$= \frac{1}{Z} \cdot \exp\left[\underbrace{-\frac{1}{2}\left((x^T\Sigma_x^{-1}x - 2x\Sigma_x^{-1}\mu_x + \mu_x^T\Sigma_x^{-1}\mu_x)\right) - \frac{1}{2}\left(y^T\Sigma_y^{-1}y - 2y\Sigma_y^{-1}\mu_y + \mu_y^T\Sigma_y^{-1}\mu_y\right) - \frac{1}{2}(x^T\beta Ix - 2x^T\beta Iy + y^T\beta Iy)}_{-\Delta}\right]$$

נרצה לגזור על פי x את Δ כמו בטריק הנגזרת בכדי לקבל את $p(x|y)$ –

$$\frac{\partial(\Delta)}{\partial x} = \Sigma_x^{-1}(x-\mu_x) + \beta I(x-y) = \Sigma_x^{-1}x + \beta Ix - \Sigma_x^{-1}\mu_x - \beta Iy$$
$$= (\Sigma_x^{-1} + \beta I)x - (\Sigma_x^{-1}\mu_x + \beta Iy)$$
$$= (\Sigma_x^{-1} + \beta I)^{-1}\left(x - (\Sigma_x^{-1} + \beta I)^{-1}(\Sigma_x^{-1}\mu_x + \beta Iy)\right)$$

ונקבל:

$$p(x|y) \sim \mathcal{N}\left((\Sigma_x^{-1} + \beta I)^{-1}(\Sigma_x^{-1}\mu_x + \beta Iy), (\Sigma_x^{-1} + \beta I)^{-1}\right)$$

נרצה לגזור על פי y את Δ כמו בטריק הנגזרת בכדי לקבל את $p(y|x)$ –

$$\frac{\partial\Delta}{\partial y} = \Sigma_y^{-1}\left(y - \mu_y\right) + \beta I(y-x) = \Sigma_y^{-1}y + \beta Iy - \Sigma_y^{-1}\mu_y - \beta Ix$$
$$= \left(\Sigma_y^{-1} + \beta I\right)y - \left(\Sigma_y^{-1}\mu_y + \beta Ix\right)$$
$$= \left(\Sigma_y^{-1} + \beta I\right)^{-1}\left(y - \left(\Sigma_y^{-1} + \beta I\right)^{-1}\left(\Sigma_y^{-1}\mu_y + \beta Ix\right)\right)$$

ולכן:

$$p(y|x) \sim \mathcal{N}\left(\left(\Sigma_y^{-1} + \beta I\right)^{-1}\left(\Sigma_y^{-1}\mu_y + \beta Ix\right), \left(\Sigma_y^{-1} + \beta I\right)^{-1}\right)$$

2. חלק פרקטי