Theoretische Informatik Übung 06 — W07 — Rita Nagy

Bmk zur Serie 5:

(15) Formelle Definition: Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein λ-NEA.

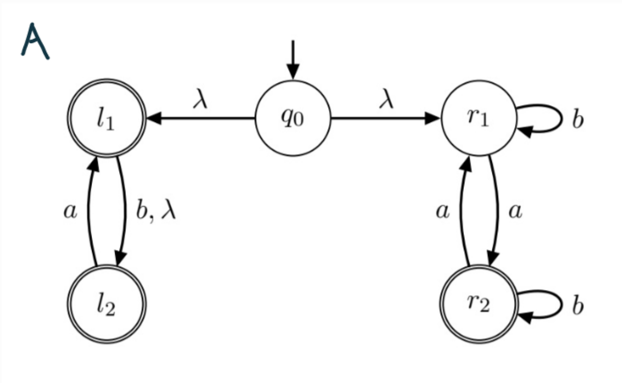
Wir definieren einen äquivalenten NEA $A_N := (Q_N, \Sigma_N, \delta_N, q_{0N}, F_N)$, wobei

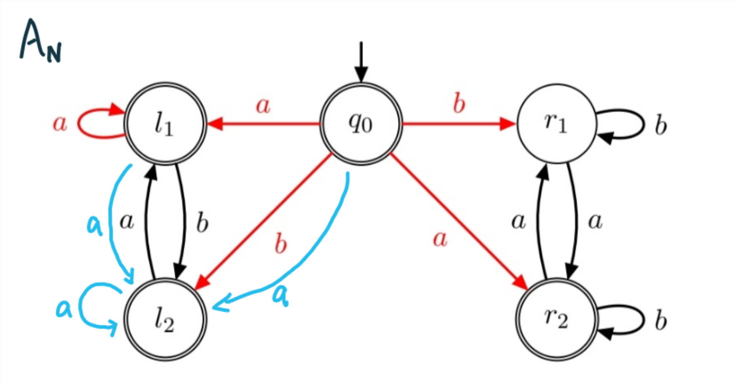
- $Q_N := Q$
- $\Sigma_N := \Sigma$
- $q_{0N} := q_0$

Für einen Zustand $q \in Q$ ist die λ-Hülle $H(q) := \{p \in Q : p \in \hat{\delta}(q, \lambda)\} \subseteq Q$

- $\delta_N(q, a) := \bigcup_{p \in H(q)} \delta(p, a)$ (oder $\delta_N(q, a) := \bigcup_{p \in H(q)} \bigcup_{s \in \delta(p,a)} H(s)$)

  für jedes $a \in \Sigma$ und $q \in Q$
- $F_N := \{p \in Q \mid \hat{\delta}(p, \lambda) \cap F \neq \emptyset\}$





$H(q_0) = \{q_0, l_1, l_2, r_1\}$; $H(l_1) = \{l_1, l_2\}$; $H(l_2) = \{l_2\}$; $H(r_1) = \{r_1\}$; $H(r_2) = \{r_2\}$

$F_N = \{q_0, l_1, l_2, r_2\}$

5 Berechenbarkeit

Def: $\mathcal{L}_{RE} = \{L(M) \mid M \text{ ist eine TM}\}$ ist die Menge aller rekursiv aufzählbaren Sprachen.

$\mathcal{L}_R = \{L(M) \mid M \text{ ist eine TM, die immer hält}\}$ ist die Menge aller rekursiven Sprachen.

$\text{Kod}(M) = h(\text{Code}(M))$ ist die Kodierung der TM M über Σ_{bool}. $\left(h: \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*;\ h(0)=00,\ h(1)=11,\ h(\#)=01\right)$

$\text{KodTM} = \{\text{Kod}(M) \mid M \text{ ist eine TM}\}$ ist die Menge der Kodierungen aller Turingmaschinen.

Def: Seien A, B Mengen. Wir sagen...

- $|A| \leq |B|$, falls eine <u>injektive Funktion</u> $f: A \hookrightarrow B$ existiert.
- $|A| = |B|$, falls eine <u>bijektive Funktion</u> $f: A \to B$ existiert.
- $|A| < |B|$, falls $|A| \leq |B|$ und <u>keine injektive Funktion</u> $f: B \to A$ existiert.

Def: Eine Menge A heisst <u>abzählbar</u>, falls A endlich ist oder $|A| = |\mathbb{N}|$.

Bem: Intuitiv, wenn wir die Abzählbarkeit einer unendl. Menge A zeigen wollen, suchen wir einen Weg, um die Elemente in A nummerieren zu können. Diesen Weg beschreiben wir dann mit einer injektiven Funktion $f: A \to \mathbb{N}$ oder einer Grafik.

Lem 5.1: Sei Σ ein bel. Alphabet. Dann ist Σ^* abzählbar.

Beweisidee: Die kanonische Ordnung auf Σ^* entspricht einer Nummerierung.

Satz 5.1: KodTM ist abzählbar.

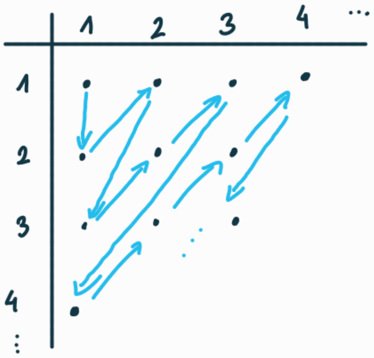
Beweis: $\text{KodTM} \subseteq (\Sigma_{bool})^*$ wobei $(\Sigma_{bool})^*$ mit Lem 5.1 abzählbar ist.

Lem 5.2: $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ ist abzählbar.

Beweisidee: Nummerierung: $a_1 = (1,1)$, $a_2 = (2,1)$, $a_3 = (1,2)$, $a_3 = (3,1)$, $a_5 = (2,2)$, $a_6 = (1,3)$, …

Formale lineare Ordnung: $(a,b) < (c,d) \;:\Leftrightarrow\; (a+b < c+d)$ oder $(a+b = c+d$ und $b<d)$

Grafik:



Satz 5.2: $\mathbb{Q}^+$ ist abzählbar.

Beweis:

$$h: \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$$
$$\frac{p}{q} \longmapsto (p,q) \qquad \text{wobei } ggT(q,p) = 1$$

Ist eine injektive Fkt. und nach Satz 5.2 ist $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ abzählbar.

Bmk: Da für A, B abzählbare Mengen auch $A \cup B$ abzählbar ist, ist $\mathbb{Q}$ abzählbar.

Satz 5.3: $[0,1]$ ist nicht abzählbar.

Beweis: Annahme per Widerspruch: $\exists f: [0,1] \hookrightarrow \mathbb{N}^*$

$f(x)$	$x \in [0,1]$ als Dezimalzahl
1	$0.a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\,a_{14} \cdots$
2	$0.a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\,a_{24} \cdots$
3	$0.a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\,a_{34} \cdots$
$\vdots$	$\vdots \qquad \ddots \; a_{ii}$

f bestimmt eine Nummerierung der reellen Zahlen in $[0,1]$.

Mit der Diagonalisierungsmethode zeigen wir, dass mind. eine Zahl $c \in [0,1]$ in der Tabelle fehlt und f somit keine Nummerierung sein kann.

Sei $c := 0.c_1c_2c_3c_4 \cdots \in [0,1]$ mit $c_i \neq \overset{\text{aus Tabelle}}{a_{ii}}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ und $c_i \notin \{0,9\}$ für die Eindeutigkeit der Darstellung.

$\Rightarrow c_i \in \{1,\dots,8\} \setminus \{a_{ii}\}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Somit ist c eindeutig definiert und unterscheidet sich in mind. einer Stelle von jedem Wert in der Tabelle.

$\Rightarrow f$ ist keine Nummerierung aller Werte in $[0,1]$. $\lightning$ $\Rightarrow [0,1]$ ist überabzählbar. $\square$

Satz 5.4: $\mathcal{P}((\Sigma_{bool})^*)$ ist nicht abzählbar.

Kor 5.1: $|KodTM| < |\mathcal{P}(\Sigma_{bool})^*)|$

$\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Sprachen $L \subseteq (\Sigma_{bool})^*$, die nicht rekursiv aufzählbar sind (d.h. $L \notin \mathcal{L}_{RE}$).

Def: Wir definieren die <u>Diagonalsprache</u> L_{diag} wie folgt:

$$L_{diag} = \{w \in (\Sigma_{bool})^* \mid w = w_i \text{ für ein } i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ und } M_i \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\}$$

wobei w_i das kanonisch i-te Wort in $(\Sigma_{bool})^*$ ist.

und M_i das kanonisch i-te Wort in $KodTM \subseteq (\Sigma_{bool})^*$ ist.

Satz 5.4: $L_{diag} \notin \mathcal{L}_{RE}$

Beweis:
- Annahme per Widerspruch: Sei $L_{diag} \in \mathcal{L}_{RE}$.
- Dann $\exists M$ TM mit $L(M) = L_{diag}$.
- Weil M eine TM in der Nummerierung aller TMs ist, $\exists i \in \mathbb{N}^*$ mit $M_i = M$.
- Somit erhalten wir jedoch folgende widersprüchliche Äquivalenz:

  $w_i \in L_{diag} \iff M_i$ akzeptiert w_i nicht $\iff w_i \notin L(M_i)$

  $\Rightarrow L_{diag} \neq L(M_i)$ ↯ zu $L_{diag} = L(M) = L(M_i)$
- Also gilt $L_{diag} \notin \mathcal{L}_{RE}$ $\square$