

Aufg 1) (Worked Example 2)

Wir betrachten folgende abgeschwächte Variante des Pumping-Lemmas:

APL: Sei L regulär über dem Alphabet Σ .

Dann $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ konst. s.d. sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ als $w = yxz$ zerlegen lässt, s.d.

(i) $|yx| \leq n_0$

(ii) $|x| \geq 1$

(iii) $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$

Bmk: Diese Variante erlaubt nicht das Pumpen ausserhalb der Sprache.

Sei $L := \{a^m b^{n!+n} \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{b\}^*$ über $\{a, b\}$.

a) $Z_L: L \notin \mathcal{L}_{EA}$ mit dem PL.

b) $Z_L: L$ erfüllt die Bedingungen im APL.

Lösung: a) Annahme per Widerspruch: $L \in \mathcal{L}_{EA}$

Sei n_0 die Konst. aus dem PL.

Wir wählen $n \geq n_0$ s.d. $n \neq m! + m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Bmk: $m \mid m! + m$

Wir betrachten $w = ab^n$.

Dann gilt $|w| \geq n_0$ und $w \in L$.

PL \Rightarrow Es ex. eine Zerlegung $w = yxz$, wobei $|yx| \leq n$ und $|x| \geq 1$.

Fallunterscheidung: $\cdot y = \lambda$: Dann enthält x das a und $yx^0z \in \{b\}^* \subseteq L \quad \swarrow \text{zu iii.}$

$\cdot y \neq \lambda$: Dann gilt: $y = ab^r$, $x = b^s$, $z = b^{n-r-s}$ für $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r+s \leq n_0$

$$\Rightarrow yx^kz = ab^{(k-1)s+n}$$

Wir wählen $k = \frac{n!}{s} + 1$. Bmk: $n! \mid s+1$ da $s \leq n$

$$\Rightarrow yx^kz = ab^{n!+n} \in L \quad \swarrow \text{zu (iii)}$$

$$\Rightarrow L \notin \mathcal{L}_{EA} \quad \square$$

b) Da wir die Existenz einer Konstante zeigen müssen, können wir n_0 "wählen".

Wir wählen $n_0 = 1$.

$\mathcal{L}_2: \forall w \in L: (i), (ii) \& (iii)$ vom APL.

Sei $w \in L$.

Fallunterscheidung: $\cdot w \in \{b\}^*$: Dann ist für jede Zerlegung $w = yxz$ auch $yx^kz \in \{b\}^* \subseteq L \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

$\cdot w$ beginnt mit a : $\Rightarrow w = yxz = a^m b^{n!+n}$ für $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow (i) \& (ii): y = \lambda; x = a; z = a^{m-1} b^{n!+n}$

\cdot Fall $k \geq 1$: $yx^kz = a^{k-1+m} b^{n!+n} \in L$

\cdot Fall $k = 0$: \cdot Falls $m \geq 2$: $yx^0z = a^{m-1} b^{n!+n} \in L$

\cdot Falls $m = 1$: $yx^0z = b^{n!+n} \in \{b\}^* \subseteq L$

\Rightarrow Wir haben für jedes nicht-leere Wort $w \in L$ eine Zerlegung gefunden,

s.d. beliebig häufiges Pumpen wieder ein Wort in L ergibt.

$\Rightarrow L$ erfüllt APL. \square

Aufg 2) wahr/falsch:

Definiere $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n := (101)^{\lceil \sqrt{n} \rceil} \in \{0,1\}^*$.

Entscheide, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

- a) $\exists c_1 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \in \mathbb{N} : K(x_n) \leq \log_2(|x_n|) + c_1$
- b) $\exists c_2 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \in \mathbb{N} : K(x_n) \leq 2 \cdot \log_2(|x_n|) + c_2$
- c) $\exists c_3 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \in \mathbb{N} : K(x_n) \leq \frac{1}{2} \log_2(n) + c_3$
- d) $\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \forall n \geq N : K(x_n) > (10)^{100}! + 27$

Lösung: a) wahr

$$\begin{aligned} K(x_n) &\leq \log_2(\lceil \sqrt{n} \rceil + 1) + c \\ &\leq \log_2\left(\frac{|x_n|}{3}\right) + c' \\ &\leq \log_2(|x_n|) + c_1 \end{aligned}$$

· wobei wir $\lceil \sqrt{n} \rceil$ als Zahl eingeben

($x = \lceil \sqrt{n} \rceil$ nicht $x = \text{ceil}(\text{sqrt}(n))$)

$$\cdot |x_n| = \lceil \sqrt{n} \rceil \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{|x_n|}{3} = \lceil \sqrt{n} \rceil$$

(möglich, da $\lceil \sqrt{n} \rceil$ eine natürliche Zahl ist)

b) wahr

a \Rightarrow b

c) wahr

$$\begin{aligned} K(x_n) &\leq \log_2(\lceil \sqrt{n} \rceil + 1) + c_3 \\ &\leq \log_2(\sqrt{n}) + c_3 \\ &= \frac{1}{2} \log_2(n) + c_3 \end{aligned}$$

d) wahr

$|P_n| \leq 10^{100}! + 27$ erfüllen nur endl. viele Programme,
wir haben aber unendl. viele Wörter.