Theoretische Informatik Übung 05 — W06 — Rita Nagy

Bmk zur Serie 4:

10b) Zz: $L_2 = \{0^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{L}_{EA}$ mit Methode der Kolmogorov Komplexität.

Idee in Lösungen: $x_n = 0^{n!+1}$ $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $[(n+1)! = n!(n+1) = n \cdot n! + n!]$

$y_n = 0^{n \cdot n! - 1}$ jeweils erstes Wort in L_{x_n}

! Passt auf mit Sonderfällen $n=0$, $n=1, \dots$!

11 b) Zz: $L_4 = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ enthält Teilwort ab gleich oft wie Teilwort ba$\}$

Idee für Methode Lemma 3.3: $w_k = (abc)^k$ $0 \leq k \leq |Q|$; $z = (bac)^i$ für $w_i \neq w_j$

↯ $w_k = (ab)^k$ $0 \leq k \leq |Q|$ mit $z = (ba)^i$ für $w_i \neq w_j$ funktioniert nicht!

Gegenbeispiel: $i=1$, $j=2$: $w_i z = abba \in L_4$; $w_j z = ababba \in L_4$ ↯

ignoriert keine Buchstaben in Σ (ohne c wäre L_4 regulär)

Aufg 1) (Worked Example 1)

Sei $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ enthält das Teilwort ab gleich oft wie das Teilwort ba$\}$.

Zz: Jeder EA, der L akzeptiert, hat mindestens 5 Zustände.

Lösung:

- Annahme per Widerspruch: $\exists A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$ mit $L(A) = L$ und $|Q| \leq 4$.
- Wir betrachten die 5 Wörter $w_0 = \lambda$, $w_1 = a$, $w_2 = b$, $w_3 = ab$, $w_4 = ba$.
- Da $|Q| \leq 4$, müssen wegen dem Schubfachprinzip mindestens 2 dieser Wörter im selben Zustand enden.

  d.h. $\exists 0 \leq i < j \leq 4$ mit $\hat{\delta}_A(q_0, w_i) = \hat{\delta}_A(q_0, w_j)$.
- Nach Lemma 3.3 muss nun $\forall z \in \{a,b\}^*$ gelten: $w_i z \in L \iff w_j z \in L$.
- Folgende Tabelle zeigt jedoch, dass sich für jedes Paar (w_i, w_j) mit $0 \leq i < j \leq 4$ ein Suffix $z \in \{a,b\}^*$ finden lässt, s.d. entweder $w_i z \in L \land w_j z \notin L$ oder $w_i z \notin L \land w_j z \in L$ gilt.

	λ	a	b	ab	ba
λ	–	b	a	λ	λ
a	–	–	a	λ	λ
b	–	–	–	λ	λ
ab	–	–	–	–	b
ba	–	–	–	–	–

- Dies ist ein Widerspruch zu $|Q| \leq 4$.
- Somit muss ein EA A mit $L(A) = L$ mindestens 5 Zustände haben. □

3.5 Nichtdeterminismus

Def: Ein <u>nichtdeterministischer endlicher Automat</u> (NEA) ist ein Quintupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei

Q : endliche Zustandsmenge

Σ : Eingabealphabet

$q_0 \in Q$: Anfangszustand

$F \subseteq Q$: Menge der akzeptierenden Zustände

$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \underline{\mathcal{P}(Q)}$: Übergangsfunktion

Unterschied zu EA

$L(M) = \{ w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \}$ ist die <u>von M akzeptierte Sprache</u>.

Bmk: Intuitiv sind NEAs EAs, wobei beliebig viele (auch keine) Pfeile von den Zuständen ausgehen können.
Ein NEA akzeptiert ein Wort $w \in \Sigma^*$, falls es mindestens eine akzeptierende Berechnung gibt.

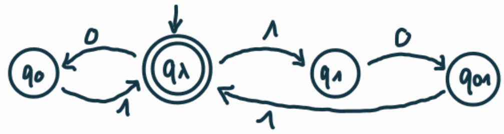
Aufg 2) Entwerfe einen NEA für folgende Sprachen:

a) $L_1 = \{01, 101\}^*$

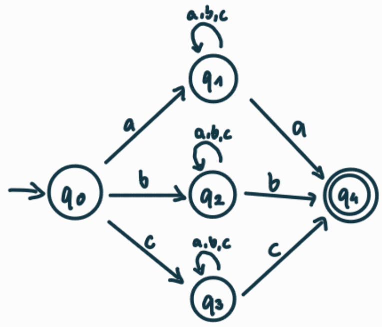
b) $L_2 = \{ w \in \{a,b,c\}^* : |w| \geq 2$ und w beginnt und endet mit demselben Buchstaben$\}$

c) $L_3 = \{ w \in \{0,1\}^* : w = x0y0z$ mit $x, z \in \{0,1\}^*$ und $y \in \{0,1\}^2 \}$

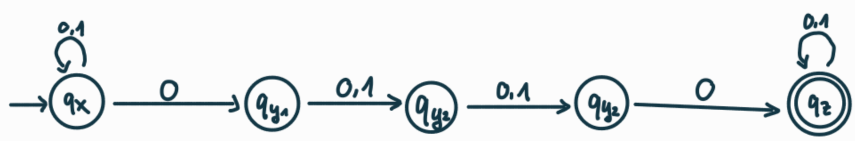
Lösung: a)



b)



c)



Satz 3.2: Zu jedem NEA M existiert ein EA A s.d.

$$L(M) = L(A)$$

Bmk: Die Konstruktion von A aus $M = (Q_M, \Sigma_M, \delta_M, q_{0M}, F_M)$ heisst <u>Potenzmengenkonstruktion</u> und geht wie folgt:

(i) $Q_A = \{\langle P \rangle : P \subseteq Q_M\}$

(ii) $\Sigma_A = \Sigma_M$

(iii) $q_{0A} = \langle \{q_{0M}\} \rangle$

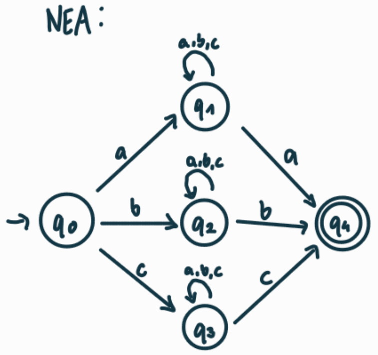
(iv) $F_A = \{\langle P \rangle : P \subseteq Q \text{ und } P \cap F_M \neq \emptyset\}$

(v) $\delta_A : Q_A \times \Sigma_A \rightarrow Q_A$ def. als

$$\delta_A(\langle P \rangle, a) = \langle \bigcup_{p \in P} \delta_M(p,a) \rangle = \langle \{q \in Q_M : \exists p \in P \text{ s.d. } q \in \delta_M(p,a)\} \rangle$$

Aufg 3) Wandle den in 2 b) konstruierten NEA für L_2 mit der Potenzmengenkonstruktion in einen EA um.

Lösung: NEA:



	a	b	c
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3, q_4\}$
$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
$\{q_2, q_4\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_2\}$
$\{q_3, q_4\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3, q_4\}$

EA: