

### Aufg 1) (Worked Example 2)

Wir betrachten folgende abgeschwächte Variante des Pumping-Lemmas:

APL: Sei  $L$  regulär über dem Alphabet  $\Sigma$ .

Dann  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  konst. s.d. sich jedes Wort  $w \in L$  mit  $|w| \geq n_0$  als  $w = yxz$  zerlegen lässt, s.d.

$$(i) |yx| \leq n_0$$

$$(ii) |x| \geq 1$$

$$(iii) \{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$$

Bmk: Diese Variante erlaubt nicht das Pumpen ausserhalb der Sprache.

Sei  $L := \{a^m b^{n!+m} \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{b\}^*$  über  $\{a, b\}$ .

a)  $Z_2: L \notin \mathcal{L}_{EA}$  mit dem PL.

b)  $Z_2: L$  erfüllt die Bedingungen im APL.

Lösung: a) Annahme per Widerspruch:  $L \in \mathcal{L}_{EA}$

Sei  $n_0$  die Konst. aus dem PL.

Wir wählen  $n \geq n_0$  s.d.  $n \neq m! + m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Bmk:  $m \mid m! + m$

Wir betrachten  $w = ab^n$ .

Dann gilt  $|w| \geq n_0$  und  $w \in L$ .

PL  $\Rightarrow$  Es ex. eine Zerlegung  $w = yxz$ , wobei  $|yx| \leq n$  und  $|x| \geq 1$ .

Fallunterscheidung: •  $y = \lambda$ : Dann enthält  $x$  das  $a$  und  $yx^0z \in \{b\}^* \not\subseteq L \not\stackrel{\text{zu (iii)}}{\in} L$ .

•  $y \neq \lambda$ : Dann gilt:  $y = ab^r$ ,  $x = b^s$ ,  $z = b^{n-r-s}$  für  $r \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $r+s \leq n_0$   
 $\Rightarrow yx^kz = ab^{(k-1)s+n}$

Wir wählen  $k = \frac{n!}{s} + 1$ . Bmk:  $n! \mid s+1$  da  $s \leq n$

$\Rightarrow yx^kz = ab^{n!+n} \in L \not\stackrel{\text{zu (iii)}}{\in} L$

$\Rightarrow L \notin \mathcal{L}_{EA}$   $\square$

b) Da wir die Existenz einer Konstante zeigen müssen, können wir  $n_0$  "wählen".

Wir wählen  $n_0 = 1$ .

Z<sub>2</sub>:  $\forall w \in L: (i), (ii) \& (iii)$  vom APL.

Sei  $w \in L$ .

Fallunterscheidung: •  $w \in \{b\}^*$ : Dann ist für jede Zerlegung  $w = yxz$  auch  $yxz \in \{b\}^* \subseteq L \quad \forall z \in \mathbb{N}$ .

•  $w$  beginnt mit  $a$ :  $\Rightarrow w = yxz = a^m b^{n!+n}$  für  $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow (i) \& (ii): y = \lambda; x = a; z = a^{n-1} b^{n!+n}$

• Fall  $k \geq 1$ :  $yxz = a^{k-1+m} b^{n!+n} \in L$

• Fall  $k = 0$ : • Falls  $m \geq 2$ :  $yx^0z = a^{n-1} b^{n!+n} \in L$

• Falls  $m = 1$ :  $yx^0z = b^{n!+n} \in \{b\}^* \subseteq L$

$\Rightarrow$  Wir haben für jedes nicht-leere Wort  $w \in L$  eine Zerlegung gefunden,

s.d. beliebig häufiges Pumpen wieder ein Wort in  $L$  ergibt.

$\Rightarrow L$  erfüllt APL.  $\square$

Aufg 2) wahr/falsch:

Definiere  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n := (101)^{\lceil \sqrt{n} \rceil} \in \{0,1\}^*$ .

Entscheide, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

- $\exists c_1 \in \mathbb{N}$  s.d.  $\forall n \in \mathbb{N}: K(x_n) \leq \log_2(|x_n|) + c_1$
- $\exists c_2 \in \mathbb{N}$  s.d.  $\forall n \in \mathbb{N}: K(x_n) \leq 2 \cdot \log_2(|x_n|) + c_2$
- $\exists c_3 \in \mathbb{N}$  s.d.  $\forall n \in \mathbb{N}: K(x_n) \leq \frac{1}{2} \log_2(n) + c_3$
- $\exists N \in \mathbb{N}$  s.d.  $\forall n \geq N: K(x_n) > (10)^{100}! + 27$

Lösung: a) wahr

$$\begin{aligned} K(x_n) &\leq \log_2(\lceil \sqrt{n} \rceil + 1) + c && \cdot \text{wobei wir } \lceil \sqrt{n} \rceil \text{ als Zahl eingeben} \\ &\leq \log_2\left(\frac{|x_n|}{3}\right) + c' && (x = \lceil \sqrt{n} \rceil \text{ nicht } x = \text{ceil(sqrt}(n)\text{)}) \\ &\leq \log_2(|x_n|) + c_1 && \cdot |x_n| = \lceil \sqrt{n} \rceil \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{|x_n|}{3} = \lceil \sqrt{n} \rceil \end{aligned}$$

b) wahr

$$a \Rightarrow b$$

c) wahr

$$\begin{aligned} K(x_n) &\leq \log_2(\lceil \sqrt{n} \rceil + 1) + c_3 \\ &\leq \log_2(\lceil \sqrt{n} \rceil) + c_3 \\ &= \frac{1}{2} \log_2(n) + c_3 \end{aligned}$$

d) wahr

$|P_n| \leq 10^{100}! + 27$  erfüllen nur endl. viele Programme,  
wir haben aber unendl. viele Wörter.

(möglich, da  $\lceil \sqrt{n} \rceil$  eine natürliche Zahl ist)