Aufg 1) (Worked Example 2)

Wir betrachten folgende abgeschwächte Variante des Pumping-Lemmas:

APL: Sei L regulär über dem Alphabet Σ.

Dann $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ konst. s.d. sich jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ als $w = yxz$ zerlegen lässt, s.d.

Unterschied

(i) $|yx| \leq n_0$

(ii) $|x| \geq 1$

(iii) $\{yx^k z \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$

Bmk: Diese Variante erlaubt nicht das Pumpen ausserhalb der Sprache.

Sei $L := \{a^m b^{n!+n} \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{b\}^*$ über $\{a, b\}$.

a) Zz: $L \notin \mathcal{L}_{EA}$ mit dem PL.

b) Zz: L erfüllt die Bedingungen im APL.

Lösung: a) Annahme per Widerspruch: $L \in \mathcal{L}_{EA}$

Sei n_0 die Konst. aus dem PL.

Wir wählen $n \geq n_0$ s.d. $n \neq m! + m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Bmk: $m \mid m! + m$

Wir betrachten $w = ab^n$.

Dann gilt $|w| \geq n_0$ und $w \in L$.

PL $\Rightarrow$ Es ex. eine Zerlegung $w = yxz$, wobei $|yx| \leq n$ und $|x| \geq 1$.

Fallunterscheidung: $\cdot\, y = \lambda$: Dann enthält x das a und $yx^0 z \in \{b\}^* \subseteq L$ $\lightning$ zu iii.

$\cdot\, y \neq \lambda$: Dann gilt: $y = ab^r$, $x = b^s$, $z = b^{n-r-s}$ für $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $r + s \leq n_0$

$\Rightarrow yx^k z = ab^{(k-1)s+n}$

Wir wählen $k = \frac{n!}{s} + 1$. Bmk: $n! \mid s \cdot 1$ da $s \leq n$

$\Rightarrow yx^k z = ab^{n!+n} \in L$ $\lightning$ zu (iii)

$\Rightarrow L \notin \mathcal{L}_{EA}$ $\square$

b) Da wir die Existenz einer Konstante zeigen müssen, können wir n_0 "wählen".

Wir wählen $n_0 = 1$.

Zz: $\forall w \in L$: (i), (ii) & (iii) vom APL.

Sei $w \in L$.

Fallunterscheidung:

- $w \in \{b\}^*$: Dann ist für jede Zerlegung $w = yxz$ auch $yx^kz \in \{b\}^* \subseteq L$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
- w beginnt mit a: $\Rightarrow w = yxz = a^m b^{n!+n}$ für $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
  - $\Rightarrow$ (i) & (ii): $y = \lambda$; $x = a$; $z = a^{m-1} b^{n!+n}$
  - Fall $k \geq 1$: $yx^kz = a^{k-1+m} b^{n!+n} \in L$
  - Fall $k = 0$:
    - Falls $m \geq 2$: $yx^0z = a^{m-1} b^{n!+n} \in L$
    - Falls $m = 1$: $yx^0z = b^{n!+n} \in \{b\}^* \subseteq L$

$\Rightarrow$ Wir haben für jedes nicht-leere Wort $w \in L$ eine Zerlegung gefunden, s.d. beliebig häufiges Pumpen wieder ein Wort in L ergibt.

$\Rightarrow L$ erfüllt APL. $\square$

Aufg 2) wahr/falsch:

Definiere $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n := (101)^{\lceil\sqrt{n}\rceil} \in \{0,1\}^*$.

Entscheide, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

a) $\exists c_1 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$: $K(x_n) \leq \log_2(|x_n|) + c_1$

b) $\exists c_2 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$: $K(x_n) \leq 2 \cdot \log_2(|x_n|) + c_2$

c) $\exists c_3 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \in \mathbb{N}$: $K(x_n) \leq \frac{1}{2}\log_2(n) + c_3$

d) $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geq N$: $K(x_n) > (10)^{100}! + 27$

(möglich, da $\lceil\sqrt{n}\rceil$ eine natürliche Zahl ist)

Lösung: a) wahr

$$K(x_n) \leq \log_2(\sqrt{n}+1) + c$$

· wobei wir $\lceil\sqrt{n}\rceil$ als Zahl eingeben

$$\leq \log_2\left(\frac{|x_n|}{3}\right) + c'$$

($x = \lceil\sqrt{n}\rceil$ nicht $x = \text{ceil}(\text{sqrt}(n))$)

$$\leq \log_2(|x_n|) + c_1$$

· $|x_n| = \lceil\sqrt{n}\rceil \cdot 3 \iff \frac{|x_n|}{3} \cdot \lceil\sqrt{n}\rceil$

b) wahr

$a \Rightarrow b$

c) wahr

$$K(x_n) \leq \log_2(\lceil\sqrt{n}\rceil + 1) + c_3$$
$$\leq \log_2(\sqrt{n}) + c_3$$
$$= \frac{1}{2}\log_2(n) + c_3$$

d) wahr

$|P_n| \leq 10^{100}! + 27$ erfüllen nur endl. viele Programme,

wir haben aber unendl. viele Wörter.