Pivot de Gauss et JavaCC

Christian Rinderknecht

Mardi 25 mars 2003

1 Pivot de Gauss

Un système d'équations affines en nombres entiers, tel que

$$9x + 6y - 12z = 9 \tag{1}$$
$$2x + 3y + 3z = 15 \tag{2}$$
$$5x - 3y + z = 14 \tag{3}$$

peut être écrit sous forme matricielle :

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 9 & 6 & -12 & 9 \\ 2 & 3 & 3 & 15 \\ 5 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right]$$

Le but est de résoudre ce système en nombre entiers. Pour cela on utilise la méthode de Gauss, appelée aussi « pivot de Gauss ». Elle consiste à effectuer des combinaisons linéaires de lignes (c-à-d. d'équations) de façon à ce que le système se ramène à la forme diagonale

$$\left[\begin{array}{ccc|c} b & 0 & 0 & a \\ 0 & d & 0 & c \\ 0 & 0 & f & e \end{array}\right]$$

où $a, ..., f$ sont des entiers. Dans ce cas : $x = a/b$, $y = c/d$, $z = e/f$, où a et b sont premiers entre eux, ainsi que les couples (c, d) et (e, f), et b, d et f sont positifs. Si une ligne ne contient que des zéros, alors le système n'a pas de solution unique (il y a autant d'équations que d'inconnues et au moins une des équations est une combinaison linéaire des autres). Il se peut aussi que le système n'aie pas de solutions.

Plutôt que donner l'algorithme de résolution dans le cas général, illustrons-le sur cet exemple. Notons L_i la i-ème ligne, et $\leftarrow$ l'affectation d'une ligne par une autre. Les coefficients $a_{i,j}$ de la matrice sont caractérisés par la ligne i et la colonne j où ils se trouvent.

On simplifie initialement chaque ligne en divisant tous ses coefficients par le plus grand commun diviseur (PGCD, noté ici $\wedge$). Dans notre exemple, la première ligne a pour PGCD 3, on effectue donc $L_1 \leftarrow L_1/3$. Le système précédent est donc équivalent à :

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 15 \\ 5 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right]$$

Par convention, le PGCD de deux entiers sera toujours un nombre positif.

On opère de gauche à droite sur les colonnes.

Pour la première colonne, on considère alors l'élément diagonal (ici, $a_{1,1} = 3$). Si celui-ci est nul, on peut alors permuter les lignes pour en faire apparaître un non-nul (on note $L_i \leftrightarrow L_j$ la permutation de la ligne i avec la ligne j). Si cela n'est pas possible, le système n'est pas soluble. Ici, il n'y a pas de problème, car $3 \neq 0$. Cet élément est alors appelé *pivot* car la ligne à laquelle il appartient restera inchangée pendant l'étape d'élimination qui suit. Cette dernière consiste à effectuer des combinaisons linéaires, avec pour référence la ligne du pivot, qui vont annuler les coefficients sous le pivot et au-dessus de lui. Pour chacun des coefficients non-nuls sous le pivot, on calcule le plus petit commun multiple (PPCM, noté ici $\vee$) avec le pivot (par convention, le PPCM sera toujours positif). Ainsi, pour la seconde ligne L_2, on a $a_{1,1} \vee a_{2,1} = 3 \vee 2 = 6$. On effectue alors la combinaison linéaire : $L_2 \leftarrow (6/3) \cdot L_1 - (6/2) \cdot L_2$, soit $L_2 \leftarrow 2L_1 - 3L_2$. On effectue une soustraction car les deux coefficients, $a_{1,1}$ et $a_{2,1}$ sont de même signe, sinon une addition aurait dû être effectuée. Pour la ligne suivante on a : $L_3 \leftarrow 5L_1 - 3L_3$. La matrice est donc, à ce stade :

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & -17 & -39 \\ 0 & 19 & -23 & -27 \end{array}\right]$$

On choisit alors de diviser chaque ligne par le PGCD de ses coefficients. Ici, les PGCD valent tous 1, donc il n'y a rien à faire.

Il n'y a pas de coefficients au-dessus du pivot $a_{1,1} = 3$, donc on passe à la colonne suivante (c-à-d. la seconde). On peut choisir $a_{2,2} = -5$ comme pivot car il est non-nul (la seule autre possibilité étant 19). La combinaison pour annuler $a_{3,2}$ est alors : $L_3 \leftarrow 19L_2 + 5L_3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & -17 & -39 \\ 0 & 0 & -438 & -876 \end{array}\right]$$

Il y a ici un coefficient au-dessus du pivot : $a_{1,2} = 2$. On opère de même pour l'annuler : $L_1 \leftarrow 2L_2 + 5L_1$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 15 & 0 & -54 & -63 \\ 0 & -5 & -17 & -39 \\ 0 & 0 & -438 & -876 \end{array}\right]$$

On simplifie maintenant chaque ligne, en les divisant par le PGCD de leur coefficients : $L_1 \leftarrow L_1/3$ et $L_3 \leftarrow L_3/438$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & -18 & -21 \\ 0 & -5 & -17 & -39 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

On recommence ensuite avec la troisième et dernière colonne. Le pivot est nécessairement -1 (donc non nul). Il faut donc simplement faire : $L_1 \leftarrow 18L_3 - L_1$. De même il faut : $L_2 \leftarrow 17L_3 - L_2$. C'est-à-dire :

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -5 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

En simplifiant les deux première lignes ($L_1 \leftarrow L_1/5$ et $L_2 \leftarrow L_2/5$), il vient :

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Finalement, les coefficients diagonaux doivent être positifs : $L_1 \leftarrow -L_1$, $L_2 \leftarrow -L_2$ et $L_3 \leftarrow -L_3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Les solutions sont donc $x = 3$, $y = 1$ et $z = 2$.

2 JavaCC

On veut écrire les systèmes d'équations dans un fichier. Pour cela, on suivra la syntaxe évidente :

```
9 x + 6 y - 12 z =  9
2 x + 3 y +  3 z = 15
5 x - 3 y +    z = 14
```

où les espaces et les sauts de ligne ne sont pas significatifs.
Vous devez :

1. écrire un algorithme qui calcule le PGCD et le PPCM ;
2. écrire l'algorithme du pivot de Gauss dans le cas général ;
3. écrire un lexique et une grammaire JavaCC pour ce type de système ;
4. écrire les actions JavaCC qui implantent l'algorithme du pivot de Gauss, en prenant soin d'afficher toutes les matrices intermédiaires ainsi que les opérations sur les lignes ($\leftarrow$ et $\leftrightarrow$) ;
5. prévoir les cas où il n'y a pas de solutions, ou pas de solution unique ;
6. fournir un jeu de test du programme.