Univerzalni Turingov stroj

Nora Berdalović

25. srpnja 2025.

Definicija 1. Turingov stroj $\mathcal{U}$ je *univerzalan* ako za svaki Turingov stroj $\mathcal{T}$ nad abecedom Σ te ulaznu riječ $w \in \Sigma$, vrijedi $\mathcal{U}(\langle \mathcal{T}, w \rangle) = \mathcal{T}(w)$. $\triangleleft$

Teorem 2. *Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $f(n) \geq n$, za svaki n. Tad za svaki višetračni Turingov odlučitelj koji radi u vremenu $f(n)$ postoji ekvivalentni jednotračni Turingov odlučitelj koji radi u vremenu $\mathcal{O}(f^2(n))$.*

Teorem 3. *Postoji univerzalni Turingov stroj $\mathcal{U}$. Ako je $\mathcal{T}$ polinomno vremenski složen Turingov stroj, $\mathcal{U}$ restringiran na riječi koje počinju s $\langle \mathcal{T} \rangle$ također je polinomno vremenski složen. [1]*

Dokaz. Neka je $\mathcal{T}$ proizvoljni Turingov stroj nad Σ i $w \in \Sigma$. Označimo duljinu koda od $\mathcal{T}$ s $p = |\langle \mathcal{T} \rangle|$, duljinu ulazne riječi w s n te broj koraka u $\mathcal{T}$-izračunavanju s w sa s. Ako pretpostavimo $\mathscr{L}(\mathcal{T}) \in P$, s je polinoman s obzirom na n. Konstruiramo Turingov stroj $\mathcal{U}$ koji za ulaz prima $\langle \mathcal{T}, w \rangle$ i simulira rad $\mathcal{T}$ nad w.

$\mathcal{U}$ će, osim ulazne, imati tri dodatne trake. Na prvoj će se nalaziti popis prijelaza od $\mathcal{T}$, a na drugoj će biti trenutno stanje od $\mathcal{T}$ (koje će na početku odgovarati početnom stanju $\mathcal{T}$). Zapis jednog prijelaza je oblika $q_1\alpha_1q_2\alpha_2r$, pri čemu je q_1 trenutno stanje u kojem se čita znak α_1, a q_2 stanje u koje prelazi, zapisujući znak α_2 i pomičući glavu za r. Treća traka će služiti za simulaciju rada $\mathcal{T}$. Na početku će na nju biti zapisana ulazna riječ w. U slučaju da je $\mathcal{T}$ višetračni stroj, prema teoremu 2 ga možemo transformirati u jednotračni uz kvadratno povećanje složenosti, kako bi mogli simulirati njegov rad na jednoj traci. $\mathcal{T}$-izračunavanje će tada imati $s' \in \mathcal{O}(s^2)$ koraka, što je i dalje polinomno.

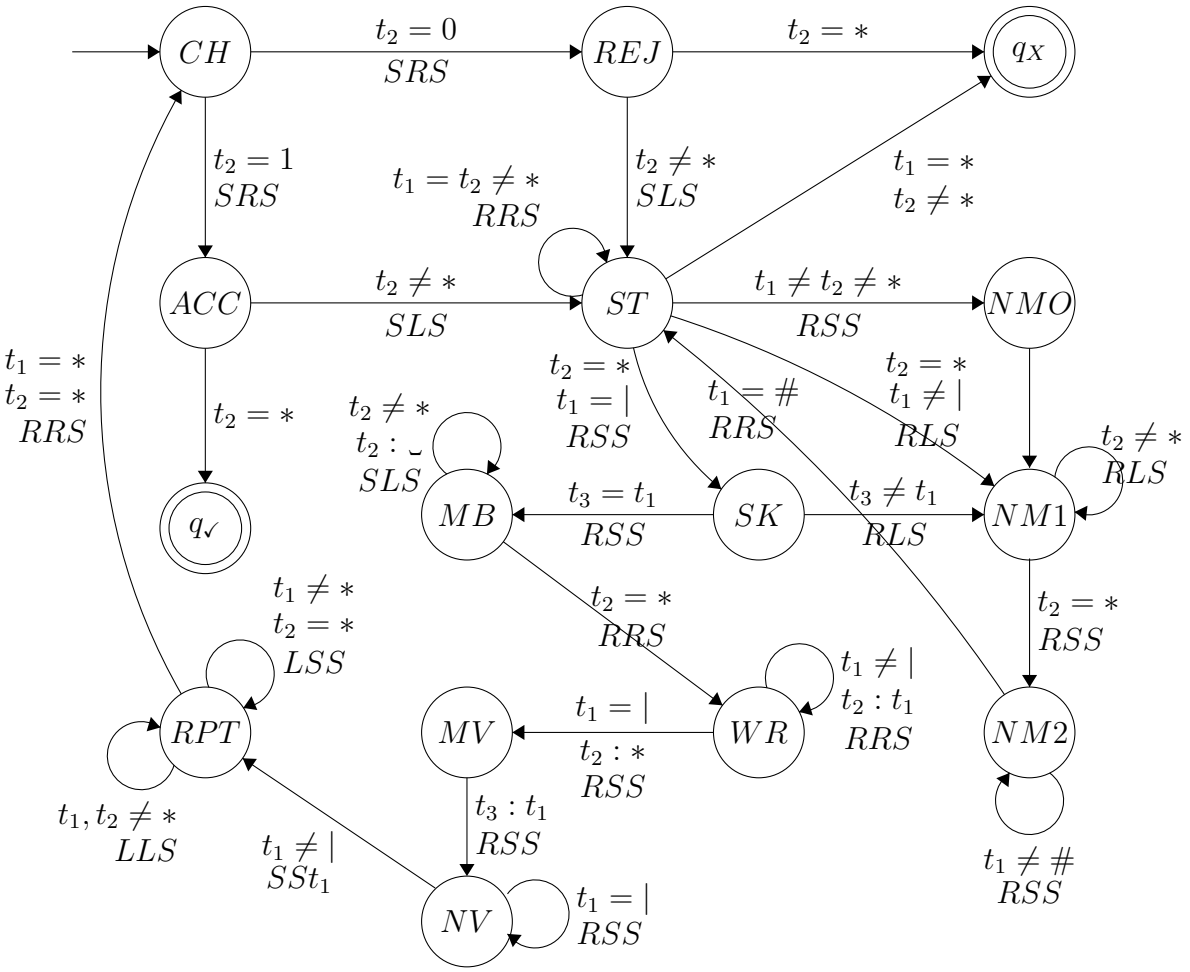
Za simulaciju jednog koraka $\mathcal{T}, \mathcal{U}$ provodi sljedeći postupak. Prvo provjerava odgovara li trenutno stanje zapisano na drugoj traci jednom od završnih stanja $\mathcal{T}$. Ako odgovara $q_\checkmark$, riječ se prihvaća, a za q_X riječ se odbija. Ako trenutno stanje nije završno, ono se traži među prijelazima zapisanim na prvoj traci, kao stanje dano na početku nekog prijelaza. U slučaju da stanje nije pronađeno, riječ se odbija — ne postoji prijelaz kojim se iz trenutnog stanja može doći do $q_\checkmark$. Ako jest, $\mathcal{U}$ provjerava odgovara li znak koji se čita iz prijelaza znaku na trećoj traci na kojem se nalazi glava stroja. Ako znakovi nisu jednaki, stroj nastavlja pretragu prve trake za valjanim prijelazom. Inače se obavlja dani prijelaz: stroj briše drugu traku te na nju zapisuje novo stanje, zapisuje novi znak na

treću traku te pomiče glavu na trećoj traci lijevo ili desno, po pravilu prijelaza. Nakon toga ponovno ulazi u petlju i simulira idući korak.

Vidimo da se $\mathcal{U}$, prateći prijelaze od $\mathcal{T}$, može naći u stanju $q_\checkmark$ ako i samo ako se u njemu nađe $\mathcal{T}$. Dakle, $\mathcal{U}$ prihvaća riječ ako i samo ako ju prihvaća $\mathcal{T}$.

Rad $\mathcal{U}$ formalno je zadan donjim dijagramom, izrađenim uz pomoć [2]. Pretpostavlja se da je početna priprema stroja obavljena te su pomoćne trake t_1, t_2, t_3 odgovarajuće popunjene. Pritom je na početak i kraj zapisa na prvoj i drugoj traci dodano $*$, dok je između prijelaza na prvoj traci umjesto dvostrukog separatora $||$ zapisano $|\#$, radi lakše navigacije po trakama. Primjer izgleda traka te rada $\mathcal{U}$ može se vidjeti u 4.

Znak koji se čita na određenoj traci na dijagramu je obilježen oznakom same trake, primjerice $t_2 = 0$ znači da je 0 znak na koji pokazuje glava na drugoj traci. Pomaci glava troje traka su označeni troslovima oblika SRL, gdje su S, R i L redom stajanje na mjestu te pomak desno odnosno lijevo. Sa SSt_1 označen je pomak na trećoj traci onako kako nalaže znak koji se čita s prve trake. Pisanje po traci naznačeno je s npr. $t_2 : t_1$ (zapiši na drugu traku znak koji se čita s prve). Prihvaćajuće stanje $q_\checkmark$ kodirano je s 1, a odbijajuće q_X s 0.



Pogledajmo vremensku složenost stroja $\mathcal{U}$. Za početnu pripremu stroja potrebno je

isčitati prijelaze i početno stanje $\mathcal{T}$ te riječ w iz ulaza $\langle \mathcal{T}, w \rangle$ i zapisati ih na odgovarajuće pomoćne trake. Za to je dovoljan jedan prolaz po ulaznoj traci, što je (zbog dvostrukog separatora između $\langle \mathcal{T} \rangle$ i $\langle w \rangle$) $p + 2 + n + 1$ koraka.

Prilikom simulacije jednog koraka $\mathcal{T}$, za provjeru je li trenutno stanje završno potrebno je 2 koraka (čitanje s druge trake). Nakon toga, pretražuje se prva traka, gdje zapisani prijelazi zauzimaju manje od $p = |\langle \mathcal{T} \rangle|$ ćelija. Svaki put kad se nađe trenutno stanje kao početno u nekom prijelazu, obavlja se usporedba znaka za čitanje iz prijelaza i znaka na trećoj traci, u jednom koraku. Za prolaz prvom trakom potrebno je najviše p koraka, te se obavlja maksimalno p usporedbi, pa je potreban broj koraka najviše $2p$.

Ako je nađen odgovarajući prijelaz, za brisanje trenutnog stanja s treće trake potrebno je manje od p koraka (budući da je to stanje dio koda $\langle \mathcal{T} \rangle$ duljine p), te opet manje od p koraka za zapisivanje novog stanja. Za pisanje znaka na treću traku i pomak glave potrebno je 2 koraka. Nakon toga, prva i druga traka se „premotavaju" na početak, za što je potrebno najviše p pomaka obje glave.

Sveukupno, za simulaciju jednog koraka $\mathcal{T}$ potrebno je $2 + 2p + p + p + 2 + p = 5p + 4$ koraka, što je u $\mathcal{O}(p)$. Kao što smo rekli, za početnu pripremu $\mathcal{U}$ treba $p + n + 3$ koraka. Budući da $\mathcal{T}$ radi u s' koraka, a n je duljina njegove ulazne riječi w, vrijedi $p + n + 3 \leq p + s' + 3$. Dakle, složenost $\mathcal{U}$ je $(p + s' + 3) + s' \cdot \mathcal{O}(p) \leq (s' + \mathcal{O}(p)) + s' \cdot \mathcal{O}(p) \leq (2s' + 1) \cdot \mathcal{O}(p)$. Ako restringiramo rad $\mathcal{U}$ na riječi koje počinju s $\langle \mathcal{T} \rangle$, p je kao duljina tog koda fiksan — dakle, broj koraka $\mathcal{U}$ je proporcionalan s', pa je $\mathcal{L}(\mathcal{U}|_{\mathcal{T}}) \in P$.

□

Primjer 4. Pogledajmo kako $\mathcal{U}$ simulira jednostavni Turingov stroj $\mathcal{T}$ koji odlučuje jezik 0^* nad abecedom $\Sigma = \{0, 1\}$. Skup stanja $\mathcal{T}$ je $Q = \{q_X, q_\checkmark, q_0\}$, a stanjima su redom pridruženi kodovi $0, 1$ i 10. Početno stanje je q_0. Funkcija prijelaza je $\delta = \{(q_0, 0, q_0, 0, R), (q_0, \text{␣}, q_\checkmark, \text{␣}, R), (q_0, 1, q_X, 1, R)\}$, pri čemu je ␣ prazan znak. U tablici je prikazan tijek rada $\mathcal{U}$ za $\mathcal{T}$ s ulaznom riječju $w = 00$. Položaj glave na svakoj traci naznačen je podcrtanim znakom.

Literatura

[1] Peter Gács i László Lovász. *Complexity of Algorithms*. 1999.

[2] Evan Wallace. *Finite State Machine Designer*. 2010. URL: https://madebyevan.com/fsm/.

trenutno stanje	prva traka	druga traka	treća traka
CH	$*\underline{1}0\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*\underline{1}0*$	$\underline{0}0$
ACC	$*\underline{1}0\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*1\underline{0}*$	$\underline{0}0$
ST	$*\underline{1}0\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*\underline{1}0*$	$\underline{0}0$
ST	$*1\underline{0}\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*1\underline{0}*$	$\underline{0}0$
ST	$*10\|\underline{0}\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*10\underline{*}$	$\underline{0}0$
SK	$*10\|\underline{0}\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*10\underline{*}$	$\underline{0}0$
MB	$*10\|0\|\underline{1}0\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*10\underline{*}$	$\underline{0}0$
MB	$*10\|0\|\underline{1}0\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$\underline{*}$	$\underline{0}0$
WR	$*10\|0\|\underline{1}0\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*\underline{\sqcup}$	$\underline{0}0$
WR	$*10\|0\|1\underline{0}\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*1\underline{\sqcup}$	$\underline{0}0$
WR	$*10\|0\|10\|\underline{0}\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*10\underline{\sqcup}$	$\underline{0}0$
MV	$*10\|0\|10\|\underline{0}\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*10\underline{*}$	$\underline{0}0$
NV	$*10\|0\|10\|0\|\underline{1}\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*1\underline{0}*$	$\underline{0}0$
NV	$*10\|0\|10\|0\|\underline{1}\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*1\underline{0}*$	$\underline{0}0$
RPT	$*10\|0\|10\|0\|\underline{1}\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*1\underline{0}*$	$0\underline{0}$
... vraćanje glava na početak t_1 i t_2 ...			
CH	$*\underline{1}0\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*\underline{1}0*$	$0\underline{0}$
... analogni postupak ...			
CH	$*\underline{1}0\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*\underline{1}0*$	$00\underline{\sqcup}$
ACC	$*\underline{1}0\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*1\underline{0}*$	$00\underline{\sqcup}$
ST	$*\underline{1}0\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*\underline{1}0*$	$00\underline{\sqcup}$
ST	$*1\underline{0}\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*1\underline{0}*$	$00\underline{\sqcup}$
ST	$*10\|\underline{0}\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*10\underline{*}$	$00\underline{\sqcup}$
SK	$*10\|\underline{0}\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*10\underline{*}$	$00\underline{\sqcup}$
$NM1$	$*10\|0\|\underline{1}0\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*1\underline{0}*$	$00\underline{\sqcup}$
$NM1$	$*10\|0\|\underline{1}0\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*\underline{1}0*$	$00\underline{\sqcup}$
$NM1$	$*10\|0\|1\underline{0}\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$\underline{*}10*$	$00\underline{\sqcup}$
$NM2$	$*10\|0\|1\underline{0}\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$\underline{*}10*$	$00\underline{\sqcup}$
... pomak glave do idućeg prijelaza na t_1 ...			
ST	$*10\|0\|10\|0\|1\|\#\underline{1}0\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*\underline{1}0*$	$00\underline{\sqcup}$
... analogni postupak ...			
CH	$*\underline{1}0\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*\underline{1}*$	$00\underline{\sqcup}\underline{\sqcup}$
ACC	$*\underline{1}0\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*1\underline{*}$	$00\underline{\sqcup}\underline{\sqcup}$
$q_{\checkmark}$	$*\underline{1}0\|0\|10\|0\|1\|\#10\|\underline{\sqcup}\|1\|\underline{\sqcup}\|1\|\#10\|1\|0\|1\|1*$	$*1\underline{*}$	$00\underline{\sqcup}\underline{\sqcup}$