MATERI POLA BILANGAN

SEKOLAH MENENGAH PERTAMA (SMP)

KELAS VIII

Dosen Pengampu : Junaidi, S.Pd , M.Pd

Disusun Oleh:

Kelas : VE

Rini Rahmawati (E1R022087)

PROGRAM STUDI S1 PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

UNIVERSITAS MATARAM

2024

A. POLA BILANGAN

Perhatikan deretan bilangan-bilangan berikut:

1. 1,2,3, ...
2. 4,9,16, ...
3. 31,40,21,30,16, ...

Deretan bilangan di atas mempunyai pola tertentu. Dapatkah anda menentukan bilangan yang belum diketahui sesuai dengan aturan yang dipunyai?

Mari lihat pembahasan penyelesaian dari contoh diatas:

1. Pola pertama mempunyai aturan:

   Bilangan ke 2 = $1 + 1 = 2$

   Bilangan ke 3 = $Bilangan\ ke\ dua + 1 = 2 + 1 = 3$

   Jadi bilangan ke 4 $= Bilangan\ ke\ tiga + 1 = 3 + 1 = 4$

2. Pola ke-dua mempunyai aturan:

   Bilangan ke 1 = $(1 + 1)^2 = 2^2 = 4$

   Bilangan ke 2 = $(2 + 1)^2 = 3^2 = 9$

   Bilangan ke 3 = $(3 + 1)^2 = 4^2 = 16$

   Jadi bilangan ke 4 $(4 + 1)^2 = 5^2 = 25$

3. Pola ke-3 mempunyai aturan:

   Bilangan ke 3 = $Bilangan\ pertama - 10 = 31 - 10 = 21$

   Bilangan ke 4 = $Bilangan\ ke\ dua - 10 = 40 - 10 = 30$

   Bilangan ke 5 = $Bilangan\ ke\ tiga - 5 = 21 - 5 = 16$

   Jadi bilangan ke 6 = $Bilangan\ ke\ empat - 5 = 30 - 5 = 25$

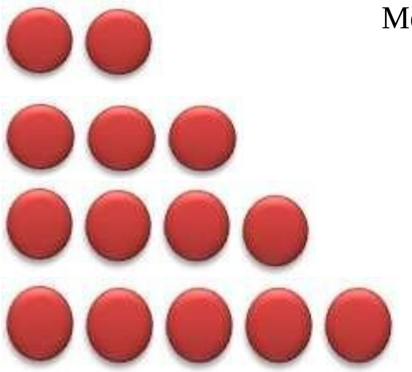
Aturan yang dimiliki oleh deretan bilangan di atas disebut pola bilangan pada deretan itu.

Pola dapat diartikan sebagai sebuah susunan yang mempunyai bentuk teratur dari bentuk yang satu ke bentuk berikutnya. Sedangkan bilangan adalah sesuatu yang digunakan untuk menunjukkan kuantitas (banyak, sedikit) dan ukuran (berat, ringan, panjang, pendek, luas) suatu objek. Bilangan ditunjukkan dengan suatu tanda atau lambang yang disebut angka.Sehingga pola bilangan dapat diartikan sebagai susunan angka-angka yang mempunyai bentuk teratur dari bentuk yang satu ke bentuk berikutnya.

1. MACAM-MACAM POLA BILANGAN

a. Pola Garis Lurus

Penulisan bilangan yang mengikuti pola garis lurus merupakan pola bilangan yang paling sederhana. Suatu bilangan hanya digambarkan dengan noktah yang mengikuti pola garis lurus. Misalnya:



Mewakili 2

Mewakili 3

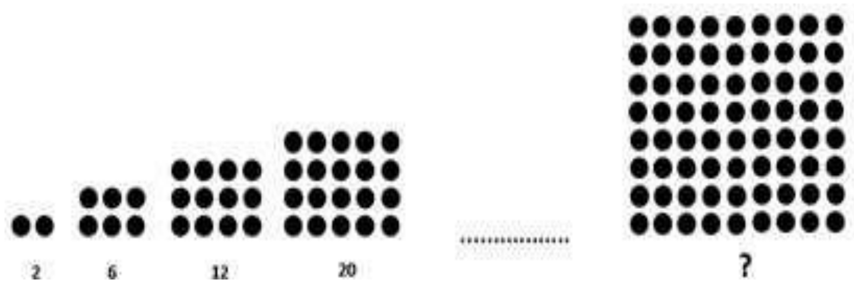
Mewakili 4

Mewakili 5

b. Pola Persegi panjang

Pada umumnya, penulisan bilangan yang didasarkan pada pola persegi panjang hanya digunakan oleh bilangan bukan prima. Pada pola ini, noktah-noktah disusun menyerupai bentuk persegi panjang. Pola bilangan persegi panjang adalah 2, 6, 12, 20, 30, ...

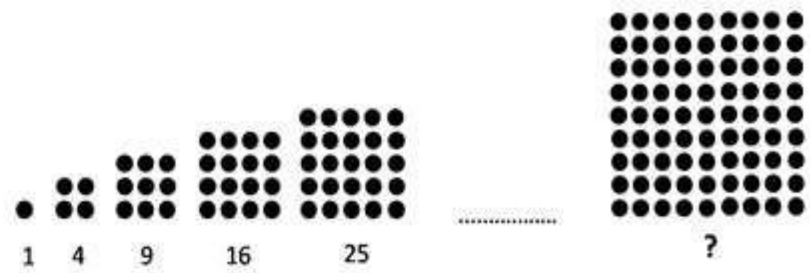
Gambar pola bilangan persegi panjang adalah sebagai berikut:



c. Pola Persegi

Persegi merupakan bangun datar yang semua sisinya memiliki ukuran yang sama panjang. Begitu pula dengan penulisan pola bilangan yang mengikuti pola persegi. Pola bilangan persegi adalah 1,4,8,16,25, ... Pada pola ini, semua noktah digambarkan dengan jumlah yang sama.

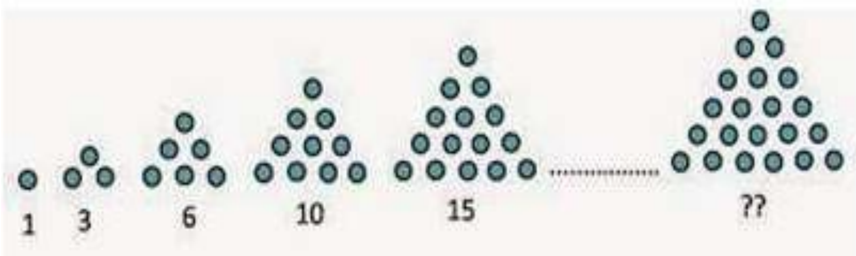
Gambar pola bilangan persegi adalah sebagai berikut:



d. Pola Segitiga

Selain mengikuti pola persegi panjang dan persegi, bilangan pun dapat digambarkan melalui noktah yang mengikuti pola segitiga. Untuk lebih jelasnya, coba kamu perhatikan lima bilangan yang mengikuti pola segitiga berikut ini. Jadi, bilangan yang mengikuti pola segitiga dapat dituliskan sebagai berikut : $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \ldots$

Coba kamu perhatikan bilangan yang memiliki pola segitiga. Ternyata, bilangan-bilangan tersebut dibentuk mengikuti pola sebagai berikut:



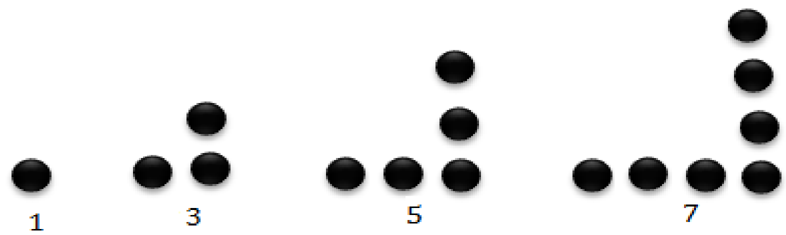
e. Pola Bilangan Ganjil

Pola bilangan ganjil memiliki aturan sebagai berikut.

a. Bilangan 1 sebagai bilangan awal.
b. Bilangan selanjutnya memiliki selisih 2 dengan bilangan sebelumnya.

Bilangan ganjil memiliki pola $1, 3, 5, 7, 9 \; \ldots .$

Perhatikan pola bilangan ganjil berikut ini.



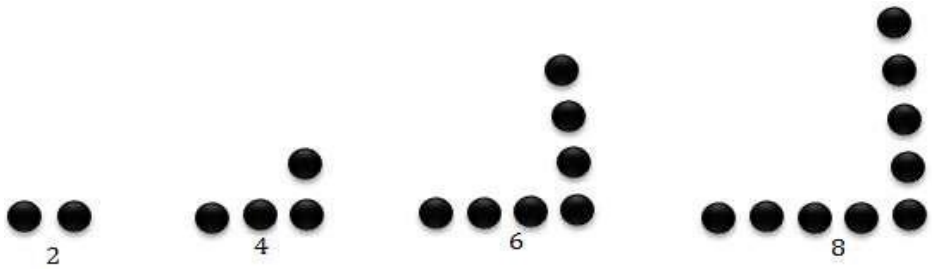
f. Pola Bilangan Genap

Pola bilangan genap memiliki aturan sebagai berikut.

a. Bilangan 2 sebagai bilangan awal.
b. Bilangan selanjutnya memiliki selisih 2 dengan bilangan sebelumnya.

Bilangan ganjil memiliki pola 2, 4, 6, 8, ...

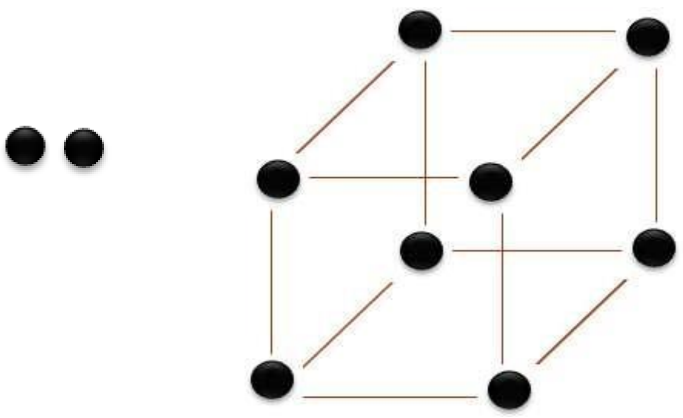
Perhatikan pola bilangan genap berikut ini.



g. Pola Bilangan Kubus

Pola kubus terbentuk dari bilangan kubik. Pola bilangan kubus adalah pola bilangan dimana bilangan setelahnya merupakan hasil dari pangkat tiga dari bilangan sebelumnya. Contoh pola bilangan pangkat tiga adalah 2, 8, 512, ….

Perhatikan pola kubus berikut ini:



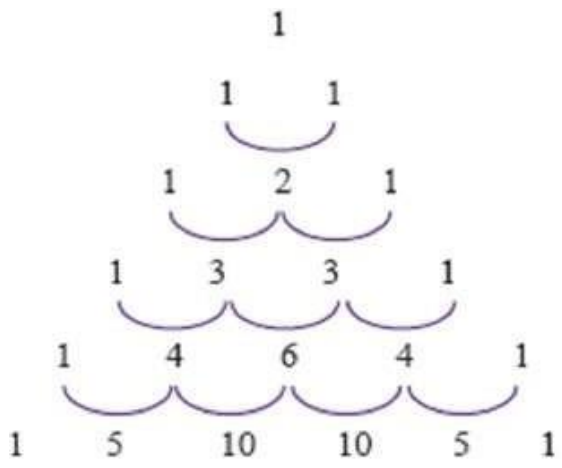
h. Pola Bilangan Segitiga Pascal

Bilangan-bilangan yang disusun menggunakan pola segitiga Pascal memiliki pola yang unik. Hal ini disebabkan karena bilangan yangberpola segitiga Pascal selalu diawali dan diakhiri oleh angka 1. Selain itu, di dalam susunannya selalu ada angka yang diulang.

Adapun aturan-aturan untuk membuat pola segitiga Pascal adalah sebagai berikut:

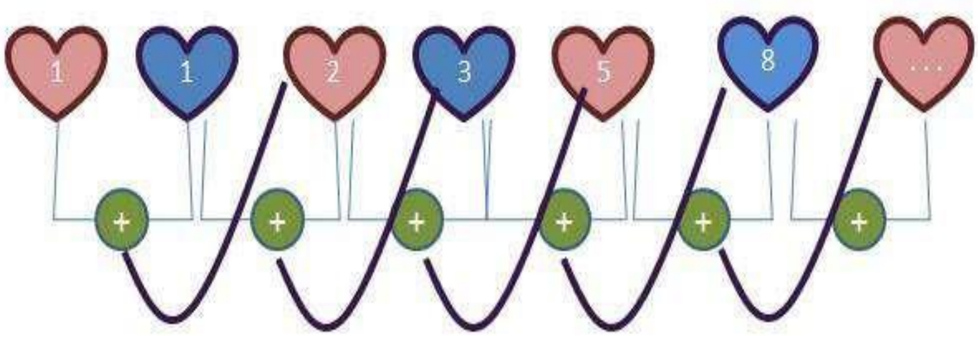
a. Angka 1 merupakan angka awal yang terdapat di puncak.
b. Simpan dua bilangan di bawahnya. Oleh karena angka awal dan akhir selalu angka 1, kedua bilangan tersebut adalah 1.
c. Selanjutnya, jumlahkan bilangan yang berdampingan. Kemudian, simpan hasilnya di bagian tengah bawah kedua bilangan tersebut.
d. Proses ini dilakukan terus sampai batas susunan bilangan yang diminta.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan pola segitiga Pascal berikut.



i. Pola Bilangan Fibonacci

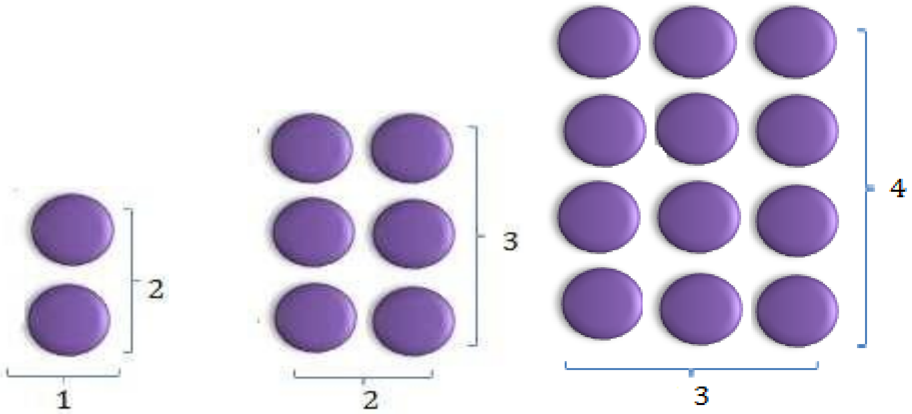
Pola bilangan fibanocci adalah pola bilangan dimana jumlah bilangan setelahnya merupakan hasil dari penjumlahan dari dua bilangan sebelumnya.Pola bilangan Fibonacci adalah $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots.$



2. MEMAHAMI POLA BILANGAN

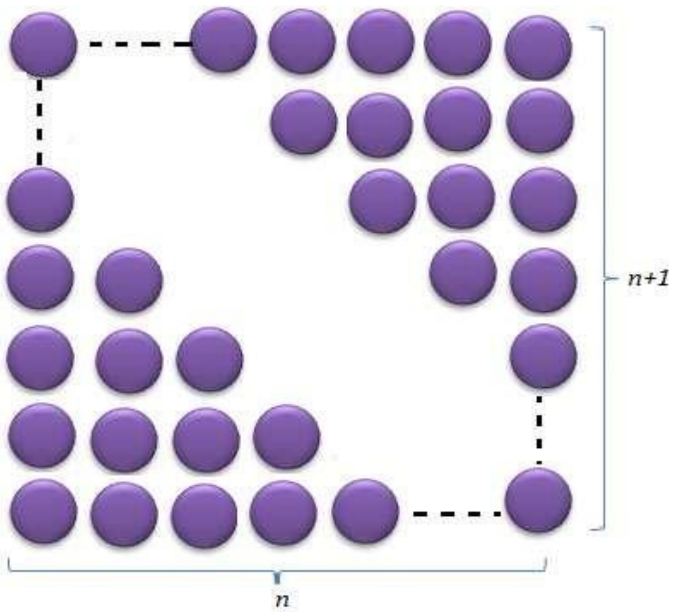
a. Pola Bilangan Persegi Panjang

Pola bilangan persegi panjang adalah $2, 6, 12, 20, 30, \ldots$ Untuk melihat banyaknya pola susunan ke-$n(Un)$ mari amati ilustrasi berikut:



Pola ke-1	Pola ke-2	Pola ke-3
$2 = 1 \times 2$	$6 = 2 \times 3$	$12 = 3 \times 4$

Dengan memperhatikan pola diatas, dapat disimpulkan bahwa pola ke-$n(Un)$ adalah:

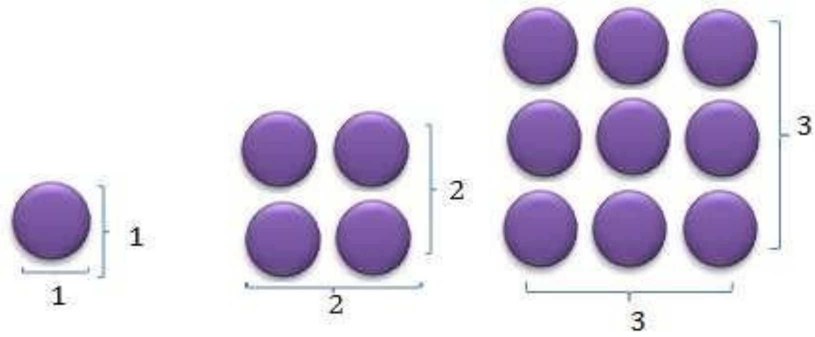


Pola di atas disebut pola persegi panjang, dengan pola ke-n

$U_n = n \times (n + 1)$ atau $U_n = n(n + 1)$.

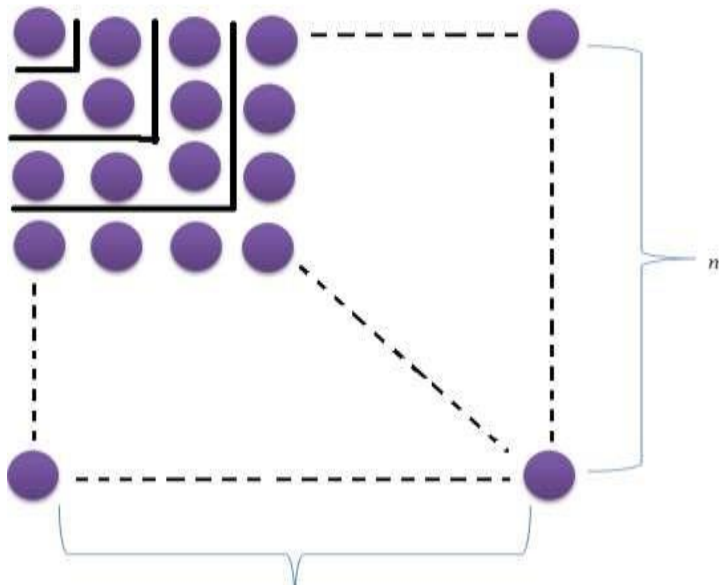
b. Pola Bilangan Persegi

Pola bilangan persegi adalah 1,4,9,16,25, ... Untuk melihat banyaknya pola susunan ke-n (Un) mari amati ilustrasi berikut:



Pola ke-1	Pola ke- 2	Pola ke-3
$1 = 1 \times 1$	$4 = 2 \times 2$	$9 = 3 \times 3$

Dengan memperhatikan pola diatas, dapat disimpulkan bahwa pola ke-n (Un) adalah:



Pola diatas dinamakan pola persegi, dengan polake-n yaitu:

$$U_n = n \times n = n^2.$$

Contoh:

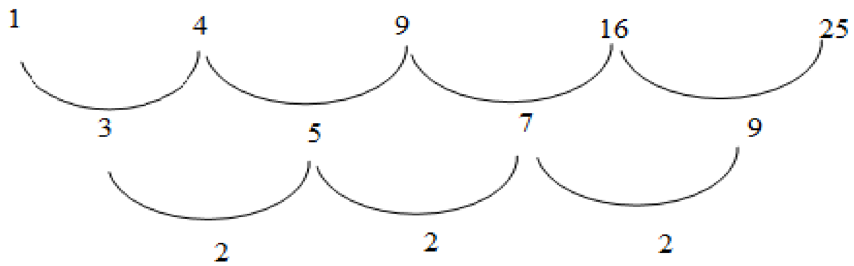
Tentukan hasil penjumlahan pola bilangan persegi hingga pola ke-n !

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = ?$$

Penyelesaian:

Sebelum menentukan pola bilangan persegi hingga pola ke-n, kita akan melihat empat pola awal dari penjumlahan pola bilangan persegiS_n. S_n bermakna sebagai jumlah hingga pola ke-n, dengan n adalah suatu bilangan bulat positif. Pola bilangan persegi di atas juga dapat digambarkan sebagai berikut:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$



Selisih dari pola bilanga pertama sampai pola ke-lima adalah 3,5,7, dan 9.

Pola akan digambar dengan 3 noktah, karena selisih pertama dari jumlah (S_1) dan (S_2) adalah 3. Pola ini juga akan digambarkan dengan 3 warna yang berbeda dengan tujuan untuk menarik perhatian siswa, yang dalam hal ini adalah siswa SMP.

1. Jumlah pola bilangan persegi pertama (S_1) yaitu:

   $S_1 = 1 = 1^2$

   S_1 merupakan jumlah S_n pertama dari pola persegi.

$3 = 2 \times 1 + 1$ Angka tersebut diperoleh dari dua gambar noktah dengan warna yang berbeda yaitu hijau dan merah yang berjumlah 1 ditambahkan dengan gambar noktah berwarna kuning yang berjumlah 1.

Sehingga akan diperoleh:

$3 \times 1 = 1 \times 3$

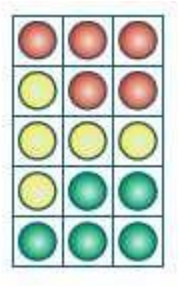
$3 \times S_1 = (1) \times (2 \times 1 + 1)$

$3 \times S_1 = (\frac{1}{2} \times 1 \times 2) \times (2 \times 1 + 1)$

3×1 merupakan $3 \times S_1$
$3 = 2 \times 1 + 1$
$1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2$ dengan pola segitiga.

2. Jumlah pola bilangan persegi kedua (S_2) yaitu:

$S_2 = 5 = 1^2 + 2^2$ dimana S_2 merupakan jumlah S_n kedua dari pola.



$5 = 2 \times 2 + 1$ Angka tersebut diperoleh dari 2 gambar noktah dengan warna berbeda yaitu hijau dan merah yang berjumlah 2 ditambahkan dengan gambar noktah berwarna kuning yang berjumlah 1.

Sehingga diperoleh:

$3 \times 5 = 3 \times 5$

$3 \times S_2 = (1 + 2) \times (2 \times 2 + 1)$

$3 \times S_2 = (3) \times (2 \times 2 + 1)$

$3 \times S_2 = (\frac{1}{2} \times 2 \times 3) \times (2 \times 1 + 1)$

3×5 merupakan $3 \times S_2$

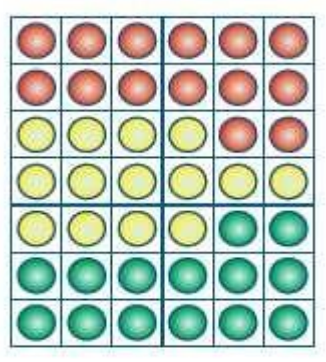
$3 = 1 + 2$ dari $5 = 1^2 + 2^2$ tanpa dipangkatkan.

$3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3$ dengan pola segitiga.

3. Jumlah pola bilangan persegi ketiga (S_3) yaitu:

$S_3 = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$

S_3 merupakan jumlah S_n ketiga dari pola persegi.



$7 = 2 \times 3 + 1$ Angka tersebut diperoleh dari 2 gambar noktah dengan warna yang berbeda yaitu warna hijau dan warna merah yang masing-masing berjumlah 3 ditambahkan dengan gambar noktah berwarna kuning yang berjumlah 1.

Sehingga diperoleh:

$3 \times 14 = 6 \times 7$

$3 \times S_3 = (1 + 2 + 3) \times (2 \times 3 + 1)$

$3 \times S_3 = (6) \times (2 \times 3 + 1)$

$3 \times S_3 = (\frac{1}{2} \times 3 \times 4) \times (2 \times 3 + 1)$

$3 \times 14 = 6 \times 7$ ekuivalen

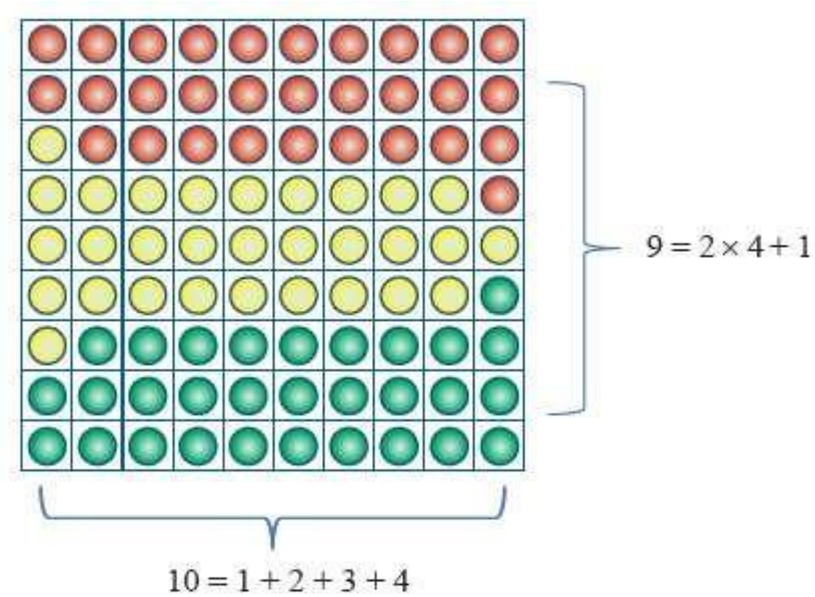
$7 = 2 \times 3 + 1$

$6 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$ dalam pola segitiga.

4. Jumlah pola bilangan persegi keempat (S_4) yaitu:

$S_4 = 30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

S_4 merupakan jumlah S_n keempat dari pola persegi.



$9 = 2 \times 4 + 1$ Angka tersebut diperoleh dari 2 gambar noktah dengan warna yang berbeda yaitu warna hijau dan warna merah yang masing-masing berjumlah 4 ditambahkan dengan gambar noktah berwarna kuning yang berjumlah 1.

$10 = 1 + 2 + 3 + 4$ merupakan jumlah dari pola bilangan persegi tanpa dipangkatkan. Dari $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ menjadi $1 + 2 + 3 + 4$

Sehingga diperoleh:

$3 \times 30 = 10 \times 9$

$3 \times S_4 = (1 + 2 + 3 + 4) \times (2 \times 4 + 1)$

$3 \times S_4 = (10) \times (2 \times 4 + 1)$

$3 \times S_4 = (\frac{1}{2} \times 4 \times 5) \times (2 \times 4 + 1)$

$3 \times 30 = 10 \times 9$ ekuivalen

$9 = 2 \times 4 + 1$

$10 = 1 + 2 + 3 + 4$

$10 = \frac{1}{2} \times 4 \times 5$ merupakan pola segitiga.

Mari amati ke-empat pola yang sudah ditemukan:

$$3 \times S_1 = (\frac{1}{2} \times 1 \times 2) \times (2 \times 1 + 1)$$

$$3 \times S_2 = (\frac{1}{2} \times 2 \times 3) \times (2 \times 1 + 1)$$

$$3 \times S_3 = (\frac{1}{2} \times 3 \times 4) \times (2 \times 3 + 1)$$

$$3 \times S_4 = (\frac{1}{2} \times 4 \times 5) \times (2 \times 4 + 1)$$

Dari empat pola diatas, kita bisa menggeneralisasi sebagai berikut:

$$3 \times S_n = (\frac{1}{2} \times n \times (n + 1) \times (2 \times n + 1)$$

$$3 \times S_2 = \frac{1}{2} \times n \times (n + 1) \times (2 \times n + 1)$$

$$S_n = \frac{1}{6} \times n \times (n + 1) \times (2 \times n + 1)$$

$$S_n = \frac{1}{6} \times n(n + 1) \times (2n + 1)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} \times n(n + 1) \times (2n + 1).$$

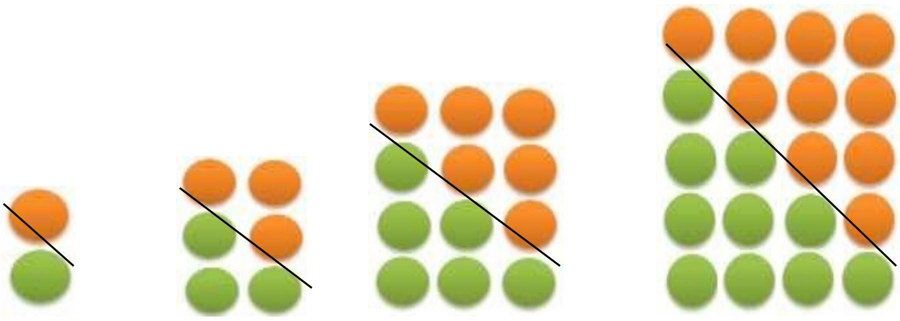
Jadi untuk menentukan jumlah suku ke$-n$ pada pola persegi adalah:

$$S_n = \frac{1}{6} \times n(n + 1) \times (2n + 1)$$

c. Pola Bilangan Segitiga

Pola bilangan segitiga adalah 1,3,6,10, 15,21, ...

Amati pola berikut ini:



Pola ke-1 Pola ke-2 Pola ke-3 Pola ke-4

Jika susunan bola dibawah garis dengan pola ke-n, dengan n adalah suatu bilangan bulat positif, tentukan :

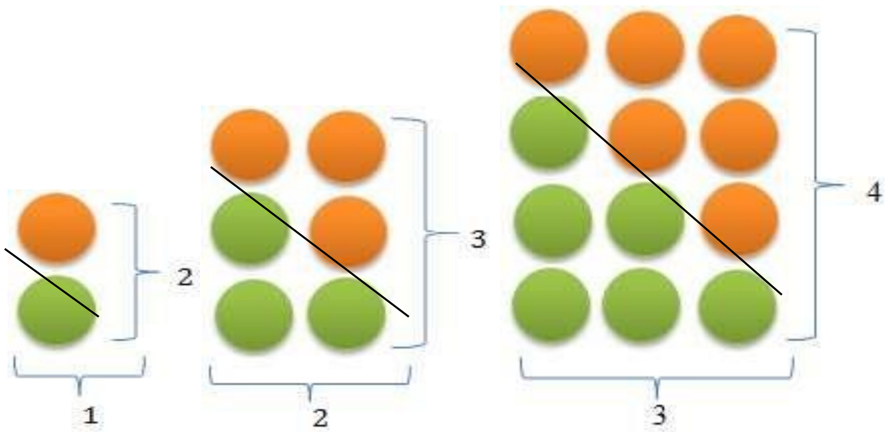
Banyaknya bola dibawah garis pada pola ke-n (Un)

Banyaknya bola dibawah garis pada pola ke-10 (U_{10})

Banyaknya bola dibawah garis pada pola ke-1.000 ($U_{1.000}$)

Untuk melihat banyaknya pola susunan ke-n (Un) mari amati ilustrasi berikut !

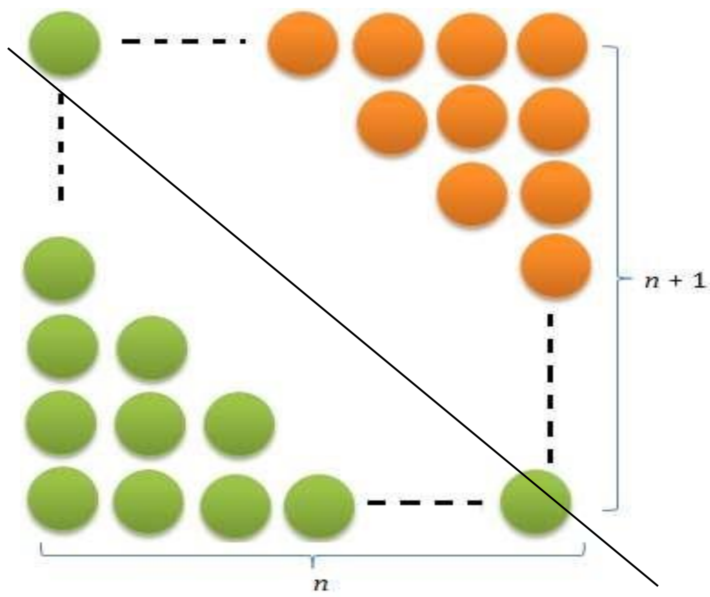
Perhatikan banyaknya lingkaran yang dibawah garis adalah setengah bagian dari bola yang disusun menjadi persegi panjang.



Pola ke-1 Pola ke-2 Pola ke-3

$1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 2$ $3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3$ $6 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4$

Dengan memperhatikan pola susunan diatas, dapat disimpulkan bahwa pola ke-n(Un) adalah:



Pola ke-n yaitu: $U_n = \frac{1}{2} \times n \times (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)$

Dengan menggunakan rumus pola yang sudah ditemukan, maka kita dapat menentukan jawaban dari pertanyaan diatas, yaitu:

Pola ke-10 $(U_{10}) = \frac{1}{2} \times 10 \times (10 + 1)$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 11 = 55$

Pola ke-1.000 $(U_{1.000}) = \frac{1}{2} \times 1.000 \times (1.000 + 1)$

$= \frac{1}{2} \times 1.000 \times 1.001$

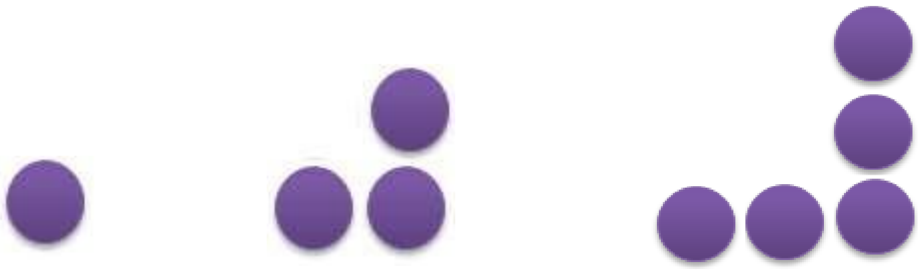
$= 500.500$

Rumus mencari jumlah n suku pada bilangan genap adalah

$$S_n = \frac{1}{6} n(n + 1)(n + 2)$$

d. Pola Bilangan ganjil

Bilangan ganjil memiliki pola 1,3,5,7,9, ...



Pola ke-1 Pola ke-2 Pola ke-3

Dengan memperhatikan pola susunan diatas diketahui:

Pola ke-1 $1 = 2 \times 1 - 1$

Pola ke-2 $3 = 2 \times 2 - 1$

Pola ke-3 $5 = 2 \times 3 - 1$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa Pola ke-n yaitu:

$$U_n = 2 \times n - 1 = 2n - 1.$$

Dengan mengingat kembali pola bilangan persegi diatas, dapat disimpulkan bahwa jumlah suku $n(S_n)$ untuk pola bilangan ganjil adalah sebagai berikut:

$S_1 = 1$

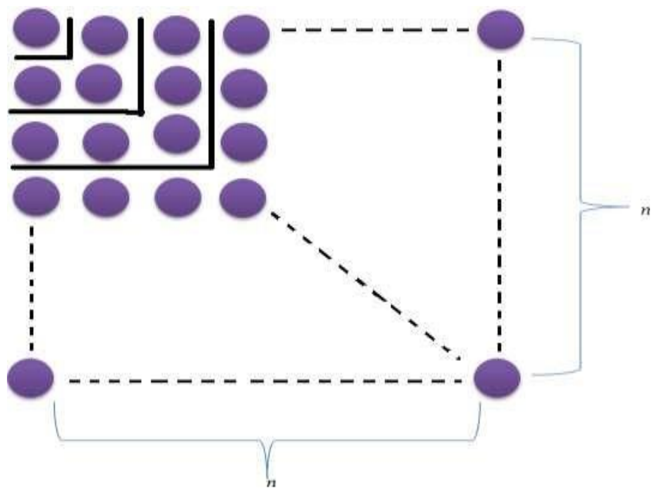
$S_2 = 1 + 3 = 4$

$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$

$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Dan seterusnya.

Sehingga, jika digambarkan dengan pola, akan terlihat seperti berikut ini:

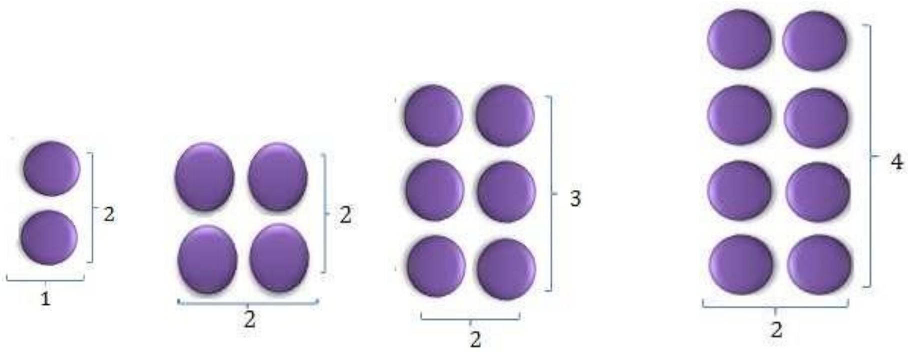


Jadi, rumus mencari jumlah n suku pada pola bilangan ganjil adalah

$S_n = n.n = n^2$.

e. Pola Bilangan genap

Pola bilangan genap adalah2,4,6,8,10,12, ...



Pola ke-1 Pola ke-2 Pola ke-3 Pola ke-4

Dengan memperhatikan pola susunan diatas diketahui:

Pola ke-1= $2 = 2 \times 1$

Pola ke-2= $4 = 2 \times 2$

Pola ke-3= $6 = 2 \times 3$

Pola ke-4= $8 = 2 \times 4$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa Pola ke-n yaitu: $U_n = 2 \times n = 2n$.

f. Pola Bilangan Kubus

Contoh pola bilangan pangkat tiga adalah

Bilangan ke-1= 2

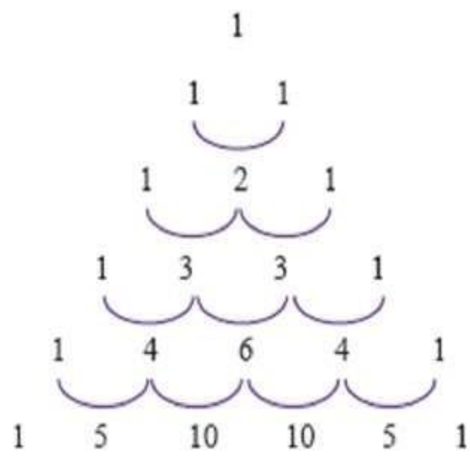
Bilangan ke-2= $2^3 = 8$

Bilangan ke-3= $8^3 = 512$

Pola bilangan ini sering disebut pola pangkat tiga.

Rumus mencari baris ke$-n$ adalah $Un = n^3$

g. Pola Bilangan Segitiga Paskal



$S_1 = 1$ diperoleh dari $S_1 = 1 = 2^0$

$S_2 = 2$ diperoleh dari $S_2 = 1 + 1 = 2 = 2^1$

$S_3 = 4$ diperoleh dari $S_3 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

$S_4 = 8$ diperoleh dari $S_4 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

$S_5 = 16$ diperoleh dari $S_5 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa rumus mencari jumlah suku ke$-n$ adalah

$Sn = 2^{n-1}$.

h. Pola Bilangan Fibonacci

Pola bilangan fibonacci adalah 1,1,2,3,5,8,13,21,34, ...

$U_1 = 0 + 1 = 1$

$U_2 = 1 + 1 = 2$

$U_3 = 1 + 2 = 3$

Rumus mencari suku ke-n pada bilangan fibonancci adalah:

$U_n =$ penjumlahan dua bilangan didepannya

DAFTAR PUSTAKA

Agus, Avianti Niniek. 2008. *Mudah Belajar Matematika Untuk Kelas IX SMP/MTs*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Masduki, Ichwan Budi Utomo. 2008. *Matematika Untuk SMP/MTs Kelas IX*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

_____. 2014. *Matematika Kelas VII SMP/MTs Edisi Revisi 2014*. Jakarta: Kementerian Pendidikan Nsional.

LKS SMP intensi